BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

ABN6065
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B45492
035/2: : |a (CaOTULAS)160035241
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Painvin, |c M. |q (Louis Felix), |d 1826-1875?
245:00: |a Principes de la géométrie analytique. |p Géométrie plane, |c
par L. Painvin.
260: : |a Douai, |b A. Robaut, |c 1866.
300/1: : |a 1 p. L., ii, 863, 3 p. |b diagrs. |c 32 x 25 cm.
590/1: : |a Autographed copy.
650/1: 0: |a Geometry, Analytic |x Plane
998: : |c WFA |s 9124



Géométrie Analytique

GÉOMÉTRIE PLANE

PAR

L. PAINVIN

Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Impérial de Douai,

Docteur ès-Sciences Mathématiques, Agrégé de l'Université;

Membre correspondant de la Sté des Sciences, & Arts de Lille.

1866.

Imp. Alf: Robaut — Douai.

Avertissement.

1 La Géométrie Analytique date de Descartes ; mais comme le dit Mr Chasles, à propos des Porismes d'Euclide (aperçu historique p. 276) « Il n'a manqué à Euclide que l'usage de l'Algèbre pour créer les systèmes des Coordonnées, « qui datent de Descartes » Euclide vivait vers 285 avant J. C.

« Viète (1540 à 1603), après avoir complété la méthode analytique de Platon par l'invention de l'Algèbre ou Logistique « spécieuse, eut encore la gloire d'introduire cet instrument admirable dans la science de l'étendue, par une construction graphique des « équations du 2e et 3e degré, et par la représentation géométrique des résultats de l'Algèbre ; premier pas vers une alliance plus intime entre « l'Algèbre et la Géométrie, qui devait conduire aux grandes découvertes de Descartes (Aperçu historique, p. 52)

« Le plus signalé service rendu à la Géométrie est dû à Descartes. Ce philosophe, par son inappréciable conception de « l'Application de l'Algèbre à la théorie des Courbes, se créa les moyens de franchir les obstacles qui avaient arrêté « les plus grands Géomètres jusqu'alors, et changea la face des Sciences mathématiques (Aperçu historique, p. 94)

« Descartes avait montré l'usage des coordonnées dans la théorie des courbes à double courbure ; il les représentait par les « équations de leurs projections sur deux plans rectangulaires. La Géométrie analytique de l'espace ne se développa que plus d'un demi- « siècle après. C'est Parent, qui représenta, pour la première fois, en 1700, une surface courbe par une équation à trois variables. « Et ce fut Clairaut qui, dans son traité des courbes à double courbure, traité qu'il composa à l'âge de 16 ans, exposa pour « la première fois, d'une manière méthodique, la Théorie des coordonnées dans l'espace (Aperçu historique p. 138).

L'idée des équations tangentielles se trouve exprimée dans l'Aperçu historique, voici ce que nous lisons à la page 256 : « La méthode analytique de Descartes, à laquelle on doit les plus belles découvertes n'est pas applicable, ou du moins présen- « terait des obstacles très grands, si on cherchait à l'appliquer à ce genre de théorèmes qu'on obtient immédiatement, en vertu « du principe de dualité, comme corrélatifs de théorèmes démontrés par cette méthode de Descartes.

Et plus loin, page 257 :

« On conçoit sans peine que, dans la nouvelle Géométrie Analytique, le procédé analogue sera de considérer une courbe comme « l'enveloppe de ses tangentes ; et d'exprimer la position de toutes ces droites par une équation unique entre deux variables, dont « chaque système de valeurs correspondra à l'une de ces droites. »

2. Sous la puissante impulsion des Chasles, Steiner, Poncelet, etc... la Géométrie pure a réalisé des progrès immenses et laissé, bien loin derrière elle, la Géométrie Analytique. Pour regagner le terrain perdu, nous ne devons négliger aucune des ressources de l'Analyse.

Les coordonnées homogènes, indépendamment de la symétrie et de la simplicité qu'elles donnent à certaines formules, permettent d'étudier avec netteté et facilité les points à l'infini sur les courbes et sur les surfaces.

Les coordonnées trilatères conduisent à des démonstrations simples de la plupart des propriétés descriptives.

Enfin, les coordonnées tangentielles complètent les méthodes analytiques, puisqu'elles permettent d'étudier, par le calcul, les propriétés relatives aux tangentes de la même manière qu'on étudie les propriétés relatives aux points

L'importance des coordonnées trilatères et tangentielles résulte de leur signification géométrique ; ces coordonnées ne font, en effet, que traduire les deux grands principes que Mr Chasles a introduits dans la Géométrie pure : la transformation homographique et la transformation corrélative.

La Géométrie Analytique restera donc nécessairement incomplète, et souvent impuissante, si l'on n'y introduit pas ces nouveaux systèmes de coordonnées.

3. Le cours que je publie aujourd'hui est, en grande partie, la reproduction de celui que j'ai fait autographier en 1863 ; il renferme d'abord les matières exigées par nos programmes, mais j'ai donné un peu plus d'extension à l'étude des coordonnées tangentielles.

Les parties relatives aux matières d'examen ont été développées avec les plus grands détails, et les discussions, qui forment toujours la partie délicate de l'analyse, y occupent une large place. J'ai adopté, sans le discuter, l'ordre fixé par nos programmes.

Les parties complémentaires, qui traitent des coordonnées trilatères et des coordonnées tangentielles, ont été présentées avec moins de détails; les discussions sont souvent supprimées; mais cependant toutes les formules principales ont été signalées et démontrées. C'est qu'en effet ces parties complémentaires sont principalement destinées à des élèves de seconde année, qui peuvent plus facilement suppléer à l'absence des détails. Ces questions seront un aliment nouveau à leur curiosité; et, tout en restant dans le cadre des matières qui constituent les examens, ils pourront, par cette étude, acquérir plus de ressources pour l'attaque et la résolution des problèmes, et élargir, en même temps, le champ de leurs idées sur la Géométrie.

J'ai pensé qu'il n'était pas bon de séparer complètement des matières ordinaires du programme l'étude des coordonnées trilatères et tangentielles, et de la rejeter à la fin du cours; j'ai donc toujours fait marcher de front l'exposition et les applications de ces divers systèmes de coordonnées. De cette manière, l'ouvrage conserve plus d'unité, et l'on se rend mieux compte de l'appui mutuel que doivent se prêter ces procédés différents. Mais, j'ai distingué par une marque particulière les parties complémentaires; il sera alors facile, dans une première étude, de les supprimer et de se borner aux matières du programme.

4. L'étude des coordonnées tangentielles n'a encore été présentée systématiquement dans aucun de nos ouvrages français; la Géométrie Analytique de M. M. Briot & Bouquet n'en renferme guère que la définition; le traité de M. Salmon (treatise on the higher plane curves) contient au commencement des notions un peu plus étendues, mais elles sont encore trop incomplètes pour que les élèves puissent se familiariser avec l'emploi des coordonnées tangentielles. La Géométrie analytique à trois dimensions de M.r Hesse est, je crois, le seul ouvrage dans lequel on ait fait un usage systématique de ces coordonnées, mais la méthode adoptée par M.r Hesse, méthode d'ailleurs fort élégante diffère trop de la marche que nous suivons dans l'enseignement de la Géométrie analytique, j'ai dû, pour ce motif, abandonner la voie que nous avait tracée ce célèbre géomètre.

J'ai donc pris comme point de départ les coordonnées ordinaires ou coordonnées Cartésiennes. Après avoir développé complètement ce premier système de coordonnées, système fondamental, puisqu'il règne d'une manière presque absolue dans la Mécanique, la Physique Mathématique, l'Astronomie, etc...; j'ai donné les définitions des autres systèmes de coordonnées et les formules qui les rattachent au système fondamental des Coordonnées Cartésiennes. C'est principalement dans les études Géométriques, que ces nouvelles coordonnées offrent de grands avantages; je dirai plus, elles se présentent comme un auxiliaire indispensable, si l'on veut aborder par le calcul les nombreuses recherches qui sont du domaine de la Géométrie.

Le point de départ que j'ai adopté est conforme à l'esprit de notre enseignement; mais ce choix présente encore un autre avantage, c'est de mettre en évidence la loi de transformation les uns dans les autres de ces différents systèmes de Coordonnées. Et c'est là une chose importante, car il peut arriver, dans beaucoup de questions, que toutes ces coordonnées se trouvent en présence.

5. Je me suis servi quelquefois de la notation algorithmique des déterminants; c'est souvent une forme très-commode, et on la remplace difficilement. D'ailleurs l'usage que nous en faisons n'exige que la connaissance de leurs propriétés les plus élémentaires; ces propriétés sont parfaitement connues, et j'y reviendrai à la fin du Cours.

Pour ne pas trop m'écarter des méthodes qui sont en usage dans nos classes de spéciales, je n'ai pas introduit comme sources de démonstration les fonctions dites **Invariants, Covariants**, etc. La dénomination même de ces fonctions indique leur nature et leurs propriétés; elles conduisent naturellement à la découverte de propositions fondamentales dans l'étude des courbes ou des surfaces et en assignent ainsi la véritable origine. Je dirai néanmoins quelques mots sur ce sujet à la fin de l'Analytique à trois dimensions.

6. J'ai donné à cet ouvrage le titre de **Principes de la Géométrie Analytique**; c'est qu'en effet je n'ai pas eu la prétention de faire **Un cours complet d'Analytique**, car j'ai dû rester dans les limites du programme, et ne présenter, pour ainsi dire, que la nomenclature des différents systèmes de coordonnées et les formules fondamentales de la Géométrie Analytique.

Pour faire bien comprendre l'usage de ces formules et donner une idée des ressources de l'Analyse, j'ai étudié, en suivant l'ordre des programmes, les courbes du second degré; tout en élargissant un peu le cadre qui nous est tracé, j'ai dû considérablement restreindre ces applications.

Quand aux courbes et aux surfaces d'ordre supérieur, j'ai seulement indiqué quelques propriétés générales résultant immédiatement des formules établies; je renverrai pour cette étude aux excellents traités de M. Salmon.

PRINCIPES DE LA Géométrie Analytique.

La Géométrie Analytique a pour objet l'étude de la mesure et des propriétés de l'étendue figurée par les procédés de l'Algèbre.

Cette application de l'Algèbre à la Géométrie n'est autre que la Méthode Analytique comme l'entendaient les anciens Géomètres et Philosophes, et comme on doit effectivement l'entendre. Car, au fond, la mise en équation d'un problème et la transformation successive des équations revient à ramener le problème proposé à un autre, puis à ramener celui-ci à un nouveau, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un système d'équations ou à un problème que l'on sache résoudre. La Géométrie pure procède bien quelquefois par la méthode analytique; mais les transformations de l'Algèbre constituent, si l'on peut s'exprimer ainsi, un instrument essentiellement analytique; et c'est là ce qui légitime le nom donné à la science dont nous allons exposer les principes.

GÉOMÉTRIE PLANE

PRÉLIMINAIRES

Chapitre I
Des Coordonnées.

§ I. Système de Coordonnées.

1. *Pour appliquer le calcul à l'étude des propriétés d'une figure, il faut savoir fixer la position d'un point dans le plan de cette figure; les lignes qui servent à déterminer cette position constituent ce qu'on appelle un système de coordonnées.*

Il y a une infinité de systèmes de coordonnées; nous ne définirons que les plus simples et les plus fréquemment employés.

I° Coordonnées rectilignes Cartésiennes d'un point.

2. *Prenons, dans le plan, deux droites fixes Ox et Oy; si l'on se donne un point M, et que par ce point on mène une parallèle MQ à Ox, puis une parallèle MP à Oy, les distances MP et MQ sont les Coordonnées du point M; la ligne MQ ou OP s'appelle l'abscisse du point, et la ligne MP ou OQ en est l'ordonnée; ces deux lignes se nomment aussi l'x et l'y du point M. Les droites Ox et Oy sont les axes des Coordonnées, et leur point de rencontre O est l'Origine des Coordonnées. On voit, qu'un point étant donné, ses Coordonnées sont parfaitement déterminées.*

Mais, si l'on se donne les Coordonnées d'un point, le point ne sera complètement déterminé que si l'on connait

l'angle des axes des Coordonnées dans lequel il se trouve. On introduira cette nouvelle donnée dans le calcul en adoptant les conventions suivantes:

« Nous regarderons les abscisses comme positives, lorsqu'elles seront comptées dans un certain sens, Ox par « exemple; et comme négatives, lorsqu'elles seront portées dans le sens contraire. De même, nous regarderons les « ordonnées comme positives, lorsqu'elles seront portées dans un certain sens, Oy par exemple; et comme négatives « lorsqu'elles seront portées dans le sens contraire. »

D'après cela, un point sera complètement déterminé lorsqu'on se donnera ses coordonnées en grandeur et en signe. Ainsi, supposons que les coordonnées d'un point soient $x = 2$, $y = -6$; nous prendrons, sur Ox, $OP' = 2$; et, sur le prolongement de Oy, $OQ' = 6$; puis, par les points P' et Q' nous mènerons des droites respectivement parallèles aux axes Oy et Ox; le point d'intersection de ces parallèles déterminera, sans ambiguïté, le point N, dont les coordonnées sont $+2$ et -6.

Les coordonnées d'un point sont dites Coordonnées Obliques lorsque l'angle des axes est quelconque; elles sont dites Coordonnées rectangulaires, lorsque l'angle des axes est droit.

II° Coordonnées Homogènes d'un point.

3. Au lieu d'introduire dans les calculs les longueurs MP et MQ qui définissent la position du point M, il est souvent préférable d'introduire des rapports qui représenteront MP et MQ. Ainsi, dans le système précédent, nous avons représenté MP par x, et MQ par y; dans le système actuel, nous posons:

$$MP = \frac{x}{z}, \quad MQ = \frac{y}{z};$$

les quantités x, y, z, sont appelées les Coordonnées Homogènes du point M.

Lorsqu'on se donne les nombres x, y, z, le point correspondant est parfaitement déterminé; mais lorsqu'on se donne un point, les quantités x, y, z, restent arbitraires, les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sont seuls complètement déterminés. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

On retrouve le système Cartésien (2) en supposant $z = 1$.

III° Coordonnées trilatères d'un point.

4. Si l'on considère un triangle fixe ABC, un point M du plan sera défini par ses distances aux côtés du triangle respectivement multipliées par des nombres constants arbitrairement choisis.

Soient, par exemple, MP, MQ, MR, les distances respectives du point M aux côtés BC, CA, AB, du triangle; posons:

$$x = \alpha . MP,$$
$$y = \beta . MQ,$$
$$z = \gamma . MR;$$

A
R
Q
M
B
P
C

les quantités x, y, z, sont les Coordonnées trilatères du point M.

Le triangle ABC auquel on rapporte le point s'appelle triangle de Référence; les quantités α, β, γ, par lesquelles on multiplie les distances du point aux côtés du triangle, sont nommées les paramètres de Référence; on les prend souvent égaux à l'unité.

Nous reviendrons plus loin sur cet important système de Coordonnées.

IV° Coordonnées polaires d'un point.

5. Dans ce système, on choisit un point fixe P, nommé pôle, et une droite fixe PX, nommée Axe polaire; un point M est alors déterminé par sa distance MP ou ρ au pôle, (distance qui porte le nom de Rayon vecteur), et par l'angle MPX ou ω du rayon vecteur avec l'axe polaire; les quantités ρ et ω sont les Coordonnées polaires du point M.

On pourra déterminer ainsi complètement tous les points du plan, en supposant que le rayon vecteur ρ varie

depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et que l'angle ω varie depuis 0 jusqu'à 2π. Mais nous verrons plus tard qu'il y a avantage à adopter les conventions suivantes:

« L'angle ω sera regardé comme positif, lorsqu'on tournera dans un certain sens, et pourra varier de 0 à « $+\infty$; il sera négatif, lorsqu'on tournera en sens contraire, et pourra varier de 0 à $-\infty$. Quand au rayon « vecteur, on le portera sur le côté qui termine l'angle ω lorsqu'il sera positif; on le portera sur le prolongement « de ce côté, lorsqu'il sera négatif. »

V° Coordonnées bi-polaires.

6. Dans ce système, un point M est déterminé par ses distances MP et MP' à deux points fixes P et P' qui portent le nom de pôles.

Ou encore, un point M sera déterminé par les angles $\widehat{MPP'}$ et $\widehat{MP'P}$ que font les rayons vecteurs MP et MP' avec la ligne PP' des pôles.

VI° Coordonnées Curvilignes d'un point.

7. Supposons que l'on se donne une série de courbes de même espèce dépendant d'un paramètre a, de sorte qu'en donnant à a certaines valeurs on obtienne les Courbes a_1, a_2, a_3, etc...; supposons encore qu'on se donne une seconde série de courbes de même espèce dépendant d'un paramètre b, de sorte qu'en donnant à b certaines valeurs on obtienne les courbes b_1, b_2, b_3, etc.... Le point M_1, intersection des courbes a_1 et b_1, aura pour Coordonnées les valeurs particulières a_1 et b_1 qui déterminent les deux courbes considérées; de même, le point M_2 aura pour coordonnées a_2 et b_2: et, en général, les Coordonnées Curvilignes d'un point M seront les valeurs des paramètres a et b qui déterminent les courbes d'espèce différente passant par le point considéré.

Ainsi, dans les Coordonnées polaires, les familles de courbes sont des cercles (le paramètre est le rayon ρ) et des droites (le paramètre est l'angle ω).

Dans les coordonnées bi-polaires, les deux familles de courbes sont des cercles dont les centres fixes sont les pôles P et P' (les paramètres sont les rayons ρ et ρ').

---

§ II Théorie des Projections.

---

8. Etant données une droite fixe OX et une droite AB située ou non dans le même plan avec OX, imaginons qu'on mène par le point A un plan perpendiculaire à OX, soit A_1 son intersection avec cette droite; soit de même B_1 le point d'intersection avec OX du plan mené par le point B perpendiculairement à cette droite: le segment A_1B_1 est la projection du segment AB sur la droite OX; cette dernière droite est dite Axe de projection.

I°. Expression Algébrique de la projection d'une droite.

9. Pour obtenir la valeur absolue de cette projection, menons par le point A une parallèle à OX jusqu'à sa rencontre en H avec le plan passant par B; joignons BH, et nous aurons dans le triangle rectangle ABH

$$A_1B_1 = AH = AB \cos(AB, OX).$$

Ainsi, la valeur absolue de la projection d'une droite est égale à la longueur de la droite multipliée par le Cosinus de l'angle de cette droite avec l'axe de projection.

Pour déterminer le signe de la projection, remarquons que dans une droite on distingue, l'origine et l'extrémité: l'Origine est le point d'où l'on part, l'Extrémité est le point où l'on arrive. De là, deux sens sur une droite, suivant qu'on la suppose parcourue de gauche à droite ou de droite à gauche; un des sens est dit sens positif ou direction positive, l'autre sens est dit sens négatif ou

direction négative

Nous considérerons, sur l'axe de projection les deux sens, le sens positif suivant OX, par exemple; et le sens négatif, suivant OX'. Ceci posé, si AB est la droite projetée, et que A soit l'origine et B l'extrémité, on convient de regarder la projection comme positive ou négative suivant que pour aller de la projection de l'origine à la projection de l'extrémité on marche dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe de projection, c. a. d. si l'on va de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche.

10. L'expression algébrique de la projection d'une droite est fournie par cette double proposition:

1° Si la droite projetée est parallèle à une direction sur laquelle les sens positif et négatif n'ont pas été déterminés par des conventions antérieures, la projection est égale en grandeur et en signe à la valeur absolue de la longueur de la droite multipliée par le cosinus de l'angle que fait la droite, prise dans le sens où elle est parcourue, avec la partie positive de l'axe de projection.

2° Si la droite projetée est parallèle à une direction sur laquelle les sens positif et négatif sont déterminés par des conventions antérieures, la projection est représentée en grandeur et en signe par le produit du cosinus des directions positives par la longueur de la droite projetée, le nombre qui représente cette longueur étant précédé du signe + ou − suivant que la ligne projetée est parcourue dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Pour démontrer cette proposition, nous considérerons successivement les deux cas énoncés.

1er Cas

Soit une droite AB, dont A est l'origine et B l'extrémité; nous avons à examiner les deux hypothèses suivantes:

1° La droite AB fait un angle aigu avec la partie positive, OX, de l'axe de projection. Si, par les points A et B, on mène des plans perpendiculaires à OX, on voit que, pour aller de A_1 vers B_1, il faut s'éloigner vers la droite; donc A_1B_1 est comptée dans le sens positif de l'axe, c. a. d. que la projection est positive. Or l'angle de AB avec la partie positive de l'axe est aigu; par suite le cosinus de cet angle est positif. Donc, en désignant par a la longueur de AB et par α l'angle de AB avec OX, l'expression a. Cos α est aussi une quantité positive.

2° La droite AB fait un angle obtus avec la partie positive de l'axe de projection. Pour aller de A_1 vers B_1, il faut s'éloigner vers la gauche; donc la projection A_1B_1 est négative. D'un autre côté, le produit a. Cos α, où a est un nombre positif et α un angle obtus, est aussi négatif. Donc, dans les deux hypothèses, la projection est représentée en grandeur et en signe par le produit

$$\overline{AB}\ \text{Cos}\,(\widehat{AB,OX});$$

AB est un nombre positif, A et B sont respectivement l'origine et l'extrémité de la ligne projetée; $\widehat{AB,OX}$ est l'angle formé par cette ligne, prise dans le sens où elle est parcourue, avec la partie positive de l'axe de projection.

2ème Cas

Pour établir la seconde partie du théorème, nous avons encore les deux hypothèses suivantes à examiner:

1° L'angle des directions positives est aigu. Soit OX la partie positive de l'axe de projection, et O_1X_1 le sens positif de la direction à laquelle sont parallèles les droites projetées.

Si la droite projetée, AB, est parcourue dans le sens positif O_1X_1, alors, l'angle de AB avec OX étant aigu, la projection A_1B_1 sera positive; or le produit a Cos $(\widehat{O_1X_1,OX})$ est aussi positif, puisque l'angle (O_1X_1, OX) est aigu, et que, d'après notre convention, a doit représenter plus la longueur de la droite AB.

Si B était l'origine et A l'extrémité, c. a. d. si la droite projetée était parcourue dans le sens négatif O_1X_1',

la projection BA serait négative ; or le produit a cos (O_1X_1, OX) serait aussi negatif, car l'angle (O_1X_1, OX) est toujours aigu, et, d'après notre convention, a devrait représenter moins la longueur de la droite BA.

2°. L'angle des directions positives est obtus.

Si la droite projetée, AB, est parcourue dans le sens positif OX_1, la projection A_1B_1 est négative ; mais le produit a Cos (O_1X_1, OX) est aussi négatif, car l'angle (O_1X_1, OX) est obtus, et a doit représenter plus la longueur de la droite AB.

Si B était l'origine et A l'extrémité, c. à d. si la droite était parcourue dans le sens négatif O_1X_1', la projection B_1A_1 serait positive ; d'un autre côté le produit a Cos (O_1X_1, OX) serait aussi positif, puisque l'angle (O_1X_1, OX) est obtus et que a doit alors représenter moins la longueur de la droite BA.

Donc, en résumé, la projection de la droite AB est exprimée en grandeur et en signe par le produit

$$a \operatorname{Cos}(O_1X_1, OX) ;$$

L'angle (O_1X_1, OX) est l'angle des directions positives, et a représente plus ou moins la longueur de la droite projetée AB suivant qu'on suppose la droite AB parcourue dans le sens positif O_1X_1 ou en sens contraire.

II°. Relation entre les segments déterminés par n points en ligne droite.

11. Considérons d'abord trois points a, b, c, situés sur une ligne droite ; on a la relation

$$(1) \qquad ab + bc + ca = 0,$$

la notation ab, par exemple, désignant un segment additif ou soustractif, c. à d. la longueur du segment précédée du signe + ou −, suivant que ce segment est parcouru dans un sens ou en sens contraire.

En effet, supposons les segments additifs lorsqu'on les parcourt de la gauche vers la droite, et soustractifs dans le cas contraire.

Si le point c est à droite des points a et b, on a

a b c

$$ab + bc - ac = 0 ; \text{ or } ac = -ca ;$$

donc

$$ab + bc + ca = 0$$

Si le point c est entre les points a et b, on a

a c b

$$ac + cb - ab = 0 ; \text{ or } ac = -ca, cb = -bc ;$$

donc

$$ab + bc + ca = 0$$

Enfin, si le point c est à gauche du point a, on a

c a b

$$ca + ab - cb = 0 ; \text{ or } cb = -bc ;$$

donc

$$ab + bc + ca = 0$$

12. Nous généraliserons maintenant ce théorème en démontrant qu'il a lieu pour n points, si on le suppose vrai pour (n − 1) points.

Soient a, b, c, ..., h, k, (n − 1) points en ligne droite ; supposant le théorème vrai pour (n − 1) points, nous aurons l'égalité

$$(2) \quad ab + bc + cd + \ldots + hk + ka = 0.$$

Soit l un n^{me} point situé sur la droite ; si nous considérons les trois points a, k, l, nous aurons, d'après la relation (1)

$$(3) \quad ak + kl + la = 0.$$

Ajoutons les égalités (2) et (3) membre à membre il vient

$$(4) \quad ab + bc + cd + \ldots hk + kl + la = 0,$$

car les termes ak et ka, égaux et de signes contraires, se détruisent.

La proposition est donc vraie pour n points, si on la suppose vraie pour (n − 1) points ; si elle est

vraie pour trois points; donc etc...

III. Théorème fondamental des projections.

13. Soit une ligne polygonale plane ou gauche, dont les sommets consécutifs sont A, B, C, D, ... F, G; A étant l'origine, et G l'extrémité. La ligne AG, qui joint l'origine à l'extrémité, s'appelle la Résultante de la ligne polygonale; les droites AB, BC, CD, ..., FG, en sont les Composantes.

Projetons la ligne polygonale ABC ... FG sur un axe arbitrairement choisi, et soient $A_1, B_1, C_1, \ldots F_1, G_1$, les projections des sommets; on aura, d'après le théorème précédent,

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + F_1G_1 + G_1A_1 = 0 ,$$

pourvu que les segments soient regardés comme additifs ou soustractifs suivant qu'ils sont parcourus dans un sens ou dans un autre, c. a. d. pourvu qu'on ait égard à la convention faite sur les signes des projections (9)

Mais

$$G_1A_1 = -A_1G_1 ;$$

l'égalité précédente deviendra donc:

$$(5) \qquad A_1G_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots + F_1G_1 .$$

Or A_1G_1 représente en grandeur et en signe la projection de la résultante; de même, A_1B_1, B_1C_1, etc. représentent en grandeur et en signe les projections des composantes; nous avons, par suite, ce théorème général:

La projection de la résultante d'un contour polygonal est égale à la somme algébrique des projections des Composantes.

Remarque. Lorsqu'un contour polygonal est fermé, la somme algébrique des projections des composantes sur un axe quelconque est nulle.

Réciproquement, si la projection de la résultante, sur trois droites non parallèles à un même plan, est nulle, le contour sera fermé. Lorsque la ligne polygonale est plane, elle sera fermée si la projection de la résultante, sur deux droites non parallèles, est égale à zéro.

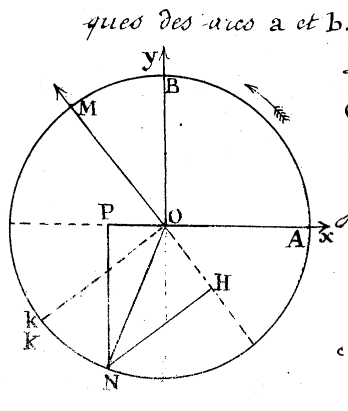
IV. Application aux formules de la Trigonométrie.

14. Prenons une circonférence dont le rayon soit égal à l'unité; soient A l'origine des arcs, AB le sens des arcs positifs; et Ox, Oy, les axes suivant lesquels sont comptées les lignes trigonométriques positives.

Soit M l'extrémité d'un arc dont A est l'origine, nous représenterons par a la valeur algébrique de cet arc; considérons maintenant le point M comme origine d'un second arc dont N serait l'extrémité, le sens des arcs positifs restant le même que précédemment; nous représenterons par b la valeur algébrique de l'arc ayant M pour origine, et N pour extrémité. Si l'on joint OM et ON, et que du point N on abaisse les perpendiculaires NP et NH sur les diamètres passant par les origines respectives A et M des deux arcs a et b, on aura, abstraction faite du signe,

$$NP = \sin(a+b), \quad OP = \cos(a+b).$$

Il s'agit de calculer les valeurs algébriques de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction des lignes trigonométriques des arcs a et b.



Pour cela, remarquons que les deux contours polygonaux, OHN et OPN, ont même origine O et même extrémité N, c. a. d. ont la même résultante; les projections de ces deux contours, sur une droite quelconque, sont donc égales; et l'on a, quel que soit l'axe de la projection.

$$(I) \qquad \text{proj. } OP + \text{proj. } PN = \text{proj. } OH + \text{proj. } HN .$$

Les droites OP, PN, OH, HN, à projeter étant parallèles à des directions sur lesquelles les sens sont déterminés d'après les conventions faites en trigonométrie, nous appliquerons

ici la seconde partie de la proposition du N.º (10)

Projetons d'abord sur l'axe ox.

La projection de OP est égale au Cosinus de l'angle des directions positives, c. a. d. 1, puisque l'angle des directions positives est nul, multiplié par le nombre qui exprime la longueur de OP, ce nombre devant être précédé du signe + ou − suivant que OP est parcouru dans le sens ox ou en sens contraire; or Cos(a+b) représente précisément cette valeur algébrique, puisque ce cosinus est positif ou négatif suivant que l'extrémité P est à droite ou à gauche du point O; donc:

$$\text{proj. } OP = 1.\ \text{Cos}\,(a+b).$$

La projection de PN est nulle, puisque cette droite est perpendiculaire à l'axe de projection.

La projection de OH est égale au cosinus de l'angle des directions positives, c. a. d. au cosinus de l'angle de OM avec ox, ou $\text{Cos. arc}\,\overline{AM} = \text{Cos}\,a$, multiplié par le nombre qui exprime la longueur de OH, ce nombre devant être précédé du signe + ou − suivant que OH est parcouru dans le sens OM ou en sens contraire; or $\text{Cos. arc}\,MN$ ou Cos b représente précisément cette valeur algébrique, puisque ce cosinus est positif ou négatif suivant que l'extrémité H est entre O et M ou au delà de O; donc:

$$\text{proj. } OH = \text{Cos}\,a . \text{Cos}\,b.$$

La projection de HN est égale au Cosinus de l'angle des directions positives, c. a. d. au cosinus de l'angle de OK avec ox, ou $\text{Cos}\,(\text{arc}\,\overline{AM} + \frac{\pi}{2}) = \text{Cos}\,(\frac{\pi}{2} + a)$, multiplié par le nombre qui exprime la longueur de HN, ce nombre devant être précédé du signe + ou − suivant que HN est parcouru dans le sens OK ou en sens contraire; or le sinus de l'arc MN ou sin. b représente précisément cette valeur algébrique, puisque ce sinus est positif ou négatif suivant que HN est du même côté que OK ou de l'autre côté; donc

$$\text{proj. } HN = \text{Cos}\,(\tfrac{\pi}{2} + a) . \sin b.$$

Remplaçant, dans l'égalité (1), ces projections par leurs valeurs, on a la formule suivante:

$$(2^o) \qquad \text{Cos}\,(a+b) = \text{Cos}\,a\ \text{Cos}\,b - \sin a\ \sin b,$$

laquelle se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

Si nous projetons maintenant sur l'axe oy, on trouvera, en raisonnant comme nous venons de le faire:

$$\text{proj. } OP = 0 \qquad , \text{proj. } PN = 1. \sin\,(a+b),$$

$$\text{proj. } OH = \text{Cos}\,(a - \tfrac{\pi}{2})\,\text{cos}\,b,\ \text{proj. } HN = \text{Cos}\,a . \sin b.$$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on obtient la seconde relation générale:

$$(3^o) \qquad \sin\,(a+b) = \sin a\ \text{Cos}\,b + \sin b\ \text{Cos}\,a.$$

Chapitre II

Des Fonctions homogènes.

§I. Propriétés des fonctions homogènes.

15. **Définition.** Une fonction de plusieurs variables x, y, z, ... est dite **homogène** lorsqu'après avoir remplacé ces variables par des quantités proportionnelles $\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots$ la nouvelle fonction obtenue est identiquement égale à l'ancienne multipliée par une certaine puissance de λ, c. a. d. que

$$(1) \quad f\,(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^m f\,(x, y, z, \ldots);$$

m est le degré d'homogénéité.

Toute fonction des seuls rapports des variables est une fonction homogène du degré zéro, car on a

évidemment :

$$f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},\dots\right)=f\left(\frac{\lambda x}{\lambda z},\frac{\lambda y}{\lambda z},\dots\right)=\lambda^0 f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},\dots\right)$$

Réciproquement, toute fonction homogène peut être amenée à ne contenir que les rapports des variables ; faisant, en effet, $\lambda=\frac{1}{x}$ dans l'identité (1), on trouve

$$f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x},\dots\right)=\frac{1}{x^m}f(x,y,z,\dots)\,;$$

ou

$$f(x,y,z,\dots)=x^m f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x},\dots\right).$$

I° Dérivées des fonctions homogènes.

16. Les dérivées partielles d'une fonction homogène sont homogènes.

Prenons, en effet, les dérivées par rapport à x des deux membres de l'identité (1) ; posant :

$$\lambda x=u,\ \lambda y=v,\ \lambda z=w,\ \text{etc.}$$

et appliquant le théorème des fonctions composées, il vient :

$$\lambda f'_u(u,v,w,\dots)=\lambda^m f'_x(x,y,z,\dots),$$

ou

$$(2)\quad f'_u(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\dots)=\lambda^{m-1}f'_x(x,y,z,\dots).$$

Or la fonction $f'_u(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\dots)$ est composée en $\lambda x,\lambda y,\lambda z,\dots$ comme $f'_x(x,y,z,\dots)$ l'est en $x,y,z,\dots$; l'identité (2) exprime alors qu'en remplaçant, dans la dérivée f'_x, $x,y,z,\dots$ par $\lambda x,\lambda y,\lambda z,\dots$, la nouvelle valeur de la fonction est égale à l'ancienne multipliée par λ^{m-1} ; donc les dérivées partielles sont homogènes et du degré $(m-1)$.

II° Théorème des fonctions homogènes.

17. Lorsqu'une fonction est homogène, la somme des produits de chaque dérivée partielle par la variable correspondante est égale à la fonction multipliée par le degré d'homogénéité.

Si nous considérons, par exemple, la fonction homogène $f(x,y,z)$, on aura

$$(3)\qquad x f'_x+y f'_y+z f'_z=m f(x,y,z).$$

Cette importante proposition peut s'établir de plusieurs manières.

1ère Démonstration. D'après la définition des fonctions homogènes, on a l'identité :

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^m f(x,y,z)\,;$$

remplaçons, dans cette identité, λ par $(1+\omega)$, il vient :

$$f(x+\omega x,y+\omega y,z+\omega z)=(1+\omega)^m f(x,y,z).$$

Si maintenant nous développons le 1er membre d'après la formule de Taylor, et le second, d'après la formule du binôme, l'identité précédente pourra s'écrire :

$$f(x,y,z)+\omega\,[x f'_x+y f'_y+z f'_z]+\frac{\omega^2}{1.2}\,[x^2 f''_{xx}+y^2 f''_{yy}+z^2 f''_{zz}+2yz f''_{yz}+2xz f''_{xz}+2xy f''_{xy}]+\text{etc.}\dots$$

$$=f(x,y,z)+\frac{m\omega}{1}f(x,y,z)+\omega^2\frac{m(m-1)}{1.2}f(x,y,z)+\text{etc.}\dots$$

Cette dernière identité ayant lieu quel que soit ω, les coefficients des mêmes puissances de ω doivent être égaux ; de là, on conclut d'abord :

$$x f'_x+y f'_y+z f'_z=m f(x,y,z).$$

C.Q.F.D.

On pourrait en conclure d'autres relations qui se déduisent d'ailleurs de celle que nous venons d'établir.

2me Démonstration. Prenons toujours comme point de départ l'identité

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^m f(x,y,z)\,;$$

posons : $\lambda x=u,\ \lambda y=v,\ \lambda z=w,$

l'identité précédente s'écrira:

$$f(u,v,w) = \lambda^m f(x,y,z).$$

Prenons la dérivée des deux nombres par rapport à λ, en appliquant encore le théorème des fonctions composées, il vient:

$$x f'_u(u,v,w) + y f'_v(u,v,w) + z f'_w(u,v,w) = m\lambda^{m-1} f(x,y,z).$$

Mais $f(u,v,w)$ est composée en u, v, w comme $f(x,y,z)$ l'est en x, y, z; les dérivées partielles jouiront de la même propriété. Par conséquent, lorsqu'on fera $\lambda = 1$, les fonctions f'_u, f'_v, f'_w, deviendront respectivement f'_x, f'_y, f'_z; et l'identité précédente se transformera en l'identité:

$$x f'_x(x,y,z) + y f'_y(x,y,z) + z f'_z(x,y,z) = m f(x,y,z);$$

c'est la traduction du théorème énoncé.

---

§II Construction des expressions homogènes.

18. Nous commencerons par constater la proposition qui suit:

Quand on a une relation entre les lignes d'une figure, dont aucune n'a été prise pour unité, le premier membre de cette relation est nécessairement une fonction homogène.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la propriété suivante que nous regarderons comme évidente:

« Si une relation existe entre les lignes d'une figure, cette relation doit subsister quelle que soit l'unité « choisie.

L'évidence de cette propriété résulte de ce que les raisonnements que l'on a faits pour arriver à la relation sont indépendants de l'unité de longueur.

Ceci étant admis, si une relation a lieu entre les lignes $A, B, C, D, \ldots$ d'une figure, elle aura encore lieu lorsque nous choisirons l'une d'elles pour unité, A par exemple. Soient alors b_1, c_1, d_1, les mesures des lignes $B, C, D, \ldots$, on aura une relation de la forme:

$$(1) \quad f(b_1, c_1, d_1, \ldots) = 0.$$

Si maintenant on rapporte ces lignes à une unité quelconque, et que $a, b, c, d, \ldots$ soient leurs mesures respectives, on aura les égalités:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b_1}, \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{c_1}, \text{ etc}\ldots$$

d'où:

$$(2) \quad b_1 = \frac{b}{a}, \quad c_1 = \frac{c}{a}, \text{ etc}\ldots$$

car le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures, quelle que soit l'unité choisie.

Eu égard aux valeurs (2), la relation (1) deviendra:

$$(3) \quad f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots\right) = 0,$$

relation dont le premier membre est évidemment une fonction homogène (15). Donc.... (Nelles Annales, 1855, p. 312.)

Remarque I. On voit par là que si une relation géométrique n'est pas homogène, ce qui ne se présentera que si l'on a pris une des lignes de la figure pour unité, on rétablira l'homogénéité en remplaçant les lettres $b_1, c_1, \ldots$ qui y entrent par les rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots$ a étant une longueur arbitrairement choisie.

Remarque II. Un angle a pour mesure le rapport de l'arc correspondant au rayon; une fonction trigonométrique est le rapport d'une certaine ligne au rayon. Les angles et les fonctions trigonométriques sont donc des nombres, et, dans l'application du principe de l'homogénéité, on devra faire abstraction des lettres qui les représentent.

19. Il s'agit maintenant de chercher à construire, avec la règle et le compas, une expression algébrique donnée. Il nous suffit évidemment de borner cette étude à celle des expressions homogènes du 1er degré,

c, d, représentant des longueurs. Par là, une expression du 2me degré pourra se ramener aux produits de deux lignes, et nous saurons construire le côté d'un carré équivalent à ce rectangle. Une expression du 3me degré pourra se ramener au produit de trois lignes; mais la construction s'arrêtera à ce point; car on démontre qu'on ne saurait obtenir, par la règle et le compas, le coté d'un cube équivalent à un volume donné.

Nous allons passer en revue les différentes formes des expressions du 1er degré que nous pouvons construire.

Nous admettons qu'on sait construire les 4mes, 3mes et moyenne proportionnelles.

20. Prob. I — Construction des expressions rationnelles.

1er Cas — Monôme du 1er degré.

Soit $x = \frac{abcd}{mnp}$; cette expression peut s'écrire:

$$x = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{cd}{p};$$

et si nous posons successivement:

$$\frac{cd}{p} = c_1, \ \frac{bc_1}{n} = b_1, \ \frac{ab_1}{m} = a_1,$$

il vient:

$$x = a_1;$$

et nous obtiendrons a_1 en construisant successivement, à l'aide de 4mes proportionnelles, les lignes c_1, b_1, a_1.

Remarque I. Lorsque le monôme se présentera sous la forme simple

$$x = a \frac{m^2}{n^2},$$

on le construira plus facilement en s'appuyant sur cette propriété: « les carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont dans le même rapport que leurs projections sur l'hypoténuse ».

Remarque II. Un monôme quelconque M du degré m pourra toujours se ramener à la forme:

$$(1) \qquad M = K^{m-1} \cdot l,$$

K étant une ligne arbitraire et l une ligne définie par l'égalité:

$$(2) \qquad l = \frac{M}{K^{m-1}},$$

laquelle permet de construire l.

Ainsi, soit $M = abcd$; si nous posons:

$$M = K^3 l,$$

nous construirons l à l'aide de l'expression:

$$l = \frac{abcd}{K^3}.$$

Remarque III. Un polynôme homogène du degré m pourra toujours se ramener à la forme:

$$K^{m-1} l,$$

K étant une ligne arbitraire.

Soit, en effet,

$$P = A + B - C,$$

A, B, C, étant des monômes du degré m; nous pourrons, d'après la remarque précédente, poser:

$$A = K^{m-1} a, \ B = K^{m-1} b, \ C = K^{m-1} c;$$

d'où nous conclurons

$$P = K^{m-1}(a + b - c) = K^{m-1} l.$$

2me Cas. — Fractions rationnelles.

Soit $x = \frac{M}{N}$,

M et N étant des polynômes homogènes des degrés respectifs m et (m − 1) nous pourrons, d'après la remarque (III), poser:

$$M = K^{m-1} a, \quad N = K^{m-2} b;$$

d'où nous conclurons:

$$x = \frac{k^{m-1}a}{k^{m-2}b} = \frac{ka}{b};$$

expression qu'on sait construire.

21. Prob. II. Construction des irrationnelles du 1er degré.

Les seules irrationnelles que nous puissions construire sont celles dont l'indice du radical est une puissance de 2.

1er Cas. Racines carrées.

Soit:

$$x^2 = \frac{M}{N} \quad ou \quad x = \sqrt{\frac{M}{N}},$$

M et N étant des polynômes des degrés respectifs m et (m-2). Nous pouvons poser, d'après la Remarque III. No. (20)

$$M = k^{m-1}a, \; N = k^{m-3}b;$$

de là on conclut:

$$x^2 = \frac{k^{m-1}a}{k^{m-3}b} = \frac{k^2a}{b};$$

Or, on pourra construire facilement x, car on est ramené à la résolution de ce problème de Géométrie élémentaire: « Construire un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux lignes données. »

2e Cas. Racines d'indice 2^n

Soit:

$$x^{2^n} = M,$$

M étant un polynôme ou une fraction rationnelle homogène du degré 2^n.

Nous pouvons encore poser, a et k étant des lignes,

$$M = k^{2^n-1}.a;$$

par suite:

$$x^{2^n} = k^{2^n-2}.ak = k^{2^n-2}.b^2, \text{ en posant } b^2 = ak.$$

Extrayant la racine carrée il vient:

$$x^{2^{n-1}} = k^{2^{n-1}-1}.b = k^{2^{n-1}-2}.bk = k^{2^{n-1}-2}.c^2, \text{ en posant } c^2 = bk$$

Extrayant de nouveau la racine carrée, on a:

$$x^{2^{n-2}} = k^{2^{n-2}-1}.c = k^{2^{n-2}-2}.ck = k^{2^{n-2}-2}.d^2, \text{ en posant } d^2 = ck$$

En continuant ainsi successivement, on arrivera à l'égalité définitive:

$$x^2 = k.l;$$

expression que nous savons construire.

3e Cas. Racine, d'indice 2^n, d'un nombre N.

Soit

$$x^{2^n} = N,$$

N étant un nombre; prenons pour unité une ligne quelconque k, nous pourrons alors écrire

$$\frac{x}{k} = \sqrt[2^n]{N}, \quad ou \quad x = \sqrt[2^n]{k^{2^n}.N};$$

puis posant:

$$kN = a,$$

il vient:

$$x^{2^n} = k^{2^n-1}.a;$$

nous sommes ainsi ramenés au cas précédent.

22. Prob III. Construction des fonctions trigonométriques.

Soit

$$x = aF,$$

a étant une ligne, et F une fonction rationnelle ou radicale, d'indice 2^n, de lignes trigonométriques.

Traçons un cercle de rayon R et un cercle concentrique de rayon un; les lignes trigonométriques d'un arc α, $\sin\alpha$, $\tang\alpha$, par exemple, pourront être remplacées par les rapports:

$$\sin\alpha = \frac{p}{R}, \quad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{q}{R},$$

p, q, R étant des lignes; on sera ainsi ramené à des formes déjà étudiées.

23. Cette discussion nous montre la possibilité de construire les expressions générales étudiées dans les problèmes qui précèdent. Mais il faut avoir soin de profiter des formes particulières que peuvent présenter les expressions données pour en simplifier la construction. Nous en donnerons les quelques exemples qui suivent:

Prob. IV. Construire $\sin^m x$.

Décrivons un cercle dont le rayon soit l'unité, prenons un arc égal à x, et construisons son sinus, soit $MP = \sin x$. Du point P abaissons une perpendiculaire PP_1 sur OM, on aura:

$$MP_1 = MP\cos OMP = \sin x . \sin x = \sin^2 x;$$

Du point P_1 abaissons P_1P_2 perpendiculaire sur MP, il vient:

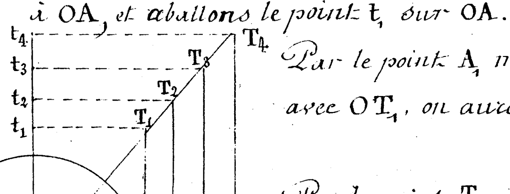
$$MP_2 = MP_1 \cos OMP = \sin^2 x . \sin x = \sin^3 x;$$

En continuant ainsi, on construira une puissance quelconque de $\sin x$.

Il est visible que les lignes $MP, MP_1, MP_2, MP_3, \ldots$ décroissent indéfiniment lorsque m augmente, c. à d. que $\lim \sin^m x = 0$

24. **Prob. V. Construire $\mathrm{Tang}^m x$.**

L'arc x étant construit, on aura $AT_1 = \mathrm{Tang}\,x$; prenons sur OA, $OA_1 = AT_1$; pour cela menons T_1t_1 parallèle à OA, et rabattons le point t_1 sur OA.



Par le point A_1 menons A_1T_2 perpendiculaire à OA, et prolongeons jusqu'à sa rencontre avec OT_1, on aura

$$A_1T_2 = OA_1\,\mathrm{Tang}\,x = \mathrm{Tang}^2 x.$$

Par le point T_2 menons T_2t_2 parallèle à OA, et rabattons t_2 en A_2, puis élevons A_2T_3 perpendiculaire à OA, on aura

$$A_2T_3 = OA_2\,\mathrm{Tang}\,x = \mathrm{Tang}^3 x;$$

et ainsi de suite:

Si l'arc $x > 45°$, les points $A_1, A_2, \ldots$ sont à droite du point A, le contraire a lieu si $x < 45°$; dans le 1er cas $\lim \mathrm{Tang}^m x = \infty$; dans le 2me cas, $\lim \mathrm{Tang}^m x = 0$, lorsque m croît indéfiniment.

Remarque. On peut déduire de là la construction du rapport:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

a et b étant des lignes données, il suffit, en effet, de poser

$$\mathrm{Tang}\,x = \frac{a}{b};$$

L'arc x pourra se construire à l'aide des deux lignes données, et nous serons ramenés au problème précédent.

25. **Prob. VI. Diviser une droite AB dans un rapport égal $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.**

Pour cela, menons par A et B les droites AM et BM faisant avec AB les angles α et β; traçons la bissectrice MI de l'angle AMB, nous aurons:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{MA}{MB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha};$$

le point I résout la question.

26. **Prob. VII. Construire $\sqrt[2^n]{a^{2^n} \pm b^{2^n}}$.**

Prenons le cas particulier: $\sqrt[8]{a^8+b^8}$. Posons successivement:

$$a^2 = \lambda b, \quad \lambda^2 = \mu b, \quad \mu^2 + b^2 = \rho^2,$$

l'expression (a^8+b^8) deviendra:

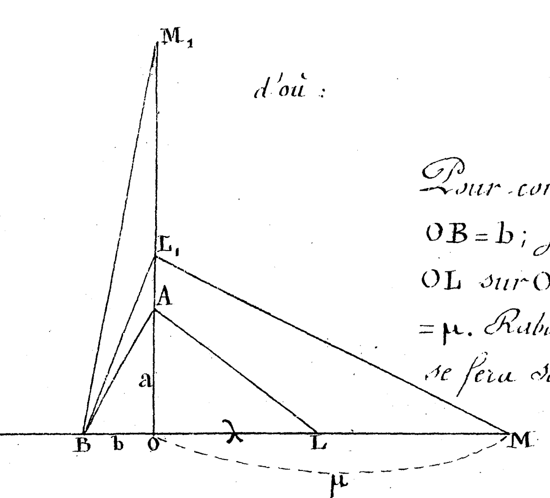
$$b^4(\lambda^4+b^4), \text{ puis } b^6(\mu^2+b^2), \text{ et enfin } b^6\rho^2.$$

On aura donc:

$$\sqrt{a^8+b^8} = b^3\rho = b^2c^2, \text{ en posant } b\rho = c^2;$$

puis:

$$\sqrt[4]{a^8+b^8} = bc = d^2, \text{ en posant } bc = d^2;$$



d'où :

$$\sqrt[8]{a^8+b^8} = d.$$

Pour construire les lignes successivement introduites, prenons sur un angle droit OA=a, OB=b ; joignons AB, et soit AL perpendiculaire à AB, nous aurons OL=λ. Rabattons OL sur OA en L_1, joignons L_1B, et soit L_1M perpendiculaires à L_1B, nous aurons OM =μ. Rabattons OM sur OA en M_1, nous aurons $BM_1=\rho$. La construction des lignes c et d se fera sans difficulté.

Chapitre III

Transformation des Coordonnées.

§ I. Formules de transformation.

27. Nous ne nous occuperons que des coordonnées Cartésiennes.

Donnons d'abord une idée de ce qu'on entend par l'équation d'une Courbe. Supposons que, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque du plan, on ait entre ces quantités la relation.

$$(1)\qquad f(x,y)=0$$

A une valeur convenable donnée à x correspondra, en général, une valeur réelle de y ; et, x variant, entre certaines limites, d'une manière continue, on aura une suite continue de valeurs pour y ; si l'on construit les points correspondant à ces solutions, on aura, dans le plan, une série continue de points dont l'ensemble porte le nom de courbe ; l'équation (1) est dite l'équation de la courbe

Réciproquement, étant donnée la définition Géométrique d'une courbe, on peut toujours trouver une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, on aura ainsi l'équation de la Courbe.

La Géométrie Analytique est toute entière dans ces deux questions fondamentales :

1°. Étant donnée l'équation d'une courbe, en conclure la forme et les propriétés de cette courbe.

2°. Inversement, étant donnée une propriété ou définition géométrique d'une courbe, trouver l'équation de cette courbe

---

Lorsqu'on a l'équation d'une courbe :

$$f(x,y)=0,$$

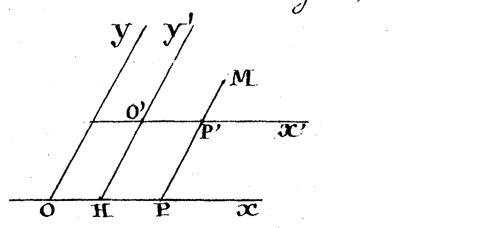
équation dans laquelle x et y représentent les coordonnées d'un point par rapport à deux axes Ox et Oy, on dit que la courbe est rapportée aux axes Ox et Oy. Or il y aura souvent avantage à rapporter cette courbe à d'autres axes pour lesquels son équation deviendra plus simple ; cette question pourra se résoudre, si l'on connaît les coordonnées primitives d'un point en fonction des coordonnées de ce même point relatives aux nouveaux axes ; tel est l'objet des formules de transformation des coordonnées :

1°. Changement d'Origine.

28. On suppose les nouveaux axes O'x', O'y', parallèles aux anciens Ox, Oy ; on dit alors que les axes ont été transportés parallèlement à eux mêmes.

Soit M un point du plan, x et y ses coordonnées par rapport aux axes Ox et Oy ; si x' et y' sont les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes, et que a et b soient les Coordonnées

de la nouvelle origine, on aura :



$$OP = OH + O'P',$$
$$MP = O'H + MP',$$

d'où

$$(1) \qquad x = a + x', \quad y = b + y'.$$

En examinant toutes les positions du point par rapport aux axes et les diverses positions relatives des axes, on arrivera à constater que les formules (1) sont générales, pourvu qu'on ait égard à la convention faite sur les signes des coordonnées.

II°. Transformation générale.

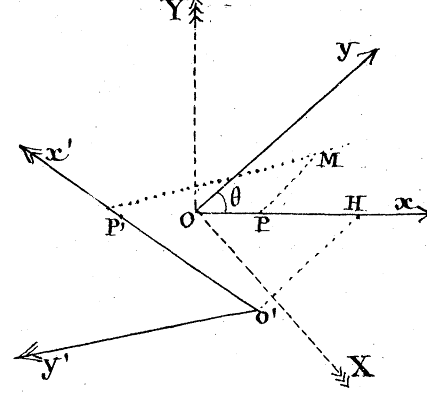
29. Supposons qu'un point soit determiné par rapport à deux axes Ox et Oy dont l'angle est θ; soit M ce point, x et y ses coordonnées par rapport à ces deux axes; la question consiste à trouver les coordonnées de ce point par rapport à deux nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, que nous définirons de la manière suivante :

La position de la nouvelle origine O' sera déterminée par ses coordonnées dans l'ancien système, que nous représenterons en grandeur et en signe par a et b, a étant l'abscisse et b l'ordonnée; nous nous donnerons en outre l'angle du nouvel axe positif $O'x'$ avec l'ancien axe positif Ox, soit $\alpha = (\widehat{O'x', Ox})$; et l'angle du nouvel axe positif des y, $O'y'$, avec l'ancien angle positif des x, soit $\beta = (\widehat{O'y', Ox})$.

Menons les coordonnées de la nouvelle origine O', OH et HO'; traçons aussi les coordonnées du point M dans l'ancien et le nouveau système d'axes; de sorte qu'abstraction faite des signes, on aura :

$$\begin{cases} OH = a, \\ HO' = b; \end{cases} \quad \begin{cases} OP = x, \\ MP = y; \end{cases} \quad \begin{cases} O'P' = x', \\ MP' = y'. \end{cases}$$

Il s'agit de trouver deux relations entre les quantités x, y, x', y' et les données $a, b, \alpha, \beta, \theta$. Or, nous avons deux contours polygonaux



OPM , OHO'P'M

qui ont même résultante OM; l'un se compose des anciennes coordonnées, l'autre des nouvelles; en projetant sur un axe quelconque, nous aurons :

$$(1) \quad \text{proj. } OP + \text{proj. } PM = \text{proj. } OH + \text{proj. } HO' + \text{proj. } O'P' + \text{proj. } P'M.$$

Nous voulons déterminer x et y, composantes du 1er contour; pour les obtenir, nous ferons en quelque sorte une élimination géométrique, en choisissant successivement pour axes de projection des droites respectivement perpendiculaires à Ox et Oy

Menons OX perpendiculaire à Oy et du même côté que Ox, puis OY perpendiculaire à Ox et du même côté que Oy; on a l'égalité :

$$x\,OX = y\,OY = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

en supposant l'angle θ aigu.

Projetons d'abord sur OX.

La projection de O'P' est égale au cosinus de l'angle des directions positives, c'est à d. à $\cos(\widehat{O'x', OX})$ ou $\cos(\widehat{O'x', Ox} + \widehat{Ox, OX})$ ou enfin $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta)$ multiplié par le nombre qui mesure O'P', ce nombre étant précédé du signe + ou −, suivant que O'P' est parcouru dans le sens O'x' ou en sens contraire; or x' représente cette valeur algébrique, puisque x' sera positif ou négatif, suivant que l'extrémité P' sera sur O'x' ou sur le prolongement de O'x', c.a.d. suivant que O'P' sera parcouru dans le sens positif ou dans le sens négatif; donc

$$\text{proj. } O'P' = x' \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Le même raisonnement nous donne :

$$\text{proj. } P'M = y' \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

on trouve sans difficulté : proj. $OP = x \sin\theta$; proj. $PM = 0$; proj. $OH = a \sin\theta$; proj. $HO' = 0$.

Substituant les valeurs que nous venons d'obtenir dans l'égalité (1), on obtient :

$$(2)\quad x \sin\theta = a \sin\theta + x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta),$$

Projetons maintenant sur l'axe OX, en raisonnant comme il vient d'être fait, on trouve :

$$\text{proj. } OP = 0,$$
$$\text{proj. } PM = y \sin\theta,$$
$$\text{proj. } OH = 0,$$
$$\text{proj. } HO' = b \sin\theta,$$
$$\text{proj. } O'P' = x' \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\text{proj. } P'M = y' \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1), il vient :

$$(3)\quad y \sin\theta = b \sin\theta + x' \sin\alpha + y' \sin\beta$$

Pour que la démonstration fût complètement générale, il faudrait examiner le cas où l'angle θ des anciens axes est obtus. Cette discussion étant faite, on trouve que les formules générales de la transformation des coordonnées sont :

$$(\text{II}) \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Et si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe rapportée aux axes Ox et Oy, on obtiendra l'équation de cette même courbe rapportée aux nouveaux axes $O'x'$ et $O'y'$ (définis par rapport aux anciens), en y remplaçant x et y par leurs valeurs (II).

III° Cas particuliers.

30. 1° Les nouveaux axes sont parallèles aux anciens et dirigés dans le même sens.

Il faut alors faire dans les formules générales (II)

$$\alpha = 0, \quad \beta = \theta;$$

nous obtenons ainsi les formules (I)

$$(\text{I}) \begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y', \end{cases}$$

qui, de cette manière, se trouvent établies avec toute la généralité possible.

2° Le 1er système est rectangulaire et le 2ème oblique.

Alors $\theta = \frac{\pi}{2}$, et les formules de transformation pour passer d'un système rectangulaire à un système oblique, sont :

$$(\text{III}) \begin{cases} x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{cases}$$

3° Le 1er système est oblique et le 2e rectangulaire :

Alors $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, si le sens de la rotation, pour aller de $O'x'$ vers $O'y'$ est celui des angles positifs, et les formules, pour passer d'un système oblique à un système rectangulaire sont :

$$(\text{IV}) \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \\ y = b + \dfrac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}. \end{cases}$$

4° Les deux systèmes sont rectangulaires :

Alors $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$;

les formules, pour passer d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire, sont :

$$(\text{V}) \begin{cases} x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

Lorsque les deux systèmes auront la même origine, il suffira d'introduire dans les formules qui précèdent les hypothèses $a = 0,\ b = 0$

IV° Distance de deux points.

31. Étant données les coordonnées (x, y) et (x', y') de deux points M et M', trouver la distance de ces deux points

1ère Méthode. Supposons les deux points rapportés à deux axes quelconques Ox et Oy dont l'angle est θ ; menons les coordonnées de ces points et joignons MM' ; nous aurons ainsi deux contours polygonaux

$$OP'M' \quad \text{et} \quad OPMM'$$

ayant même résultante OM' ; O, origine ; M' extrémité.

Si nous désignons par α et β les angles de la droite MM' avec les axes Ox et Oy, et que nous projetions successivement ces deux contours sur les trois axes Ox, Oy, MM', en ayant soin de prendre pour sens positif des projections sur MM' le sens où l'élément MM' est supposé parcouru, nous aurons :

projetant sur Ox : $x' + y'\cos\theta = x + y\cos\theta + l\cos\alpha$,

projetant sur Oy : $x'\cos\theta + y' = x\cos\theta + y + l\cos\beta$,

projetant sur MM' : $x'\cos\alpha + y'\cos\beta = x\cos\alpha + y\cos\beta + l$;

égalités dans lesquelles l représente la longueur absolue de MM'.

Les relations qui précèdent peuvent s'écrire :

$$(1)\quad \begin{cases} (x'-x) + (y'-y)\cos\theta = l\cos\alpha, \\ (x'-x)\cos\theta + (y'-y) = l\cos\beta, \\ (x'-x)\cos\alpha + (y'-y)\cos\beta = l. \end{cases}$$

Entre ces trois équations éliminons $\cos\alpha$ et $\cos\beta$; pour cela multiplions la dernière par l, et remplaçons $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$ par les valeurs que fournissent les deux premières, il vient :

$$(2)\quad l^2 = \overline{MM'}^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta,$$

ou

$$(3)\quad l = MM' = \pm\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}.$$

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, $\theta = \frac{\pi}{2}$; on a alors :

$$(4)\quad l^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$$

ou

$$(5)\quad l = \overline{MM'} = \pm\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

2ème Méthode. Si nous considérons le triangle MM'H, on a :

$$\overline{MM'}^2 = l^2 = \overline{MH}^2 + \overline{M'H}^2 - 2\,\overline{MH}\cdot\overline{M'H}\cos(\widehat{MHM'});$$

Or

$$MH = x' - x,$$
$$M'H = y' - y,$$
$$\widehat{MHM'} = \pi - \theta;$$

donc

$$\overline{MM'}^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta.$$

La première Méthode offre l'avantage de conduire immédiatement à une formule tout-à-fait générale, puisqu'elle repose sur la théorie générale des projections ; tandis que la seconde exige l'examen des différentes positions relatives que peuvent présenter les points M et M' par rapport aux axes.

32 Lorsqu'un des points considérés est l'origine des coordonnées, M' par exemple, il faut supposer $x' = 0$, $y' = 0$; les formules (2) et (3) prennent la forme particulière :

$$(6)\quad l^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta; \quad \text{(axes obliques)}$$

$$(7)\quad l^2 = x^2 + y^2. \quad \text{(axes rectangulaires)}$$

Ces formules donnent la distance du point M ou (x, y) à l'origine des Coordonnées.

33. Remarque. Les formules (3) et (5) donnent la valeur de l avec un double signe, ce qui ne présente pas d'inconvénient, si l'on ne veut que la valeur absolue de la distance. Mais, dans une foule de circonstances, les segments situés sur une droite doivent être regardés comme positifs

ou négatifs suivant qu'on les compte dans un sens ou dans un autre.

Or, les relations (1) permettent d'écrire, sans ambiguité, la distance MM' en grandeur et en signe; on en déduit, en effet,

$$(8)\qquad MM' = l = \frac{(x'-x)+(y'-y)\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{(x'-x)\cos\theta+(y'-y)}{\cos\beta};$$

$\cos\alpha$ et $\cos\beta$ étant les cosinus des angles de MM' avec les axes positifs Ox et Oy, et dans ce cas, la valeur de MM', supposée positive, est donnée par l'une ou l'autre des égalités (8). Les cosinus des angles de M'M avec les axes seront évidemment $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$; la longueur du segment M'M, qui, d'après notre convention, est négatif, puisqu'il est parcouru en sens contraire du précédent, aura pour valeur absolue ($-$M'M ou $-l$); d'un autre côté, cette valeur absolue sera fournie par les formules (8) où l'on remplacera $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ par $-\cos\alpha$ et $-\cos\beta$; on aura donc:

$$-l = \frac{(x'-x)+(y'-y)\cos\theta}{-\cos\alpha} = \frac{(x'-x)\cos\theta+(y'-y)}{-\cos\beta};$$

on retrouve visiblement la forme (8).

Donc, α et β étant les angles de la direction positive d'une droite avec les axes de coordonnées, la longueur d'un segment MM' [dont l'origine est M ou (x, y) et l'extrémité M' ou (x', y')] sera donnée en grandeur et en signe par les formules:

$$(9)\qquad MM' = l = \frac{(x'-x)+(y'-y)\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{(x'-x)\cos\theta+(y'-y)}{\cos\beta};$$

c.a.d. que la valeur de l, fournie par ces formules, sera positive ou négative, suivant que le segment MM' sera dirigé dans un sens ou dans l'autre sur la droite considérée.

Dans le cas des axes rectangulaires, cette question sera résolue par les formules

$$(10)\qquad MM' = l = \frac{x'-x}{\cos\alpha} = \frac{y'-y}{\cos\beta}$$

---

§ II. Classification des Courbes.

34. On distingue les Courbes en Courbes algébriques et en Courbes transcendantes, suivant que l'équation qui les représente est elle-même algébrique ou transcendante. Nous nous occuperons principalement des courbes algébriques; c'est dans cette voie que la Géométrie a fait les progrès les plus remarquables.

Lorsqu'on étudie une courbe algébrique, on doit toujours supposer que l'équation qui la représente a été rendue rationnelle; par conséquent, lorsqu'une équation telle que:

$$f(x, y) = 0$$

représente une courbe algébrique, on peut toujours admettre que le premier membre de cette équation est une fonction entière des deux variables x et y.

35. Une courbe est dite du $m^{ème}$ ordre lorsqu'elle est rencontrée en m points (réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini) par une droite quelconque.

Une courbe est dite de la $m^{ème}$ classe, lorsque d'un point quelconque du plan, on peut lui mener m tangentes (réelles ou imaginaires).

Une équation du $m^{ème}$ degré en x et y représente une courbe du $m^{ème}$ ordre.

Soit $f(x, y) = 0$ une équation de degré m; la courbe étant rapportée à deux axes fixes Ox et Oy, cherchons le nombre des points d'intersection de cette courbe par une droite quelconque AB.

Rapportons la courbe à un nouveau système d'axes, dont la droite AB serait l'axe des x', par exemple. Soient x et y les coordonnées d'un point dans le 1er système, x' et y' les coordonnées du même point dans le 2ème système; si, à l'aide des formules (II) n° [29], nous remplaçons x et y dans l'équation donnée

$$(1)\qquad f(x, y) = 0,$$

cette équation deviendra

$$(2) \qquad \varphi(x', y') = 0,$$

laquelle représentera la même courbe rapportée aux nouveaux axes. Or l'équation (2) est du même degré que l'équation proposée (1). En effet x et y sont des fonctions linéaires de x' et y'; par suite, lorsqu'on remplacera x et y par leurs valeurs, le degré de l'équation ne pourra pas s'élever. Le degré ne pourra pas non plus s'abaisser; car si cela avait lieu, il faudrait que le degré s'élevât, lorsqu'on voudrait revenir de l'équation (2) à l'équation (1); or ceci est impossible, puisqu'il est visible que les valeurs des x' et y' déduites des formules (II) n° [29] sont aussi des fonctions linéaires de x et y. Ainsi l'équation (2) est exactement du même degré, en x' et y', que l'équation proposée.

Ceci posé, pour trouver les points de la courbe située sur AB ou $O'x'$, remarquons qu'on a, pour ces points, $y' = 0$; si l'on introduit cette hypothèse dans l'équation (2), il vient:

$$(3) \qquad \varphi(x', 0) = 0;$$

équation qui est du degré m en x', et qui admettra, par conséquent m racines, tant réelles qu'imaginaires, finies qu'infinies.

Donc la droite AB rencontre la courbe en m points, c.a.d. que la courbe est du $m^{ième}$ ordre.

Nous verrons plus loin le théorème analogue relatif à la **Classe**.

Remarque. Il peut arriver que l'équation (3) ait plus de m racines; cette équation se réduit alors à une identité; dans ce cas, la droite AB rencontre la courbe en une infinité de points. Il résulte de notre hypothèse, que le 1er membre de l'équation (2) se réduit à zéro, lorsqu'on y fait $y' = 0$; en d'autres termes, ce 1er membre est de la forme

$$y' \varphi_1(x', y') = 0$$

et, par suite, l'équation proposée est de la forme

$$(ax + by + c)\, f_1(x, y) = 0$$

$f_1(x, y)$ étant une fonction entière du degré $(m-1)$. La courbe représentée par cette équation se compose donc d'une droite et d'une courbe de l'ordre $(m-1)$.

En général, lorsque le premier membre d'une équation de degré m

$$f(x, y) = 0$$

n'est pas décomposable en facteurs rationnels, cette équation représente une courbe proprement dite du $m^{ème}$ ordre; lorsque le premier membre est décomposable, on a plusieurs courbes d'ordre inférieur à m; l'ensemble de toutes ces courbes forme une courbe composée de l'ordre m, qui sera encore représentée par l'équation proposée.

36. Les courbes algébriques se groupent d'après leur ordre; puis les courbes d'un ordre déterminé se distinguent par leur **Classe**.

Nous nous occuperons principalement des courbes du 1er ordre et du 2e ordre; nous établirons cependant les principes généraux qui permettent d'étudier les courbes d'ordre supérieur.

Avant de nous engager dans cette étude, cherchons le nombre des termes d'une équation de degré m entre deux variables.

Une fonction entière $f(x, y)$ des deux variables x et y renferme les termes suivants:

$$f(x, y) =$$

$(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \dots\dots + A_{m-1} x y^{m-1} + A_m y^m)$	termes du $m^{ème}$ degré dont nous désignerons l'ensemble par	$\varphi_m(x, y)$
$+ (B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} y + \dots + B_{m-1} x y^{m-2} + B_{m-1} y^{m-1})$	$(m-1)^{ème}$ degré	$\varphi_{m-1}(x, y)$
....	....	....
$+ (M_0 x^3 + M_1 x^2 y + M_2 x y^2 + M_3 y^3)$	3ème degré	$\varphi_3(x, y)$
$+ (N_0 x^2 + N_1 xy + N_2 y^2)$	2ème degré	$\varphi_2(x, y)$
$+ (P_0 x + P_1 y)$	1er degré	$\varphi_1(x, y)$
$+ \quad H$	terme constant	φ_0 .

D'après cette notation que nous emploierons souvent, nous aurons :

$$f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \varphi_{m-2}(x,y) + \dots \varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 ;$$

la fonction $\varphi_i(x,y)$ est une fonction homogène des variables x et y et du degré i.

Or la fonction $\varphi_m(x,y)$ renferme $(m+1)$ termes ; la fonction $\varphi_{m-1}(x,y)$ en renferme m ; en général, la fonction $\varphi_i(x,y)$ renferme $(i+1)$ termes ; par conséquent le nombre total N des termes de la fonction $f(x,y)$ est

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}.$$

Ainsi le nombre N des termes d'une fonction entière et du degré m par rapport aux deux variables x et y est donné par la formule

$$(1) \qquad N = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}.$$

D'après cela, l'équation d'une courbe du 1er ordre (ou ligne droite) renferme trois termes ; l'équation d'une courbe du 2e ordre renferme six termes.

LIVRE PREMIER.

Ligne droite et point.

Chapitre I

Ligne droite.

§ 1. Equation d'une droite assujettie à diverses conditions.

1° Equation du 1er Degré.

37. Toute équation du premier degré par rapport aux variables x et y peut se mettre sous la forme :

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0 .$$

Si x et y désignent les coordonnées d'un point quelconque du plan et que A, B, C, soient des constantes, cette équation représente une ligne droite. En effet, l'équation (1) étant du premier degré, le lieu géométrique qu'elle représente jouit de la propriété de n'être rencontré qu'en un seul point par une droite quelconque [35] ; or c'est là la propriété caractéristique de la ligne droite.

38. On peut encore établir cette proposition par les considérations suivantes :

1° Supposons d'abord qu'un des coefficients A ou B soit nul, l'équation (1) prendra l'une ou l'autre des formes :

$$x - a = 0, \qquad y - b = 0 ;$$

la 1ère de ces équations représentera une parallèle à l'axe des y, et la 2e une parallèle à l'axe des x.

Considérons, par exemple, l'équation $x - a = 0$; soit $OA = a$, et menons par le point A une parallèle à l'axe Oy. Si M est un point quelconque situé sur cette parallèle, ses coordonnées ($x_1 = a$, $y_1 = AM$) vérifient évidemment l'équation $x - a = 0$, car cette équation est indépendante de y. Un point, non situé sur cette parallèle aura une abscisse différente de a ; et alors, quel que soit y, les coordonnées de ce point ne vérifieront pas l'équation $(x - a) = 0$. Cette équation représente donc une parallèle à l'axe des y.

On démontrerait de la même manière que l'équation $y-b=0$ représente une parallèle de l'axe des x.
Les équations des droites Oy et Ox sont respectivement $x=0$ et $y=0$

2° Supposons maintenant que A et B ne soient pas nuls, l'équation (1) pourra se mettre sous la forme:

$$(2) \qquad y = ax + b,$$

en posant

$$(3) \qquad a = -\frac{A}{B}, \; b = -\frac{C}{B}.$$

Si l'on fait $x=0$ dans l'équation (2), on trouve $y=b$; le point B, dont les coordonnées sont $x_1=0$, $y_1=OB=b$, appartient donc au lieu géométrique représenté par l'équation (2). Menons par le point B une parallèle Bx' à Ox.

Supposons d'abord $a>0$, et soit M un point du lieu correspondant à l'abscisse OP; l'ordonnée PM de ce point sera donnée par l'équation (2) où l'on fera $x=OP$, on aura ainsi:

$$PM = a \,.\, OP + b \;;$$

or $b = OB = PH$; donc

$$(PM - PH) \text{ ou } HM = a \,.\, OP \;;$$

HM est une quantité positive, le point M est donc au dessus de Bx'.

Soit un second point M' correspondant à l'abscisse positive OP', on trouvera de même

$$H'M' = a \,.\, OP',$$

et le point M' se trouvera au dessus de Bx'.

Or, les trois points B, M, M' sont en ligne droite. Joignons en effet, BM et BM'; les deux triangles BHM et $BH'M'$ sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels car les angles BHM et $BH'M'$ sont égaux comme angles correspondants, et on a, en outre, les égalités

$$\frac{MH}{BH} = a, \; \frac{M'H'}{BH'} = a,$$

puisque $BH = OP$ et $BH' = OP'$. On conclut delà l'égalité des angles $\widehat{MBH}$ et $\widehat{M'BH'}$.

Si l'on considère une abscisse négative OP'' on aura pour le point correspondant M'', en mettant en évidence le signe de l'ordonnée, si M'' est au dessous de l'axe des x,

$$H''M'' = a \,.\, OP'' \;;$$

$H''M''$ est donc une quantité négative et le point M'' est au dessous de Bx'; et en raisonnant comme précédemment, on démontrera que le point M'' est sur la droite BM. Par conséquent tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation (2) se trouvent situés sur la droite BM.

On discutera de la même manière le cas où a est négatif.

Réciproquement: Les coordonnées d'un point quelconque situé sur BM vérifient l'équation (2). Soit M_1 un de ces points, dont l'abscisse et l'ordonnée sont respectivement OP_1 et P_1M_1. A cause de la similitude des triangles BMH et BM_1H_1, on a:

$$\frac{M_1H_1}{BH_1} = \frac{MH}{BH} = a \;;$$

mais

$$BH_1 = OP_1, \; M_1H_1 = M_1P_1 - H_1P_1 = M_1P_1 - b \;;$$

par conséquent

$$M_1P_1 = a \,.\, OP + b \;;$$

c. a. d. que les coordonnées ($x_1 = OP_1$, $y_1 = M_1P_1$) du point M_1 vérifient l'équation (2).

Ainsi une équation du 1er degré entre les deux variables x et y représente une ligne droite.

9. La constante b, qui entre dans l'équation (2),

$$y = ax + b$$

est dite l'ordonnée à l'origine de la droite; c'est la distance à l'origine du point où la droite rencontre l'axe des y.

La constante a porte le nom de coefficient angulaire de la droite; on voit à priori que cette constante représente un rapport, puisque l'équation (2) est homogène et que x, y et b désignent des lignes. Ce rapport

ne peut dépendre que de l'inclinaison de la droite.

Désignons par α l'angle de la droite BM avec l'axe Ox, et soient x et y les coordonnées d'un point M de la droite ; on a :

$$y = ax + b, \quad \text{d'où}: \quad \frac{y-b}{x} = a.$$

Or $y - b = MH$, $x = OP = BH$; et le triangle BMH donne

$$\frac{MH}{BH} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

θ étant l'angle des axes.

On a donc la relation suivante dont on fait souvent usage

$$(4) \qquad a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} ;$$

« θ est l'angle des axes ; α est l'angle (compté de x vers y) avec la partie positive de l'axe des x, de la portion de la « droite qui se trouve du même côté que la partie positive de l'axe des y ; » sous ces conditions, la relation (4) est générale.

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, on a $\theta = 90°$; par suite,

$$(5) \qquad a = \tan g.\, \alpha.$$

II°. Équation d'une droite.

40. Nous démontrerons la réciproque de la proposition précédente, savoir :

L'équation d'une ligne droite est du premier degré, en cherchant les différentes formes de l'équation d'une droite correspondant à différentes données.

1°. On se donne l'ordonnée à l'origine et l'angle de la droite avec l'axe des x ;

Soient b l'ordonnée à l'origine et α l'angle de la droite avec l'axe des x ;

Considérons un point quelconque M (x,y) de cette droite ; construisons les coordonnées du point M ; et, par l'extrémité B de l'ordonnée à l'origine, menons Bx' parallèle à Ox ; le triangle MBH donne :

$$\frac{MH}{BH} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} ;$$

or

$$MH = y - b, \quad BH = OP = x ;$$

on a, par suite :

$$(1) \qquad y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\,x + b.$$

Cette équation établissant une relation entre les coordonnées d'un point quelconque (x, y) de la droite, est l'équation de la droite.

2°. On se donne la distance de la droite à l'origine, et l'angle que fait avec l'axe des x positifs la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite et dirigée vers la droite.

Soit p la valeur absolue de cette distance, et ω l'angle défini dans l'énoncé ; soit, en outre, M un point quelconque de la droite ; construisons les coordonnées x et y de ce point, et projetons le contour OPMI sur OI. En remarquant que MI est perpendiculaire à OI, puisque le lieu du point M est une droite, on trouve :

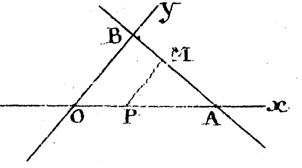
$$(2) \qquad x\cos\omega + y\cos(\theta-\omega) = p.1 ;$$

C'est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de la droite, c'est l'équation de la droite.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, on a $\theta = 90°$, et l'équation de la droite prend la forme :

$$(3) \qquad x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0.$$

3°. On donne les coordonnées à l'origine de la droite, c.à.d. les distances à l'origine des points où cette droite rencontre les axes des coordonnées.



Soit M (x, y) un point quelconque de la droite, MP et OP ses coordonnées ; $OA = a$, $OB = b$ les coordonnées à l'origine de la droite. Les deux triangles semblables MPA et BOA donnent :

$$\frac{MP}{OB} = \frac{PA}{OA}, \text{ ou } \frac{y}{b} = \frac{a-x}{a};$$

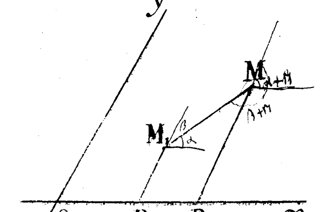
équation qui peut s'écrire sous la forme symétrique

$$(4) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

c'est l'équation de la droite.

4° On donne un point (x_1, y_1) et les angles (α, β) de la droite avec les axes de coordonnées.

Les angles α, β, angles de la droite avec les axes positifs de coordonnées, déterminent à partir du point M_1 ce que nous appellerons la direction positive de la droite; la direction négative ou opposée sera déterminée par les angles $\alpha+\pi$, $\beta+\pi$.



Soit $M(x, y)$ un point quelconque de la droite; projetons les contours OPM et OP_1M_1M sur Ox et Oy, (voir N° (31), nous obtenons les relations:

$$\begin{cases} (x-x_1) + (y-y_1)\cos\theta = l\cos\alpha, \\ (x-x_1)\cos\theta + (y-y_1) = l\cos\beta; \end{cases}$$

d'où l'on conclut:

$$(5) \qquad \frac{(x-x_1)+(y-y_1)\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{(x-x_1)\cos\theta+(y-y_1)}{\cos\beta};$$

c'est l'équation de la droite.

Si l'on suppose les axes rectangulaires, cette équation pourra s'écrire:

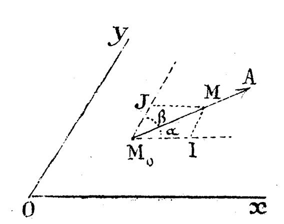
$$(6) \qquad \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n},$$

avec la condition:

$$(6 \text{ bis}) \qquad m^2 + n^2 = 1.$$

Les quantités m et n déterminant la direction positive de la droite à partir du point M_1, la direction négative sera déterminée par les quantités $-m$ et $-n$.

5° On donne un point (x_0, y_0) d'une droite et les angles α et β qu'elle fait avec les axes Ox et Oy, trouver les coordonnées d'un quelconque de ses points.



Soit M_0A la portion de droite déterminée, à partir de M_0, par les angles α et β; si M est un point quelconque de M_0A, et x, y les coordonnées de ce point, on a

$$x = x_0 + M_0I, \quad y = y_0 + M_0J;$$

or, en désignant par ρ la distance M_0M, on a (θ étant l'angle des axes)

$$\frac{M_0I}{\rho} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}, \quad \frac{M_0J}{\rho} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta};$$

d'où l'on conclut:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\dfrac{\sin\beta}{\sin\theta}, \\ y = y_0 + \rho\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Ces formules sont générales sous les conditions suivantes:

1° « La distance ρ ou M_0M sera regardée comme positive ou négative suivant que le point M se trouvera sur la portion de « droite M_0A déterminée par les angles α et β, ou sur le prolongement de cette droite.

2° « L'angle α sera compté à partir de Ox vers M_0A, et on le regardera comme positif ou négatif suivant qu'on ira de Ox « vers Oy ou en sens contraire. L'angle β sera compté à partir de Oy vers M_0A, et on le regardera comme positif ou « négatif suivant qu'on ira de Oy vers Ox ou en sens contraire. »

On constatera la généralité de ces formules en plaçant successivement la droite M_0A dans les quatre angles formés par les parallèles aux axes de coordonnées et menées par M_0; et, dans chacun de ce cas, on considérera le point M sur M_0A, puis sur son prolongement.

Dans le cas des axes rectangulaires, les formules qui résolvent la question posée sont:

$$(8) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\alpha, \\ y = y_0 + \rho\sin\alpha. \end{cases}$$

Ces formules sont fort utiles dans un grand nombre de circonstances.

41. Une droite est déterminée par deux points.

Il résulte, en effet, des propositions qu'on vient d'établir que l'équation d'une droite est de la forme :

$$Ax+By+C=0.$$

Or on exprimera que cette droite passe par deux points donnés en écrivant que l'équation précédente est vérifiée par les coordonnées de ces deux points; on sera ainsi conduit à deux relations qui détermineront les rapports des coefficients A, B, C, à l'un d'entre eux. Après la substitution de ces valeurs, l'équation représentera une droite unique et parfaitement déterminée.

Si, en particulier, l'un des points donnés est l'origine des coordonnées, on trouve $C=0$; l'équation d'une droite passant par l'origine est donc :

$$Ax+By=0, \text{ ou } y=ax.$$

III.° Droite de l'infini.

42. En remplaçant x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ dans l'équation :

$$Ax+By+C=0,$$

nous aurons :

$$(1) \qquad Ax+By+Cz=0,$$

c'est l'équation en coordonnées homogènes d'une droite quelconque; $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont des rapports représentant les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque de la droite; x, y, z, sont les coordonnées homogènes de ce point.

Les coordonnées à l'origine de la droite (1) auront pour valeurs :

$$OM=\frac{x_1}{z_1}=-\frac{C}{A},\quad OM=\frac{y_1}{z_1}=-\frac{C}{B};$$

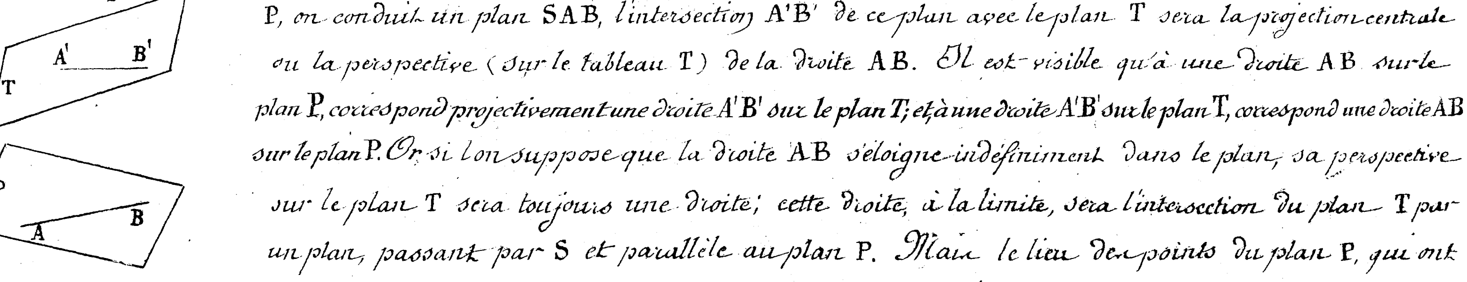
or supposons que les constantes arbitraires A et B diminuent de plus en plus et tendent vers zéro, tandis que C ne devient pas nulle, les distances OM et ON deviendront de plus en plus grandes, et la droite MN s'éloignera indéfiniment; lorsque A et B seront devenus nuls, nous dirons que la droite s'est transportée à l'infini dans le plan.

D'un autre côté, l'équation (1) se réduit, lorsque A et B sont nuls, à :

$$(2) \qquad z=0$$

nous pouvons donc regarder cette équation comme exprimant que la droite (1) s'est éloignée à l'infini.

43. Il importe de donner dès maintenant quelques explications sur la conception de la droite de l'infini.



Imaginons un point fixe S et deux plans T et P; si par le point S et une droite quelconque AB, située dans le plan P, on conduit un plan SAB, l'intersection A'B' de ce plan avec le plan T sera la projection centrale ou la perspective (sur le tableau T) de la droite AB. Il est visible qu'à une droite AB sur le plan P, correspond projectivement une droite A'B' sur le plan T; et à une droite A'B' sur le plan T, correspond une droite AB sur le plan P. Or si l'on suppose que la droite AB s'éloigne indéfiniment dans le plan, sa perspective sur le plan T sera toujours une droite; cette droite, à la limite, sera l'intersection du plan T par un plan, passant par S et parallèle au plan P. Mais le lieu des points du plan P, qui ont pour perspective une droite, est une droite; nous devons étendre cette propriété au cas limite, et nous pouvons dire que

tous les points à l'infini sur un plan sont sur une droite; on donne à l'ensemble de ces points le nom de droite de l'infini ou droite à l'infini.

Il faut remarquer cependant que la situation relative des points à l'infini est indéterminée, en d'autres termes, la direction de la droite de l'infini est indéterminée. Cette indétermination de la situation relative des points à l'infini ressort des considérations géométriques que nous venons de présenter; car, quelle que soit la marche suivie par

le plan SAB pour devenir parallèle au plan P, la perspective de la droite AB sera, à la position limite, une droite unique; et cependant la direction de la droite AB varie avec la loi du mouvement du plan SAB; elle ressort aussi du raisonnement analytique qui précède (42); car les constantes A et B peuvent tendre simultanément vers zéro et leur rapport rester indéterminé; la droite MN s'éloigne alors à l'infini et sa direction reste également indéterminée.

De là nous tirerons les conséquences suivantes:

1° Si l'équation $z=0$ est écrite à priori, ou si elle dérive de l'équation (1) en y supposant que les constantes A et B tendent simultanément vers zéro et que leur rapport reste indéterminé, l'équation:

$$z=0$$

représentera la suite indéterminée des points à l'infini ou la droite de l'infini.

2° Si l'équation $z=0$ résulte de l'équation (1) en y supposant que les constantes A et B tendent simultanément vers zéro mais que leur rapport reste constant, l'équation:

$$z=0$$

représentera une suite de points à l'infini sur une parallèle à la direction considérée c. à. d. une droite à l'infini parallèle à une direction déterminée.

44. Étant donnée l'équation d'une courbe:

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

si l'on y remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ et qu'on chasse le dénominateur z, nous obtiendrons l'équation:

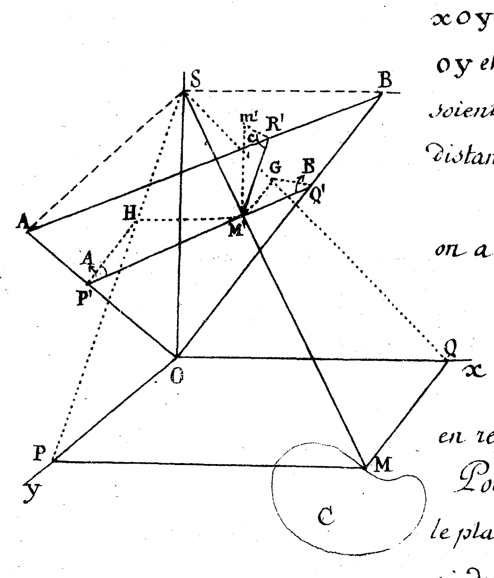
$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0 ;$$

l'équation (2) est homogène en x, y, z; elle représente une courbe parfaitement déterminée et la même courbe que l'équation (1), puisque cette équation ne renferme que les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ lesquels désignent aussi les coordonnées Cartésiennes x et y d'un point.

Lorsqu'on fera subir cette transformation à l'équation (1), nous dirons qu'on la rend homogène. Nous pouvons interpréter l'équation (2) à un autre point de vue géométrique; nous allons d'en maintenant signaler cette interprétation.

Soient deux axes rectangulaires, Ox et Oy, dans le plan où se trouve la courbe (C) ou $f(x, y)=0$; faisons la perspective de la courbe située dans le plan xOy, en prenant pour sommet de la perspective un point S situé sur la perpendiculaire OS au plan xOy et en supposant que le plan sur lequel on fait la perspective passe par le point O.

Soient OB, OA, AB, les intersections du plan de perspective par les plans SOx, SOy, et par un plan passant par S et parallèle à xOy; soient encore A, B, C, les angles respectifs du plan OAB avec les plans SOy, SOx, xOy. Si M est un point du plan xOy et que MP et MQ soient ses distances aux axes Oy et Ox; si M' est la perspective de ce point sur le plan AOB et que M'P', M'Q', M'R', soient ses distances respectives aux droites OA, OB, AB; en désignant respectivement ces distances par X, Y, Z,



$$X = M'P', \; Y = M'Q', \; Z = M'R',$$

on a les relations:

$$(3) \quad \begin{cases} MP = h \dfrac{\sin A}{\sin C} \cdot \dfrac{X}{Z}, \\ MQ = h \dfrac{\sin B}{\sin C} \cdot \dfrac{Y}{Z}; \end{cases}$$

en représentant par h la distance OS.

Pour démontrer ces relations, menons M'G parallèle à MQ; cette parallèle rencontrera le plan SOx en un point G situé sur SQ, elle sera, en outre, perpendiculaire au plan SOx; si du point G on abaisse GQ' perpendiculaire sur OB et qu'on joigne M'Q', M'Q' sera, d'après le théorème des trois perpendiculaires, perpendiculaire à OB; l'angle $\widehat{GQ'M'}$ sera l'angle rectiligne de l'angle

du plan AOB avec le plan SOx, ce sera l'angle B.

Le triangle $M'GQ'$, rectangle en G donne :

$$M'G = M'Q'.\sin B;$$

mais, d'après les triangles semblables $SMQ, SM'G$, on a :

$$\frac{M'G}{MQ} = \frac{SM'}{SM}, \text{ ou } M'G = \rho.MQ,$$

en représentant par ρ le rapport $\frac{SM'}{SM}$. Il vient donc :

$$(1^o) \qquad MQ = \frac{\sin B}{\rho} M'Q'.$$

Effectuant les mêmes constructions pour le plan SOy, c. a. d. menons $M'H$ parallèle à MP, puis HP' perpendiculaire à OA; joignant $M'P'$ et remarquant que $\widehat{HP'M'} = A$ on trouvera encore :

$$(2^o) \qquad MP = \frac{\sin A}{\rho}.M'P'.$$

Enfin, menons par M' une parallèle $M'm'$ à OS et terminée en m' au plan ASB; soit ensuite $m'R'$ perpendiculaire à AB; la droite $M'R'$ sera dès-lors perpendiculaire à AB, et $\widehat{M'R'm'}$ mesurera le dièdre C. On aura, dans le triangle rectangle $M'm'R'$,

$$M'm' = M'R'.\sin C.$$

Mais les triangles semblables $SM'm'$ et SOM donnent :

$$\frac{M'm'}{h} = \frac{SM'}{SM} = \rho;$$

par suite :

$$(3^o) \qquad h = \frac{\sin C}{\rho}.M'R'.$$

Divisant membre à membre les égalités $(1^o), (2^o), (3^o)$, il vient :

$$\begin{cases} MP = h\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{M'P'}{M'R'} = h\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{X}{Z}, \\ MQ = h\dfrac{\sin B}{\sin C}\cdot\dfrac{M'Q'}{M'R'} = h\dfrac{\sin B}{\sin C}\cdot\dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

On a donc :

$$(4^o) \qquad \begin{cases} MP = \dfrac{x}{z} = h\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{X}{Z} = \lambda\dfrac{X}{Z}, \\ MQ = \dfrac{y}{z} = h\dfrac{\sin B}{\sin C}\cdot\dfrac{Y}{Z} = \mu\dfrac{Y}{Z}. \end{cases}$$

45. Ceci posé, soit l'équation d'une courbe située dans le plan xOy,

$$(5^o) \qquad f(x, y, z) = 0, \text{ ou } f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0;$$

cette équation deviendra par la substitution (4)

$$(6^o) \qquad f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0.$$

Mais on peut disposer des constantes qui entrent dans λ et μ, et cela d'une infinité de manières, de façon que λ et μ soient égaux à l'unité; l'équation de la courbe (6) deviendra alors.

$$(7^o) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

Nous voyons donc, en comparant les équations (5) et (7), que l'équation (5) peut être interprétée de deux manières différentes :

On peut regarder x, y, z, comme les coordonnées homogènes d'un point du plan xOy, et l'équation (5) représentera une courbe (C) située dans ce plan.

On peut aussi regarder x, y, z, comme les distances d'un point du plan OAB (satisfaisant aux conditions indiquées) aux trois droites OB, OA et AB; et l'équation (5) représentera la perspective (C'), sur le plan OAB, de la courbe (C).

La courbe (C) est aussi la perspective, sur le plan xOy, de la courbe (C')

Remarque. Dans l'équation primitive $f(x, y, 1) = 0$, x et y représentent des lignes; dans cette équation rendue homogène $f(x, y, z) = 0$, les quantités $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, représentent toujours des lignes. Si l'on remplace $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ par $\lambda\frac{X}{Z}$ et $\mu\frac{Y}{Z}$, on a l'équation $f(\lambda X, \mu Y, Z) = 0$ où λ, μ, X, Y, Z, désignent des lignes,

comme on le voit par les formules (4). Lorsqu'on suppose $\lambda = \mu = 1$, on prend pour unité une des lignes de la figure puisque $h \frac{\sin A}{\sin B} = 1$; l'équation de la courbe perd alors l'homogénéité entendue dans le sens expliqué au N.° (18).

46. La droite AB est la perspective de tous les points à l'infini dans le plan xoy; et, inversement, tous les points de la droite AB se trouvent projetés à l'infini sur le plan xoy; de sorte que, tous les points à l'infini sur le plan xoy peuvent être regardés comme situés sur une droite dont la perspective est AB.

Or les relations (4) nous montrent qu'à un point situé sur la droite AB, pour lequel on a alors $z = 0$, correspond un point pour lequel $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ sont infinis; et, comme x et y sont arbitraires, on a pour tous ces points

$$z = 0$$

cette équation représente donc la droite de l'infini dans le plan xoy; ou, en perspective, la droite AB.

Ainsi, les particularités de la courbe (C), qui se trouveront sur la droite de l'infini, se reproduiront, en perspective, sur la ligne AB c.a.d. sur la projection de la droite de l'infini; et inversement les particularités que la Courbe (C') présentera sur la droite AB se trouveront projetées sur la ligne à l'infini, lorsqu'on fera la perspective de la Courbe (C') sur le plan xoy.

Remarque. Soit l'équation d'une courbe d'ordre m

$$(C)\quad \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \dots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0;$$

Supposons que toutes les constantes s'annulent sauf la constante φ_0; on doit conclure alors que la courbe se réduit à un système de m droites coïncidentes et transportées à l'infini. Ceci résulte de l'équation rendue homogène savoir:

$$(C')\quad \varphi_m(x,y) + z\varphi_{m-1}(x,y) + \dots + z^{m-1}\varphi_1(x,y) + \varphi_0 z^m = 0$$

laquelle se réduit à $z^m = 0$. On peut encore regarder la courbe (C') comme la perspective de la courbe (C); on voit alors que la courbe se réduit à m droites coïncidant avec la perspective de la droite de l'infini.

Ainsi on ne peut pas dire que les points à l'infini dans un plan à distance finie sont sur une courbe d'ordre m; seulement une courbe d'ordre m peut se réduire à m droites coïncidant avec la droite de l'infini.

IV.° Equation d'une droite passant par un point fixe. Droite parallèle à une droite fixe.

---

47. 1.° Supposons le point fixe déterminé par ses coordonnées x_1, y_1, et soit:

$$(1°)\qquad Ax + By + C = 0$$

l'équation générale d'une droite. Le point x_1, y_1 étant sur la droite, ses coordonnées doivent vérifier l'équation de cette droite et l'on a:

$$(2°)\qquad Ax_1 + By_1 + C = 0$$

Cette égalité détermine un des coefficients A, B, ou C; l'équation cherchée s'obtiendra en retranchant (1°) et (2°) membre à membre, ce qui donne:

$$(1)\qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

c'est l'équation générale des droites passant par le point (x_1, y_1); elle ne renferme qu'un seul paramètre variable, car les constantes A et B n'y entrent que par leur rapport. On peut l'écrire sous la forme:

$$(2)\qquad y - y_1 = a(x - x_1),$$

en posant $a = -\frac{A}{B}$; a est le coefficient angulaire indéterminé.

2.° Supposons le point fixe défini par l'intersection de deux droites, telles que:

$$(3)\qquad \begin{cases} M = mx + m_1 y + m_2 = 0, \\ N = nx + n_1 y + n_2 = 0; \end{cases}$$

l'équation générale des droites passant par l'intersection des deux droites données sera:

$$(4) \qquad M + \lambda N = 0,$$

λ étant une constante indéterminée.

En effet l'équation (4) étant du 1er degré en x et y, représente une droite; les coordonnées du point d'intersection des droites (3) annulent M et N, et, par suite, vérifient l'équation (4); donc la droite (4) passe par le point d'intersection des deux droites données. Enfin, l'équation (4) est l'équation générale des droites satisfaisant à cette condition; c. a. d. qu'elle représente toutes les droites passant par le point donné. En effet, une quelconque de ces droites sera complètement déterminée lorsqu'on l'assujetira à passer par un second point différent du point donné; or on pourra toujours disposer de λ de manière à ce que la droite (4) passe par ce second point arbitrairement choisi; donc l'équation (4) pourra représenter une quelconque des droites cherchées.

48. **Droite parallèle à une droite fixe.**

1° Lorsque deux droites sont parallèles, leurs coefficients angulaires sont égaux.

Soient, en effet, a le coefficient angulaire de la 1re droite, et α son angle avec l'axe Ox;
a' le coefficient angulaire de la 2me droite, et α' son angle avec Ox;

on a, θ étant l'angle des axes,

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}, \quad a' = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')}$$

Si les deux droites sont parallèles, on a $\alpha = \alpha'$; et, par suite, $a = a'$.

Réciproquement, si les coefficients angulaires sont égaux, les droites sont parallèles.

On a, en effet, d'après cette hypothèse,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')};$$

ou

$$2 \sin \alpha \sin(\theta - \alpha') = 2 \sin \alpha' \sin(\theta - \alpha);$$

on a encore:

$$\cos(\theta - \alpha - \alpha') - \cos(\theta + \alpha - \alpha') = \cos(\theta - \alpha - \alpha') - \cos(\theta - \alpha + \alpha');$$

et enfin

$$\cos(\theta + \alpha - \alpha') = \cos(\theta - \alpha + \alpha').$$

Les cosinus étant égaux, la somme ou la différence des arcs est égale à un nombre entier de circonférences; or la somme ne peut pas être égale à $2K\pi$, car il en résulterait alors $\theta = K\pi$, ce qui n'est pas; on a donc:

$$\alpha - \alpha' = K\pi;$$

ce qui exige que les droites soient parallèles.

2° On conclut de là que l'équation d'une droite, passant par un point donné (x_1, y_1) et parallèle à une droite dont le coefficient angulaire a, est:

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

V° Équation d'une droite passant par deux points.

49. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des deux points donnés, et:

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une droite, A, B, C étant indéterminées; exprimons que cette droite passe par les deux points donnés, on aura les conditions:

$$(2) \qquad Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$(3) \qquad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

De ces deux relations il faut tirer $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$, puis transporter leurs valeurs dans l'équation (1); ou, ce qui revient au même, éliminer A, B, C, entre les trois équations (1), (2), et (3), homogènes et du 1er degré

par rapport aux constantes A, B, C; le résultat de l'élimination est:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant ce déterminant,

$$(4\,bis)\qquad x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

On peut encore faire l'élimination comme il suit:

Retranchons l'équation (2) de l'équation (1), puis de l'équation (3), il vient:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$
$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0;$$

d'où l'on conclut en divisant membre à membre, après avoir fait passer les termes en B dans le second membre,

$$(5)\qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

ou encore:

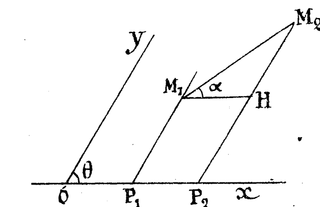
$$(5\,bis)\qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

les équations (4), (4 bis), (5), (5 bis) sont les différentes formes de l'équation de la droite passant par les deux points donnés.

La dernière forme nous montre que le coefficient angulaire a d'une droite passant par deux points est:

$$(6)\qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Le coefficient angulaire peut s'obtenir directement de la manière suivante:



Les deux points donnés étant M_1 et M_2, menons leurs coordonnées et la parallèle M_1H à l'axe des x; le triangle M_1HM_2 donne:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{M_2H}{M_1H};$$

Or: $M_2H = y_2 - y_1$; $M_1H = x_2 - x_1$;

donc (6) $\qquad a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$

50. Équation d'une droite passant par un point donné (x_1, y_1) et par le point d'intersection de deux droites données $M = 0, N = 0$.

L'équation générale des droites passant par l'intersection des deux droites données est: N.° (47).

$$(mx + m_1 y + m_2) + \lambda(nx + n_1 y + n_2) = 0;$$

nous déterminerons λ en exprimant qu'elle passe par le point donné; on trouve pour l'équation de la droite cherchée:

$$(7)\qquad \frac{mx + m_1 y + m_2}{mx_1 + m_1 y_1 + m_2} = \frac{nx + n_1 y + n_2}{nx_1 + n_1 y_1 + n_2}.$$

51. Condition pour que trois points soient en ligne droite.

Soient (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), les trois points donnés; l'équation de la droite passant par les deux derniers points, est: N.° (49)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

pour que les trois points soient en ligne droite, il faut que le premier soit sur la droite qui joint le second et le troisième c. a d. que ses coordonnées vérifient l'équation précédente; on trouve ainsi la condition cherchée:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation développée se présentera sous la forme suivante:

$$(8 \text{ bis}) \quad (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_0 - x_0 y_2) + (x_0 y - x_1 y_0) = 0;$$

les deux dernières parenthèses se déduiront de la première par une permutation circulaire.

VI°. Coordonnées d'un point divisant un segment dans un rapport donné.

52. Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ les deux points qui sont les extrémités du segment; il s'agit de trouver les coordonnées (x, y) d'un point M partageant le segment dans un rapport déterminé, c. à d. tel que:

$$(1) \qquad \frac{MM_1}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$\frac{m_2}{m_1}$ étant la valeur du rapport donné.

Supposons d'abord le point M situé entre les points M_1 et M_2 c. à d. intérieur au segment; menons les ordonnées des trois points, puis, par le point M_1, une parallèle à Ox; on a l'égalité: (dans toutes ces égalités, nous ne considérons, pour un instant, que la valeur absolue des segments):

$$\frac{MP}{M_2P_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2},$$

ou:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2};$$

d'où l'on conclut:

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

On a aussi:

$$\frac{M_1P}{M_1P_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2}, \text{ ou } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_2}{m_2 + m_1};$$

d'où l'on conclut encore:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Ainsi, en supposant les coordonnées positives, les coordonnées d'un point M intérieur au segment M_1M_2 et le partageant dans un rapport donné, savoir:

$$(1) \qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

sont:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\ y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que ces formules, à l'aide de conventions convenables, peuvent convenir à tous les cas.

Supposons, en effet, le point M extérieur au segment M_1M_2; il se trouvera à droite ou à gauche suivant que m_2 sera supérieur ou inférieur à m_1.

Plaçons le à droite, par exemple; on aura, comme on le voit par la figure ci-contre:

$$\frac{MP}{M_2P_2} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}, \text{ ou } \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m_2}{m_2 - m_1};$$

puis:

$$\frac{M_1P}{M_1P_2} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}, \text{ ou } \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}.$$

On déduit de ces deux égalités:

$$(1°) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{-m_1 x_1 + m_2 x_2}{-m_1 + m_2}, \\ Y = \dfrac{-m_1 y_1 + m_2 y_2}{-m_1 + m_2}. \end{cases}$$

En supposant le point M à gauche du segment M_1M_2, on trouvera:

$$(2°) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2}, \\ Y = \dfrac{m_1 y_1 - m_2 y_2}{m_1 - m_2}. \end{cases}$$

On voit que les groupes de formules (1°) et (2°) rentreront dans le groupe (2), si l'on convient de regarder le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ comme positif ou négatif, suivant que le point de division sera intérieur ou extérieur au segment.

Quant à la position extérieure du point de division, elle dépendra de la valeur absolue du rapport $\frac{m_2}{m_1}$; ainsi, d'après l'égalité (1), le point M sera du côté de M_2 ou du côté de M_1 suivant que le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ sera plus grand ou plus petit que l'unité.

Il nous reste enfin à démontrer que les formules (2) sont vraies, quels que soient les signes des coordonnées. Pour cela, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à ce que les coordonnées des points soient toutes positives; soient alors (X', Y'), (x_1', y_1'), (x_2', y_2') les nouvelles coordonnées des trois points M, M_1, M_2; et a, b, les coordonnées de la nouvelle origine. Les formules (2) sont applicables au cas actuel, puisque les coordonnées sont toutes positives; on aura, par exemple,

$$(m_1+m_2)\,X' = m_1 x_1' + m_2 x_2').$$

Mais on a, N° (28):

$$X = a + X', \quad x_1 = a + x_1', \quad x_2 = a + x_2'.$$

Déduisant de là les valeurs de X', x_1', x_2', et substituant leurs valeurs dans la relation précédente, on trouve, toutes réductions faites,

$$(m_1+m_2)\,X = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Les formules (2) sont donc applicables à tous les cas.

53. 1° Convention sur la notation des segments.

Un segment compris entre deux points a et b sera désigné par ab; et nous conviendrons, suivant l'usage adopté dans la Géométrie supérieure, d'indiquer le sens du segment par l'ordre même des lettres, la 1ère lettre désignant l'origine, et la 2me l'extrémité; ainsi ab et ba représenteront des segments de sens contraires.

a b

Nous conviendrons, en outre, de regarder comme positifs les segments dirigés dans un sens, et comme négatifs ceux qui seront dirigés en sens contraire. D'après cela, on aura l'égalité:

$$ab = -ba$$

2° Convention sur le signe des rapports.

Lorsqu'un point divise un segment donné, nous sommes convenus, dans ce qui précède, de regarder le rapport dans lequel le segment est divisé comme positif ou négatif suivant que le point de division est intérieur ou extérieur au segment.

Si nous reprenons les lettres de la question précédente, le rapport sera représenté, eu égard à la convention (1°), en grandeur et en signe, par la notation suivante:

$$\frac{M_1M}{MM_2}; \text{ de sorte que } \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

M_1 M M_2 — M_1 M_2 M

Car, si le point de division M est intérieur, les segments M_1M et MM_2 sont de même sens ou de même signe; ils seront de sens contraires, si le point M est extérieur.

Cette remarque est très-importante; les formules que nous emploierons seront toujours soumises à cette double convention; elles seront alors tout-à-fait générales; et leur application ainsi que l'interprétation des résultats auxquels elles conduiront n'offrira alors ni difficulté, ni ambiguité.

VII° Centre des moyennes distances

54. 1° Définition.

Soit un système de n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dont les coordonnées sont respectivement (x_1, y_1), (x_2, y_2), … (x_n, y_n); on appelle centre des distances proportionnelles de ce système un point dont les coordonnées X et Y sont définies par les relations:

$$(1)\quad \begin{cases} X = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\[2ex] Y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}; \end{cases}$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$ étant des nombres donnés.

Le centre des moyennes distances du système est un point dont les coordonnées sont définies par les relations

$$(2)\quad \begin{cases} X = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \\[2ex] Y = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}. \end{cases}$$

Ces formules se déduisent des premières en y supposant les nombres $m_1, m_2, \dots, m_n$ égaux entre eux.

2°. Construction.

Pour construire le centre des distances proportionnelles du système $M_1, M_2, M_3, \dots$, partageons le segment M_1M_2 dans le rapport inverse du rapport donné $\frac{m_1}{m_2}$; soit I le point de division, de sorte que

$$\frac{M_1 I}{I M_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

les coordonnées x' et y' du point I seront: N°. (52):

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Joignons IM_3, et partageons le segment IM_3 dans le rapport inverse du rapport connu $\frac{m_1+m_2}{m_3}$; soit I′ le point de division, de sorte que:

$$\frac{II'}{I'M_3} = \frac{m_3}{m_1+m_2};$$

les coordonnées x'' et y'' du point I′ seront:

$$I' \quad \begin{cases} x'' = \dfrac{(m_1+m_2)x' + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\[2ex] y'' = \dfrac{(m_1+m_2)y' + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x'' = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\[2ex] y'' = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{cases}$$

Joignons $I'M_4$, et partageons le segment $I'M_4$ dans le rapport inverse du rapport donné $\frac{m_1+m_2+m_3}{m_4}$; soit I″ le point de division, de sorte que:

$$\frac{I'I''}{I''M_4} = \frac{m_4}{m_1+m_2+m_3}.$$

Les coordonnées x''' et y''' du point I″ seront

$$I'' \quad \begin{cases} x''' = \dfrac{(m_1+m_2+m_3)x'' + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \\[2ex] y''' = \dfrac{(m_1+m_2+m_3)y'' + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x''' = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \\[2ex] y''' = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \end{cases}$$

La loi de succession de ces constructions est visible et l'on voit qu'en continuant ainsi on arrivera au point défini par les formules (1) c. à. d. au centre des distances proportionnelles.

La construction du centre des moyennes distances se déduit de celle qui précède; on est ainsi conduit à la règle suivante:

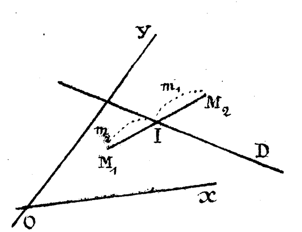
Prenons le milieu I de M_1M_2; joignons IM_3, et prenons sur IM_3 un point I′ tel que $\frac{II'}{I'M_3} = \frac{1}{2}$; joignons $I'M_4$, et prenons sur IM_4 un point I″ tel que $\frac{I'I''}{I''M_4} = \frac{1}{3}$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé, sans répétition, les différents points du système.

VIII°. Trouver le rapport dans lequel une droite donnée partage un segment donné.

55. On donne la droite par son équation.

Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ les extrémités du segment, et :

$$(D) \quad (1) \quad Ax + By + C = 0$$



l'équation de la droite. La droite D coupera le segment M_1M_2 en un certain point I tel que :

$$\frac{M_1I}{IM_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

il s'agit de déterminer le rapport $\frac{m_2}{m_1}$. Si x et y sont les coordonnées du point I, on a N° (52)

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2};$$

le point I appartenant à la droite D, ses coordonnées doivent vérifier l'équation (1) de la droite ; on a donc :

$$A(m_1x_1 + m_2x_2) + B(m_1y_1 + m_2y_2) + C(m_1 + m_2) = 0.$$

Cette équation détermine le rapport inconnu $\frac{m_1}{m_2}$; on en déduit, en effet,

$$(2) \quad \frac{M_2I}{IM_1} = \frac{m_1}{m_2} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_1 + By_1 + C}.$$

Le point de division I sera **intérieur** ou **extérieur** au segment M_1M_2 suivant que le rapport :

$$-\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$$

sera **positif** ou **négatif** ; et, dans ce second cas, le point I sera du côté de M_2 ou du côté de M_1 suivant que la valeur absolue de ce rapport sera inférieure ou supérieure à l'unité.

56. La droite est donnée par deux points.

Soient encore $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ les extrémités du segment ; et (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des deux points qui déterminent la droite D. L'équation de la droite D sera :

$$(D) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ dans lequel cette droite divise le segment M_1M_2 sera donné par la formule (2) ; on trouvera ainsi :

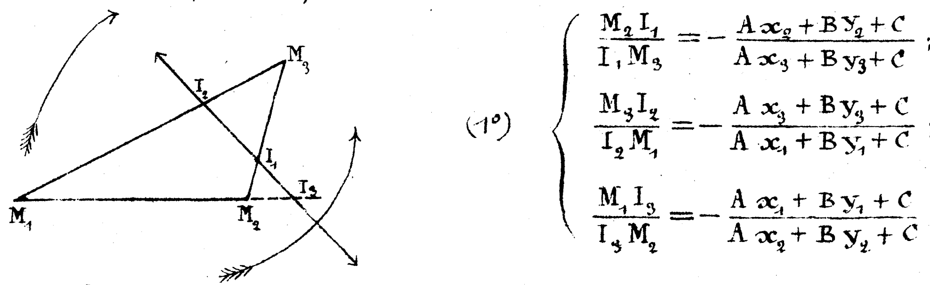
$$(3) \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{M_2I}{IM_1} = -\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}}.$$

57. Applications.

1° Coupons un triangle $M_1M_2M_3$ par une transversale quelconque $I_1I_2I_3$; soit :

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation de cette transversale, et I_1, I_2, I_3, les points où elle coupe respectivement les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 ; on aura d'après la formule (2) N° (55) :



$$(1°) \quad \begin{cases} \dfrac{M_2I_1}{I_1M_3} = -\dfrac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}; \\[2ex] \dfrac{M_3I_2}{I_2M_1} = -\dfrac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}; \\[2ex] \dfrac{M_1I_3}{I_3M_2} = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}. \end{cases}$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient :

$$(2°) \quad \frac{M_2I_1}{I_1M_3} \cdot \frac{M_3I_2}{I_2M_1} \cdot \frac{M_1I_3}{I_3M_2} = -1.$$

On voit, en tenant compte soit de la convention (1°), soit de la convention (2°) N° (53), que cette dernière égalité est vraie algébriquement c. à. d. que les deux membres ont toujours le même signe ; car la transversale

détermine toujours sur les trois côtés d'un triangle ou un seul rapport négatif ou trois rapports négatifs.

Cette vérification, d'ailleurs, n'est pas nécessaire, car les relations que nous avons combinées sont tout-à-fait générales, applicables à tous les cas.

L'égalité (2°) peut encore s'écrire, en ayant égard à la 1re Convention du N° [53]:

$$(4)\qquad M_1I_3 \cdot M_2I_1 \cdot M_3I_2 = M_1I_2 \cdot M_3I_1 \cdot M_2I_3\,;$$

c. à. d. Lorsqu'une sécante quelconque coupe les trois côtés d'un triangle, elle détermine six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres; les segments doivent être regardés comme positifs ou négatifs suivant qu'ils sont dirigés dans un sens ou en sens contraire.

Il est facile de démontrer la réciproque, savoir:

Si trois points, situés sur les côtés d'un triangle, déterminent six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit égal au produit des trois autres, ces trois points sont en ligne droite.

2°. Joignons un point O, pris dans le plan d'un triangle, aux trois sommets M_1, M_2, M_3, de ce triangle; soient I_1, I_2, I_3 les points où les droites OM_1, OM_2, OM_3 rencontrent respectivement les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2; on aura d'après la formule (3) du N° [56], en désignant par x_0, y_0 les coordonnées du point O:

$$(1°)\quad \begin{cases} \dfrac{M_2I_1}{I_1M_3} = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}\,; \\[2em] \dfrac{M_3I_2}{I_2M_1} = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}\,; \\[2em] \dfrac{M_1I_3}{I_3M_2} = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}\,. \end{cases}$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et remarquant que le numérateur du 1er rapport est de signe contraire au dénominateur du second, et ainsi des autres, il vient:

$$(2°)\quad \frac{M_2I_1}{I_1M_3} \cdot \frac{M_3I_2}{I_2M_1} \cdot \frac{M_1I_3}{I_3M_2} = -1.$$

En tenant compte de l'une ou de l'autre des conventions du N° [53], on constate que le premier membre est positif. En ayant égard à la convention (1°) du N° [53], l'égalité (2°) pourra s'écrire:

$$(5)\qquad M_1I_3 \cdot M_2I_1 \cdot M_3I_2 = -M_1I_2 \cdot M_3I_1 \cdot M_2I_3\,.$$

Donc lorsque trois droites, partant des sommets d'un triangle, se rencontrent en un même point, elles déterminent, sur les côtés opposés, six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs est égal à moins le produit des trois autres.

On démontrera facilement la réciproque:

Si trois points situés sur les côtés d'un triangle, sont tels que le produit de trois segments non consécutifs soit égal à moins le produit des trois autres, les droites qui joignent ces points aux sommets opposés se coupent en un même point.

Exercice. Démontrer par un calcul direct les réciproques des deux propositions qui viennent d'être établies.

IX. Intersection de droites.

58. Soient données les équations de deux droites :

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \end{cases}$$

les coordonnées de leur point d'intersection doivent vérifier à la fois les équations de ces deux droites ; on les obtiendra donc en résolvant le système (1) ; on trouve ainsi :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{BC_1 - B_1 C}{AB_1 - A_1 B}, \\[2ex] y = \dfrac{CA_1 - C_1 A}{AB_1 - A_1 B}. \end{cases}$$

Lorsque le dénominateur $(AB_1 - A_1 B)$ est différent de zéro, les formules (2) donnent pour x et y des valeurs finies et déterminées ; les deux droites se coupent.

Si $AB_1 - A_1 B = 0$, et que $AC_1 - A_1 C \gtrless 0$; les valeurs de x et y sont infinies ; les deux droites sont alors parallèles. La relation admise peut s'écrire :

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1},$$

elle exprime ainsi l'égalité des coefficients angulaires des deux droites.

Si $AB_1 - A_1 B = 0$, et qu'en même temps $AC_1 - A_1 C = 0$, les valeurs de x et y sont indéterminées, les deux droites se confondent.

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients des variables soient proportionnels.

Cette proposition se démontre à l'aide des formules (2) comme nous l'avons fait dans la discussion précédente. On peut aussi l'établir comme il suit :

L'équation générale des droites passant par le point de rencontre des deux droites (1) est :

$$Ax + By + C + \lambda\,(A_1 x + B_1 y + C_1) = 0,$$

ou, en rendant homogène et ordonnant :

$$(3) \qquad (A + \lambda A_1)x + (B + \lambda B_1)y + (C + \lambda C_1)z = 0 .$$

Or, si les deux droites (1) sont parallèles, leur point d'intersection se trouve à l'infini ; l'équation (3) doit donc pouvoir représenter la droite de l'infini, ce qui exige que l'on ait : $A + \lambda A_1 = 0$, $B + \lambda B_1 = 0$, ou :

$$(4) \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = -\lambda ;$$

cette condition nécessaire est évidemment suffisante ; car, si elle est remplie, on peut faire passer la droite de l'infini par leur point de concours ; ce point se trouve donc à l'infini.

59. **Condition pour que trois droites se rencontrent en un même point.**

Supposons que les équations des trois droites soient :

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Si x et y sont les coordonnées du point commun à ces trois droites, il faut que les valeurs de x et y tirées des deux premières équations, par exemple, et substituées dans la troisième conduisent à une identité ; c. à. d. que le résultat de l'élimination de x et y entre les trois équations soit nul ; on a donc :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant

$$(2\ bis)\qquad A(B_1C_2-B_2C_1)+A_1(B_2C-BC_2)+A_2(BC_1-B_1C)=0;$$

telle est la condition cherchée.

60. Si $M=0$, $N=0$, $P=0$, sont les équations de trois droites qui ne sont pas concourantes, l'équation d'une droite quelconque pourra toujours se mettre sous la forme:

$$mM+nN+pP=0,$$

m, n, p étant des constantes.

Soient, par exemple:

$$(1)\quad \begin{cases} M=ax+a_1y+a_2=0, \\ N=bx+b_1y+b_2=0, \\ P=cx+c_1y+c_2=0, \end{cases}$$

les équations de trois droites fixes; et soit:

$$(2)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

l'équation d'une droite arbitrairement choisie; α, β, γ, sont donnés. On pourra toujours écrire l'équation de cette dernière droite sous la forme:

$$mM+nN+pP=0,$$

C. à d., en remplaçant M, N, P, par les fonctions linéaires (1) qu'elles représentent.

$$(3)\qquad m(ax+a_1y+a_2)+n(bx+b_1y+b_2)+p(cx+c_1y+c_2)=0.$$

Pour le démontrer, il suffit de constater que l'on peut toujours trouver pour m, n, p, des valeurs finies et déterminées de manière à ce que les deux équations (2) et (3) représentent la même droite. Exprimons, en effet, que les droites (2) et (3) coïncident, on a:

$$(3)\qquad \frac{ma+nb+pc}{\alpha}=\frac{ma_1+nb_1+pc_1}{\beta}=\frac{ma_2+nb_2+pc_2}{\gamma};$$

en désignant par λ la valeur commune de ces rapports, on trouve pour déterminer les valeurs inconnues $\frac{m}{\lambda}, \frac{n}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}$, les trois équations:

$$(4)\quad \begin{cases} ma+nb+pc=\lambda\alpha, \\ ma_1+nb_1+pc_1=\lambda\beta, \\ ma_2+nb_2+pc_2=\lambda\gamma. \end{cases}$$

Si l'on tire de ces équations m, n, p, en fonction de λ et qu'on substitue leurs valeurs dans l'équation (3), l'indéterminée λ disparait comme facteur commun. Or la condition nécessaire et suffisante pour que les valeurs de m, n, p soient finies et déterminées, est que le dénominateur commun c. à. d. le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; mais c'est précisément ce qui a lieu, car si cette expression était nulle, les trois droites M, N, P, seraient concourantes (59); ce qui est contraire à l'hypothèse admise. Donc....

X°. Equations homogènes.

61. Toute équation homogène et du m^{eme} degré entre les coordonnées x et y d'un point, représente un faisceau de m droites ayant pour sommet l'origine.

1re Démonstration.

Soit $f(x,y)=0$ une équation homogène, et A un point du lieu représenté par cette équation; les coordonnées (a,b) du point A devront vérifier l'équation donnée, c. à. d. qu'on aura:

$$(1)\qquad f(a,b)=0.$$

Mais la fonction $f(x,y)$ étant homogène, on a l'identité:

(2) $$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y);$$

laquelle identité donnera, d'après la relation (1),

(3) $$f(\lambda a, \lambda b) = 0;$$

c. à. d. que, quelque soit λ, le point dont les coordonnées sont λa et λb appartiendra au lieu défini par l'équation proposée. Or le point $(\lambda a, \lambda b)$ est un point de la droite OA; soit, en effet, $OP = \lambda a$, menons PM parallèle à Oy jusqu'à sa rencontre en M avec OA; on a :

$$\frac{MP}{AB} = \frac{OP}{OB}, \text{ ou } \frac{MP}{b} = \frac{\lambda a}{a}; \text{ d'où } MP = \lambda b.$$

Il résulte de là que tous les points de la droite OA appartiennent au lieu géométrique en question.

Si (a_1, b_1) sont les coordonnées d'un autre point A_1 vérifiant l'équation proposée, on démontrera de même que la droite OA_1 fait partie du lieu; etc.... Donc l'équation $f(x, y) = 0$ représente un faisceau de droites passant par l'origine; or, il n'y aura pas plus de m droites, car la courbe, qui est du même ordre, ne peut pas être rencontrée en plus de m points par une droite quelconque No. (35). Ainsi l'équation homogène $f(x, y) = 0$ représente m droites réelles ou imaginaires passant par l'origine; parmi ces m droites, plusieurs peuvent être coïncidentes.

2ème Démonstration.

L'équation $f(x, y) = 0$ étant homogène, on a l'identité No. (15)

(4) $$f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Posons $\frac{y}{x} = t$; le polynome $f(1, t)$, de degré m, peut se décomposer en m facteurs du 1er degré réels ou imaginaires; soit, par exemple :

$$f(1, t) = (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_m)$$

L'identité (4) donne alors, en remplaçant t par $\frac{y}{x}$,

$$f(x, y) = x^m\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right)\dots\left(\frac{y}{x} - a_m\right);$$

par suite l'équation de la courbe pourra s'écrire :

(5) $$f(x, y) = (y - a_1 x)(y - a_2 x) \dots (y - a_m x) = 0.$$

Cette équation sera évidemment vérifiée en posant :

ou $y - a_1 x = 0$,

ou $y - a_2 x = 0$,

- - - - - - - - - - -

ou $y - a_m x = 0$.

L'équation $f(x, y) = 0$ est donc vérifiée par les coordonnées de tous les points situés sur ces m droites; ces m droites constituent, par conséquent, le lieu géométrique représenté par l'équation homogène $f(x, y) = 0$.

62. **L'équation $f(x) = 0$, indépendante de y, et du degré m, représente m droites parallèles à l'axe des y.**

Cette équation peut évidemment s'écrire :

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) = 0$$

et la proposition énoncée en résulte immédiatement.

63. **Le nombre des relations nécessaires pour qu'une équation du degré m représente m droites passant par l'origine est égal à $\frac{m(m+1)}{2}$.**

Le nombre total des termes de l'équation est No. (36) $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$; d'après l'hypothèse, l'équation doit être homogène No. (61); il faut donc annuler les coefficients de tous les termes qui suivent ceux du degré m; or le nombre de ces termes est $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - (m+1)$, ou $\frac{m(m+1)}{2}$.

Cor. 1 Pour qu'une équation de degré m représente m droites passant par un point donné, il faut $\frac{m(m+1)}{2}$ relations entre ses coefficients.

Soient, en effet, a et b les coordonnées du point; transportons l'origine en ce point; nous devrons rendre homogène la nouvelle équation, ce qui conduira à $\frac{m(m+1)}{2}$ relations.

Cor. 2. Pour qu'une équation de degré m représente m droites concourantes, il faut $\left(\frac{m(m+1)}{2}-2\right)$ relations entre ses coefficients.

Le point de concours étant indéterminé, il faudra éliminer les quantités a et b entre les relations précédemment obtenues; donc ....

64. Le nombre des conditions pour qu'une équation du degré m représente m droites parallèles à un des axes de coordonnées est égal à $\frac{m(m+1)}{2}$.

On arrive à cette conclusion en s'appuyant sur la proposition du N.° (62) et en raisonnant absolument de la même manière que précédemment.

On peut le conclure aussi des propositions énoncées au N.° (63), lesquelles sont applicables au cas des droites parallèles.

XI.° Points et droites imaginaires.

65. L'introduction des imaginaires dans les études géométriques est une chose indispensable; sans cela, les énoncés généraux deviendraient impossibles, les lois générales disparaitraient. En géométrie analytique, les quantités imaginaires se présentent nécessairement; il nous suffit de préciser le sens que nous devons attacher à ces expressions et d'indiquer les conventions qu'il nous faut adopter.

Lorsque les coordonnées x et y sont réelles, elles déterminent un point; lorsque ces coordonnées seront imaginaires, nous dirons qu'elles déterminent un point imaginaire.

Deux points imaginaires conjugués sont deux points imaginaires dont les coordonnées sont respectivement des imaginaires conjuguées; ainsi

$$(1)\qquad M_1\begin{cases} x_1 = a + a_1\sqrt{-1}, \\ y_1 = b + b_1\sqrt{-1}, \end{cases}\qquad M_2\begin{cases} x_2 = a - a_1\sqrt{-1}, \\ y_2 = b - b_1\sqrt{-1}, \end{cases}$$

sont deux points imaginaires conjugués.

Une équation du 1.er degré, à coefficients réels,

$$(2)\qquad Ax + By + C = 0$$

représente une droite; cette équation est vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points réels; elle est aussi vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points imaginaires; mais à un point imaginaire (situé sur la même droite) correspond toujours un point imaginaire conjugué (situé sur la même droite).

Lorsque les coefficients de l'équation (2) seront imaginaires, nous dirons que l'équation (2) représente une droite imaginaire.

Nous ferons sur les droites imaginaires les remarques suivantes:

1.° Il y a toujours un point réel situé sur une droite imaginaire et il n'y en a qu'un; en effet, l'équation d'une telle droite est de la forme

$$(3)\qquad (A_1 + A_2\sqrt{-1})x + (B_1 + B_2\sqrt{-1})y + (C_1 + C_2\sqrt{-1}) = 0;$$

cette équation est évidemment vérifiée par les coordonnées du point réel intersection des deux droites réelles

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0; \end{aligned}$$

il ne peut évidemment y avoir qu'un seul point réel, car autrement la droite serait réelle.

2.° Nous appelerons coefficient angulaire de la droite imaginaire (3), le rapport

$$-\frac{A_1 + A_2\sqrt{-1}}{B_1 + B_2\sqrt{-1}};$$

ce coefficient angulaire sera réel lorsqu'on aura

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

c. à d. lorsque le point réel (4) situé sur la droite imaginaire sera à l'infini.

3° Sur une droite imaginaire, il n'y a pas de couples de points imaginaires conjugués, si ce n'est à l'infini.

Si nous exprimons, en effet, que l'équation (3) est vérifiée par les coordonnées des deux points (1), on obtient les quatre relations

$$A_1 a + B_1 b + C_1 - (A_2 a_1 + B_2 b_1) = 0,$$
$$A_2 a + B_2 b + C_2 + (A_1 a_1 + B_1 b_1) = 0;$$
$$A_1 a + B_1 b + C_1 + (A_2 a_1 + B_2 b_1) = 0,$$
$$A_2 a + B_2 b + C_2 - (A_1 a_1 + B_1 b_1) = 0;$$

d'où l'on conclut:

$$\begin{cases} A_1 a_1 + B_1 b_1 = 0, \\ A_2 a_1 + B_2 b_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 a + B_1 b + C_1 = 0 \\ A_2 a + B_2 b + C_2 = 0. \end{cases}$$

Les quantités a_1 et b_1 étant différentes de zéro, les deux 1ères relations exigent que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

et alors les valeurs de a et b données par les deux dernières sont infinies.

4° Une droite passant par deux points imaginaires conjugués, est réelle. Ce fait est une conséquence de la remarque précédente; sa vérification est d'ailleurs facile.

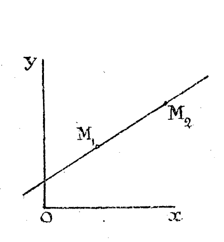
66. 1° L'équation d'une droite réelle peut être mise sous la forme,

$$(5) \qquad \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \quad \text{où } m^2 + n^2 = 1;$$

les quantités m et n déterminant la direction positive de cette droite à partir du point M_1, les quantités $-m$ et $-n$ détermineront la direction négative (N° (40), 4°).

Nous étendrons cette convention aux droites imaginaires, et x_1, y_1, m, n, étant imaginaires, nous dirons que m et n déterminent un des sens de la droite imaginaire (5), et que $-m$ et $-n$ déterminent l'autre.

2° Dans le cas d'un segment réel, $M_1 M_2$ nous avons vu N° (33) équation (10), que la longueur de ce segment sera donnée en grandeur et en signe, par les relations:



$$M_1 M_2 = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta},$$

ou

$$(6) \qquad M_1 M_2 = \frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n},$$

en supposant

$$m^2 + n^2 = 1.$$

M_1 et M_2 étant deux points imaginaires, nous conviendrons de définir par les égalités (6) la grandeur et le sens du segment $M_1 M_2$.

3° Soient M_1, M_2, M_3, trois points imaginaires en ligne droite, si m et n sont les quantités qui déterminent la direction de cette droite, on aura, d'après ce qui précède:

$$M_1 M_2 = \frac{x_2 - x_1}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{y_2 - y_1}{n},$$
$$M_2 M_3 = \frac{x_3 - x_2}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{y_3 - y_2}{n},$$
$$M_3 M_1 = \frac{x_1 - x_3}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1 - y_3}{n};$$

d'où l'on conclut

$$(7) \qquad M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1 = 0;$$

C'est la proposition fondamentale sur l'addition des segments en ligne droite; on voit qu'elle est applicable aux segments imaginaires.

Ainsi se trouve précisé le sens que nous devons donner aux expressions: direction d'une droite imaginaire; sens et grandeur d'un segment imaginaire; addition algébrique des segments imaginaires en ligne droite.

67. Enfin, nous conviendrons d'appliquer aux points imaginaires les formules (2) du N.° (52). Ainsi, étant donnés deux points imaginaires $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$, les relations

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\[2mm] y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

détermineront un point $M(x, y)$, en général imaginaire, partageant le segment imaginaire M_1M_2 dans un rapport

$$(8\ bis)\qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

nous adopterons aussi pour la notation des segments imaginaires la convention du N.° (53), le rapport $\frac{m}{m_1}$ peut aussi être imaginaire.

Comme cas particulier de ces formules, le point milieu M d'un segment imaginaire M_1M_2 sera défini par les relations

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\[2mm] y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Le point milieu d'un segment formé par deux points imaginaires conjugués est réel.

§ II. Angles et distances.

1.° Angle d'une droite avec les axes de Coordonnées.

68. Étant donnée l'équation d'une droite

$$(1)\qquad Ax + By + C = 0,$$

le coefficient angulaire a de cette droite est $-\frac{A}{B}$, et l'on a N. (39)

$$(2)\qquad a = -\frac{A}{B} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

α étant l'angle de la droite avec l'axe des x.

De l'égalité (2) on déduit

$$a(\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta) = \sin\alpha;$$

d'où

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta};$$

cette formule fait connaître l'angle α de la droite avec l'axe des x en fonction du coefficient angulaire a de cette droite.

Lorsque les axes sont rectangulaires, $\theta = 90°$, et l'on a

$$(3\ bis)\qquad \operatorname{tang}\alpha = a$$

On démontre immédiatement, à l'aide de la formule (3), que si les coefficients angulaires a et a' de deux droites sont égaux, les deux droites sont parallèles.

On a, en effet, en désignant par α et α' les angles de ces droites avec ox,

$$\tang \alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta},$$
$$\tang \alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta};$$

or si $a' = a$, il en résulte évidemment $\tang \alpha' = \tang \alpha$; ou

$$\alpha' = \alpha + k\pi.$$

On conclut aussi de la relation (2) que les équations des bissectrices des angles des axes sont:

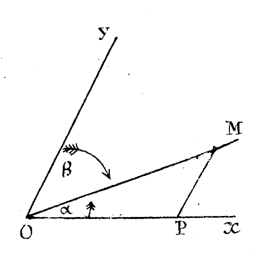
$$y - x = 0, \quad y + x = 0;$$

la 1ère équation donne la bissectrice de l'angle des parties positives des axes; la 2me donne celle de l'angle supplémentaire.

69. **Relation entre les angles d'une droite avec les axes; détermination de ces angles.**

Menons par l'origine des coordonnées une parallèle à la droite considérée; soient α, β, les angles de cette droite avec Ox et Oy, ces angles étant définis comme il a été dit au 5° du N°. (40); soit M un point quelconque de la droite, et $OM = \rho$; projetons le contour OPM des coordonnées x, y, de ce point sur Ox, Oy, et OM, ou a (θ étant l'angle des axes)

$$(4) \quad \begin{cases} x + y\cos\theta = \rho\cos\alpha \\ x\cos\theta + y = \rho\cos\beta \\ x\cos\alpha + y\cos\beta = \rho \end{cases}$$



Éliminant x et y entre ces équations, on trouve la relation cherchée entre les angles α et β, savoir:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

cette égalité développée se présente sous la forme suivante:

$$(6) \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = \sin^2\theta.$$

Nous aurons plusieurs fois l'occasion de faire usage de cette relation.

Si l'on se donne l'équation de la droite:

$$Ax + By = 0,$$

en identifiant cette équation avec celle qui résulte des deux premières équations (4), savoir

$$\frac{x + y\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{x\cos\theta + y}{\cos\beta},$$

on trouve:

$$(7) \quad \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\theta}{A} = \frac{\cos\beta\cos\theta - \cos\alpha}{B} = k.$$

Des égalités (7) on déduit

$$(10) \quad \begin{cases} \cos\alpha = k\,\dfrac{A\cos\theta - B}{\sin^2\theta}, \\ \cos\beta = k\,\dfrac{A - B\cos\theta}{\sin^2\theta}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans la relation (6), on en conclut, après quelques réductions,

$$(11) \quad k^2 = \frac{\sin^4\theta}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

On a donc définitivement

$$(12) \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A\cos\theta - B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}, \\ \cos\beta = \dfrac{A - B\cos\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}; \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{A\cos\theta - B}{A - B\cos\theta}.$$

les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble; et, quelle que soit l'hypothèse choisie, la direction de la droite se trouve déterminée sans ambiguïté, si l'on a égard aux deux équations (12) à la fois.

II°. Angle de deux droites.

70. Soient les équations des deux droites

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A_1x+B_1y+C_1=0, \end{cases}$$

équations qu'on pourra écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} y=ax+b \\ y=a_1x+b_1 \end{cases},\ \text{en posant}\ \begin{cases} a=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}, \\ a_1=-\frac{A_1}{B_1}\ \ b_1=-\frac{C_1}{B_1}. \end{cases}$$

Si α et α_1 sont les angles, avec la direction positive de l'axe des x, des portions des deux droites qui se trouvent dessus de cet axe, on a

$$(3)\qquad V=\alpha_1-\alpha,$$

V étant l'angle AIA_1.

De là on conclut

$$\text{tang}\,V=\frac{\text{tang}\,\alpha_1-\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha_1}.$$

Or N° (68)

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta},\quad \text{tang}\,\alpha_1=\frac{a_1\sin\theta}{1+a_1\cos\theta};$$

en substituant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve

$$(4)\qquad \text{tang}\,V=\frac{(a_1-a)\sin\theta}{1+(a+a_1)\cos\theta+aa_1};$$

ou, en remplaçant a et a_1 par leurs valeurs $-\frac{A}{B}$, $-\frac{A_1}{B_1}$

$$(4\,\text{bis})\qquad \text{tang}\,V=\frac{(AB_1-A_1B)\sin\theta}{AA_1+BB_1-(AB_1+A_1B)\cos\theta}.$$

Dans le cas des axes rectangulaires, où $\theta=90°$ ces formules deviennent

$$(5)\qquad \text{tang}\,V=\frac{a_1-a}{1+aa_1}$$

$$(5\,\text{bis})\qquad \text{tang}\,V=\frac{AB_1-A_1B}{AA_1+BB_1}.$$

Deux droites forment toujours deux angles supplémentaires; lorsqu'on voudra, à l'aide de cette formule, évaluer sans ambiguité l'un de ces angles, il faudra d'abord écrire la relation (3) définissant l'angle considéré, en se rappelant la signification des angles α, que donne la formule (3) du N° (68), signification que nous avons rappelée plus haut.

Discussion des formules (4) et (5).

Remarquons d'abord que le numérateur et le dénominateur de la valeur de tang V ne peuvent pas être nuls en même temps pour des valeurs réelles de a et a_1.

En effet, $\sin\theta$ est différent de zéro, et si l'on avait à la fois

$$a_1-a=0,$$
$$1+aa_1+(a+a_1)\cos\theta=0;$$

on en concluait

$$1+a^2+2a\cos\theta=0,\ \text{ou}\ (a+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=0;$$

égalité qui ne peut jamais être vérifiée, puisque $\sin\theta$ est différent de zéro.

1°. Pour que les deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que tang V soit nul, c.à.d. que les coefficients angulaires soient égaux.

2°. Pour que les deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que tang V soit infini; ce qui, d'après la remarque faite, aura lieu, si

$$(6)\qquad 1+aa_1+(a+a_1)\cos\theta=0;$$

et, dans le cas des axes rectangulaires

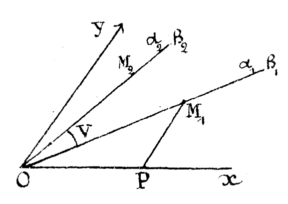
$$(6\,\text{bis})\qquad 1+aa_1=0.$$

La relation (6) ou (6 bis) est la condition pour que deux droites soient rectangulaires.

71. On peut encore résoudre cette question de la manière suivante.

Soient α_1 et β_1 les angles de la droite OM_1 avec les axes, α_2 et β_2 ceux de la droite OM_2; Menons les coordonnées du point quelconque M_1 de la première droite, et projetons le contour OPM_1 sur Ox, Oy, et OM_2, en désignant par V l'angle M_1OM_2. On trouve ainsi, en posant $OM_1 = l$:

$$\begin{cases} x + y\cos\theta = l\cos\alpha_1, \\ x\cos\theta + y = l\cos\beta_1, \\ x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 = l\cos V; \end{cases}$$



en éliminant x, y, et l entre ces trois équations, on trouve

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha_1 \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos V \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1\text{ bis})\quad \sin^2\theta\cos V = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 - (\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1)\cos\theta;$$

et dans le cas des axes rectangulaires:

$$(2)\quad \cos V = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2.$$

Si maintenant les équations des deux droites sont données sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0; \end{cases}$$

on en conclura les valeurs de $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$; $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, à l'aide des formules (12) du N.° (69); substituant ces valeurs dans la formule (1 bis), on trouvera

$$(4)\quad \cos V = \frac{AA_1 + BB_1 - (A_1B + AB_1)\cos\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}\sqrt{A_1^2+B_1^2-2A_1B_1\cos\theta}}.$$

Cette formule donne les deux angles supplémentaires l'un de l'autre que forment les deux droites; c'est à cela que tient la présence du double signe.

III.° Équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.

72. Supposons d'abord le point donné par ses coordonnées x_1 et y_1.

L'équation générale des droites passant par ce point est

$$y - y_1 = a'(x - x_1);$$

pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite donnée

$$(1)\quad y = ax + b$$

il faut que le coefficient angulaire a' vérifie la relation N.° (70)

$$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2)\quad a' = -\frac{1 + a\cos\theta}{a + \cos\theta}.$$

L'équation de la perpendiculaire cherchée est donc

$$(3)\quad y - y_1 = -\frac{1 + \cos\theta}{a + \cos\theta}(x - x_1);$$

et, dans le cas des axes rectangulaires

$$(3\text{ bis})\quad y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

73. Supposons le point donné par l'intersection des deux droites

$$(1)\quad \begin{cases} M = mx + m_1y + m_2 = 0, \\ N = nx + n_1x + n_2 = 0, \end{cases}$$

et soit l'équation de la droite donnée

$$(2)\qquad Ax+By+C=0.$$

L'équation générale des droites passant par le point (1), est

$$(3)\qquad M+\lambda N=0,$$

ou

$$(m+\lambda n)x+(m_1+\lambda n_1)y+m_2+\lambda n_2=0.$$

Exprimons que cette droite est perpendiculaire à la droite donnée (2); on a, en se plaçant dans le cas des axes rectangulaires

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{m+\lambda n}{m_1+\lambda n_1}=-1;$$

d'où l'on tire

$$\lambda=-\frac{Am+Bm_1}{An+Bn_1}$$

L'équation de la perpendiculaire sera, par conséquent,

$$(4)\qquad \frac{mx+m_1y+m_2}{Am+Bm_1}=\frac{nx+n_1y+n_2}{An+Bn_1}.$$

IV° Distance d'un point à une droite.

74. Supposons d'abord les axes rectangulaires.

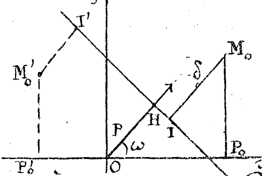
1° L'équation de la droite est donnée sous la forme N° (40)

$$(1)\qquad x\cos\omega+y\sin\omega-p=0,$$

et soient x_0, y_0 les coordonnées du point.

Deux cas se présentent:

1er Cas: Le point $M_0(x_0,y_0)$ et l'origine des coordonnées sont de part et d'autre de la droite. Menons la perpendiculaire M_0I et les coordonnées du point M_0, puis projetons le contour OP_0M_0IH sur OH; on a



$$p=x_0\cos\omega+y_0\sin\omega+\delta_0\cos(\widehat{M_0I,OH}),$$

en désignant par δ_0 la valeur absolue de la distance cherchée; Or l'angle de M_0I avec OH est égal à 180°, donc

$$(2)\qquad \delta_0=x_0\cos\omega+y_0\sin\omega-p$$

2ème Cas: Le point $M'_0(x'_0,y'_0)$ et l'origine O sont du même côté par rapport à la droite. Projetons encore sur OH le contour $OP'_0M'_0I'H$; on a

$$p=x'_0\cos\omega+y'_0\sin\omega+\delta'_0\cos(M'_0I',OH),$$

en désignant par δ'_0 la valeur absolue de la distance. Or l'angle de M'_0I' avec OH est 0 ici, par conséquent

$$(3)\qquad \delta'_0=p-x'_0\cos\omega-y'_0\sin\omega.$$

En résumé, la distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à la droite

$$(1)\qquad x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

est donnée, en valeur absolue, par la formule

$$(4)\qquad \delta=\pm(x_0\cos\omega+y_0\sin\omega-p);$$

+ si l'origine et le point M_0 sont de part et d'autre de la droite; − si l'origine et le point M_0 sont du même côté par rapport à la droite.

2° L'équation de la droite est donnée sous la forme générale

$$(5)\qquad Ax+By+C=0.$$

Cette équation peut être ramenée à la forme

$$(6)\qquad x\cos\omega+y\sin\omega-p=0,$$

en posant les conditions

$$(7)\qquad \frac{\cos\omega}{A}=\frac{\sin\omega}{B}=\frac{-p}{C};\quad \cos^2\omega+\sin^2\omega=1.$$

Or la distance du point (x_0, y_0) à la droite (6) est

$$\delta = x_0 \cos\omega + y_0 \sin\omega - p.$$

Les relations (7) nous donne pour les valeurs des quantités inconnues $\cos\omega$, $\sin\omega$, et p

$$\begin{cases} \cos\omega = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \sin\omega = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ p = \dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \end{cases}$$

Substituant dans l'expression précédente de δ, il vient

$$(8) \qquad \delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ainsi la distance d'un point à une droite est égale au 1er membre de l'équation de la droite, où l'on a remplacé x et y par les coordonnées du point donné, divisé par la racine de la somme des carrés des coefficients des variables.

75. Supposons maintenant les axes obliques.

1ère Méthode. Nous pouvons supposer l'équation de la droite donnée ramenée à la forme

$$(1) \qquad x\cos\omega + y\cos(\theta-\omega) - p = 0.$$

En projetant le contour OP_0M_0IH sur la droite OH et en raisonnant comme dans le cas qui précède, on voit que

La distance en valeur absolue du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite (1) est donnée par la formule

$$(2) \qquad \delta = \pm(x_0\cos\omega + y_0\cos(\theta-\omega) - p);$$

on prendra le signe +, si le point M_0 et l'origine sont de part et d'autre de la droite; on prendra le signe −, si le point M_0 et l'origine sont du même côté par rapport à la droite.

Si maintenant l'équation de la droite donnée est

$$(3) \qquad Ax + By + C = 0,$$

on la ramènera à la forme (1) en posant

$$(4) \qquad \frac{\cos\omega}{A} = \frac{\cos(\theta-\omega)}{B} = -\frac{p}{C};$$

la distance cherchée sera alors, abstraction faite du signe,

$$\delta = x_0\cos\omega + y_0\cos(\theta-\omega) - p$$

Pour déterminer les quantités inconnues $\cos\omega$, $\cos(\theta-\omega)$, p, remarquons que ω et $(\theta-\omega)$ sont les angles de la droite OH avec les axes, et qu'entre, ces angles on a la relation (6) Nº (69).

$$(5) \qquad \cos^2\omega + \cos^2(\theta-\omega) - 2\cos\omega\cos(\theta-\omega)\cos\theta = \sin^2\theta.$$

En désignant par k la valeur commune des rapports (4), on déduit de la relation (5)

$$(6) \qquad k = \frac{\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

De là nous tirerons facilement $\cos\omega$, $\cos(\theta-\omega)$ et p; Substituant ces valeurs dans l'expression de δ, on trouve

$$(7) \qquad \delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}};$$

c'est l'expression de la distance du point (x_0, y_0) à la droite

$$Ax + By + C = 0$$

2ème Méthode. Nous pouvons supposer l'équation de la droite donnée

$$(8) \qquad Ax + By + C = 0$$

ramenée à la forme

$$(9) \qquad y = ax + b,$$

en posant

(10) $$a = -\frac{A}{B},\quad b = -\frac{C}{B}.$$

L'équation de la droite, menée par le point donné $M_o(x_o, y_o)$ perpendiculairement à la droite (9), sera N.° [72]

(11) $$y - y_o = -\frac{1 + a\cos\theta}{a + \cos\theta}(x - x_o).$$

Soient x et y les coordonnées du pied P de cette perpendiculaire, on aura

$$\overline{M_oP}^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + 2(x - x_o)(y - y_o)\cos\theta;$$

or, on obtiendra les coordonnées x et y du point d'intersection des deux droites AB et M_oP, en résolvant les deux équations (9) et (11); mais, comme l'expression de $\overline{M_oP}$, ne contient que les différences $(x - x_o)$ et $(y - y_o)$ ainsi que l'équation (11), il vaudra mieux ramener aussi l'équation (9) à ne contenir que ces mêmes différences; ce qu'on fera en l'écrivant comme il suit

(12) $$y - y_o = a(x - x_o) + (a x_o + b - y_o).$$

La résolution des équations (11) et (12) par rapport à $(x - x_o)$ et $(y - y_o)$ nous donne

$$\left\{\begin{array}{l} x - x_o = \dfrac{(y_o - a x_o - b)(a + \cos\theta)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta}, \\[2ex] y - y_o = -\dfrac{(y_o - a x_o - b)(1 + a\cos\theta)}{1 + a^2 + 2a\cos\theta}. \end{array}\right.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression de M_oP, nous obtiendrons

$$\delta^2 = \overline{M_oP}^2 = \frac{(y_o - a x_o - b)^2}{(1 + a^2 + 2a\cos\theta)^2}\left[(a + \cos\theta)^2 + (1 + a\cos\theta)^2 - 2(a + \cos\theta)(1 + a\cos\theta)\cos\theta\right];$$

et, toutes réductions faites, il vient, en extrayant la racine carrée:

(13) $$\delta = \frac{(y_o - a x_o - b)\sin\theta}{\pm\sqrt{1 + 2a\cos\theta + a^2}};$$

ou, en remplaçant a et b par leurs valeurs (10):

(14) $$\delta = \frac{(A x_o + B y_o + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

76. Résumé et Discussion.

1.° Lorsque l'équation de la droite est donnée sous la forme

(1) $$x\cos\omega + y\cos(\theta - \omega) - p = 0,$$

la distance, en valeur absolue, du point $M_o(x_o, y_o)$ à cette droite sera donnée par la formule

(2) $$\delta = \pm(x_o\cos\omega + y_o\cos(\theta - \omega) - p);$$

on devra prendre le signe +, quand le point M_o et l'origine seront de part et d'autre de la droite; on prendra le signe −, lorsque le point et l'origine des coordonnées seront du même côté par rapport à la droite.

Dans le cas des axes rectangulaires, l'équation de la droite sera

(1 bis) $$x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0,$$

et on aura pour l'expression de la distance

(2 bis) $$\delta = \pm(x_o\cos\omega + y_o\sin\omega - p).$$

2.° Lorsque l'équation de la droite est donnée sous la forme

(3) $$Ax + By + C = 0,$$

la distance du point $M_o(x_o, y_o)$ à cette droite sera donnée par la formule

(4) $$\delta = \frac{(A x_o + B y_o + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \quad \text{(Axes obliques)}$$

(4 bis) $$\delta = \frac{A x_o + B y_o + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \text{(Axes rectangulaires)}$$

Pour que ces dernières formules donnent la valeur absolue de la distance, il faudra faire précéder le radical du signe + ou − suivant que le numérateur sera positif ou négatif.

Nous allons, à cette occasion, résoudre la question suivante qui se présentera souvent dans d'autres circonstances.

Étant donnés un point $M_0(x_0, y_0)$ et la droite

$$(D) \qquad Ax + By + C = 0,$$

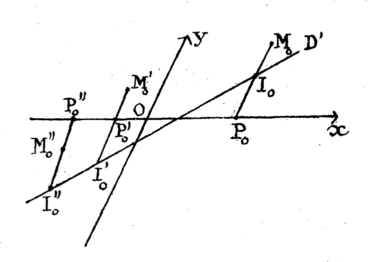
trouver le signe de l'expression

$$(Ax_0 + By_0 + C).$$

Si $B > 0$, l'expression $(Ax_0 + By_0 + C)$ sera positive ou négative suivant que le point M_0 sera au-dessus ou au-dessous de la droite (D), en marchant parallèlement à l'axe des y positives; ce sera le contraire, si $B < 0$.

Si $A > 0$, l'expression $(Ax_0 + By_0 + C)$ sera positive ou négative suivant que le point M_0 sera à droite ou à gauche de la ligne (D), en marchant parallèlement à l'axe des x ~~négatives~~ positives; ce sera le contraire, si $A < 0$.

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que si le point M_0 est au-dessus de la droite (D), la valeur algébrique de l'ordonnée du point sera plus grande que la valeur algébrique de l'ordonnée de la droite correspondant à l'abscisse du point donné; on le constate facilement en examinant les trois positions possibles du point, savoir M_0, M_0', M_0''. La chose est visible pour les deux premières positions; quant à la 3ème M_0'', on a, en valeur absolue, $M_0''P_0'' < I_0''P_0$; or les ordonnées sont ici négatives; donc etc....



Ceci posé, la valeur algébrique de l'ordonnée du point est y_0; la valeur algébrique de l'ordonnée de la droite, pour l'abscisse x_0, est $-\frac{Ax_0 + C}{B}$; on a donc, d'après la remarque précédente,

$$y_0 > -\frac{Ax_0 + C}{B}, \text{ ou } y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} > 0.$$

Si B est positif, on conclura de là, en multipliant par B,

$$Ax_0 + By_0 + C > 0;$$

et si B est négatif, on aura

$$Ax_0 + By_0 + C < 0.$$

Les différentes parties de la proposition énoncée se démontreront de la même manière.

77. Équations des bissectrices des angles de deux droites.

Soient les équations des deux droites

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0. \end{cases}$$

Nous trouverons très-simplement l'équation d'une bissectrice en écrivant que les distances d'un point quelconque (x, y) de cette droite aux deux droites données sont égales; ce qui donne, d'après les formules du N° (76)

$$(2) \qquad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\cos\theta}}.$$

En prenant successivement les signes + et − on a les équations de l'une et l'autre bissectrice. Lorsqu'on voudra particulariser une de ces bissectrices, on déterminera, d'après la position d'un de ces points, les signes des fonctions $(Ax + By + C)$, $(A_1x + B_1y + C_1)$, en ayant égard à la remarque du N° (76); on choisira alors le signe + ou − de manière à ce que les deux membres de l'équation (2) aient le même signe.

On vérifiera sans difficulté que les deux bissectrices sont rectangulaires, c. à. d. que leurs coefficients angulaires vérifient la relation

$$1 + (a + a_1)\cos\theta + aa_1 = 0.$$

On pourra, chercher à déterminer la bissectrice en partant de sa définition même; c. à. d. de diviser en deux parties égales l'angle des deux droites données; il y a là une discussion à faire qui fournira un excellent exercice.

78. Étant donnés les angles (α_1, β_1) et (α_2, β_2) de deux droites avec les axes, trouver les angles de la bissectrice avec ces mêmes axes.

Prenons sur chacune des droites, deux longueurs OM_1 et OM_2 égales à l'unité; Si M est le point où la droite $M_1 M_2$ rencontre la bissectrice, on aura entre les perpendiculaires abaissées de ces trois points sur les axes Ox et Oy, les relations suivantes:

$$2\,MP = M_1P_1 + M_2P_2\ ;\quad 2\,MQ = M_1Q_1 + M_2Q_2\ ;$$

ou, en désignant par α' et β' les angles de la bissectrice OM avec les axes Ox et Oy, et par ρ la longueur OM:

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\rho\cos\alpha' = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\ ; \\ 2\rho\cos\beta' = \cos\beta_1 + \cos\beta_2\ . \end{cases}$$

De ces égalités nous déduirons

$$4\rho^2\left[\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' - 2\cos\alpha'\cos\beta'\cos\theta\right] = \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 - 2\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\theta \\ + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 - 2\cos\alpha_2\cos\beta_2\cos\theta \\ + 2\left\{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 - (\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1)\right\}\cos\theta \end{array}\right\};$$

or, en ayant égard à la relation (6) du N.° (69) et à la relation (1bis) du N.° (71), cette égalité devient, en divisant par $\sin^2\theta$:

$$4\rho^2 = 2 + 2\cos V\ ,$$

ou, d'après la relation $1 + \cos V = 2\cos^2\frac{V}{2}$,

$$(2)\qquad \rho^2 = \cos^2\frac{V}{2}\ ;$$

V est l'angle des deux droites données.

Pour la seconde bissectrice, on aurait

$$2\rho\cos\alpha' = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\ ,\quad 2\rho\cos\beta' = \cos\beta_1 - \cos\beta_2\ ;$$

la suite du calcul se fera de même que dans le premier cas.

Ainsi (α_1, β_1) et (α_2, β_2) étant les angles de deux droites avec les axes de coordonnées et V étant l'angle de ces deux droites, les angles (α', β') et $(\alpha''\ \beta'')$ de chacune des bissectrices avec les axes seront donnés par les formules suivantes:

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2\cos\frac{V}{2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{\cos\beta_1 + \cos\beta_2}{2\cos\frac{V}{2}}. \end{cases}\qquad \begin{cases} \cos\alpha'' = \dfrac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2\sin\frac{V}{2}}, \\ \cos\beta'' = \dfrac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{2\sin\frac{V}{2}}; \end{cases}$$

Nous n'insisterons pas sur la discussion de ces formules.

V.° Surface d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets.

79. Soient M_1, M_2, M_3 les trois sommets du triangle, et $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ leurs coordonnées respectives; du point M_1 abaissons une perpendiculaire M_1H sur le côté M_2M_3, on aura, en désignant par S la surface du triangle

$$2S = \overline{M_1H}\cdot\overline{M_2M_3}.$$

La distance M_2M_3 des deux points M_2 et M_3 a pour expression

$$\overline{M_2M_3}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)\cos\theta\ ;$$

quant à M_1H, c'est la distance du point M_1 à la droite M_2M_3 dont l'équation est

$$(1°) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

on a donc No. (76)

$$(2°) \qquad M_1H = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+2(x_2-x_3)(y_2-y_3)\cos\theta}}\,;$$

par conséquent;

$$(1) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta\,;$$

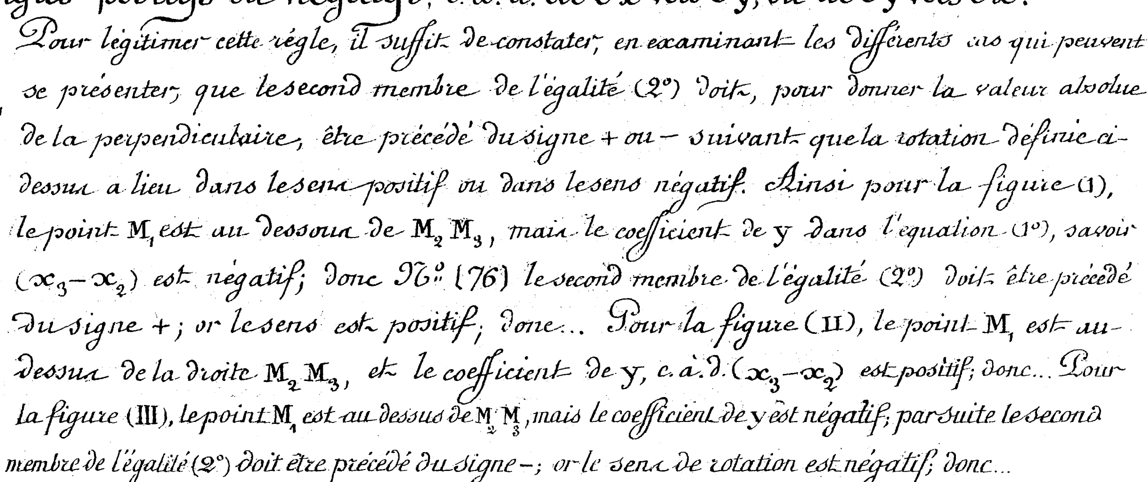
et dans le cas des axes rectangulaires:

$$(1 \text{ bis}) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Lorsqu'un des sommets M_3, par exemple, est l'origine des coordonnées, on a

$$(2) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

Pour que le second membre de l'égalité (1) représente la valeur absolue de la surface du triangle, il faudra faire précéder le déterminant du signe plus ou moins suivant que pour aller successivement de M_1 vers M_2, puis de M_2 vers M_3, en suivant le cercle circonscrit, on tourne dans le sens des angles **positifs** ou **négatifs**, c. à. d. de Ox vers Oy, ou de Oy vers Ox.



Pour légitimer cette règle, il suffit de constater, en examinant les différents cas qui peuvent se présenter, que le second membre de l'égalité (2°) doit, pour donner la valeur absolue de la perpendiculaire, être précédé du signe + ou − suivant que la rotation définie ci-dessus a lieu dans le sens positif ou dans le sens négatif. Ainsi pour la figure (I), le point M_1 est au dessous de M_2M_3, mais le coefficient de y dans l'équation (1°), savoir (x_3-x_2) est négatif; donc No. (76) le second membre de l'égalité (2°) doit être précédé du signe +; or le sens est positif; donc... Pour la figure (II), le point M_1 est au-dessus de la droite M_2M_3, et le coefficient de y, c. à. d. (x_3-x_2) est positif; donc... Pour la figure (III), le point M_1 est au dessus de M_2M_3, mais le coefficient de y est négatif, par suite le second membre de l'égalité (2°) doit être précédé du signe −; or le sens de rotation est négatif; donc...

80. Surface d'un polygone.

Soient $M_1, M_2, M_3 \ldots, M_n$ les sommets du polygone, et $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_n, y_n)$ leurs coordonnées respectives. Transportons les axes de manière à ce que la nouvelle origine soit dans l'intérieur du polygone, et soient x'_i et y'_i les nouvelles coordonnées du point M_i ou (x_i, y_i), de sorte que

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = a + x'_i \\ y_i = b + y'_i\,, \end{cases}$$

a et b étant les coordonnées de l'origine O'. En joignant le point O' aux différents sommets, on décomposera le polygone en triangles, et l'on aura

$$(2)\qquad 2S = \sin\theta \left\{ \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x'_{n-1} & y'_{n-1} \\ x'_n & y'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} \right\}$$

en admettant que les indices 1, 2, 3, .. n indiquent les sommets successifs que l'on rencontre en parcourant le polygone, et que le mouvement de rotation ait lieu dans le sens positif.

En remplaçant les x'_i et y'_i par leurs valeurs (1), on aura

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-a & y_1-b \\ x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_1 \\ a & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_1 \\ b & x_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-a & y_2-b \\ x_3-a & y_3-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_2 \\ a & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_2 \\ b & x_3 \end{vmatrix};$$

- -

$$\begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n-a & y_n-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_n \\ a & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & x_n \\ b & x_1 \end{vmatrix}.$$

La relation (2) devient alors

$$(3)\qquad 2S = \sin\theta \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}$$

81. Revenons sur l'expression (1) N° (79) de la surface du triangle. On peut mettre ce déterminant sous les deux formes suivantes

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \qquad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

en multipliant membre à membre et ligne par ligne ces deux déterminants, on trouve

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 & x_1x_3+y_1y_3 \\ 1 & x_2x_1+y_2y_1 & x_2^2+y_2^2 & x_2x_3+y_2y_3 \\ 1 & x_3x_1+y_3y_1 & x_3x_2+y_3y_2 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}$$

Multiplions par -2 les trois dernières lignes, puis divisons par -2 la première colonne, le déterminant sera multiplié par 4. Alors, aux trois dernières lignes ajoutons respectivement la première multipliée par $x_1^2+y_1^2$, par $x_2^2+y_2^2$, par $x_3^2+y_3^2$; opérons de même sur les trois dernières colonnes; après avoir posé

$$(1)\qquad \overline{M_iM_k}^2 = d_{ik} = (x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2$$

on trouve

$$(2)\qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

VI. Surface d'un triangle dont on donne les équations des Côtés.

82. Soient les équations des trois côtés d'un triangle

$$(1)\qquad \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2&=0, \\ A_3x+B_3y+C_3&=0; \end{aligned} \right.$$

nous désignerons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les intersections des droites D_2 et D_3, D_3 et D_1, D_1 et D_2. On aura d'après cela

$$(2)\quad \begin{cases} P_1 = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1\,, \\ 0 = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2\,, \\ 0 = A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3\,, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = A_1 x_2 + B_1 y_2 + C\,, \\ P_2 = A_2 x_2 + B_2 y_2 + C\,, \\ 0 = A_3 x_2 + B_3 y_2 + C\,; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = A_1 x_3 + B_1 y_3 + C_1\,, \\ 0 = A_2 x_3 + B_2 y_3 + C_2\,, \\ P_3 = A_3 x_3 + B_3 y_3 + C_3\,; \end{cases}$$

les quantités P_1, P_2, P_3 sont différentes de zéro.

Or si l'on prend le déterminant formé par les premiers membres de ces équations, savoir

$$\begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix},$$

on aura, d'après les égalités (2) et le théorème de la multiplication des déterminants

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Or, on sait N.° (79) que

$$(4)\qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta$$

en désignant par S la surface du triangle.

L'égalité (3) deviendra donc

$$(5)\qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{2S}{\sin\theta} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Il faut évaluer maintenant les quantités P_1, P_2, P_3.

Pour cela, éliminons x_1 et y_1 entre les équations du premier groupe (2), il vient

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 - P_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 - 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 - 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} - P_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on tire P_1 ; on aura P_2 et P_3 en opérant de même sur les deux autres groupes.

Substituons ces valeurs ainsi obtenues dans l'égalité (5), on trouve définitivement

$$(6)\qquad 2S = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \sin\theta}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

La règle énoncée au N.° (79) est encore applicable à ce cas, puisque l'expression (6) n'est qu formation, sans altération de signe, de l'expression (4).

---

§III Polaire d'un point par rapport à un système de deux droites.

I° Définition et équation de la polaire d'un point.

83. Étant données deux droites fixes SA et SB; par un point fixe P on mène une sécante quelconque, laquelle rencontre en a et b les deux droites fixes; sur cette sécante on prend un point M tel que

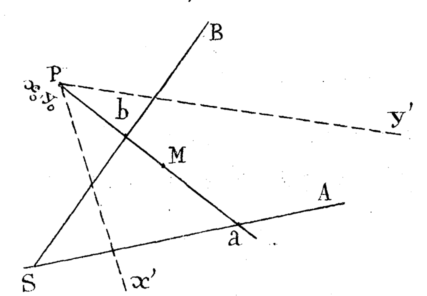
$$(1)\qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb};$$

lorsque la sécante tourne autour du point P, le point M décrit une droite qui est appelée la **polaire du point P**, et le point P porte le nom de **pôle**.

Dans la relation (1) les segments sont comptés à partir du point P, et nous observerons les conventions du N° (53) pour les signes et pour la notation.

Cette définition est un cas particulier d'une définition plus générale que nous verrons dans l'étude des propriétés générales des courbes.

Remarquons de suite que la relation (1) peut se mettre sous les formes suivantes:



$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{Pa} = \frac{1}{Pb} - \frac{1}{PM}, \text{ ou } \frac{Pa - PM}{Pa} = \frac{PM - Pb}{Pb};$$

Or

$$(1)\quad \begin{cases} PM + Ma + aP = 0, & \text{d'où } PM - Pa = -Ma; \\ PM + Mb + bP = 0, & \text{d'où } PM - Pb = -Mb; \end{cases}$$

on a donc, en grandeur et signe, la seconde forme

$$(2)\qquad \frac{Ma}{Pa} + \frac{Mb}{Pb} = 0, \text{ ou } \frac{Ma}{aP} + \frac{Mb}{bP} = 0.$$

Les relations (1) ou (2) définissent également le lieu du point M ou la polaire du point P.

84. Pour trouver l'équation de la polaire, nous prendrons d'abord la relation (1) comme point de départ.

Soient (x_0, y_0) les coordonnées du point P et

$$(3)\qquad \begin{cases} A = ax + a_1 y + a_2 = 0 \\ B = bx + b_1 y + b_2 = 0 \end{cases}$$

les équations des deux droites SA et SB.

Les coordonnées d'un point quelconque (x, y) de la droite PM seront

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho, \\ y = y_0 + \mu\rho, \end{cases}$$

(5°, N° 40); ρ représente la distance PM, et les constantes λ et μ dépendent des angles α et β que fait la droite PM avec les axes Ox et Oy.

Ceci posé, désignons ρ, ρ_1, ρ_2 les longueurs des segments PM, Pa, Pb; la relation (1) deviendra

$$(5)\qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Or, les distances ρ_1 et ρ_2 s'obtiendront en remplaçant x et y par leurs valeurs (4) dans l'une et l'autre des équations (3); on aura ainsi, en désignant par A_0 et B_0 ce que deviennent A et B lorsqu'on y remplace x et y par les coordonnées x_0 et y_0 du point P:

$$(6)\qquad \rho_1 = -\frac{A_0}{\lambda a + \mu a_1},\quad \rho_2 = -\frac{B_0}{\lambda b + \mu b_1};$$

et la relation précédente devient alors

$$(7)\qquad \frac{2}{\rho} + \frac{\lambda a + \mu a_1}{A_0} + \frac{\lambda b + \mu b}{B_0} = 0.$$

Pour une valeur arbitraire donnée à λ ou μ, les équations (4) et (7) détermineront le point correspondant M; en d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque du lieu vérifieront les équations (4) et (7), et toute combinaison de ces équations; elles vérifieront en particulier la combinaison obtenue en éliminant λ et μ, ce qui conduit à

$$(8) \qquad 2 + \frac{(x-x_0)\,a+(y-y_0)\,a_1}{A_0} + \frac{(x-x_0)\,b+(y-y_0)\,b_1}{B_0} = 0.$$

Cette équation, étant une relation entre des constantes et les coordonnées x et y d'un point quelconque du lieu, sera l'équation du lieu du point M; on voit que ce lieu est une droite.

En développant l'équation (8) de la polaire il vient

$$\frac{ax+a_1y+a_2-ax_0-a_1y_0-a_2}{A_0} + \frac{bx+b_1y+b_2-bx_0-b_1y_0-b_2}{B_0} - 2 = 0;$$

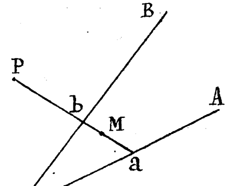
cette équation se réduit, en ayant égard à la signification de A_0 et B_0, à

$$(10) \qquad \frac{ax+a_1y+a_2}{ax_0+a_1y_0+a_2} + \frac{bx+b_1y+b_2}{bx_0+b_1y_0+b_2} = 0;$$

nous l'écrirons sous la forme abrégée

$$(10\ bis) \qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

85. On peut aussi trouver l'équation de la polaire en prenant pour point de départ la relation (2), savoir



$$(2) \qquad \frac{Ma}{aP} + \frac{Mb}{bP} = 0.$$

Soient, comme précédemment,

$$A = ax + a_1y + a_2 = 0$$
$$B = bx + b_1y + b_2 = 0,$$

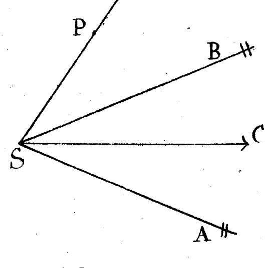
les équations des deux droites; désignons, en outre, par x_0, y_0 les coordonnées du P; x, y, celles du point M.

D'après la formule (2) du N.° (55) les rapports dans lesquels les droites SA et SB divisent respectivement le segment PM seront

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{Ma}{aP} = -\dfrac{ax+a_1y+a_2}{ax_0+a_1y_0+a_2}, \\[2ex] \dfrac{Mb}{bP} = -\dfrac{bx+b_1y+b_2}{bx_0+b_1y_0+b_2}; \end{cases}$$

substituant ces valeurs dans la relation (2), on obtient immédiatement l'équation (10) c. à d. une relation entre les coordonnées du point M ou l'équation de la polaire.

86. L'équation de la polaire du point P $(x_0\, y_0)$ par rapport aux deux droites A et B est donc



$$(1) \qquad C = \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0;$$

on voit que la polaire passe par le point de concours des deux droites.

L'équation d'une droite quelconque passant par le point S est

$$A + \lambda B = 0;$$

exprimons qu'elle passe par le point P, on a

$$A_0 + \lambda B_0 = 0, \text{ ou } \lambda = -\frac{A_0}{B_0};$$

l'équation de la droite SP est donc

$$(2) \qquad D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0.$$

Les quatre droites

$$A = 0,$$
$$B = 0;$$
$$C = \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0,$$
$$D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0,$$

forment ce qu'on appelle un faisceau harmonique; les droites associées A et B sont dites conjuguées

par rapport au couple des deux droites C et D; et les droites associées C et D sont aussi conjuguées par rapport au couple A et B.

Ces dénominations, que nous retrouverons plus tard dans une théorie plus générale, sont légitimées par les propriétés suivantes:

La droite C est, par rapport au couple A et B, la polaire d'un point quelconque de la droite D; et la droite D est la polaire d'un point quelconque de C.

La droite B est, par rapport au couple C et D, la polaire d'un point quelconque de A; et la droite A est la polaire d'un point quelconque de la droite B.

Démontrons ces propriétés réciproques.

1°. Soit P' (x'_0, y'_0) un point quelconque de SP ou D, la polaire de ce point sera

$$\frac{A}{A'_0} + \frac{B}{B'_0} = 0;$$

or le point P' étant sur la droite D, on a

$$\frac{A'_0}{A_0'} - \frac{B'_0}{B'_0} = 0;$$

l'équation précédente devient alors

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0;$$

c'est précisément la droite C.

2°. Soit Q (x_1, y_1) un point de la droite C; la polaire de ce point sera

$$\frac{A}{A_1} + \frac{B}{B_1} = 0;$$

or le point Q (x_1, y_1) étant sur la droite C, on a

$$\frac{A_1}{A_0} + \frac{B_1}{B_0} = 0;$$

l'équation précédente devient alors

$$\frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0;$$

c'est précisément l'équation de la droite D.

3°. Soit (x_2, y_2) un point de la droite A; la polaire de ce point sera, par rapport au système (C et D),

$$\frac{C}{C_2} + \frac{D}{D_2} = 0;$$

or on a

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{A_2}{A_0} + \dfrac{B_2}{B_0}, \\ D_2 = \dfrac{A_2}{A_0} - \dfrac{B_2}{B_0}; \end{cases}$$

et, comme A_2 est nul, l'équation précédente se réduit à

$$C - D = 0, \text{ ou } B = 0.$$

Si le point $(x_2 y_2)$ est sur la droite B, la quantité B_2 est nulle, et l'équation de la polaire devient

$$C + D = 0, \text{ ou } A = 0.$$

Remarquons que les équations du faisceau harmonique

$$\begin{cases} \begin{cases} A = 0, \\ B = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{A}{A_0} + \dfrac{B}{B_0} = 0, \\ \dfrac{A}{A_0} - \dfrac{B}{B_0} = 0; \end{cases} \end{cases}$$

peuvent encore s'écrire

$$\begin{cases} (1) \quad A = 0, \\ (2) \quad B = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \quad A + k\,B = 0, \\ (4) \quad A - k\,B = 0; \end{cases}$$

Nous prendrons pour paramètres de référence les valeurs suivantes

$$(3)\qquad \lambda = +\sqrt{a^2+a_1^2}\,,\quad \mu = +\sqrt{b^2+b_1^2}\,,\quad \nu = +\sqrt{c^2+c_1^2}\,;$$

et, afin de rester d'accord avec la convention du No. (90), nous disposerons, dans les formules (2), des signes des radicaux, ou, ce qui revient au même, nous changerons les signes des premiers membres des équations (1), de manière à ce que les valeurs de X, Y, Z fournies par les équations (2) soient positives lorsqu'on suppose le point (x, y) situé dans l'intérieur du triangle ABC. Les formules de transformation seront alors

$$(4)\qquad \begin{cases} X = a\,x + a_1\,y + a_2\,, \\ Y = b\,x + b_1\,y + b_2\,, \\ Z = c\,x + c_1\,y + c_2\,; \end{cases}$$

les lettres $a, a_1, a_2; b, b_1$, etc. représentent les coefficients des équations des côtés du triangle de référence, après qu'on a modifié les signes de manière à satisfaire aux conditions que nous venons d'indiquer.

Remarque. Les formules de transformation (4) conviennent au cas où l'on attribue aux paramètres de référence les valeurs spéciales (3); si on voulait laisser arbitraires ces paramètres, il faudrait prendre alors les formules (2), après avoir eu soin de préciser les signes des radicaux comme il a été dit.

92\. Cherchons maintenant les formules qui permettent de passer des coordonnées **trilatères** aux coordonnées **cartésiennes**.

Nous ne nous résoudrons ce problème inverse que pour les formules (4).

Posons

$$(5)\qquad P = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

et désignons par $a', a_1', a_2'; b', b_1', \ldots$ les déterminants partiels de P, de sorte que

$$\begin{cases} a' = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad a_1' = -\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix}, \quad a_2' = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}, \\ b' = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

Multiplions alors les équations (4) respectivement par a', b', c'; puis, par a_1', b_1', c_1'; enfin, par a_2', b_2', c_2', et ajoutons; on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} Px = a'X + b'Y + c'Z\,, \\ Py = a_1'X + b_1'Y + c_1'Z\,, \\ P = a_2'X + b_2'Y + c_2'Z\,; \end{cases}$$

d'où, en divisant les deux premières équations par la troisième:

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a'X + b'Y + c'Z}{a_2'X + b_2'Y + c_2'Z}\,, \\[2ex] y = \dfrac{a_1'X + b_1'Y + c_1'Z}{a_2'X + b_2'Y + c_2'Z}\,; \end{cases}$$

ces formules résolvent la question. Les coordonnées trilatères X, Y, Z, vérifient alors la relation

$$(7\,bis)\qquad a_2'X + b_2'Y + c_2'Z = P.$$

Remarque I. Le dénominateur des valeurs (7) égalé à zéro

$$(8)\qquad a_2'X + b_2'Y + c_2'Z = 0$$

donne, dans le système actuel de coordonnées trilatères, l'équation de la droite de l'infini; car pour les valeurs de $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ qui vérifient cette équation, x et y sont infinies.

Remarque II. En supposant qu'un des côtés du triangle de référence, le côté AB par exemple s'éloigne à l'infini, nous retrouverons, comme cas particulier, les formules de transformation pour les systèmes de coordonnées cartésiennes.

On le voit encore à l'aide des relations (2), en y introduisant les hypothèses $c = 0$, $c_1 = 0$.

III°. Cas où les paramètres de référence sont mis en évidence.

93. Nous prendrons les équations des côtés du triangle de référence sous la forme suivante

$$(1)\quad \begin{cases} BC & x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ CA & x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0, \\ AB & x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = 0; \end{cases}$$

α, β, γ, sont les angles avec l'axe des x positifs des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur ces droites et dirigées vers les droites; p, q, r, sont les valeurs absolues des distances de l'origine aux droites considérées.

Si λ, μ, ν, sont les paramètres de référence, les coordonnées trilatères d'un point seront, abstraction faite du signe

$$\begin{cases} X = \lambda\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p), \\ Y = \mu\,(x\cos\beta + y\sin\beta - q), \\ Z = \nu\,(x\cos\gamma + y\sin\gamma - r). \end{cases}$$

Mais nous admettrons ici l'hypothèse suivante:

L'origine des coordonnées cartésiennes est dans l'intérieur du triangle de référence.

Les coordonnées trilatères d'un point seront alors données N° (76) en grandeur et en signe par les formules qui suivent

$$(2)\quad \begin{cases} X = \lambda\,(p - \cos\alpha - y\sin\alpha), \\ Y = \mu\,(q - \cos\beta - y\sin\beta), \\ Z = \nu\,(r - \cos\gamma - y\sin\gamma); \end{cases}$$

il suffit, pour s'en convaincre, de supposer le point considéré dans l'intérieur du triangle de référence, et d'avoir égard à la convention du N° (90) et à la règle du N° (76).

Les coordonnées X, Y, Z, doivent, N° (89) en outre, vérifier la relation

$$(3)\quad \frac{X}{\lambda}\sin A + \frac{Y}{\mu}\sin B + \frac{Z}{\nu}\sin C = \frac{S}{R}.$$

94. **Relations fondamentales entre les angles α, β, γ, et les angles A, B, C, du triangle de référence.**

Remplaçons, dans la relation (3), X, Y, Z par leurs valeurs (2); l'équation obtenue devra avoir lieu identiquement; on aura, par suite

$$(1°)\quad \begin{cases} \cos\alpha\sin A + \cos\beta\sin B + \cos\gamma\sin C = 0, \\ \sin\alpha\sin A + \sin\beta\sin B + \sin\gamma\sin C = 0, \\ p\sin A + q\sin B + r\sin C = \frac{S}{R}. \end{cases}$$

Si, entre les deux premières relations (1°), on élimine alternativement $\sin A$, $\sin B$, puis $\sin C$, on trouve

$$\frac{\sin A}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{\sin B}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{\sin C}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Posons, pour un instant,

$$(2°)\quad A_1 = \beta - \gamma,\; B_1 = \gamma - \alpha,\; C_1 = \alpha - \beta;$$

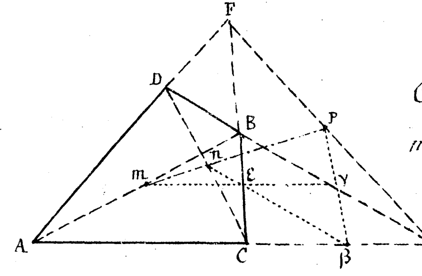
on aura les égalités

$$(3°)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 = 0 \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

$$(4°)\quad \frac{\sin A}{\sin A_1} = \frac{\sin B}{\sin B_1} = \frac{\sin C}{\sin C_1} = \frac{1}{k};$$

or, on déduit des relations (3°)

$$\sin(A+B) = \sin C, \quad \sin(A_1+B_1) = -\sin C_1;$$



Or les six longueurs que renferme cette relation sont précisément les moitiés des segments que la transversale ADF détache sur le triangle BEC; donc l'égalité est vraie.

Chapitre II

Coordonnées trilatères d'un point.

§I Définition-Relations fondamentales.

1° Définition et signes.

89. Si l'on considère un triangle fixe ABC, un point M du plan sera défini par ses distances aux côtés du triangle respectivement multipliées par des nombres constants positifs arbitrairement choisis.

Soient, par exemple, MP, MQ, MR, les distances respectives du point M aux côtés BC, CA, AB, du triangle; posons

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \lambda . MP, \\ Y = \mu . MQ, \\ Z = \nu . MR; \end{cases}$$

les quantités X, Y, Z, sont les **coordonnées trilatères** du point M.

Le triangle ABC auquel on rapporte le point est dit **triangle de référence**; les côtés du triangle sont **les axes de référence**; les nombres constants λ, μ, ν, sont dits **paramètres de Référence**.

Si a, b, c, sont les longueurs des côtés du triangle et S sa surface, on a, entre les coordonnées trilatères X, Y, Z d'un même point, la relation

$$(2)\qquad \frac{a}{\lambda} X + \frac{b}{\mu} Y + \frac{c}{\nu} Z = 2S;$$

relation qui se constate immédiatement en remarquant que la surface du triangle ABC est la somme des trois surfaces AMC, CMB, BMA.

Lorsque les paramètres de référence sont égaux à l'unité

$$\lambda = \mu = \nu = 1,$$

la relation précédente devient

$$(3)\qquad aX + bY + cZ = 2S;$$

ou, encore

$$(3\,bis)\qquad X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = \frac{S}{R},$$

en désignant par A, B, C, les angles du triangle de référence, R le rayon du cercle circonscrit, et en ayant égard aux égalités

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

90. Les signes des coordonnées trilatères sont déterminés par la convention suivante:

Chaque coordonnée sera regardée comme positive ou négative suivant que le point est situé, par rapport à l'axe correspondant, du même côté que le sommet opposé ou d'un coté différent.

Aussi l'X du point sera regardée comme positive ou négative suivant que ce point sera ou ne sera pas, par rapport au côté BC, du même côté que le sommet A; et de même pour les autres.

On est conduit à cette convention par la discussion de la relation (2) qui doit être toujours vérifiée quelle que soit la position du point M. On y est également conduit par la discussion des formules suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} X = \dfrac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2}, \\ Y = \dfrac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2}{m_1 + m_2}, \\ Z = \dfrac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2}{m_1 + m_2}, \end{cases}$$

qui donnent les coordonnées X, Y, Z, d'un point M divisant le segment $M_1 M_2$ dans le rapport $\frac{m_1}{m_2}$, de sorte qu'on a

$$(4\ bis)\quad \frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Ces formules se démontreront par des considérations absolument semblables à celles qui ont été employées Nos (52) et (53).

De là nous conclurons aussi que les coordonnées X, Y, Z, d'un point quelconque M, situé sur une droite déterminée par les deux points $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$, pourront être définies par les égalités

$$(5)\quad \begin{cases} X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \\ Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2, \text{ avec la condition } \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \\ Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2; \end{cases}$$

et le rapport des distances du point variable M avec deux points fixes M_1 et M_2 sera donné par l'égalité

$$(5\ bis)\quad \frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

En faisant varier les quantités λ_1 et λ_2 on obtiendra tous les points de la droite $M_1 M_2$.

II°. Transformation des coordonnées.

91. Nous allons indiquer les formules qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilatères et inversement; ces formules sont surtout utiles comme moyen de démonstration.

Supposons que les équations des trois côtés du triangle de référence soient, par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy:

$$(1)\quad \begin{cases} BC \quad ax + a_1 y + a_2 = 0, \\ CA \quad bx + b_1 y + b_2 = 0, \\ AB \quad cx + c_1 y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Cherchons d'abord les coordonnées trilatères X, Y, Z d'un point M en fonction de ses coordonnées cartésiennes x, y. Pour cela, remarquons que

$$\begin{cases} MP = \dfrac{ax + a_1 y + a_2}{\pm\sqrt{a^2 + a_1^2}}, \\ MQ = \dfrac{bx + b_1 y + b_2}{\pm\sqrt{b^2 + b_1^2}}, \\ MR = \dfrac{cx + c_1 y + c_2}{\pm\sqrt{c^2 + c_1^2}}. \end{cases}$$

Or, d'après la définition No (89)

$$X = \lambda . MP, \quad Y = \mu . MQ, \quad Z = \nu . MR;$$

on aura donc

$$(2)\quad \begin{cases} X = \lambda \dfrac{ax + a_1 y + a_2}{\pm\sqrt{a^2 + a_1^2}}, \\ Y = \mu \dfrac{bx + b_1 y + b_2}{\pm\sqrt{b^2 + b_1^2}}, \\ Z = \nu \dfrac{cx + c_1 y + c_2}{\sqrt{c^2 + c_1^2}}. \end{cases}$$

les droites associées (1) et (2) sont conjuguées par rapport au système (3), (4); et, réciproquement, les droites associées (3) et (4) sont conjuguées par rapport au système (1), (2).

II°. Construction de la polaire.

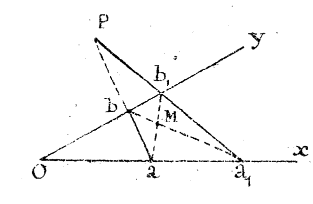
87. La polaire d'un point étant une droite, il suffit, pour la construire, d'en déterminer deux points, et même un seul, lorsque le point de concours des deux droites du système est construit. Les relations (1) et (2), qui définissent la polaire, permettent d'en construire autant de points qu'on voudra; mais la propriété suivante fournit une construction plus simple. Cette propriété est d'ailleurs importante au point de vue théorique.

Étant données deux droites SA, SB et un point fixe P; si, par le point P, on mène des sécantes quelconques, et qu'on joigne diagonalement les points d'intersection de ces sécantes avec les deux droites; les points de rencontre de ces diagonales sont sur la polaire du point P par rapport aux deux droites données.

Cette proposition peut se démontrer analytiquement de bien des manières; je n'indiquerai que la suivante.

Prenons les deux droites fixes pour axes de coordonnées, et soient (x_o, y_o) les coordonnées du P; soient en outre

$$y - y_o = \lambda\,(x - x_o)$$
$$y - y_o = \lambda_1\,(x - x_o)$$



les équations des deux sécantes Pa et Pa_1.

On aura

$$\begin{cases} Oa = x_o - \dfrac{y_o}{\lambda} = \dfrac{\lambda x_o - y_o}{\lambda}, \\ Oa_1 = x_o - \dfrac{y_o}{\lambda_1} = \dfrac{\lambda_1 x_o - y_o}{\lambda_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ob = y_o - \lambda x_o, \\ Ob_1 = y_o - \lambda_1 x_o. \end{cases}$$

Les équations des deux diagonales ab_1 et $a_1 b$ seront (N° 40, 3°)

$$\frac{x}{Oa} + \frac{y}{Ob_1} = 1, \quad \frac{x}{Oa_1} + \frac{y}{Ob} = 1,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\lambda x}{\lambda x_o - y_o} - \frac{y}{\lambda_1 x_o - y_o} = 1$$

$$(2) \qquad \frac{\lambda_1 x}{\lambda_1 x_o - y_o} - \frac{y}{\lambda x_o - y_o} = 1.$$

Les coordonnées du point M, intersection des deux diagonales, vérifient ces deux équations simultanées; elles vérifieront donc le résultat obtenu en les retranchant membre à membre, savoir

$$x\left[\frac{\lambda}{\lambda x_o - y_o} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 x_o - y_o}\right] - y\left[\frac{1}{\lambda_1 x_o - y_o} - \frac{1}{\lambda x_o - y_o}\right] = 0;$$

ou, en réduisant au même dénominateur

$$(3) \qquad \frac{(\lambda_1 - \lambda)\,[x y_o + x_o y]}{(\lambda x_o - y_o)\,[\lambda_1 x_o - y_o]} = 0.$$

Or λ_1 est différent de λ, autrement les deux sécantes Pa et Pa_1 coïncideraient, et il y aurait indétermination, les deux équations (1) et (2) représentant alors la même droite; l'équation se réduit donc à

$$(4) \qquad x y_o + x_o y = 0, \text{ ou } \frac{x}{x_o} + \frac{y}{y_o} = 0.$$

Cette équation, vérifiée par les coordonnées du point M et indépendante des arbitraires λ et λ_1, représente donc le lieu du point M.

On voit que ce lieu est une droite; et, d'après l'équation générale (1) du N° (86), il est visible que cette droite est la polaire du point P; car, dans le cas actuel,

$$A = x, \; B = y,$$

et l'équation

$$\frac{A}{A_o} + \frac{B}{B_o} = o$$

devient alors

$$\frac{x}{x_o} + \frac{y}{y_o} = o.$$

III. Propriétés du quadrilatère complet.

88. On appelle quadrilatère complet la figure formée par un système de quatre droites indéfinies; les six points d'intersection de ces quatre droites forment les six sommets du quadrilatère; les droites joignant deux sommets non situés sur un même côté sont les diagonales, il y a trois diagonales.

Nous allons conclure de ce qui précède quelques propriétés importantes du quadrilatère complet.

Soient A, B, C, D, E, F les six sommets d'un quadrilatère; AB, CD, EF, les trois diagonales; M, N, P les intersections de ces diagonales.

1°. Le quadrilatère complet présente trois faisceaux harmoniques ayant pour sommets les points M, N, P,

savoir

(MA, MB; MP, MN),

(NC, ND; NP, NM),

(PE, PF; PN, PM);

ou, en se servant d'une notation abrégée fort usitée en géométrie:

$(M,\ \overline{AB}\ \overline{NP})$,

$(N,\ \overline{CD}\ \overline{PM})$,

$(P,\ \overline{EF}\ \overline{MN})$,

nous avons souligné les droites associées.

La démonstration de cette propriété se conclut immédiatement du théorème que nous venons d'établir N°. (87).

Ainsi, considérant le point M et le système MN, MP, nous voyons que MB est la polaire du point A; car, du point A partent les deux sécantes A.CE, A.DF; et les diagonales FC et DE se coupent en B; on a donc un faisceau harmonique formé par les deux couples (MN, MP); (MA, MB).

Considérons le point N et le système NP, NM; nous voyons que ND est la polaire du point C; car, du point C partent les deux sécantes C.AE, C.BF; et les diagonales EB et AF se coupent en D; on a donc un faisceau harmonique formé par les deux couples (NP, NM); (NC, ND).

On constatera de la même manière l'existence du troisième faisceau harmonique formé par les deux couples (PN, PM); (PE, PF).

2°. Un faisceau harmonique divise harmoniquement une transversale quelconque, nous verrons plus loin la raison et la signification de cette propriété; d'après cela, la proposition que nous venons de démontrer peut s'énoncer en ces termes:

Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

3°. Nous avons encore le théorème suivant:

Dans tout quadrilatère complet, les milieux m, n, p des trois diagonales AB, CD, EF, sont en ligne droite.

En effet, les trois droites $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, joignant les milieux des côtés du triangle BCE, passent respectivement par les milieux p, m, n, des trois diagonales; la question revient à démontrer N°. (57, 1°) l'égalité

$$\beta p . \gamma m . \varepsilon n = + \beta n . \varepsilon m . \gamma p.$$

ou, ayant égard aux égalités (4°):

$$\begin{cases} \sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin C, \\ \sin A \cos B_1 + \sin B \cos A_1 = \sin C. \end{cases}$$

On conclura de là, en ajoutant membre à membre, la première des relations suivantes

$$(5°) \quad \begin{cases} \sin A\,(\cos B + \cos B_1) + \sin B\,(\cos A + \cos A_1) = 0; \\ \sin B\,(\cos C + \cos C_1) + \sin C\,(\cos B + \cos B_1) = 0, \\ \sin C\,(\cos A + \cos A_1) + \sin A\,(\cos C + \cos C_1) = 0; \end{cases}$$

les deux dernières s'obtiendront par un calcul semblable ou par une simple permutation de lettres.

Ces dernières relations peuvent s'écrire, puisque $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, sont différents de zéro:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos A + \cos A_1}{\sin A} + \dfrac{\cos B + \cos B_1}{\sin B} = 0, \\ \dfrac{\cos B + \cos B_1}{\sin B} + \dfrac{\cos C + \cos C_1}{\sin C} = 0, \\ \dfrac{\cos C + \cos C_1}{\sin C} + \dfrac{\cos A + \cos A_1}{\sin A} = 0. \end{cases}$$

D'où l'on conclut, en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles la différence des deux autres

$$(6°) \qquad \cos A + \cos A_1 = 0, \quad \cos B + \cos B_1 = 0, \quad \cos C + \cos C_1 = 0,$$

Des égalités (4°) et (6°) on déduit

$$(7°) \qquad k^2 = 1 .$$

On a aussi entre les angles α, β, γ, et les angles A, B, C, du triangle de référence les relations fondamentales

$$(4) \qquad \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin A} = \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin B} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin C} = k, \text{ où } k^2 = 1$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \cos(\beta-\gamma) = -\cos A, \\ \cos(\gamma-\alpha) = -\cos B, \\ \cos(\alpha-\beta) = -\cos C. \end{cases}$$

$$(6) \qquad p \sin A + q \sin B + r \sin C = \frac{S}{R}.$$

Il ne faut pas oublier que ces relations ont été établies en supposant l'origine des coordonnées cartésiennes dans l'intérieur du triangle de référence.

La recherche des relations correspondant aux cas où l'origine est extérieure ne saurait offrir de difficultés.

Il faut aussi remarquer que lorsqu'on parviendra à une relation où n'entreront plus que les éléments du triangle de référence, la relation aura lieu évidemment quelle que soit la position de l'origine des coordonnées cartésiennes, puisque les quantités qui dépendent de la position des axes ne figurent plus dans la relation en question.

---

§II Ligne droite - Distances.

I° Ligne droite - Droite de l'infini.

95 Dans le système des coordonnées trilatères, l'équation d'une ligne droite sera de la forme

$$(1) \qquad MX + NY + PZ = 0,$$

M, N, P, étant des constantes.

Ceci résulte immédiatement du théorème énoncé au No. (60).

Delà nous concluons pour l'équation d'une droite passant par deux points (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2):

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations générales des droites, passant par les sommets A, B, C, du triangle de référence, seront respectivement de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} Y = \lambda_1 Z, & \text{pour le sommet A,} \\ Z = \lambda_2 X, & \text{pour le sommet B,} \\ X = \lambda_3 Y, & \text{pour le sommet C;} \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des constantes arbitraires.

96. Droite de l'infini.

En général, X, Y, Z, étant les coordonnées trilatères d'un point, ces coordonnées devront vérifier une relation de la forme

$$(4) \qquad mX + nY + pZ = \text{constante} = k,$$

relation qu'on peut se donner à priori. Les paramètres de référence seront alors

$$(5) \qquad \lambda = \frac{ak}{2S} m, \quad \mu = \frac{bk}{2S} n, \quad \nu = \frac{ck}{2S} p;$$

a, b, c, S étant les côtés et la surface du triangle qu'on peut aussi se donner arbitrairement. En effet, λ, μ, ν étant les paramètres de référence, les distances d'un point (X, Y, Z) aux trois côtés du triangle seront

$$\frac{X}{\lambda}, \frac{Y}{\mu}, \frac{Z}{\nu};$$

et la surface des trois triangles partiels devant donner la surface totale S, on a

$$a\frac{X}{\lambda} + b\frac{Y}{\mu} + c\frac{Z}{\nu} = 2S.$$

En identifiant cette relation avec la relation (4), on arrive aux valeurs (5).

Nous ajouterons maintenant que l'équation de la droite de l'infini s'obtiendra en égalant à zéro le premier membre de la relation (4), et sera, par conséquent,

$$(6) \qquad mX + nY + pZ = 0.$$

Pour le démontrer, cherchons les intersections de la droite (1) avec les côtés du triangle de référence, et exprimons que ces points sont à l'infini.

Pour le côté BC, par exemple, on a $X = 0$; l'équation (1) et la relation (4) donnent alors

$$\begin{cases} NY + PZ = 0, \\ nY + pZ = k; \end{cases}$$

Y et Z devront être infinis, et il faudra que

$$\frac{N}{n} = \frac{P}{p}.$$

En cherchant de même les intersections de la droite avec les autres côtés du triangle ABC, on trouve que

$$(7) \qquad \frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p}$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la droite

$$MX + NY + PZ = 0$$

soit à l'infini.

L'équation (6) représente donc la droite de l'infini.

Il résulte de ce qui précède, que pour le système particulier de coordonnées défini au N° (93), l'équation de la droite de l'infini est

$$(8) \qquad X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

On arriverait également à cette conséquence en résolvant les équations (2) du N.° (93) par rapport à x et y, et en exprimant que les valeurs trouvées sont infinies par des valeurs finies des rapports $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$.

Droite parallèle à une droite donnée.

97. Soit une droite donnée

$$(9) \qquad MX + NY + PZ = o\,;$$

l'équation générale des droites parallèles à la droite (9) s'obtiendra en cherchant l'équation générale des droites passant par le point d'intersection de la droite donnée et de la droite à l'infini

$$mX + nY + pZ = o.$$

L'équation cherchée sera donc

$$(10) \qquad MX + NY + PZ + \rho\,(mX + nY + pZ) = o,$$

ρ désignant une constante complètement arbitraire.

Sous la forme donnée au N.° (93) et en supposant les paramètres de référence égaux à l'unité, l'équation générale des droites parallèles à la droite (9) sera

$$(11) \qquad MX + NY + PZ + \rho\,(X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = o.$$

Comme application, l'équation d'une droite parallèle au côté BC, ou au côté AC, ou au côté AB, du triangle de référence, sera

$$(12) \qquad \begin{cases} \rho_1 X + (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = o, \\ \rho_2 Y + (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = o, \\ \rho_3 Z + (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = o. \end{cases}$$

Il est évident qu'on peut, s'il y a avantage, remplacer dans les équations (10), (11) ou (12), les fonctions linéaires

$$(mX + nY + pZ) \text{ ou } (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C)$$

par la constante à laquelle elles sont égales.

II.° Distance d'un point à une droite — Distance de deux points.

98. Soit l'équation d'une droite donnée

$$(1) \qquad MX + NY + PZ = o,$$

et X_o, Y_o, Z_o, les coordonnées du point.

Quel que soit le système de coordonnées trilatères, les coordonnées X, Y, Z, d'un point sont liées aux coordonnées cartésiennes x, y du même point par les relations N.° (91)

$$(2) \qquad \begin{cases} X = ax + a_1 y + a_2, \\ Y = bx + b_1 y + b_2, \\ Z = cx + c_1 y + c_2. \end{cases}$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de la droite donnée (1) sera dès-lors

$$M(ax + a_1 y + a_2) + N(bx + b_1 y + b_2) + P(cx_o + c_1 y_o + c_2) = o;$$

et, d'après le N.° (76), la distance δ du point (X_o, Y_o, Z_o) ou (x_o, y_o) à cette droite aura pour expression

$$\frac{M(ax_o + a_1 y_o + a_2) + N(bx_o + b_1 y_o + b_2) + P(cx_o + c_1 y_o + c_2)}{\pm\sqrt{(aM + bN + cP)^2 + (a_1 M + b_1 N + c_1 P)^2}};$$

ou enfin, en ayant égard aux relations (2)

$$(3) \qquad \delta = \frac{MX_o + NY_o + PZ_o}{\pm\sqrt{(aM + bN + cP)^2 + (a_1 M + b_1 N + c_1 P)^2}};$$

l'expression de la distance d'un point à une droite est donc proportionnelle au premier membre de l'équation de

la droite.

Dans la forme adoptée au N° (93), on a

$$\begin{cases} a=-\lambda\cos\alpha, & b=-\mu\cos\beta, & c=-\nu\cos\gamma,\\ a_1=-\lambda\sin\alpha; & b_1=-\mu\sin\beta; & c_1=-\nu\sin\gamma;\end{cases}$$

on trouve alors, eu égard aux relations (5) du N° (94), pour la distance δ du point (X_0, Y_0, Z_0) à la droite (1):

$$(4)\qquad \delta=\frac{MX_0+NY_0+PZ_0}{\sqrt{\lambda^2M^2+\mu^2N^2+\nu^2P^2-2\mu\nu NP\cos A-2\lambda\nu PM\cos B-2\lambda\mu MN\cos C}}.$$

λ, μ, ν, sont les paramètres de référence.

99. **Distance de deux points.**

Soient $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ les coordonnées trilatères des deux points donnés, et $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ leurs coordonnées cartésiennes. Les formules (2) du N° (93) donnent, en désignant les paramètres de référence par λ, μ, ν:

$$\begin{cases} \dfrac{X_1}{\lambda}=p-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, & \dfrac{X_2}{\lambda}=p-x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha,\\ \dfrac{Y_1}{\mu}=q-x_1\cos\beta-y_1\sin\beta, & \dfrac{Y_2}{\mu}=q-x_2\cos\beta-y_2\sin\beta,\\ \dfrac{Z_1}{\nu}=r-x_1\cos\gamma-y_1\sin\gamma; & \dfrac{Z_2}{\nu}=r-x_2\cos\gamma-y_2\sin\gamma.\end{cases}$$

Retranchant ces égalités membre à membre comme il suit, il vient

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{X_1-X_2}{\lambda}=(x_2-x_1)\cos\alpha+(y_2-y_1)\sin\alpha,\\ \dfrac{Y_1-Y_2}{\mu}=(x_2-x_1)\cos\beta+(y_2-y_1)\sin\beta,\\ \dfrac{Z_1-Z_2}{\nu}=(x_2-x_1)\cos\gamma+(y_2-y_1)\sin\gamma.\end{cases}$$

Résolvons les équations (1) deux à deux, par rapport aux différences (x_2-x_1), (y_2-y_1); on trouve, eu égard aux relations (4) du N° (94)

$$\begin{cases} (x_2-x_1)\sin C=\dfrac{Y_1-Y_2}{\mu}\sin\alpha-\dfrac{X_1-X_2}{\lambda}\sin\beta;\\ (x_2-x_1)\sin A=\dfrac{Z_1-Z_2}{\nu}\sin\beta-\dfrac{Y_1-Y_2}{\mu}\sin\gamma;\\ (x_2-x_1)\sin B=\dfrac{X_1-X_2}{\lambda}\sin\gamma-\dfrac{Z_1-Z_2}{\nu}\sin\alpha;\end{cases}\qquad \begin{cases} (y_2-y_1)\sin C=-\dfrac{Y_1-Y_2}{\mu}\cos\alpha+\dfrac{X_1-X_2}{\lambda}\cos\beta;\\ (y_2-y_1)\sin A=-\dfrac{Z_1-Z_2}{\nu}\cos\beta+\dfrac{Y_1-Y_2}{\mu}\cos\gamma;\\ (y_2-y_1)\sin B=-\dfrac{X_1-X_2}{\lambda}\cos\gamma+\dfrac{Z_1-Z_2}{\nu}\cos\alpha.\end{cases}$$

Pour obtenir des valeurs symétriques, ajoutons les trois équations de chaque groupe, et remarquons que

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

il vient

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(x_2-x_1)=\frac{X_1-X_2}{\lambda}(\sin\gamma-\sin\beta)+\frac{Y_1-Y_2}{\mu}(\sin\alpha-\sin\gamma)+\frac{Z_1-Z_2}{\nu}(\sin\beta-\sin\alpha);$$

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(y_2-y_1)=\frac{X_1-X_2}{\lambda}(\cos\beta-\cos\gamma)+\frac{Y_1-Y_2}{\mu}(\cos\gamma-\cos\alpha)+\frac{Z_1-Z_2}{\nu}(\cos\alpha-\cos\beta).$$

Maintenant ajoutons la somme des carrés, en ayant égard aux relations (5) du N° (94) et remarquons que

$$\begin{cases} \delta^2=\overline{M_1M_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\\ 1+\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2},\\ \cos B+\cos C-\cos A+1=4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2};\ \text{etc.....}\end{cases}$$

on trouve la formule définitive

$$(2)\qquad 4\,\overline{M_1M_2}^2.\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=\left\{\begin{array}{l} \cos^2\dfrac{A}{2}\,\dfrac{(X_1-X_2)^2}{\lambda^2}+\cos^2\dfrac{B}{2}\,\dfrac{(Y_1-Y_2)^2}{\mu^2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\,\dfrac{(Z_1-Z_2)^2}{\nu^2}\\ -2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\,\dfrac{(Y_1-Y_2)(Z_1-Z_2)}{\mu\ \nu}-2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}\,\dfrac{(Z_1-Z_2)(X_1-X_2)}{\nu\ \lambda}\\ \qquad -2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\,\dfrac{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2)}{\lambda\ \mu}\end{array}\right\}$$

λ, μ, ν sont les paramètres de référence.

100. **Condition pour que deux droites soient rectangulaires**

Soient les équations des deux droites

$$(1)\qquad \begin{cases} M_1X+N_1Y+P_1Z=0,\\ M_2X+N_2Y+P_2Z=0,\end{cases}$$

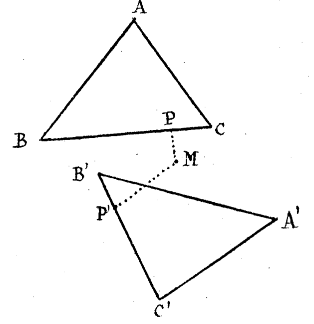
Traduisons ces équations dans le système cartésien, à l'aide des formules (2) du N° (93); puis exprimons que ces deux droites sont rectangulaires; on arrive ainsi à l'équation de condition

(2) $\lambda^2 M_1 M_2 + \mu^2 N_1 N_2 + \nu^2 P_1 P_2 - 2\mu\nu \cos A (N_1 P_2 + N_2 P_1) - 2\nu\lambda \cos B (P_1 M_2 + P_2 M_1) - 2\lambda\mu \cos C (M_1 N_2 + M_2 N_1) = 0.$

Remarque. On pourrait déduire de là les équations des hauteurs du triangle de référence ; nous les obtiendrons plus loin Nº (102) par une recherche directe.

101. **Passer d'un système de coordonnées trilatères à un autre système de coordonnées trilatères.**

Soit X, Y, Z les coordonnées d'un point par rapport à un triangle ABC, et



$$(1) \qquad mX + nY + pZ = k$$

la relation que doivent vérifier ces coordonnées.

On se donne, par rapport au triangle ABC, les équations des trois côtés du nouveau triangle de référence A'B'C', soit

$$(2) \quad \begin{cases} a'X + b'Y + c'Z = 0, & B'C' \\ a''X + b''Y + c''Z = 0, & C'A' \\ a'''X + b'''Y + c'''Z = 0. & A'B' \end{cases}$$

La formule (3) du Nº (98) nous donnera les distances du point M (X, Y, Z) aux trois côtés du nouveau triangle ; et, en désignant par X', Y', Z', des quantités proportionnelles à ces distances, nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} X' = \lambda' (a'X + b'Y + c'Z), \\ Y' = \mu' (a''X + b''Y + c''Z), \\ Z' = \nu' (a'''X + b'''Y + c'''Z) ; \end{cases}$$

ce sont les formules de transformation cherchées.

Les constantes λ', μ', ν', dépendent des coefficients $a', a'', a''', b', \ldots$ et des nouveaux paramètres de référence arbitrairement choisis. La discussion des signes, pour l'évaluation des distances, dépendra de la position relative des deux triangles, et devra se faire pour chaque cas particulier où l'on aura à employer ces formules de transformation ; circonstance d'ailleurs fort rare.

Dans cette transformation analytique, la figure n'est pas altérée, et la droite de l'infini reste la droite de l'infini. Les coordonnées X, Y, Z, vérifient une relation de la forme

$$(1) \qquad mX + nY + pZ = k ;$$

les coordonnées X', Y', Z' devront aussi vérifier une autre relation telle que

$$(4) \qquad m'X' + n'Y' + p'Z' = k'.$$

Pour trouver cette dernière relation, il suffira de résoudre les équations (3) par rapport à X, Y, Z, et de substituer, dans la relation (1) les valeurs obtenues.

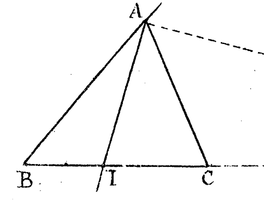
III. Équations des bissectrices, médianes, hauteurs, du triangle de référence.

102. Nous nous placerons dans le cas du système particulier Nº (93), où les équations des côtés du triangle de référence sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} X = p - x \cos\alpha - y \sin\alpha = 0, \\ Y = q - x \cos\beta - y \sin\beta = 0, \\ Z = r - x \cos\gamma - y \sin\gamma = 0 ; \end{cases}$$

et, si l'on suppose les paramètres de référence égaux à l'unité, puis l'origine dans l'intérieur du triangle, les premiers membres des équations précédentes donneront, en grandeur et signe, les coordonnées trilatères X, Y, Z, du point (x, y).

1º **Bissectrices.**



Cherchons, par exemple, les bissectrices de l'angle A.

L'équation d'une droite quelconque, passant par le point A, est

$$Y = mZ ;$$

Si I est le point où elle rencontre le côté BC, les coordonnées de ce point, égales et de même signe, doivent vérifier cette équation ; on a donc

$$m = 1 ; \text{ d'où } Y = Z.$$

Pour la bissectrice extérieure, les coordonnées du point I sont égales et de signe contraire ; par suite, on a

$$m = -1 ; \text{ d'où } Y = -Z.$$

Les équations des bissectrices sont donc

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} \text{Intérieures} & \text{Extérieures} & \\ Y - Z = 0, & Y + Z = 0, & \text{sommet } A; \\ Z - X = 0, & Z + X = 0, & \text{sommet } B; \\ X - Y = 0, & X + Y = 0, & \text{sommet } C. \end{array}\right.$$

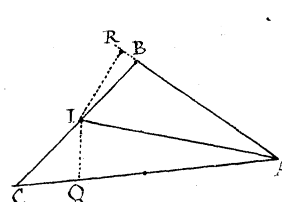
On conclut de là :

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

Les bissectrices extérieures de deux des angles concourent en un même point avec la bissectrice intérieure du 3ème angle.

Car, si l'on considère, par exemple, les équations des trois bissectrices intérieures, on voit que l'une de ces équations est la conséquence des deux autres ; par suite, toute solution commune à deux d'entre elles vérifie la 3me ; ou, le point commun à deux de ces droites se trouve sur la 3ème.

2° Médianes.



L'équation d'une droite quelconque, passant par le point A, est

$$Y = m Z ;$$

Soit I le pied de la médiane, et Y_0, Z_0, les coordonnées de ce point ; on a

$$Y_0 = + IQ = IC . \sin C,$$

$$Z_0 = + IR = IB . \sin B ;$$

or IC = IB, et ces coordonnées doivent vérifier l'équation ci-dessus ; ce qui donne

$$\sin C = m . \sin B, \text{ d'où } m = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Par conséquent, les équations des médianes sont

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} Y \sin B = Z \sin C, & \text{pour le sommet } A, \\ Z \sin C = X \sin A, & \text{pour le sommet } B, \\ X \sin A = Y \sin B, & \text{pour le sommet } C. \end{array}\right.$$

On conclut encore de ces équations que :

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point.

Les coordonnées du point de rencontre ou centre de gravité du triangle sont

$$\left\{\begin{array}{l} X \sin A = Y \sin B = Z \sin C \\ X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = \frac{S}{R} ; \end{array}\right.$$

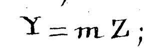
d'où, en résolvant :

$$X \sin A = Y \sin B = Z \sin C = \frac{S}{3R}.$$

3° Hauteurs.

Considérons la hauteur correspondant au sommet A.

L'équation d'une droite quelconque, passant par ce point, est



$$Y = m Z ;$$

Si I est le pied de la hauteur et que Y_0, Z_0, soient ses coordonnées, on a

$$Y_0 = + IQ = + AI \cos C,$$

$$Z_0 = + IR = AI \cos B ;$$

ces coordonnées devant vérifier l'équation de la droite on a

$$\cos C = m \cos B, \text{ d'où } m = \frac{\cos C}{\cos B}.$$

Par conséquent les équations des hauteurs sont

$$(4)\quad \begin{cases} Y \cos B = Z \cos C, & \text{pour le sommet } A, \\ Z \cos C = X \cos A, & \text{pour le sommet } B, \\ X \cos A = Y \cos B, & \text{pour le sommet } C. \end{cases}$$

On voit encore que

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Les coordonnées du point de rencontre des trois hauteurs sont données par

$$\begin{cases} X \cos A = Y \cos B = Z \cos C, \\ X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = \frac{S}{R}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4\ bis)\qquad X \cos A = Y \cos B = Z \cos C = \frac{S}{R \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C}.$$

IV. Surface d'un triangle.

103\. 1° Étant données les coordonnées trilatères (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) des sommets d'un triangle $M_1 M_2 M_3$, calculer la surface du triangle.

En désignant par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées cartésiennes des sommets, on a N° (79)

$$(1)\qquad 2\Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais, d'après les formules (2) du N° (93), nous aurons les égalités :

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 = (p - x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)\lambda, & X_2 = (p - x_2 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha)\lambda, & X_3 = (p - x_3 \cos\alpha - y_3 \sin\alpha)\lambda, \\ Y_1 = (q - x_1 \cos\beta + y_1 \sin\beta)\mu, & Y_2 = (q - x_2 \cos\beta - y_2 \sin\beta)\mu, & Y_3 = (q - x_3 \cos\beta - y_3 \sin\beta)\mu, \\ Z_1 = (r - x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma)\nu; & Z_2 = (r - x_2 \cos\gamma - y_2 \sin\gamma)\nu; & Z_3 = (r - x_3 \cos\gamma - y_3 \sin\gamma)\nu. \end{cases}$$

Or, l'application du théorème connu sur la multiplication des déterminants nous donne immédiatement

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ q & -\cos\beta & -\sin\beta \\ r & -\cos\gamma & -\sin\gamma \end{vmatrix} \lambda\mu\nu.$$

Le 1er déterminant du second membre a pour valeur 2Σ ; le 2ème déterminant développé devient

$$p \sin(\gamma - \beta) + q \sin(\alpha - \gamma) + r \sin(\beta - \alpha);$$

cette expression, eu égard aux relations (4) et (6) du N° (94), se réduit à $\frac{S}{R}$.

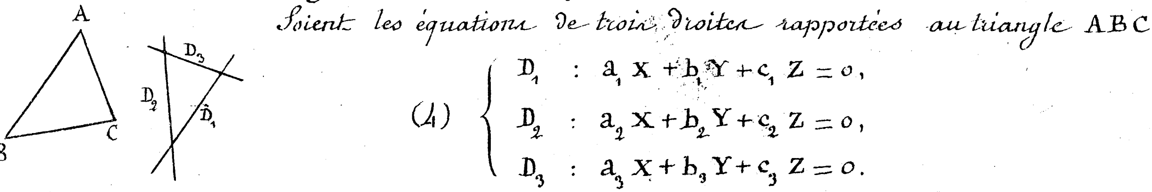
On a donc

$$(3)\qquad \Sigma = \pm \frac{R}{2S} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \lambda\mu\nu;$$

λ, μ, ν étant les paramètres de référence.

Σ est la surface du triangle $M_1 M_2 M_3$; S est la surface du triangle de référence, et R le rayon du cercle circonscrit.

2° Calculer la surface d'un triangle dont on donne les équations des côtés.



Soient les équations de trois droites rapportées au triangle ABC

$$(4)\quad \begin{cases} D_1 : & a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0, \\ D_2 : & a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0, \\ D_3 : & a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0. \end{cases}$$

Désignons par X_1, Y_1, Z_1, les coordonnées du point d'intersection de D_2 et D_3 ; par X_2, Y_2, Z_2, celles du point

d'intersection de D_3 et D_1, etc...; nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} Q_1 = a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1, \\ 0 = a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2 Z_1, \\ 0 = a_3 X_1 + b_3 Y_1 + c_3 Z_1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_1 X_2 + b_1 Y_2 + c_1 Z_2, \\ Q_2 = a_2 X_2 + b_2 Y_2 + c_2 Z_2, \\ 0 = a_3 X_2 + b_3 Y_2 + c_3 Z_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_1 X_3 + b_1 Y_3 + c_1 Z_3, \\ 0 = a_2 X_3 + b_2 Y_3 + c_2 Z_3, \\ Q_3 = a_3 X_3 + b_3 Y_3 + c_3 Z_3. \end{cases}$$

D'après le théorème connu sur la multiplication des déterminants, on conclura des relations (5):

$$(6)\qquad Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Il faut maintenant calculer Q_1, Q_2, Q_3. Posons d'abord

$$(7)\quad P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad P_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}; \quad P_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}; \quad P_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}$$

Si, au premier groupe des relations (5), nous joignons la relation

$$X_1 \sin A + Y_1 \sin B + Z_1 \sin B = \frac{S}{R},$$

et si nous éliminons X_1, Y_1, Z_1, entre les quatre équations ainsi obtenues, il vient

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & Q_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ \sin A & \sin B & \sin C & \frac{S}{R} \end{vmatrix} = 0, \text{ d'où l'on déduit } Q_1 = \frac{S}{R}\cdot\frac{P}{P_1},$$

en ayant aux notations (7); on aura de même Q_2 et Q_3.

D'après la formule (3) et les valeurs qu'on vient de trouver, la relation (6) donne

$$(8)\qquad 2\,\Sigma = \lambda\mu\nu\cdot\left(\frac{S}{R}\right)^2\cdot\frac{P^2}{P_1 P_2 P_3};$$

c'est la formule cherchée. Σ représente la surface du triangle déterminé par les trois droites (4); λ, μ, ν, sont les paramètres de référence; S et R désignent la surface et le rayon circonscrit du triangle de référence; P, P_1, P_2, P_3, sont les quantités définies par les égalités (7).

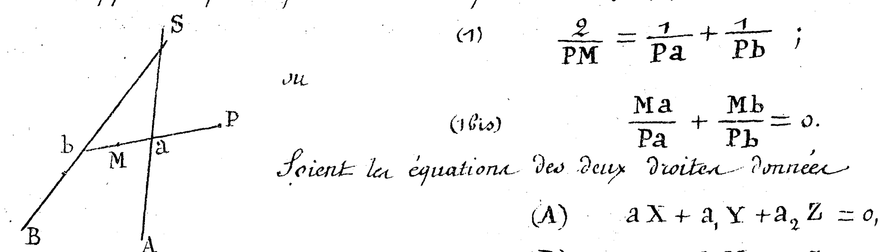
Observation.

Nous ne donnerons pas ici la détermination des angles; nous verrons plus loin une méthode qui facilitera cette recherche.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs que, si l'emploi des coordonnées trilatères offre de grands avantages dans l'étude des propriétés projectives ou descriptives des figures, il est loin d'en être ainsi lorsqu'il s'agit des propriétés métriques. Le système des coordonnées trilatères est souvent un instrument précieux dans les recherches analytiques, mais il ne faut pas en abuser; la nature de la question doit guider le calculateur.

V.° Polaire d'un point par rapport à deux droites.

104. Rappelons que la polaire a été définie N.° (83) par la relation



$$(1)\qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb};$$

ou

$$(1\,bis)\qquad \frac{Ma}{Pa} + \frac{Mb}{Pb} = 0.$$

Soient les équations des deux droites données

$$(A)\qquad aX + a_1 Y + a_2 Z = 0,$$

$$(B)\qquad bX + b_1 Y + a_2 Z = 0,$$

et (X, Y, Z), (X_0, Y_0, Z_0) les coordonnées respectives des points M et P.

D'après les formules (4) du N° (90), si X'Y'Z' sont les coordonnées du point a on aura

$$X' = \frac{X + \frac{Ma}{aP} X_0}{1 + \frac{Ma}{aP}}, \qquad Y' = \frac{Y + \frac{Ma}{aP} Y_0}{1 + \frac{Ma}{aP}}, \qquad Z' = \frac{Z + \frac{Ma}{aP} Z_0}{1 + \frac{Ma}{aP}}.$$

Ces coordonnées devant vérifier l'équation de la droite (A), on en conclut

$$(2) \qquad \frac{Ma}{aP} = -\frac{aX + a_1 Y + a_2 Z}{aX_0 + a_1 Y_0 + a_2 Z_0};$$

on trouvera de même

$$(2 \text{ bis}) \qquad \frac{Mb}{bP} = -\frac{bX + b_1 Y + b_2 Z}{bX_0 + b_1 Y_0 + b_2 Z_0}.$$

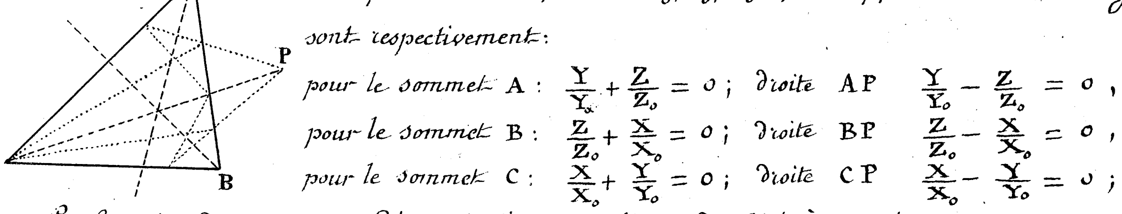
Substituant ces valeurs dans l'équation (1 bis), on obtient pour l'équation de la polaire

$$(3) \qquad \frac{aX + a_1 Y + a_2 Z}{aX_0 + a_1 Y_0 + a_2 Z_0} + \frac{bX + b_1 Y + b_2 Z}{bX_0 + b_1 Y_0 + b_2 Z} = 0,$$

ou

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

105. Appliquons cette formule au triangle de référence.



Les polaires d'un point (X_0, Y_0, Z_0) par rapport aux trois angles du triangle de référence sont respectivement :

pour le sommet A : $\frac{Y}{Y_0} + \frac{Z}{Z_0} = 0$; droite AP $\frac{Y}{Y_0} - \frac{Z}{Z_0} = 0$,

pour le sommet B : $\frac{Z}{Z_0} + \frac{X}{X_0} = 0$; droite BP $\frac{Z}{Z_0} - \frac{X}{X_0} = 0$,

pour le sommet C : $\frac{X}{X_0} + \frac{Y}{Y_0} = 0$; droite CP $\frac{X}{X_0} - \frac{Y}{Y_0} = 0$;

Ces formules donnent une démonstration immédiate des théorèmes suivants :

1° Les polaires d'un même point relatives aux trois angles d'un triangle vont rencontrer, respectivement, les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

2° Les polaires d'un point relatives à deux angles d'un triangle se coupent sur la droite qui joint ce point au sommet du 3me angle.

(Chasles, géométrie supérieure, page 276.)

---

§ III Applications.

I°. Propriétés des transversales.

106. Parmi les propositions que nous allons démontrer, deux ont été déjà établies au N° (57) ; nous allons en donner de nouvelles démonstrations :

I° Quand un triangle ABC est coupé par une transversale abc, on a entre les segments la relation

$$(I) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1,$$

ce théorème est attribué à Ménélaüs.

II° Quand un triangle est coupé par une transversale abc, on a, entre les sinus des angles formés par les lignes aA, bB, cC, avec les côtés de l'angle d'où elle part, la relation suivante

$$(II) \qquad \frac{\sin a\widehat{AB}}{\sin a\widehat{AC}} \cdot \frac{\sin b\widehat{BC}}{\sin b\widehat{BA}} \cdot \frac{\sin c\widehat{CA}}{\sin c\widehat{CB}} = +1;$$

(Chasles, géométrie supérieure, page 261).

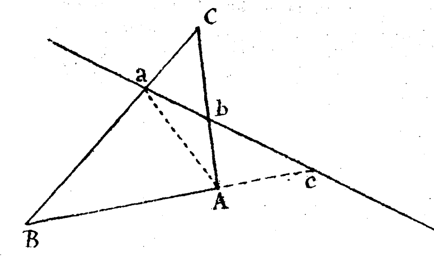
Prenons le triangle en question pour triangle de référence et supposons les paramètres de référence égaux à l'unité. Soit

$$(1) \qquad MX + NY + PZ = o$$

l'équation de la transversale.

Cherchons les intersections de cette droite avec chacun des côtés du triangle.

Pour le point a situé sur le côté BC, on a $X = o$, d'où



$$\frac{Y_o}{Z_o} = -\frac{P}{N}.$$

Or, en tenant compte de la convention du N° (53) sur les signes des segments, et de la convention du N° (90) sur les signes des coordonnées trilatères, on trouve

$$Y_o = Ca.\sin C, \quad Z_o = -Ba.\sin B,$$

car si Ca est positif, Ba sera négatif; quant aux coordonnées Y_o & Z_o, elles sont positives. On a ainsi la première des égalités suivantes

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{Ca.\sin C}{Ba.\sin B} = \dfrac{P}{N}, & \text{pour le point } a; \\[2ex] \dfrac{Ab.\sin A}{Cb.\sin C} = \dfrac{M}{P}, & \text{pour le point } b; \\[2ex] \dfrac{Bc.\sin B}{Ac.\sin A} = \dfrac{N}{M}, & \text{pour le point } c; \end{cases}$$

les deux autres égalités de ce groupe s'obtiennent à l'aide d'un calcul et d'une discussion semblables; on remarquera pour le point c que les coordonnées sont de signes contraires, mais les segments Bc, Ac, sont de même signe.

En multipliant membre à membre les égalités (2), on obtient

$$\frac{Ca}{Ba}.\frac{Ab}{Cb}.\frac{Bc}{Ac} = +1;$$

c'est la relation qu'il s'agissait de démontrer.

Maintenant joignons aA, bB, cC; considérons, par exemple, les angles $a\widehat{AB}$, $a\widehat{AC}$; on a

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{Ba}{Aa} = \dfrac{\sin a\widehat{AB}}{\sin B}, \text{ d'où } Ba.\sin B = \overline{Aa}.\sin a\widehat{AB}; \\[2ex] \dfrac{Ca}{Aa} = \dfrac{\sin a\widehat{AC}}{\sin C}, \text{ d'où } Ca.\sin C = \overline{Aa}.\sin a\widehat{AC}. \end{cases}$$

A l'aide de ces relations et des relations analogues, les égalités (2) pourront s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin a\widehat{AC}}{\sin a\widehat{AB}} = \dfrac{P}{N}, \\[2ex] \dfrac{\sin b\widehat{BA}}{\sin b\widehat{BC}} = \dfrac{M}{P}, \\[2ex] \dfrac{\sin c\widehat{CB}}{\sin c\widehat{CA}} = \dfrac{N}{M}. \end{cases}$$

Mais, pour que les relations (3) et, par suite, les relations (4) soient vraies quant à la grandeur et quant au signe des quantités, il faut adopter la convention suivante:

Les angles, tels que $a\widehat{AB}$, $a\widehat{AC}$, ... seront positifs ou négatifs suivant que les segments correspondants aB, aC, ... seront positifs ou négatifs; ou, ce qui revient au même, les angles $a\widehat{AB}$, $a\widehat{AC}$, ... seront positifs ou négatifs suivant qu'ils seront comptés dans un sens ou en sens contraire, à partir de Aa.

En multipliant membre à membre les égalités (4) on obtient la relation (II) qu'il s'agissait de démontrer.

107. III°. Les droites menées d'un même point aux trois sommets d'un triangle ABC, rencontrent les côtés opposés en trois points a, b, c, tels, que l'on a l'équation

$$\text{(III)} \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1 \; ;$$

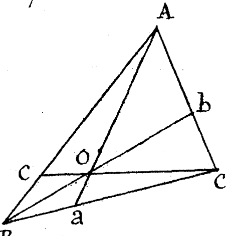
ce théorème est attribué à Jean de Céva (11des Annales, tome X.)

IV°. Quand trois droites issues des sommets d'un triangle ABC passent par un même point O, on a entre les sinus des angles qu'elles font, chacune avec les deux côtés de l'angle d'où elle part, la relation

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\sin a\widehat{AB}}{\sin a\widehat{AC}} \cdot \frac{\sin b\widehat{BC}}{\sin b\widehat{BA}} \cdot \frac{\sin c\widehat{CA}}{\sin c\widehat{CB}} = -1 \; ;$$

(Chasles, géométrie supérieure, page 263).

Choisissons toujours le triangle en question pour triangle de référence, et soient X_0, Y_0, Z_0, les coordonnées du point O.



L'équation d'une droite, passant par le sommet A, est

$$Y = \lambda Z \; ;$$

cette droite, devant passer par le point O, on en conclura

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0}.$$

Nous pouvons regarder Y et Z comme les coordonnées du point a ; on aura

$$Y = Ca \,.\, \sin C, \quad Z = -Ba \,.\, \sin B;$$

car si Ca est positif, Ba sera négatif, vu la position actuelle du point a ; et les coordonnées Y & Z sont positives. On a ainsi, la première des relations suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{Ca \,.\, \sin C}{Ba \,.\, \sin B} = -\dfrac{Z_0}{Y_0}, \\[2ex] \dfrac{Ab \,.\, \sin A}{Cb \,.\, \sin C} = -\dfrac{X_0}{Z_0}, \\[2ex] \dfrac{Bc \,.\, \sin B}{Ac \,.\, \sin A} = -\dfrac{Y_0}{X_0} \,; \end{cases}$$

les deux autres relations s'obtiendront par des considérations semblables.

En ayant égard aux égalités (3) et, par suite, à la convention énoncée à la fin du N°. (106), les relations (5) pourront s'écrire

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin a\widehat{AC}}{\sin a\widehat{AB}} = -\dfrac{Z_0}{Y_0}, \\[2ex] \dfrac{\sin b\widehat{BA}}{\sin b\widehat{BC}} = -\dfrac{X_0}{Z_0}, \\[2ex] \dfrac{\sin c\widehat{CB}}{\sin c\widehat{CA}} = -\dfrac{Y_0}{X_0}. \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les équations (5), puis les équations (6), on obtient immédiatement les relations (III) et (IV) qu'il s'agissait de démontrer.

II°. Triangles homologiques.

108. I°. Quand deux triangles ont leurs sommets deux à deux sur trois droites concourantes en un même point, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points en

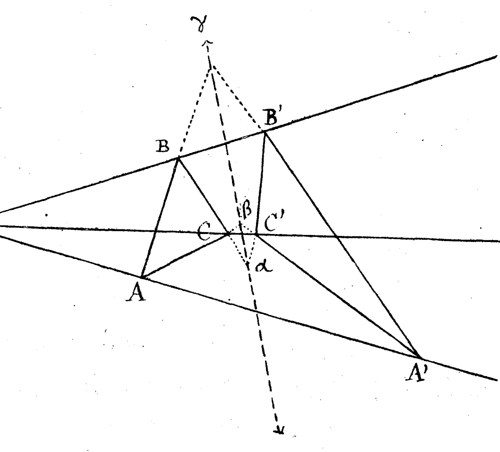
ligne droite.

II°. *Réciproquement*: si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent, deux à deux respectivement, en trois points situés en ligne droite, leurs sommets sont sur trois droites concourantes en un même point.

Ces théorèmes, attribués à Desargues, forment le point de départ des figures homologiques; les deux triangles sont dits homologiques.

Prenons l'un des triangles, ABC par exemple, pour triangle de référence.

1°. Soient X_0, Y_0, Z_0, les coordonnées du point de concours des trois droites AA', BB', CC'; les équations des côtés BC, CA, AB, sont



$$(1)\quad \begin{cases} BC : X = 0, \\ CA : Y = 0, \\ AB : Z = 0. \end{cases}$$

Les droites OA, OB, OC, auront respectivement pour équations

$$(2)\quad \begin{cases} OA : \dfrac{Y}{Y_0} - \dfrac{Z}{Z_0} = 0, \\ OB : \dfrac{Z}{Z_0} - \dfrac{X}{X_0} = 0, \\ OC : \dfrac{X}{X_0} - \dfrac{Y}{Y_0} = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant

$$mX + nY + pZ = 0$$

l'équation de la droite B'C'; les équations des droites B'A', C'A' (passant: la 1ère, par l'intersection de OB et B'C'; la 2ème, par l'intersection de OC et B'C') seront de la forme

$$mX + nY + pZ + \lambda\left(\frac{Z}{Z_0} - \frac{X}{X_0}\right) = 0,$$
$$mX + nY + pZ + \mu\left(\frac{X}{X_0} - \frac{Y}{Y_0}\right) = 0;$$

ces deux droites se couperont sur OA, si $\lambda = -\mu$; les équations des côtés du triangle A'B'C' seront, par conséquent

$$(3)\quad \begin{cases} B'C' : mX + nY + pZ = 0, \\ C'A' : mX + nY + pZ + \lambda\left(\dfrac{Y}{Y_0} - \dfrac{X}{X_0}\right) = 0, \\ A'B' : mX + nY + pZ + \lambda\left(\dfrac{Z}{Z_0} - \dfrac{X}{X_0}\right) = 0. \end{cases}$$

L'équation d'une droite passant par le point α, intersection de BC et B'C' est

$$mX + nY + pZ + kX = 0;$$

exprimons que cette droite passe par le point β, intersection de AC et A'C'. En faisant $Y = 0$, l'équation précédente et la seconde des équations (3) donnent

$$(m + k)X + pZ = 0,$$
$$\left(m - \frac{\lambda}{X_0}\right)X_0 + pZ = 0;$$

d'où l'on conclut

$$k = -\frac{\lambda}{X_0};$$

l'équation de la droite αβ sera donc

$$(4)\qquad mX + nY + pZ - \lambda\frac{X}{X_0} = 0;$$

il est visible que cette droite passe par le point γ, intersection de AB et A'B'.

2°. Pour la proposition réciproque, prenons encore un des triangles, ABC par exemple, pour triangle de référence; les équations de ses côtés seront

$$(1)\quad \begin{cases} BC : X = 0, \\ CA : Y = 0, \\ AB : Z = 0; \end{cases}$$

soit l'équation de la droite αβγ

$$(2)\qquad (D)\qquad aX + bY + cZ = 0;$$

les équations des côtés B'C', C'A', A'B', seront alors

$$(3)\quad \begin{cases} B'C': & aX+bY+cZ+\lambda X=0, \text{ (passant par l'intersection de BC et D);} \\ C'A': & aX+bY+cZ+\mu Y=0, \text{ (passant par l'intersection de CA et D);} \\ A'B': & aX+bY+cZ+\nu Z=0, \text{ (passant par l'intersection de AB et D).} \end{cases}$$

Cherchons maintenant les équations des trois droites AA', BB', CC'.

Le point A' est l'intersection de C'A' et B'A'; l'équation d'une droite passant par ce point est

$$aX+bY+cZ+\mu Y+k(aX+bY+cZ+\nu Z)=0;$$

Si l'on exprime que cette droite passe par le point A $(Y=0, Z=0)$, on a

$$a+ka=0;\ \text{d'où } k=-1;$$

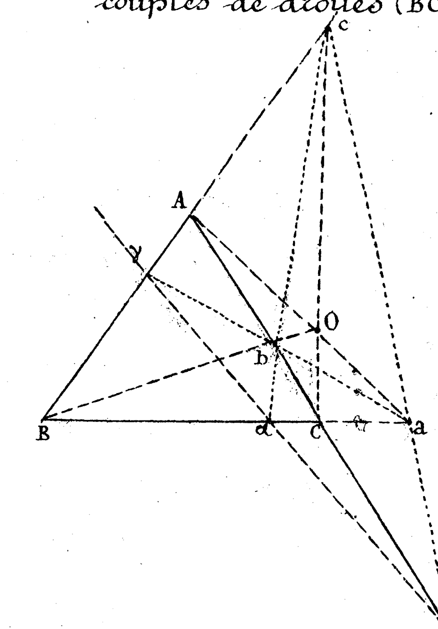
on trouve ainsi la première des équations suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} AA': & \mu Y-\nu Z=0; \\ BB': & \nu Z-\lambda X=0; \\ CC': & \lambda X-\mu Y=0; \end{cases}$$

les deux dernières s'obtiendront par un calcul semblable, ou, plus simplement, par voie de symétrie.

Or les trois droites (4) sont évidemment concourantes; donc... etc...

109. Si l'on joint un point O aux trois sommets d'un triangle ABC et que a, b, c, soient les intersections des droites OA, OB, OC, avec les côtés opposés, les trois points d'intersection des couples de droites (BC, bc), (AC, ac), (AB, ab) sont en ligne droite.



Cette proposition est un cas particulier du premier des théorèmes précédents, puisque les trois droites Aa, Bb, Cc, sont concourantes; seulement ici, les sommets du second triangle abc sont respectivement sur les côtés du premier, ABC.

On peut aussi donner une démonstration directe du théorème en prenant le triangle ABC pour triangle de référence.

Si X_0, Y_0, Z_0 sont les coordonnées du point O, les droites Aa, Bb, Cc, auront respectivement pour équations

$$\frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0,\quad \frac{Z}{Z_0}-\frac{X}{X_0}=0,\quad \frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}=0.$$

Déterminant alors les points a, b, c, on trouve pour les équations des côtés bc, ca, ab :

$$-\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0,\quad \frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0,\quad \frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0.$$

Si l'on cherche les intersections respectives de ces droites avec les côtés BC, CA, AB, on constate que ces trois points sont sur la droite

$$\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}+\frac{Z}{Z_0}=0.$$

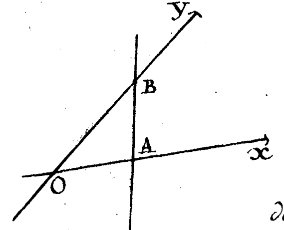
Chapitre III

Point.

§I Coordonnées d'une droite - Équation d'un point.

1° Coordonnées d'une droite - Équation du 1er degré.

110 Étant données deux droites fixes Ox et Oy, nous définirons une droite par les distances à l'origine O des



points A et B où elle rencontre les axes, ces distances étant regardées comme positives ou négatives suivant qu'elles sont dirigées dans le sens Ox et Oy ou en sens contraire; les inverses de ces distances, c. à d. $\frac{1}{OA}$, $\frac{1}{OB}$, seront appelées **les coordonnées de la droite AB**, et nous les désignerons par u, v. Les coordonnées d'une droite AB seront donc

$$(1) \qquad u = \frac{1}{OA}, \quad v = \frac{1}{OB}.$$

Souvent, nous représenterons ces quantités par les rapports $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, de sorte qu'on aura

$$(1 bis) \qquad \frac{u}{w} = \frac{1}{OA}, \quad \frac{v}{w} = \frac{1}{OB};$$

les quantités u, v, w seront appelées les **coordonnées homogènes** de la droite AB.

D'après cela, u et v étant les coordonnées d'une droite, l'équation de cette droite ou équation aux coordonnées-point sera (n° 41)

$$(2) \qquad ux + vy - 1 = 0.$$

Lorsque les axes Ox et Oy seront rectangulaires, nous donnerons à u et v le nom de **coordonnées rectangulaires** de la droite.

Remarque. Une relation, telle que $f(u, v) = 0$, entre les variables u et v, représente une série continue de droites, dont les intersections successives forment une courbe; les droites (u, v) sont les tangentes de cette courbe (nous reviendrons avec plus détails sur ce sujet); par cette raison, l'équation $f(u, v) = 0$ est dite **l'équation tangentielle** de la courbe. On a donné aux quantités u et v le nom de **coordonnées tangentielles**; c'est une dénomination que nous emploierons fréquemment.

111. **Toute équation du 1er degré entre les quantités u et v représente un point.**

Soit l'équation

$$(3) \qquad Au + Bv + C = 0.$$

A une solution (u, v) de cette équation correspondra une droite ayant pour équation

$$ux + vy - 1 = 0;$$

or toutes ces droites passent par un point fixe. Ajoutons, en effet, ces équations, après avoir multiplié la seconde par C, il vient

$$u(A + Cx) + v(B + Cy) = 0.$$

Cette équation représente une quelconque des droites dont les coordonnées vérifient la relation (3); on voit que toutes ces droites passent par le point fixe

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{A}{C}, \\ y = -\dfrac{B}{C}; \end{cases}$$

nous pouvons donc regarder l'équation (3) comme définissant ce point.

Ainsi, **l'équation du 1er degré entre les coordonnées u et v d'une droite quelconque, savoir**

$$(3) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

représente un point par lequel passent toutes les droites dont les coordonnées u et v vérifient cette équation; les coordonnées cartésiennes du point sont

$$(4) \qquad x = -\frac{A}{C}, \quad y = -\frac{B}{C}.$$

112. **Cas particuliers.**

Les valeurs (4) rendent visibles les conclusions suivantes.

Les équations

$$Au + C = 0, \quad Bv + C = 0$$

représentent: la première, un point situé sur l'axe Ox; la deuxième, un point sur l'axe Oy.

L'équation d'un point, rendue homogène, s'écrira

$$(5) \qquad Au + Bv + Cw = 0.$$

L'équation de l'origine des coordonnées sera

$$(6) \qquad w = 0.$$

II. Différentes formes de l'équation du point.

113. En résolvant cette question, nous prouverons que l'équation d'un point est du 1er degré.

Étant données les coordonnées cartésiennes $x_0\, y_0$, d'un point, trouver l'équation tangentielle du point.

L'équation d'une droite quelconque passant par ce point est

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

or les coordonnées de cette droite sont

$$\frac{1}{u} = x_0 - \frac{y_0}{m}, \quad \frac{1}{v} = y_0 - m\, x_0.$$

Éliminons m entre ces deux égalités, on aura la relation suivante

$$(7) \qquad u x_0 + v y_0 - 1 = 0,$$

entre les coordonnées d'une droite quelconque passant par le point donné; c'est l'équation du point; on voit qu'elle est du premier degré.

Nous donnerons à l'équation suivante

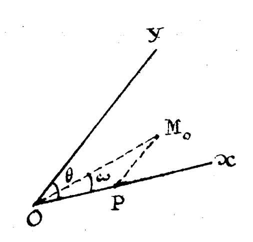
$$(8) \qquad a u + b v - 1 = 0$$

le nom de **forme normale** de l'équation d'un point; les coordonnées cartésiennes de ce point sont alors a et b.

114. Nous pouvons encore obtenir l'équation d'un point sous une autre forme qui sera utile pour l'interprétation des calculs.

1°. **Axes obliques.**

Soit ρ la distance OM_0 et ω l'angle de OM_0 avec Ox; on a



$$\frac{x_0}{\rho} = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin\theta}, \quad \frac{y_0}{\rho} = \frac{\sin\omega}{\sin\theta};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (7), il vient

$$u \sin(\theta - \omega) + v \sin\omega - \frac{\sin\theta}{\rho} = 0;$$

c. à d. que l'équation

$$(9) \qquad u \sin(\theta - \omega) + v \sin\omega - p = 0,$$

représente un point dont la distance à l'origine est $\frac{\sin\theta}{p}$, et dont le rayon vecteur fait avec Ox l'angle ω.

2°. **Axes rectangulaires.**

L'équation

$$(10) \qquad u \cos\omega + v \sin\omega - p = 0$$

représente un point dont la distance à l'origine est $\frac{1}{p}$ et dont le rayon vecteur fait, avec l'axe Ox l'angle ω.

III°. Point à l'infini. Droites parallèles.

115. Si dans l'équation (3) on suppose C nul, il vient

$$(11) \qquad A u + B v = 0;$$

les formules (4) nous montrent que

l'équation (11) représente un point à l'infini situé sur la droite ayant pour coefficient angulaire $\frac{B}{A}$.

Les équations

$$u = 0, \quad v = 0,$$

représentent: la 1re un point à l'infini sur l'axe Ox; la 2ème un point à l'infini sur l'axe Oy.

116. Les coordonnées de la droite de l'infini sont nulles.

Ceci est visible par la définition même N° (110); on en conclut aussi que

Les coordonnées de deux droites parallèles sont proportionnelles.

Lorsqu'une droite passe par l'origine des coordonnées, ses coordonnées sont infinies; la droite est, en général, indéterminée de direction, à moins que le rapport de ses coordonnées infinies ait une valeur finie et déterminée.

Les coordonnées de l'axe Ox seront infinies; on aura la condition $\lim. \frac{u}{v} = 0$; les coordonnées de l'axe Oy seront infinies; on aura la condition $\lim. \frac{v}{u} = 0$.

Ou encore: si l'on prend les coordonnées homogènes u, v, w, nous aurons.

Pour l'axe Ox, $u = 0$, $w = 0$;

Pour l'axe Oy, $v = 0$, $w = 0$.

Tous ces résultats se constatent immédiatement en remarquant que si

$$(12) \qquad Mx + Ny + P = 0$$

est l'équation aux coordonnées-point d'une droite, les coordonnées de cette droite seront

$$(12 \text{ bis}) \qquad \frac{u}{w} = -\frac{M}{P}, \quad \frac{v}{w} = -\frac{N}{P}, \quad \text{ou} \quad \frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{-P}.$$

IV° Équation d'un point situé sur une droite donnée.

117. Supposons d'abord la droite donnée par ses coordonnées u_0, v_0; et soit

$$Au + Bv + C = 0$$

l'équation du point cherché. La droite donnée devant passer par ce point, on aura

$$Au_0 + Bv_0 + C = 0;$$

d'où l'on conclut, en retranchant:

$$(13) \qquad A(u - u_0) + B(v - v_0) = 0,$$

C'est l'équation d'un point quelconque situé sur la droite (u_0, v_0).

118. Supposons, en second lieu, la droite définie par les deux points

$$(14) \qquad \begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, & (M_1) \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; & (M_2) \end{cases}$$

l'équation d'un point quelconque situé sur la droite $M_1 M_2$ sera

$$(15) \qquad A_1 u + B_1 v + C_1 + \lambda (A_2 u + B_2 v + C_2) = 0. \ (M)$$

En effet, les coordonnées d'une droite, passant par M_1 et M_2, c.à.d. vérifiant les équations (14), satisfont évidemment à l'équation (15); donc la droite $M_1 M_2$ passe par le point (15). On pourra d'ailleurs disposer de λ de manière à ce que l'équation (15) représente un point quelconque de la droite.

119. Équation d'un point divisant un segment dans un rapport donné.

Soient M_1 et M_2 (14) les extrémités du segment; le point M (15) situé sur ce segment a pour coordonnées N° (111)

$$x = -\frac{A_1 + \lambda A_2}{C_1 + \lambda C_2}, \quad y = -\frac{B_1 + \lambda B_2}{C_1 + \lambda C_2}.$$

$M_1 \quad M \quad M_2$

D'ailleurs, les coordonnées des points M_1 et M_2 sont respectivement

$$\begin{cases} x = -\frac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\frac{A_2}{C_2}, \\ y = -\frac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\frac{B_2}{C_2}. \end{cases}$$

En remplaçant $A_1, B_1; A_2, B_2$, par ces valeurs dans les formules qui précèdent, on trouve

$$x = \frac{C_1 x_1 + \lambda C_2 x_2}{C_1 + \lambda C_2}, \quad y = \frac{C_1 y_1 + \lambda C_2 y_2}{C_1 + \lambda C_2}.$$

Comparant ces dernières valeurs à celles qui sont fournies par les relations (1) & (2) du N° (52), on en conclut

$$(16)\qquad \frac{\lambda C_2}{C_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1M}{MM_2};$$

en ayant toujours égard aux conventions du N° (53).

Par conséquent, étant donnés les deux points

$$(17)\qquad \begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \ (M_1) \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; \ (M_2) \end{cases}$$

l'équation

$$(18)\qquad \frac{m_1}{C_1}(A_1 u + B_1 v + C_1) + \frac{m_2}{C_2}(A_2 u + B_2 v + C_2) = 0,$$

représentera un point situé sur la droite M_1M_2 et partageant ce segment dans un rapport tel que

$M_1 \quad M \quad M_2$

$$(19)\qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Étant données, sous la forme normale, les équations des deux points

$$(17\ bis)\qquad \begin{cases} a_1 u + b_1 v - 1 = 0, \ (M_1) \\ a_2 u + b_2 v - 1 = 0, \ (M_2) \end{cases}$$

l'équation

$$(18\ bis)\qquad m_1(a_1 u + b_1 v - 1) + m_2(a_2 u + b_2 v - 1) = 0$$

représentera un point situé sur la droite M_1M_2 et divisant ce segment dans le rapport

$$(19\ bis)\qquad \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Cas particuliers.

Le point milieu d'un segment s'obtiendra en faisant $m_2 = m_1$; ce qui donne: dans le cas général

$$(20)\qquad \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{C_1} + \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{C_2} = 0;$$

dans le cas des formes normales

$$(20\ bis)\qquad (a_1 u + b_1 v - 1) + (a_2 u + b_2 v - 1) = 0.$$

Le point à l'infini sur le segment s'obtiendra en supposant $m_2 = -m_1$; ce qui donne: dans le cas général

$$(21)\qquad \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{C_1} - \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{C_2} = 0;$$

dans le cas des formes normales

$$(21\ bis)\qquad (a_1 u + b_1 v - 1) - (a_2 u + b_2 v - 1) = 0.$$

V° Équation du point d'intersection de deux droites.

120. Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ les coordonnées des deux droites données, et

$$Au + Bv + C = 0$$

l'équation de leur point de rencontre; cette équation devra être vérifiée par les coordonnées des deux droites; on aura ainsi

$$A u_1 + B v_1 + C = 0,$$
$$A u_2 + B v_2 + C = 0.$$

Éliminant A, B, C entre ces trois équations, on trouve pour l'équation du point de rencontre des deux droites

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De là on conclut immédiatement la condition pour que les trois droites $(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2)$ se coupent en un même point; cette condition est

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

VI. Coordonnées d'une droite passant par le point de concours de deux droites.

121. Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) les coordonnées de deux droites données; les équations de ces deux droites seront Nº (110)

$$(D_1) \qquad u_1 x + v_1 y - 1 = 0,$$

$$(D_2) \qquad u_2 x + v_2 y - 1 = 0.$$

L'équation d'une droite (D) quelconque passant par leur point d'intersection sera

$$(D) \qquad m_1 (u_1 x + v_1 y - 1) + m_2 (u_2 x + v_2 y - 1) = 0;$$

d'où l'on conclut pour les coordonnées u et v de la droite (D)

$$(24) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] v = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

ces relations déterminent les coordonnées d'une droite quelconque (D), passant par le point d'intersection des droites D_1 et D_2.

122. Il existe entre le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ et les sinus des angles des trois droites D, D_1, D_2, une relation qu'il est important d'établir.

L'équation de la droite (D) est

$$m_1 (u_1 x + v_1 y - 1) + m_2 (u_2 x + v_2 y - 1) = 0.$$

Soient S le point de concours des trois droites; O, l'origine des coordonnées; et M(x, y) un point quelconque de la droite (D); soient, en outre, MP_1, MP_2; OQ_1, OQ_2, les perpendiculaires abaissées respectivement des points M et O sur les droites D_1 et D_2.

On a, vu la position actuelle du point M par rapport aux droites, Nº (76)

$$\begin{cases} MP_1 = SM \sin \widehat{DSD_1} = \dfrac{(u_1 x + v_1 y - 1) \sin \theta}{+\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2 u_1 v_1 \cos \theta}}, \\[2ex] MP_2 = SM \sin \widehat{DSD_2} = \dfrac{(u_2 x + v_2 y - 1) \sin \theta}{-\sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 2 u_2 v_2 \cos \theta}}; \end{cases}$$

On a aussi

$$\begin{cases} OQ_1 = OS \sin \widehat{OSD_1} = \dfrac{\sin \theta}{+\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2 u_1 v_1 \cos \theta}}, \\[2ex] OQ_2 = OS \sin \widehat{OSD_2} = \dfrac{\sin \theta}{+\sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 2 u_2 v_2 \cos \theta}}. \end{cases}$$

De ces égalités on conclut

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y - 1 = \dfrac{SM}{OS} \cdot \dfrac{\sin \widehat{DSD_1}}{\sin \widehat{OSD_1}}, \\[2ex] u_2 x + v_2 y - 1 = -\dfrac{SM}{OS} \cdot \dfrac{\sin \widehat{DSD_2}}{\sin \widehat{OSD_2}}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la droite (D), il vient

$$(1^\circ) \qquad m_1 \frac{\sin \widehat{DSD_1}}{\sin \widehat{OSD_1}} - m_2 \frac{\sin \widehat{DSD_2}}{\sin \widehat{OSD_2}} = 0.$$

Nous rappellerons des conventions déjà faites :

Conventions.

Les angles, comptés à partir d'une certaine droite, seront regardés comme positifs ou négatifs suivant que le mouvement de rotation a lieu, à partir de cette droite, dans un sens ou dans le sens contraire.

De plus, la notation $\widehat{DSD_1}$ indiquera qu'on va de la droite D vers la droite D_1 ; et la rotation $\widehat{D_1SD}$ indiquera un mouvement de sens contraire ; de sorte que

$$\widehat{DSD_1} = -\widehat{D_1SD}.$$

Or, dans la figure actuelle, si l'angle $\widehat{DSD_1}$ est regardé comme positif, l'angle $\widehat{DSD_2}$ sera négatif. Mettant la 1[re] convention en évidence, l'égalité (1°) donne

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\sin \widehat{D_1SD}}{\sin \widehat{DSD_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}};$$

mais en évaluant la distance MP_2 nous avons regardé $\sin \widehat{DSD_2}$ comme une quantité positive ; et, comme d'après la remarque et la convention précédente, l'angle $\widehat{DSD_2}$ est négatif, on devra remplacer $\sin \widehat{DSD_2}$ par $-\sin \widehat{DSD_2}$; ce qui donne

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \widehat{D_1SD}}{\sin \widehat{DSD_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}}.$$

Donc, les coordonnées d'une droite quelconque (D), passant par le point d'intersection des deux droites $D_1(u_1, v_1)$, $D_2(u_2, v_2)$, sont données par les formules

$$(25) \quad \begin{cases} u = \dfrac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\[2ex] v = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

et le rapport $\frac{m_2}{m_1}$ est lié aux angles de ces droites par la relation

$$(25 \text{ bis}) \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \widehat{D_1SD}}{\sin \widehat{DSD_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}};$$

O est l'origine des coordonnées ; S est le point de rencontre des droites.

Il faudra avoir égard, dans cette formule, à la convention que nous venons de rappeler sur la notation et les signes des angles.

Bissectrices.

Lorsque la droite D sera bissectrice de l'angle de deux droites D_1 et D_2, on aura

$$D_1SD = + DSD_2, \quad ou \quad D_1SD = - DSD_2$$

suivant que la droite est bissectrice de l'angle D_1SD_2 ou de son supplément ; par suite :

$$(26) \qquad \frac{m_2}{m_1} = + \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}}, \quad ou \quad \frac{m_2}{m_1} = - \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}}.$$

VII. Formules déduites des théorèmes précédents.

123. Les formules fondamentales, établies dans les N[os] (119) et (122), nous conduisent à d'autres formules qu'il importe de signaler.

1°. Trouver le rapport dans lequel une droite (u_0, v_0) divise un segment donné.

Soient les équations des extrémités du segment :

$$(M_1) \qquad A_1 u + B_1 v + C_1 = 0;$$

$$(M_2) \qquad A_2 u + B_2 v + C_2 = 0;$$

et (u_0, v_0) les coordonnées de la droite (D_0).

M_1 M M_2 D_0

L'équation d'un point M situé sur la droite M_1M_2 est N° (119) équat. (18)

$$\text{(M)} \qquad \frac{m_1}{C_1}(A_1 u + B_1 v + C_1) + \frac{m_2}{C_2}(A_2 u + B_2 v + C_2) = 0,$$

et l'on a

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1 M}{M M_2}.$$

Or la droite (u_0, v_0) doit passer par le point M; on a donc

$$(27) \qquad \frac{m_2}{m_1} \text{ ou } \frac{M_1 M}{M M_2} = -\frac{A_1 u_0 + B_1 v_0 + C_1}{A_2 u_0 + B_2 v_0 + C_2} \cdot \frac{C_2}{C_1};$$

c'est la formule qui résout la question.

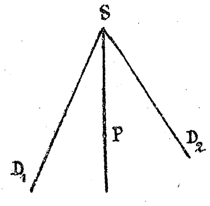
Dans le cas de la forme normale des équations des points, on aura

$$(27 \text{ bis}) \qquad \frac{M_1 M}{M M_2} = -\frac{a_1 u_0 + b_1 v_0 - 1}{a_2 u_0 + b_2 v_0 - 1}.$$

Si la droite étaient donnée par deux points, on déterminerait ses coordonnées u_0, v_0, comme nous le verrons plus loin.

II° On donne deux droites D_1 et D_2 qui se rencontrent en S, et un point P; trouver le rapport des sinus des angles $\widehat{PSD_1}$, $\widehat{PSD_2}$.

Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ les coordonnées des deux droites D_1 et D_2, et



$$\text{(P)} \qquad Au + Bv + C = 0$$

l'équation du point donné.

Désignant par u et v les coordonnées d'un point quelconque de SP, on a N° (122)

$$u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \qquad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

cette droite devant passer par le point (P), on en conclut

$$A(m_1 u_1 + m_2 u_2) + B(m_1 v_1 + m_2 v_2) + C(m_1 + m_2) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{Au_1 + Bv_1 + C}{Au_2 + Bv_2 + C};$$

et d'après l'égalité (25 bis) du N° (122)

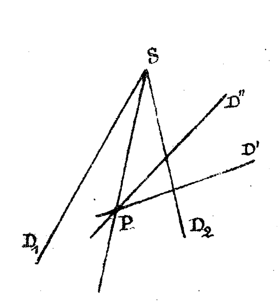
$$(28) \qquad \frac{\sin \widehat{D_1 SP}}{\sin \widehat{PSD_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}} = -\frac{Au_1 + Bv_1 + C}{Au_2 + Bv_2 + C};$$

O étant l'origine des coordonnées; cette formule résout la question posée.

III° On donne deux droites D_1 et D_2 qui se coupent en S, et un point P intersection de deux droites D' et D"; trouver la relation entre les angles $\widehat{PSD_1}$ et $\widehat{PSD_2}$.

Si (u', v') et (u'', v'') sont les coordonnées des deux droites D' et D", l'équation de leur point d'intersection (P) sera N° (120)

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



En appliquant à ce cas la relation qui précède, on a

$$(29) \qquad \frac{\sin \widehat{D_1 SP}}{\sin \widehat{PSD_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{OSD_2}}{\sin \widehat{OSD_1}} = -\frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}};$$

cette formule résout la question posée.

Remarque. Les relations que nous venons d'établir permettent de démontrer immédiatement les théorèmes sur les transversales énoncés et déjà démontrés au N° (106)

Cette application sera un exercice utile.

VIII° Coordonnées d'une droite passant par deux points.

124. Supposons d'abord les deux points donnés par leurs équations

$$\begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; \end{cases}$$

les coordonnées de la droite s'obtiendront en résolvant ces deux équations par rapport à u et à v.

Si les deux points étaient donnés par leurs coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), on en conclurait N° (113) les équations des deux points, savoir

$$\begin{cases} x_1 u + y_1 v - 1 = 0, \\ x_2 u + y_2 v - 1 = 0; \end{cases}$$

et on trouverait pour les coordonnées de la droite

$$(30) \qquad u = \frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \; v = \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

125. Condition pour que trois points soient en ligne droite.

Si les équations des trois points sont

$$\begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0, \\ A_3 u + B_3 v + C_3 = 0; \end{cases}$$

la relation cherchée s'obtiendra en écrivant que ces trois équations ont une solution commune, ce qui donne

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

126. Si $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, sont les équations de trois points, non en ligne droite, l'équation d'un point quelconque pourra toujours se mettre sous la forme

$$mM + nN + pP = 0,$$

m, n, p, étant des constantes.

La démonstration est la même, mot pour mot, que celle qui a été donnée au N° (60) pour le théorème analogue sur la ligne droite.

IX° Équations homogènes.

127. Si l'équation $f(u, v) = 0$ est homogène en u et v, on a identiquement

$$f(u, v) = v^m f\left(\frac{u}{v}, 1\right) = v^m \left(\frac{u}{v} + a_1\right)\left(\frac{u}{v} + a_2\right) \cdots \left(\frac{u}{v} + a_m\right);$$

par suite, l'équation donnée pourra s'écrire

$$f(u, v) = (u + a_1 v)(u + a_2 v) \cdots (u + a_m v) = 0.$$

Cette équation sera évidemment vérifiée en posant

$$u + a_1 v = 0, \text{ ou } u + a_2 v = 0, \ldots, \text{ ou } u + a_m v = 0.$$

Or ces équations représentent m points à l'infini, situés respectivement sur m droites dont les coefficients angulaires sont $a_1, a_2, \ldots a_m$ N° (115).

Donc toute équation homogène et du $m^{ième}$ degré entre les coordonnées u et v d'une droite représente un système de m points sur la droite de l'infini.

On démontrerait de même N° (112) que les équations du $m^{ième}$ degré et de la forme

$$f(u) = 0, \; f(v) = 0,$$

représentent: la 1ère un sytème de m points situés sur l'axe Ox; la 2ème un système de m points situés sur l'axe Oy.

§II. Distances.

I° Distance de deux points.

128. Soient les équations des deux points

$$(M_1)\begin{cases} A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0; \end{cases} \text{formes normales} \begin{cases} a_1 u + b_1 v - 1 = 0, \\ a_2 u + b_2 v - 1 = 0. \end{cases} (M_2)$$

les coordonnées des deux points seront N° (111)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\frac{A_2}{C_2}, \\ y_1 = -\frac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\frac{B_2}{C_2}; \end{cases}$$

et l'on aura, θ étant l'angle des axes,

$$(1) \qquad \overline{M_1 M_2}^2 = \frac{(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2}{C_1^2 C_2^2} + \frac{(B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}{C_1^2 C_2^2} + 2\,\frac{(A_1 C_2 - A_2 C_1)(B_1 C_2 - B_2 C_1)}{C_1^2 C_2^2}\cos\theta;$$

et dans le cas de la forme normale pour les équations des points:

$$(1\text{bis}) \qquad \overline{M_1 M_2}^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + 2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)\cos\theta.$$

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'expression de la distance sera

$$(2) \qquad \overline{M_1 M_2}^2 = \frac{(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}{C_1^2 C_2^2};$$

et dans le cas de la forme normale

$$(2\text{bis}) \qquad \overline{M_1 M_2}^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2.$$

II° Distance d'un point à une droite.

129. Soient u_0, v_0, les coordonnées de la droite, et

$$(M) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

l'équation du point.

L'équation en coordonnées-point de la droite sera N° (110)

$$u_0 x + v_0 y - 1 = 0$$

et les coordonnées du point M seront N° (111)

$$x = -\frac{A}{C}, \quad y = -\frac{B}{C}.$$

M P $u_0 v_0$

D'après cela, la distance du point à la droite sera, si θ est l'angle des axes

$$MP = \frac{(u_0 x + v_0 y - 1)\sin\theta}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0 \cos\theta}} = \frac{(Au_0 + Bv_0 + C)\sin\theta}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0\cos\theta}}.$$

Ainsi; la distance du point

$$Au + Bv + C = 0$$

à la droite (u_0, v_0) est

$$(1) \qquad MP = \frac{(Au_0 + Bv_0 + C)\sin\theta}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0 v_0 \cos\theta}}, \quad \text{si les axes sont obliques}$$

(1 bis) $$MP = \frac{Au_0 + Bv_0 + C}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2}},$$ si les axes sont rectangulaires.

Lorsque l'équation du point est donnée sous la formule normale

$$au + bv - 1 = 0$$

l'expression de la distance est

(2) $$MP = \frac{(au_0 + bv_0 - 1)\sin\theta}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\cos\theta}};$$ (axes obliques)

(2 bis) $$MP = \frac{au_0 + bv_0 - 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}},$$ (axes rectangulaires).

Distance de l'origine à une droite u_0, v_0:

Il faut faire $a = 0$, $b = 0$, il vient alors

(3) $$OP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\cos\theta}}$$ (axes obliques) ; $$OP = \frac{1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$ (axes rectangulaires).

III°. Angle d'une droite avec les axes; Angle de deux droites.

130. Soient u_0, v_0, les coordonnées de la droite donnée; son équation sera

$$u_0x + v_0y - 1 = 0;$$

et l'angle α de cette droite avec l'axe Ox sera N° (68) donné par les formules

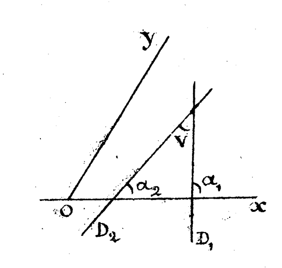
(1) $$\operatorname{tang}\alpha = \frac{u_0\sin\theta}{u_0\cos\theta - v_0},$$ (axes obliques)

(1 bis) $$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{u_0}{v_0},$$ (axes rectangulaires).

131. Angle de deux droites.

Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2) les coordonnées de deux droites; on a

$$\operatorname{tang}V = \frac{\operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2}{1 + \operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2};$$



Donc, en ayant égard aux valeurs précédentes:

(2) $$\operatorname{tang}V = \frac{(u_2v_1 - u_1v_2)\sin\theta}{u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + u_2v_1)\cos\theta},$$ (axes obliques)

(2 bis) $$\operatorname{tang}V = \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_1u_2 + v_1v_2},$$ (axes rectangulaires).

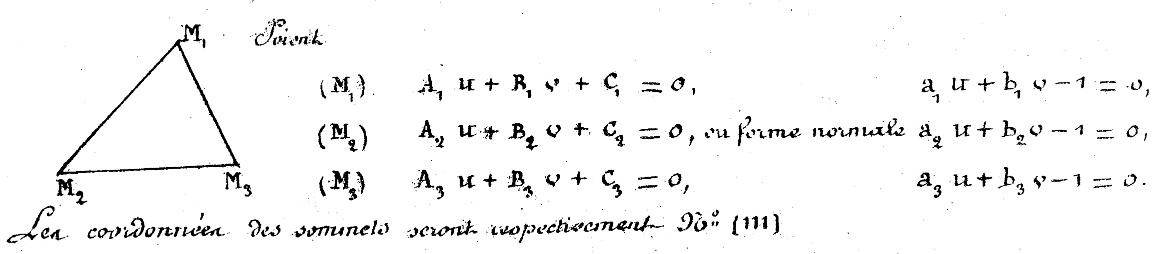
On conclut de là pour la condition d'orthogonalité de deux droites (u_1, v_1) et (u_2, v_2):

(3) $$u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + u_2v_1)\cos\theta = 0$$ (axes obliques)

(3 bis) $$u_1u_2 + v_1v_2 = 0,$$ (axes rectangulaires).

IV°. Surface d'un triangle.

132. On donne les équations des sommets.



Soient

(M_1) $A_1u + B_1v + C_1 = 0,$ $a_1u + b_1v - 1 = 0,$

(M_2) $A_2u + B_2v + C_2 = 0,$ ou forme normale $a_2u + b_2v - 1 = 0,$

(M_3) $A_3u + B_3v + C_3 = 0,$ $a_3u + b_3v - 1 = 0.$

Les coordonnées des sommets seront respectivement N° (111)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{A_1}{C_1}, & x_2 = -\frac{A_2}{C_2}, & x_3 = -\frac{A_3}{C_3}, \\ y_1 = -\frac{B_1}{C_1}, & y_2 = -\frac{B_2}{C_2}, & y_3 = -\frac{B_3}{C_3}; \end{cases}$$

et nous aurons d'après la formule (1) du N.° (79)

$$(1) \qquad 2S = \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \sin\theta;$$

et, dans le cas des formes normales:

$$(1 \text{ bis}) \qquad 2S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

133. On donne les coordonnées des côtés du triangle.

Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) les coordonnées respectives des droites M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2; les équations de ces droites seront

$$u_1 x + v_1 y - 1 = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y - 1 = 0,$$
$$u_3 x + v_3 y - 1 = 0.$$

D'après la formule (6) du N.° (82) nous aurons alors

$$(2) \qquad 2S = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}^2 . \sin\theta}{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}$$

---

§ III Point polaire d'une droite par rapport à un système de deux points.

1.° Définition et équation.

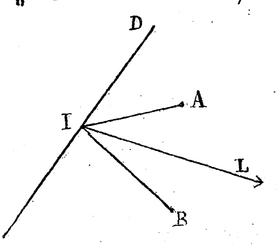
134. Étant donnés deux points A et B et une droite fixe D; on joint un point quelconque I de la droite D aux points A et B; puis, par le point I on mène une droite IL, telle que

$$(1) \qquad \frac{2}{\operatorname{tang} \widehat{DIL}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIA}} + \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIB}};$$

lorsque le point I se déplace sur la droite D, la ligne IL tourne autour d'un point fixe, que nous appellerons le point polaire de la droite D.

Dans la relation (1) nous observerons les conventions énoncées au N.° (122) sur les signes et la notation des angle

La relation (1) peut s'écrire



$$\frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIL}} - \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIA}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIB}} - \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIL}};$$

et, d'après cela, se mettre sous la forme plus commode, (en remarquant, qu'on a toujours entre les trois angles formés par les trois droites IA, IB, IC, la relation: $\widehat{AIB} + \widehat{BIC} + \widehat{CIA} = 0$) :

$$(2)\qquad \frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{DIA}} + \frac{\sin \widehat{LIB}}{\sin \widehat{DIB}} = 0.$$

Nous verrons plus loin, dans l'étude des courbes, la généralisation de cette définition.

135. Soient les équations des deux points fixes

$$(A)\qquad a_1 u + a_2 v + a_3 = 0,$$
$$(B)\qquad b_1 u + b_2 v + b_3 = 0;$$

u_0, v_0, les coordonnées de la droite fixe D; et, u, v, les coordonnées de la droite IL.

D'après la formule (28) du N° (123), nous aurons pour le rapport des sinus des angles formés dans l'angle $\widehat{LID}$ par la sécante IA (O étant l'origine des coordonnées):

$$\frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{DIA}} \cdot \frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}} = + \frac{a_1 u + a_2 v + a_3}{a_1 u_0 + a_2 v_0 + a_3};$$

nous aurons de même, en considérant la sécante IB:

$$\frac{\sin \widehat{LIB}}{\sin \widehat{DIB}} \cdot \frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}} = + \frac{b_1 u + b_2 v + b_3}{b_1 u_0 + b_2 v_0 + b_3}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (2), on trouve

$$(3)\qquad \frac{a_1 u + a_2 v + a_3}{a_1 u_0 + a_2 v_0 + a_3} + \frac{b_1 u + b_2 v + b_3}{b_1 u_0 + b_2 v_0 + b_3} = 0;$$

c'est une relation du 1er degré entre les coordonnées de la droite IL; donc la droite IL passe par un point fixe; et on voit, par la forme de l'équation (3), que ce point fixe est sur la droite AB.

L'équation (3) peut s'écrire sous la forme abrégée

$$(4)\qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

136. En reprenant les calculs et les raisonnements du N° (86), on constate que, si A et B sont deux points fixes, si D est le point d'intersection de la droite D avec la ligne AB et C le point polaire de la droite D:

« 1° Toute droite passant par le point D aura le point C pour le point polaire par rapport au « système (A, B); et inversement, toute droite passant par le point C aura le point D pour point « polaire par rapport au même système (A, B).

« 2° Les deux points A et B jouissent des mêmes propriétés par rapport au système (C, D).

Les quatre points

$$(5)\qquad [(1)\ A = 0,\ (2)\ B = 0;\ (3)\ A + \lambda B = 0,\ (4)\ A - \lambda B = 0].$$

forment un système harmonique.

Les points associés (1) et (2) seront dits conjugués par rapport au couple (3), (4); et les points associés (3) et (4) seront conjugués par rapport au couple (1), (2).

Remarquons enfin que si l'on joint les quatre points A, B; C, D, à un point quelconque du plan, à l'origine O par exemple, les quatre droites OA, OB; OC, OD, formeront un système harmonique.

En effet, les coordonnées du point A sont

$$x = -\frac{a_1}{a_3},\quad y = -\frac{a_2}{a_3};$$

la droite qui le joint à l'origine aura donc pour équation

$$\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} = 0.$$

Ainsi les quatre droites OA, OB, OC, OD, seront respectivement

$$\begin{cases} OA & \dfrac{x}{a_1} - \dfrac{y}{a_2} = 0, \\ OB & \dfrac{x}{b_1} - \dfrac{y}{b_2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 x - a_1 y = 0, \\ b_2 x - b_1 y = 0; \end{cases}$$

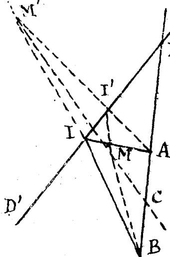
ou

$$\begin{cases} OC & \dfrac{x}{a_1 + \lambda b_1} - \dfrac{y}{a_2 + \lambda b_2} = 0, \\ OD & \dfrac{x}{a_1 - \lambda b_1} - \dfrac{y}{a_2 - \lambda b_2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 x - a_1 y + \lambda(b_2 x - b_1 y) = 0; \\ a_2 x - a_1 y - \lambda(b_2 x - b_1 y) = 0; \end{cases}$$

sous la seconde forme, on reconnait immédiatement N.° (86) un système harmonique de droites.

II.° Construction du point polaire d'une droite.

137. Soient A et B les deux points fixes, DD' la droite fixe; joignons un point quelconque I de la droite D aux points A et B; joignons de même un second point I'; les droites IA et I'B, IB et I'A se coupent aux points M et M'; la droite MM' rencontrera la droite AB en un point C, lequel sera le point polaire de la droite DD'.



Cette construction résulte évidemment des remarques précédentes, puisque le point C cherché peut être regardé comme appartenant à la polaire du point D, relative à deux droites quelconques, telles que M'A, M'B, passant par les points fixes A et B.

Nous allons néanmoins vérifier cette construction par un calcul direct analogue à celui du N.° (87); nous présenterons cette vérification comme un exercice de calcul.

Prenons pour origine un point fixe O sur la droite DD', et pour axes les droites OA et OB; soient $OA = a$, $OB = b$; les équations des deux points A et B seront

$$(1)\quad \begin{cases} (A) & a u - 1 = 0, \\ (B) & b v - 1 = 0. \end{cases}$$

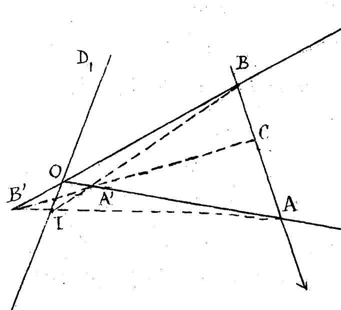
La droite D passant par l'origine, ses coordonnées u_0 et v_0 seront infinies, mais la droite ayant une direction déterminée, on devra avoir

$$(2)\qquad \lim \frac{u_0}{v_0} = k,$$

k étant une constante donnée.

Ceci posé, joignons un point quelconque I de la droite D aux points A et B; soient A' et B' les intersections respectives de IB et IA avec OA et OB, et posons

$$OA' = \alpha,\quad OB' = \beta.$$



Les équations des points A' et B' seront

$$\alpha u - 1 = 0,\quad \beta v - 1 = 0;$$

et l'équation d'un point quelconque situé sur A'B' sera

$$\alpha u - 1 + \lambda(\beta v - 1) = 0.$$

Nous obtiendrons le point C, intersection de A'B' avec AB, en écrivant que la droite AB $\left(u = \frac{1}{a},\ v = \frac{1}{b}\right)$ passe par ce point; ce qui donne

$$\lambda = -\frac{\frac{\alpha}{a} - 1}{\frac{\beta}{b} - 1};$$

ainsi, nous aurons pour l'équation du point C (intersection de A'B' avec AB)

$$(3)\qquad \left(u - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\beta}\right) = \left(v - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Or les trois droites D (u_0, v_0), IA' $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{b}\right)$, IB' $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\beta}\right)$ doivent concourir au point I; donc

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \text{ou, en faisant } u_0, v_0 \text{ infinis et ayant égard à la relation (2),}\ \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0\ (4).$$

En ayant égard à la relation (4), l'équation (3) du point C deviendra

$$(5)\qquad u + k v = \frac{1}{a} + \frac{k}{b};$$

c'est précisément l'équation du point polaire de la droite DD', comme on le constate en appliquant la formule (3) du N.° (135) aux équations actuelles (1) et (2).

Chapitre IV
Coordonnées trilatères d'une droite.

§1 Définition. Relations fondamentales.

1°. Définition et signes.

138. Nous définirons une droite par ses distances à trois points fixes, ces distances étant respectivement multipliées par trois nombres constants; nous donnerons à ces produits le nom de **coordonnées trilatères** de la droite; les trois points fixes sont les **sommets de référence**; le triangle formé sera le **triangle de référence**; et les nombres constants seront les **paramètres de référence**.

Dans certaines questions, il est souvent utile de mettre en présence les trois systèmes de coordonnées suivants: les coordonnées cartésiennes, les coordonnées trilatères d'un point et les coordonnées trilatères d'une droite. Nous allons rapprocher ici ces différents systèmes.

Soient x, y les **coordonnées cartésiennes** d'un point rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy; et

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, & BC \\ b_1 x + b_2 y + b_3 = 0, & CA \\ c_1 x + c_2 y + c_3 = 0; & AB \end{cases}$$

les équations cartésiennes des côtés du triangle de référence ABC.

Les **coordonnées trilatères** (X, Y, Z) d'un point $M(x, y)$ seront définies par les égalités

$$(2)\quad \begin{cases} X = l\,\delta_1, \\ Y = m\,\delta_2, \\ Z = n\,\delta_3, \end{cases}$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$, étant les distances du point M aux trois côtés BC, CA, AB; et l, m, n étant les paramètres de référence dans le système actuel des coordonnées trilatères d'un point; l, m, n, sont des quantités positives et que nous laisserons arbitraires.

On aura, d'après la définition (2) et la formule (4 bis) du N°. (76):

$$(2\text{ bis})\quad \begin{cases} X = l\,\dfrac{a_1 x + a_2 y + a_3}{+\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}; \\[2ex] Y = m\,\dfrac{b_1 x + b_2 y + b_3}{+\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}; \\[2ex] Z = n\,\dfrac{c_1 x + c_2 y + c_3}{+\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}. \end{cases}$$

Nous supposerons l'origine O dans l'intérieur du triangle de référence; et nous admettrons, en outre, qu'on ait modifié les signes des premiers membres des équations (1) de manière que les formules (2 bis) donnent pour X, Y, Z des valeurs positives lorsqu'on prend le point M dans l'intérieur du triangle de référence ABC.

Si maintenant nous désignons par a, b, c, les longueurs des côtés du triangle de référence, et par S sa surface; les coordonnées trilatères X, Y, Z d'un point devront vérifier la relation

$$a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c\,\delta_3 = 2S,$$

ou, d'après les égalités (2):

$$(3)\qquad \frac{a}{l}X+\frac{b}{m}Y+\frac{c}{n}Z=2S.$$

139 Ceci posé, soit l'équation d'une droite quelconque D

$$(4)\qquad (D)\qquad MX+NY+PZ=0,$$

dans le système des coordonnées trilatères d'un point; eu égard aux relations (2 bis), l'équation de cette droite, dans le système des coordonnées Cartésiennes, sera

$$Ml\,\frac{a_1x+a_2y+a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Nm\,\frac{b_1x+b_2y+b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Pn\,\frac{c_1x+c_2y+c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=0.$$

La distance d'un point (x_0,y_0) ou (X_0,Y_0,Z_0) à cette droite aura pour expression N° (76)

$$(5)\qquad \Delta=\frac{MX_0+NY_0+PZ_0}{\sqrt{\left(Ml\,\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Nm\,\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Pn\,\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(Ml\,\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Nm\,\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Pn\,\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2}}$$

D'après cela, si nous désignons par $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$, les distances des sommets A, B, C du triangle de référence à la droite (D) ou (4), nous trouverons à l'aide de la formule (5) et de la relation (3):

$$(6)\qquad \frac{\frac{a}{l}\Delta_1}{M}=\frac{\frac{b}{m}\Delta_2}{N}=\frac{\frac{c}{n}\Delta_3}{P}.$$

Désignons par U, V, W les coordonnées trilatères de la droite quelconque (D), nous définirons ces coordonnées par les égalités suivantes

$$(7)\qquad \begin{cases} U=\lambda\ \Delta_1, \\ V=\mu\ \Delta_2, \\ W=\nu\ \Delta_3; \end{cases}$$

λ,μ,ν sont les paramètres de référence, et nous prendrons pour valeurs de ces paramètres

$$(7bis)\qquad \lambda=\frac{a}{l},\quad \mu=\frac{b}{m},\quad \nu=\frac{c}{n}.$$

Les paramètres de référence actuels λ,μ,ν, sont donc liés à ceux du système des coordonnées trilatères d'un point par les relations (7bis); ils restent arbitraires si les quantités l, m, n sont elles mêmes arbitraires. D'après ce choix et cette notation la relation (3) s'écrira

$$(8)\qquad \lambda X+\mu Y+\nu Z=2S.$$

Des équations (7), (6) et (4) nous conclurons immédiatement que:

Si U, V, W sont les coordonnées trilatères d'une droite, l'équation de cette droite dans le système des coordonnées trilatères d'un point sera

$$(9)\qquad UX+VY+WZ=0;$$

cette conclusion fondamentale suppose que le système des coordonnées d'un point et le système des coordonnées d'une droite sont rapportés au même triangle de référence; et, en outre, que les paramètres de référence, dans l'un et l'autre système sont liés entre eux par les relations (7 bis); dans le premier système, (celui des coordonnées-points), les paramètres de référence sont l, m, n; dans le second, (celui des coordonnées tangentielles) ils sont λ,μ,ν.

Remarque. La discussion de l'équation (9) conduit à la convention suivante relative aux signes des coordonnées U, V, W.

On devra prendre avec le même signe les longueurs des perpendiculaires qui, issues des points de référence vers la droite considérée, sont dirigées dans un certain sens; et, avec un signe contraire, celles qui sont dirigées dans l'autre sens.

II°. Relation entre les coordonnées trilatères d'une droite.

140. D'après la formule (5) la distance du sommet A du triangle de référence à la droite (9) est

$$\frac{UX}{\sqrt{\left(Ul\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(Ul\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2}};$$

et d'après la définition (7), cette distance est

$$\frac{U}{\lambda}.$$

Egalant ces deux valeurs, et remarquant que la relation (8) donne $\lambda X = 2S$; on trouve pour la relation entre les coordonnées U, V, W, d'une droite

$$(10)\quad \left(Ul\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(Ul\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+Vm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+Wn\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2=4S^2.$$

Nous pouvons donner à cette équation une forme beaucoup plus simple.

Si nous développons le premier membre nous trouvons d'abord que le coefficient de U^2 est

$$l^2 \text{ ou } \frac{a^2}{\lambda^2}, \text{ d'après (7 bis).}$$

Le coefficient de 2 VW est

$$mn\frac{b_1c_1+b_2c_2}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sqrt{c_1^2+c_2^2}}.$$

Or les équations (1) peuvent s'écrire

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}x+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}y+\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=0,$$

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x+\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}y+\frac{b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=0,$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}x+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}y+\frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=0.$$

Mais, d'après les conventions admises et les changements faits sur les signes des premiers membres, les relations (2 bis) donnent des valeurs positives pour X, Y, Z, lorsque le point M ainsi que l'origine O sont dans l'intérieur du triangle de référence; donc, d'après la règle énoncée au N° (70), nous aurons, en désignant par α, β, γ les angles, avec Ox, des perpendiculaires abaissées de l'origine O sur les droites BC, CA, AB:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{a_1}{+\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=-\cos\alpha, & \dfrac{b_1}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=-\cos\beta, & \dfrac{c_1}{+\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=-\cos\gamma; \\ \dfrac{a_2}{+\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=-\sin\alpha; & \dfrac{b_2}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=-\sin\beta; & \dfrac{c_2}{+\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=-\sin\gamma. \end{cases}$$

On conclut de là

$$\frac{b_1c_1+b_2c_2}{+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma=\cos(\beta-\gamma)=-\cos A,$$

eu égard aux relations (5) du N° (94).

Donc, en définitive les coordonnées trilatères U, V, W d'une droite quelconque devront vérifier la relation

$$(12)\quad \frac{a^2}{\lambda^2}U^2+\frac{b^2}{\mu^2}V^2+\frac{c^2}{\nu^2}W^2-2\frac{bc}{\mu\nu}VW\cos A-2\frac{ca}{\nu\lambda}WU\cos B-2\frac{ab}{\lambda\mu}UV\cos C=4S^2$$

a, b, c, S sont les longueurs des côtés et l'aire du triangle de référence; A, B, C, en sont les angles; λ, μ, ν sont les paramètres de référence relatifs au système des coordonnées trilatères

d'une droite, c. à. d. les nombres par lesquels on multiplie les distances respectives des sommets A, B, C, à la droite considérée.

En introduisant le rayon R du cercle circonscrit au triangle de référence, cette égalité pourra s'écrire

$$(12\ bis)\quad U^2\frac{\sin^2 A}{\lambda^2}+V^2\frac{\sin^2 B}{\mu^2}+W^2\frac{\sin C}{\gamma^2}-2\frac{VW}{\mu\gamma}\sin B\sin C\cos A-2\frac{WU}{\gamma\lambda}\sin C\sin A\cos B-2\frac{UV}{\lambda\mu}\sin A\sin B\cos C=\frac{S^2}{R^2}.$$

On peut donner à cette relation des formes très variées; nous n'insisterons pas sur ce sujet.

Lorsque les paramètres de référence sont égaux à l'unité, la relation entre les coordonnées trilatères U, V, W, d'une droite, est

$$(13)\quad U^2\sin^2 A+V^2\sin^2 B+W^2\sin^2 C-2VW\sin B\sin C\cos A-2WU\sin C\sin A\cos B-2UV\sin A\sin B\cos C=\frac{S^2}{R^2}.$$

141. Nous avons remarqué N.° (90), qu'en égalant à zéro le premier membre de la relation (3) ou (8), que doivent vérifier les coordonnées trilatères X, Y, Z, d'un point, on obtenait l'équation de la droite de l'infini.

Nous démontrerons plus loin qu'en égalant à zéro le premier membre de la relation (12) que doivent vérifier les coordonnées trilatères U, V, W d'une droite, on obtient l'équation des deux points circulaires de l'infini.

III.° Proposition fondamentale.

142. Étant données deux droites $D_1(U_1, V_1, W_1)$ et $D_2(U_2, V_2, W_2)$ qui se coupent en O, une troisième droite D (U, V, W) passant par l'intersection des deux premières et telle que

$$(14)\qquad \frac{\sin \widehat{D_1OD}}{\sin \widehat{DOD_2}}=\frac{m_2}{m_1},$$

aura pour coordonnées

$$(14\ bis)\quad \begin{cases} U=\dfrac{m_1U_1+m_2U_2}{\rho}, \\ V=\dfrac{m_1V_1+m_2V_2}{\rho}, \\ W=\dfrac{m_1W_1\quad m_2W_2}{\rho}, \end{cases}$$

formules dans lesquelles

$$(14\ ter)\quad \begin{cases} \rho=\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\theta} \\ \theta=\widehat{D_1OD_2}. \end{cases}$$

Ce théorème, fondamental dans la théorie des coordonnées trilatères d'une droite, peut s'établir de la manière suivante.

Soient: A un des sommets de référence; O, le point d'intersection des deux droites D_1 et D_2; λ', μ', ω, les angles $\widehat{DOD_1}$, $\widehat{DOD_2}$, $\widehat{AOD_2}$; d, d_1, d_2, les distances du sommet A aux droites D, D_1, D_2; on a

$$d_2=OA\sin\omega,$$
$$d=OA\sin(\omega+\mu')=d_2\cos\mu'+OA\cos\omega\sin\mu',$$
$$d_1=OA\sin(\omega+\lambda'+\mu')=d_2\cos(\lambda'+\mu')+OA\cos\omega\sin(\lambda'+\mu').$$

En éliminant $\cos\omega$ entre les deux dernières relations, on trouve

$$d=\frac{d_2\sin\lambda'+d_1\sin\mu'}{\sin(\lambda'+\mu')};$$

ou, d'après la définition des coordonnées d'une droite,

$$U=\frac{U_2\sin\lambda'+U_1\sin\mu'}{\sin(\lambda'+\mu')}.$$

Si maintenant on a égard aux relations $\lambda'+\mu'=\theta,\ \dfrac{\sin\lambda'}{\sin\mu'}=\dfrac{m_2}{m_1},$

on arrive, par des transformations faciles, aux formules (14 bis).

Réciproquement: si les coordonnées U, V, W, d'une droite vérifient les relations

$$(15)\qquad \frac{U}{m_1 U_1 + m_2 U_2} = \frac{V}{m_1 V_1 + m_2 V_2} = \frac{W}{m_1 W_1 + m_2 W_2},$$

cette droite passera par le point de concours des droites D_1 et D_2, et l'on aura

$$(15 \text{ bis})\qquad \frac{\sin \widehat{D_1 O D}}{\sin \widehat{D O D_2}} = \frac{m_2}{m_1};$$

on a toujours égard pour les signes et la notation des angles aux conventions faites N° (122).

En effet, les équations en coordonnées-point des deux droites D_1 et D_2 sont (9):

$$(D_1)\qquad U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0,$$

$$(D_2)\qquad U_2 X + V_2 Y + W_2 Z = 0;$$

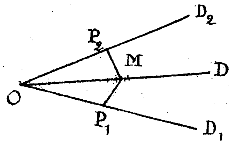
et, d'après les valeurs (15), l'équation de la droite D_1, c. à. d.

$$UX + VY + WZ = 0,$$

deviendra

$$(D)\qquad m_1 (U_1 X + V_1 Y + W_1 Z) + m_2 (U_2 X + V_2 Y + W_2 Z) = 0;$$

c'est évidemment l'équation d'une droite passant par l'intersection des deux premières; et le rapport des distances d'un quelconque de ses points aux droites D_1 et D_2 est $\frac{m_2}{m_1}$. On a, en effet, d'après les formules (5) et (10):



$$MP_1 = \frac{U_1 X + V_1 Y + W_1 Z}{2S},$$

$$MP_2 = \frac{U_2 X + V_2 Y + W_2 Z}{2S}.$$

143. Les coordonnées U, V, W, d'une droite quelconque D, passant par l'intersection de deux droites (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), seront de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2, \\ V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, \\ W = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2; \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes.

On a entre λ_1, λ_2 et l'angle θ des deux droites, la relation

$$(16 \text{ bis})\qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos\theta = 1;$$

ceci résulte de l'égalité (14 ter).

IV°. Cas particulier des coordonnées trilatères.

144. Les coordonnées d'une droite définies et étudiées dans le chapitre III sont un cas particulier des coordonnées trilatères d'une droite.

Soit, en effet, ABC le triangle de référence et une droite fixe bc; si AA', BB', CC', sont les distances des points A, B, C, à la droite considérée, les coordonnées trilatères de cette droite seront

$$\lambda . AA', \ \mu . BB', \ \nu . CC'.$$

Comme il y a une relation entre ces coordonnées, la droite sera complètement définie par les rapports

$$(1°)\qquad \frac{\mu . BB'}{\lambda . AA'}\quad \frac{\nu . CC'}{\lambda . AA'}.$$

Or on a

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{Bb}{Ab}, \quad \text{ou} \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{AB - Ab}{Ab};$$

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{Cc}{Ac}, \quad \text{ou} \quad \frac{CC'}{AA'} = \frac{AC - Ac}{Ac}.$$

Les rapports (1°) qui déterminent la droite pourront donc s'écrire :

$$\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{AB}{Ab} - 1\right), \quad \frac{\nu}{\lambda}\left(\frac{AC}{Ac} - 1\right).$$

Prenons maintenant pour paramètres de référence

$$\lambda = 1, \quad \mu = \frac{1}{AB}, \quad \nu = \frac{1}{AC};$$

les rapports qui définissent la droite deviennent alors

$$\left(\frac{1}{Ab} - \frac{1}{AB}\right), \quad \left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{AC}\right).$$

Or si l'on suppose que les sommets B et C s'éloignent à l'infini, le triangle de référence se réduit aux deux droites indéfinies Ax, Ay; et la droite considérée est alors déterminée par les quantités

$$\frac{1}{Ab}, \quad \frac{1}{Ac};$$

ce sont précisément les significations des coordonnées u et v (Chap. III).

V°. Transformation des coordonnées.

145. La question à résoudre est celle ci :

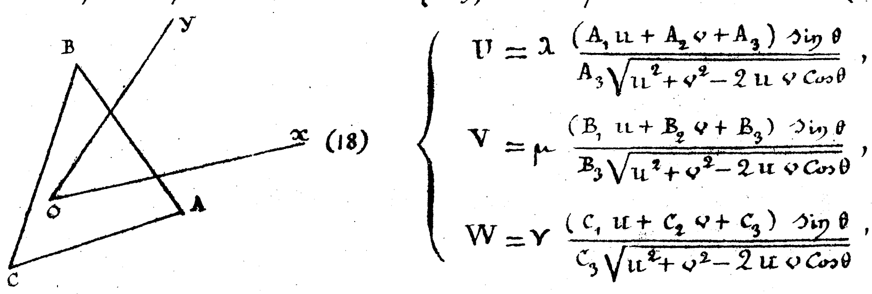
Connaissant les coordonnées u, v, (Chap. III N° (110) d'une droite, déterminer les coordonnées trilatères U, V, W de cette droite; et, réciproquement.

Soient les équations des trois sommets du triangle de référence

$$(17) \begin{cases} A_1 u + A_2 v + A_3 = 0 & (A), \\ B_1 u + B_2 v + B_3 = 0 & (B), \\ C_1 u + C_2 v + C_3 = 0 & (C); \end{cases}$$

rapportées aux deux axes Ox et Oy, d'angle θ.

D'après la formule (1) du N° (129) et la définition (7) du N° (139), nous aurons



$$(18) \begin{cases} U = \lambda \dfrac{(A_1 u + A_2 v + A_3) \sin\theta}{A_3\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}, \\[2ex] V = \mu \dfrac{(B_1 u + B_2 v + B_3) \sin\theta}{B_3\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}, \\[2ex] W = \nu \dfrac{(C_1 u + C_2 v + C_3) \sin\theta}{C_3\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant les paramètres de référence.

De ces égalités on déduit encore

$$(18 \text{ bis} \quad \frac{A_3 U}{\lambda(A_1 u + A_2 v + A_3)} = \frac{B_3 V}{\mu(B_1 u + B_2 v + B_3)} = \frac{C_3 W}{\nu(C_1 u + C_2 v + C_3}.$$

Ces formules seront plus simples, si l'on prend les équations (17) des sommets de référence sous la forme normale.

On résoudra le problème inverse, c. à. d. on exprimera u, et v en fonction de U, V, W, en soumettant les équations (18) à un calcul semblable à celui qui a été développé au N° (92); on arrivera ainsi à des relations de la forme suivante

$$(19)\quad \begin{cases} u = \dfrac{A'_1 \dfrac{U}{\lambda} + B'_1 \dfrac{V}{\mu} + C'_1 \dfrac{W}{\nu}}{A'_3 \dfrac{U}{\lambda} + B'_3 \dfrac{V}{\mu} + C'_3 \dfrac{W}{\nu}}, \\ v = \dfrac{A'_2 \dfrac{U}{\lambda} + B'_2 \dfrac{V}{\mu} + C'_2 \dfrac{W}{\nu}}{A'_3 \dfrac{U}{\lambda} + B'_3 \dfrac{V}{\mu} + C'_3 \dfrac{W}{\nu}}. \end{cases}$$

Nous n'insisterons pas davantage sur cette question; la seule chose importante à constater était la forme des relations (18 bis) et (19).

---

§II Point.- Distances.

I° Équation du point.

146. L'équation linéaire homogène

$$(20)\qquad AU + BV + CW = 0$$

représente un point, dont les coordonnées trilatères sont données par les relations

$$(20\text{ bis})\quad \begin{cases} \dfrac{X}{A} = \dfrac{Y}{B} = \dfrac{Z}{C}, \\ \lambda X + \mu Y + \nu Z = 2S. \end{cases}$$

Soit, en effet, une solution (U, V, W) de l'équation (20); la droite (U, V, W) aura pour équation N° (139) (équat. (9))

$$UX + VY + WZ = 0.$$

Éliminant W entre cette équation et l'équation (20) il vient

$$U(AZ - CX) + V(BZ - CY) = 0;$$

cette dernière équation représente une infinité de droites passant par le point fixe

$$\frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{Z}{C}.$$

Ainsi, toutes les droites, dont les coordonnées vérifient l'équation (20), passent par un seul et même point; on peut donc regarder l'équation (20) comme déterminant ce point.

Les équations

$$BV + CW = 0,$$
$$AU + CW = 0,$$
$$AU + BV = 0,$$

représenteront des points situés respectivement sur les côtés BC, CA, et AB du triangle de référence.

147. Équation d'un point situé sur une droite passant par deux points donnés.

Soient les équations de deux points donnés

$$(21)\quad \begin{cases} (M_1) & A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0, \\ (M_2) & A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0. \end{cases}$$

L'équation d'un point quelconque, situé sur la droite qui joint ces deux points, sera

$$(22)\qquad (A_1 U + B_1 V + C_1 W) + k\,(A_2 U + B_2 V + C_2 W) = 0;$$

cette équation représente, en effet, un point; et les coordonnées d'une droite passant par les points M_1 et M_2, vérifient évidemment l'équation (22); de plus, k est arbitraire; donc......

En résolvant les équations (21) par rapport à U, V, W, nous aurons les coordonnées de la droite passant par les deux points donnés.

148. Trouver l'équation d'un point partageant dans un rapport donné un segment donné.

Soient les équations des extrémités du segment

$$(23)\qquad (M_1)\quad A_1U+B_1V+C_1W=0,$$
$$(M_2)\quad A_2U+B_2V+C_2W=0;$$

et supposons qu'on doive avoir

$M_1 \quad M \quad M_2$

$$(24)\qquad \frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Les coordonnées trilatères des points M_1 et M_2 sont N° (146)

$$(25)\qquad \frac{X_1}{A_1}=\frac{Y_1}{B_1}=\frac{Z_1}{C_1};\quad \frac{X_2}{A_2}=\frac{Y_2}{B_2}=\frac{Z_2}{C_2};\ \text{on a toujours } \lambda X+\mu Y+\nu Z=2S;$$

les coordonnées (X, Y, Z) du point M, divisant le segment dans le rapport donné, doivent vérifier N° (90) les relations

$$\frac{X}{m_1X_1+m_2X_2}=\frac{Y}{m_1Y_1+m_2Y_2}=\frac{Z}{m_1Z_1+m_2Z_2}.$$

L'équation tangentielle du point M sera, par suite, N° (140)

$$U(m_1X_1+m_2X_2)+V(m_1Y_1+m_2Y_2)+W(m_1Z_1+m_2Z_2)=0;$$

ou d'après les valeurs (25):

$$(26)\qquad m_1\cdot\frac{A_1U+B_1V+C_1W}{\lambda A_1+\mu B_1+\nu C_1}+m_2\cdot\frac{A_2U+B_2V+C_2W}{\lambda A_2+\mu B_2+\nu C_2}=0;$$

telle est l'équation du point divisant le segment donné dans le rapport défini par l'égalité (24); λ, μ, ν sont les paramètres de référence.

Nous aurons le point milieu en supposant $m_2=m_1$; d'où

$$(27)\qquad \frac{A_1U+B_1V+C_1W}{\lambda A_1+\mu B_1+\nu C_1}+\frac{A_2U+B_2V+C_2W}{\lambda A_2+\mu B_2+\nu C_2}=0.$$

149. La condition pour que les trois points

$$\left\{\begin{array}{l} A_1U+B_1V+C_1W=0,\\ A_2U+B_2V+C_2W=0,\\ A_3U+B_3V+C_3W=0,\end{array}\right.$$

soient en ligne droite est

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

150. Déterminer le point d'intersection de deux droites (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2).

Si l'équation de ce point est

$$AU+BV+CW=0,$$

on devra avoir, en outre, les conditions

$$AU_1+BV_1+CW_1=0,$$
$$AU_2+BV_2+CW_2=0;$$

éliminant A, B, C, nous aurons pour l'équation cherchée

$$(29)\qquad \begin{vmatrix} U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\\ U_2 & V_2 & W_2\end{vmatrix}=0.$$

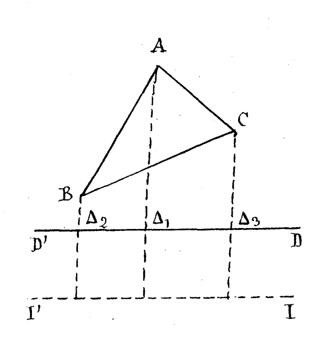
C'est aussi la condition pour que les trois droites (U, V, W), (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2) se coupent en un même point.

II°. Droite de l'infini — Point à l'infini.

151. Droite de l'infini.

Les coordonnées de la droite de l'infini sont évidemment infinies; mais elles ont entre elles un rapport déterminé.

Soit une droite quelconque DD', λ, μ, ν les paramètres de référence; et $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les distances à cette droite des sommets de référence; supposons fixe la droite DD', et concevons une droite parallèle II' et à une distance L, les coordonnées U, V, W, de la droite II' seront



$$U = \lambda \Delta_1 + \lambda L, \quad V = \mu \Delta_2 + \mu L, \quad W = \nu \Delta_3 + \nu L;$$

de là on déduit

$$\frac{U}{W} = \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\frac{\Delta_1}{L}+1}{\frac{\Delta_3}{L}+1}, \quad \frac{V}{W} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\frac{\Delta_2}{L}+1}{\frac{\Delta_3}{L}+1},$$

faisons croître maintenant L indéfiniment, il vient

$$\lim. \frac{U}{W} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \lim. \frac{V}{W} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Les coordonnées infinies de la droite de l'infini vérifient donc les relations

$$(30) \qquad \frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{\nu};$$

λ, μ, ν, étant les paramètres de référence.

Lorsque les paramètres de référence sont égaux à l'unité, ces relations deviennent

$$(30 \text{ bis}) \qquad U = V = W$$

Cette proposition peut se conclure aussi de ce que, (8) N°. (139) l'équation en coordonnées-point de la droite de l'infini est

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

et alors, d'après les relations (4), (6) et (7) N°. (139), on devra avoir

$$\frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{\nu}.$$

152. Point à l'infini.

L'équation d'un point quelconque étant

$$(31) \qquad AU + BV + CW = 0;$$

ce point sera à l'infini, si son équation est vérifiée par les coordonnées de la droite de l'infini c. à. d. si l'on a N° (151)

$$(32) \qquad \lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Cette relation se réduit à

$$(32 \text{ bis}) \qquad A + B + C = 0,$$

lorsque les paramètres de référence sont égaux à l'unité.

153 Droites parallèles.

Soient deux droites (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2); ces deux droites seront parallèles si leur point de rencontre est l'infini; c. à. d. si l'on a, d'après les relations (29) & (30)

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées d'une droite, parallèle à une droite donnée (U_1, V_1, W_1) et à une distance L de cette dernière, seront

$$(34) \qquad \begin{cases} U = U_1 + \lambda L, \\ V = V_1 + \mu L, \\ W = W_1 + \nu L; \end{cases}$$

λ, μ, ν étant les paramètres de référence.

154. Point à l'infini sur une direction donnée.

Soit U_0, V_0, W_0 les coordonnées d'une droite; trouver l'équation du point à l'infini sur cette droite.

Si l'équation du point cherché est

$$AU + BV + CW = 0,$$

il faut exprimer que la droite passe par ce point, et que ce point est à l'infini; on a ainsi

$$AU_0 + BV_0 + CW_0 = 0,$$

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Éliminant A, B, C, on aura pour l'équation du point

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ U_0 & V_0 & W_0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Et, si les paramètres de référence sont égaux à l'unité, cette équation devient

$$(35 \text{ bis}) \qquad U(V_0 - W_0) + V(W_0 - U_0) + W(U_0 - V_0) = 0.$$

III°. Distance de deux points – Distance d'un point à une droite.

155. Distance de deux points.

Soient les équations des deux points

$$(M_1) \qquad A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0,$$

$$(M_2) \qquad A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0.$$

Leurs coordonnées respectives sont

$$\frac{X_1}{A_1} = \frac{Y_1}{B_1} = \frac{Z_1}{C_1} = \frac{2S}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1};$$

$$\frac{X_2}{A_2} = \frac{Y_2}{B_2} = \frac{Z_2}{C_2} = \frac{2S}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2}$$

En substituant ces valeurs dans la formule (2) du N° (99), on obtiendra l'expression cherchée. Avant la substitution, il faudra mettre, dans la formule citée, l, m, n, au lieu de λ, μ, ν; et ensuite, avoir égard aux relations (7 bis) du N° (139). L'expression qu'on obtiendra ainsi se présente sous une forme assez compliquée, quoique très symétrique; d'ailleurs, on n'a pas à faire usage, de pareilles formules. Leur complication montre suffisamment que le système des coordonnées trilatères ne doit être adopté en général, que dans l'étude des propriétés descriptives des figures.

156. Distance d'un point à une droite.

Nous supposerons la droite donnée par ses coordonnées U_0, V_0, W_0; et le point donné par son équation, par exemple

$$(36) \qquad AU + BV + CW = 0.$$

Les coordonnées du point sont alors N° (140)

$$\frac{X_1}{A} = \frac{Y_1}{B} = \frac{Z_1}{C} = \frac{2S}{\lambda A + \mu B + \nu C};$$

l'équation, en coordonnées-point de la droite, sera N° (139);

$$U_0 X + V_0 Y + W_0 Z = 0,$$

et nous aurons pour la distance du point (X_1, Y_1, Z_1) à cette droite (N° (139) formule (5); N° (140), relat. (10) & (12))

$$\frac{U_0 X_1 + V_0 Y_1 + W_0 Z_1}{\sqrt{\frac{a^2}{\lambda^2} U_0^2 + \frac{b^2}{\mu^2} V_0^2 + \frac{c^2}{\nu^2} W_0^2 - 2\frac{bc}{\mu\nu} \cos A\, V_0 W_0 - 2\frac{ac}{\lambda\nu} \cos B\, W_0 U_0 - 2\frac{ab}{\lambda\mu} \cos C\, U_0 V_0}}$$

ou

$$\frac{U_0 X_1 + V_0 Y_1 + W_0 Z_1}{2S}.$$

Remplaçant X_1, Y_1, Z_1, par leurs valeurs précédentes, nous trouvons définitivement que:
La distance D_0 du point

$$AU + BV + CW = 0$$

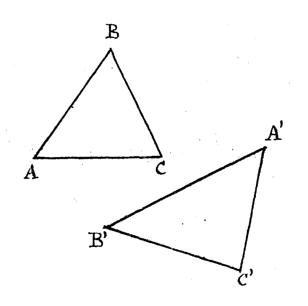
à la droite (U_0, V_0, W_0), a pour expression

$$(37) \qquad D_0 = \frac{AU_0 + BV_0 + CW_0}{\lambda A + \mu B + \nu C};$$

λ, μ, ν, étant les paramètres de référence.

157 Passer d'un système de coordonnées trilatères tangentielles à un autre système de coordonnées trilatères tangentielles.

On se donne, par rapport au triangle ABC, les équations des trois sommets du nouveau triangle de référence A'B'C'; soit



$$(1) \qquad \begin{aligned} a'U + b'V + c'W &= 0, \quad (A') \\ a''U + b''V + c''W &= 0, \quad (B') \\ a'''U + b'''V + c'''W &= 0, \quad (C'). \end{aligned}$$

La formule (37) du N° précédent nous donnera les distances des sommets A', B', C', à la droite (U, V, W); en désignant par U', V', W', des quantités proportionnelles à ces distances, nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= \lambda' (a'U + b'V + c'W), \\ V' &= \mu' (a''U + b''V + c''W), \\ W' &= \nu' (a'''U + b'''V + c'''W); \end{aligned} \right.$$

ce sont les formules de transformation cherchées.

Les constantes λ', μ', ν', dépendent des coefficients $a', a'', a''', b', \ldots$ etc, des anciens paramètres de référence λ, μ, ν, et des nouveaux paramètres de référence arbitrairement choisis.

Les coordonnées U', V', W', doivent vérifier une relation analogue à la relation (12) N° (140), mais, en général, distincte.

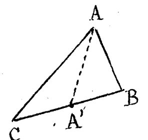
IV°. Bissectrices, médianes, hauteurs du triangle de référence.

158. Nous supposerons, dans cette recherche, les paramètres de référence λ, μ, ν, égaux à l'unité; il sera facile de faire les mêmes calculs en laissant ces paramètres arbitraires.

N'oublions pas qu'alors, les paramètres de référence des coordonnées trilatères d'un point sont respectivement a, b, c, (relation (7 bis) N° (139)); a, b, c, sont les longueurs des côtés du triangle de référence.

Si, au contraire, les paramètres de référence du système des coordonnées d'un point sont égaux à l'unité, les paramètres du système tangentiel correspondant (c. à d. tel que l'équation (9) du N° (139) ait lieu) seront $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

1° Médianes.



D'après l'équation (26) N° (148) l'équation du point milieu A' de BC sera

$$V + W = 0;$$

nous aurons donc pour les coordonnées des médianes

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} &U = 0, \quad V + W = 0, \quad \text{médiane correspondant au sommet } A, \\ &V = 0, \quad W + U = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; B, \\ &W = 0, \quad U + V = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; C. \end{aligned} \right.$$

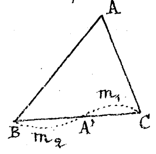
Ces trois droites passent évidemment par le point

$$(38\ bis) \qquad U + V + W = 0;$$

c'est l'équation du centre de gravité du triangle

2° Bissectrices

L'équation du point A' partageant le coté BC de manière que



$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{c}{b},$$

sera, d'après la formule (26) du N° (148)

$$bV + cW = 0, \text{ ou } V \sin B + W \sin C = 0.$$

Nous aurons pour les coordonnées des bissectrices:

(39)

	Bissectrices internes:	Bissectrices externes:
sommet A :	$U = 0,\ V \sin B + W \sin C = 0;$	$U = 0,\ V \sin B - W \sin C = 0,$
sommet B :	$V = 0,\ W \sin C + U \sin A = 0;$	$V = 0,\ W \sin C - U \sin A = 0,$
sommet C :	$W = 0,\ U \sin A + V \sin B = 0;$	$W = 0,\ U \sin A - V \sin B = 0.$

Désignons par a, b, c, les pieds des bissectrices internes et par a_1, b_1, c_1, ceux des bissectrices externes.

Les trois droites Aa, Bb, Cc, concourent au point

$$(40)\qquad U \sin A + V \sin B + W \sin C = 0,$$

c'est le centre du cercle inscrit.

Les trois groupes (Bb_1, Cc_1, Aa), (Cc_1, Aa_1, Bb), (Aa_1, Bb_1, Cc) concourent aussi respectivement aux trois points

$$(41, 1°)\qquad -U \sin A + V \sin B + W \sin C = 0,$$

$$(41, 2°)\qquad U \sin A - V \sin B + W \sin C = 0,$$

$$(41, 3°)\qquad U \sin A + V \sin B - W \sin C = 0;$$

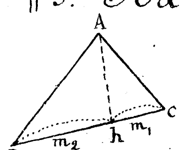
ce sont les centres des cercles exinscrits.

Les groupes de trois points (a_1, b_1, c_1), (a_1, b, c), (b_1, a, c), (c_1, a, b) sont respectivement en ligne droite; ces quatre droites ont pour coordonnées

(42)

$a_1 b_1 c_1$:	$U \sin A = V \sin B = W \sin C;$
$a_1 b c$:	$-U \sin A = V \sin B = W \sin C;$
$b_1 a c$:	$U \sin A = -V \sin B = W \sin C;$
$c_1 a b$:	$U \sin A = V \sin B = -W \sin C.$

3° Hauteurs.



L'équation du point h partageant le côté BC de manière que

$$\frac{Bh}{hC} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{Ah \operatorname{Cotang} B}{Ah \operatorname{Cotang} C} = \frac{\tan C}{\tan B}$$

sera, d'après la formule (26) du N° (148)

$$V \tan B + W \tan C = 0.$$

Nous aurons alors pour les coordonnées des hauteurs

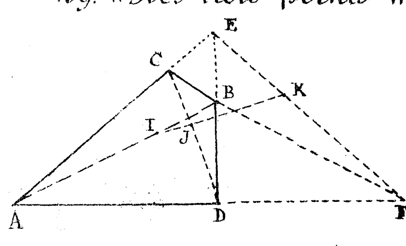
$$(43)\quad \begin{cases} U = 0, & V \tan B + W \tan C = 0, \text{ sommet A}, \\ V = 0, & W \tan C + U \tan A = 0, \text{ sommet B}, \\ W = 0, & U \tan A + V \tan B = 0, \text{ sommet C}. \end{cases}$$

Ces trois droites passent par le point

$$(43 \text{ bis})\qquad U \tan A + V \tan B + W \tan C = 0;$$

c'est le point de rencontre des hauteurs.

159. Les trois points milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.



Soit ABCD le quadrilatère; AB, CD, EF ses trois diagonales i, j, k leurs milieux respectifs.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et les paramètres de référence égaux à

l'unité; soit alors

$$(D) \qquad dU + d_1 V + d_2 W = 0,$$

l'équation du 4ème sommet D.

Nous déterminerons les équations des trois points I, J, K en appliquant la formule (26) du N° (148), dans laquelle nous supposerons $m_2 = m_1$ et $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Les équations des points A et B étant respectivement $U = 0, V = 0$, l'équation du point milieu I sera

$$(I) \qquad U + V = 0.$$

L'équation du point milieu (J) de la droite joignant les deux points (C) ou $W = 0$ et (D) sera

$$(J) \qquad W + \frac{dU + d_1 V + d_2 W}{d + d_1 + d_2} = 0.$$

Cherchons maintenant les équations des points E et F.

L'équation d'un point quelconque situé sur BD est

$$k'V + (dU + d_1 V + d_2 W) = 0;$$

nous aurons le point E en exprimant que cette équation est vérifiée par les coordonnées $(U = 0, W = 0)$ de la droite AC, ce qui donne $k' = -d_1$; donc l'équation du point (E) est

$$(E) \qquad dU + d_2 W = 0.$$

On trouvera de la même manière l'équation du point F, en exprimant qu'un point de AD se trouve sur BC, on a ainsi

$$(F) \qquad d_1 V + d_2 W = 0.$$

Le point milieu K de la droite EF aura pour équation

$$(K) \qquad \frac{dU + d_2 W}{d + d_2} + \frac{d_1 V + d_2 W}{d_1 + d_2} = 0.$$

Les équations des trois points I, J, K peuvent s'écrire:

$$(I) \qquad U + V = 0,$$

$$(J) \qquad dU + d_1 V + (d + d_1 + 2\, d_2) W = 0,$$

$$(K) \qquad dU(d_1 + d_2) + d_1 V(d + d_2) + d_2 (d + d_1 + 2\, d_2) W = 0.$$

Il est facile de constater que ces trois points sont en ligne droite; il suffit, pour cela, d'éliminer W entre les deux dernières équations et d'avoir égard à la première.

Remarque. Il serait encore facile de démontrer, dans ce système de coordonnées, les théorèmes des transversales N° (106).

V° Surface d'un triangle.

160. On suppose données les équations des sommets d'un triangle, soient

$$(M_1) \qquad A_1 U + B_1 V + C_1 W = 0,$$

$$(M_2) \qquad A_2 U + B_2 V + C_2 W = 0,$$

$$(M_3) \qquad A_3 U + B_3 V + C_3 W = 0.$$

Si $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)$ sont les coordonnées des sommets, on a d'après la formule (3) du N° (103)

$$\Sigma = \frac{R}{2S} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} lmn;$$

après avoir mis l, m, n, au lieu de λ, μ, ν; Σ est la surface cherchée; S et R désignent la surface et le rayon circonscrit du triangle de référence.

Or nous aurons N° (146) pour les coordonnées des sommets

$$\frac{X_1}{A_1} = \frac{Y_1}{B_1} = \frac{Z_1}{C_1} = \frac{2S}{\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1},$$
$$\frac{X_2}{A_2} = \frac{Y_2}{B_2} = \frac{Z_2}{C_2} = \frac{2S}{\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2},$$
$$\frac{X_3}{A_3} = \frac{Y_3}{B_3} = \frac{Z_3}{C_3} = \frac{2S}{\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3};$$

λ, μ, ν étant les paramètres de référence du système actuel des coordonnées trilatères d'une droite.

Substituant ces valeurs dans la formule précédente et ayant égard aux relations (7 bis du N° (139), savoir

$$l = \frac{a}{\lambda} = \frac{2R \sin A}{\lambda}, \quad m = \frac{b}{\mu} = \frac{2R \sin B}{\mu}, \quad n = \frac{c}{\nu} = \frac{2R \sin C}{\nu},$$

on trouve la formule définitive

$$(44) \qquad \Sigma = \frac{16 R^2 S^3}{\lambda \mu \nu} \; \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{(\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1)(\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2)(\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3)};$$

après avoir tenu compte de la relation connue,

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{S}{2R^2}.$$

VI° Point polaire d'une droite par rapport à un Système de deux points.

161. Étant donnés deux points fixes A et B et une droite fixe D, on joint un point quelconque I de la droite D aux points A et B; puis, par le point I, on mène une droite IL telle que

$$(45) \qquad \frac{2}{\operatorname{tang} \widehat{DIL}} + \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIA}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIB}};$$

lorsque le point I se déplace sur la droite (D), la ligne IL tourne autour d'un point fixe, que nous appellerons le point polaire de la droite (D).

Dans la relation (45) nous observerons les conventions énoncées au N° (122) sur les signes et la notation des angles.

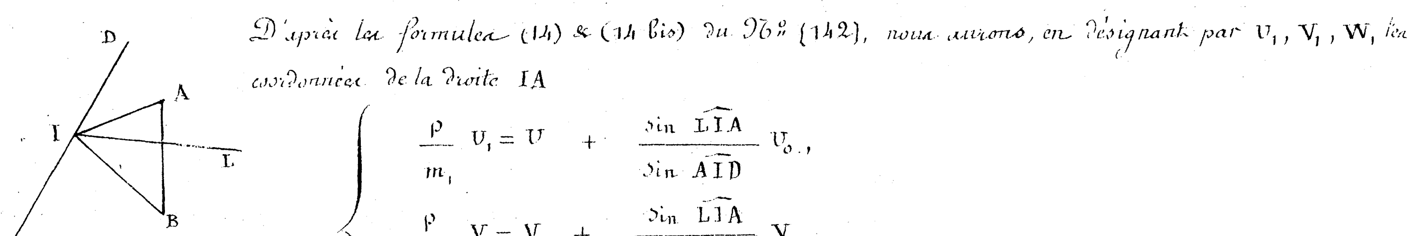
La relation (45) peut s'écrire v. N° (134)

$$(46) \qquad \frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{DIA}} + \frac{\sin \widehat{LIB}}{\sin \widehat{DIB}} = 0.$$

Soient alors

$$(47) \qquad \begin{aligned} a\,U + a_1 V + a_2 W &= 0, \quad (A) \\ b\,U + b_1 V + b_2 W &= 0, \quad (B) \end{aligned}$$

les équations des deux points fixes; et (U_0, V_0, W_0) les coordonnées de la droite fixe (D); U, V, W, celles de la droite mobile IL.



D'après les formules (14) & (14 bis) du N° (142), nous aurons, en désignant par U_1, V_1, W_1 les coordonnées de la droite IA

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho}{m_1} U_1 &= U + \frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{AID}} U_0, \\ \frac{\rho}{m_1} V_1 &= V + \frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{AID}} V_0, \\ \frac{\rho}{m_1} W_1 &= W + \frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{AID}} W_0; \end{aligned} \right.$$

Or les valeurs de U_1, V_1, W_1 doivent vérifier l'équation du point (A), on en déduit

$$\frac{\sin \widehat{LIA}}{\sin \widehat{AID}} = -\frac{aU + a_1 V + a_2 W}{aU_0 + a_1 V_0 + a_2 W_0}.$$

On trouvera de même

$$\frac{\sin \widehat{LIB}}{\sin \widehat{BID}} = -\frac{bU + b_1 V + b_2 W}{bU_0 + b_1 V_0 + b_2 W}.$$

Substituant les valeurs de ces rapports dans la relation (46), on a pour l'équation du point polaire

$$(48) \qquad \frac{aU + a_1 V + a_2 W}{aU_0 + a_1 V_0 + a_2 W_0} + \frac{bU + b_1 V + b_2 W}{bU_0 + b_1 V_0 + b_2 W_0} = 0,$$

équation qu'on peut écrire sous la forme abrégée suivante

$$(48 \text{ bis}) \qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

On aurait à reproduire ici les remarques déjà faites aux Nos [136] & [137].

162. Appliquons cette formule au triangle de référence.

Les points polaires d'une droite (U_0, V_0, W_0), par rapport aux couples de points formés par les trois sommets du triangle de référence, sont respectivement

pour le côté BC : $\frac{V}{V_0} + \frac{W}{W_0} = 0$,

pour le côté CA : $\frac{W}{W_0} + \frac{U}{U_0} = 0$,

pour le côté AB : $\frac{U}{U_0} + \frac{V}{V_0} = 0$.

Intersection de la droite (U_0, V_0, W_0) avec

BC : $\frac{V}{V_0} - \frac{W}{W_0} = 0$,

CA : $\frac{W}{W_0} - \frac{U}{U_0} = 0$,

AB : $\frac{U}{U_0} - \frac{V}{V_0} = 0$.

Nous concluons de ces équations la démonstration immédiate des théorèmes suivants :

1° Les droites joignant les sommets d'un triangle aux points polaires d'une même droite, par rapport aux trois sommets de ce triangle, sont concourantes ; l'équation du point de concours est

$$\frac{U}{U_0} + \frac{V}{V_0} + \frac{W}{W_0} = 0.$$

2° Si l'on considère deux de ces points polaires situés sur les côtés AB et AC, par exemple, et l'intersection de la droite D_0 avec le côté BC ; ces trois points seront en ligne droite.

Les coordonnées de cette droite seront pour le cas énoncé

$$-\frac{U}{U_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{W}{W_0}.$$

Chapitre V

Principes de la transformation des Figures.

Nous donnerons, dans ce chapitre, quelques notions sur les principes de la transformation des figures, principes qui sont la base de la Géométrie pure ; ils ne sont pas nécessaires, il est vrai, à la Géométrie Analytique, qui, par le seul secours des coordonnées et des transformations algébriques, peut mettre en évidence les propriétés des figures. Mais, comme l'analyse et la géométrie doivent se prêter un mutuel appui, il importe de pouvoir traduire analytiquement les principes et les résultats généraux de la Géométrie ; nous devons donc connaître le langage de la Géométrie.

§ I. Rapport anharmonique.

1° Définition du rapport anharmonique.

163. Étant donnés quatre points A, B, C, D, situés sur une ligne droite, M. Chasles a appelé rapport anharmonique de ces quatre points le quotient des rapports des distances de deux quelconques de ces points aux deux autres. Tels sont, par exemple,

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \text{ ou } \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}, \text{ etc} \ldots$$

Si nous considérons, par exemple, le rapport suivant, que nous désignerons par la notation $(\overline{AB}\ \overline{CD})$

$$(1) \qquad R = (\overline{AB}\ \overline{CD}) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB},$$

nous dirons que les deux points A et B sont **associés**, ainsi que les deux points C et D ; ou encore, que A & B forment un 1er **couple** ; C et D, le second **couple**.

Il est bien entendu que les conventions faites N° (53) sur les signes et la notation des segments subsistent toujours.

Quatre points donnent lieu à 24 rapports anharmoniques, suivant les différentes manières dont on associe ces points. Mais, parmi ces rapports, il n'y en a que six distincts ; et, parmi ces six rapports, trois d'entre eux sont les inverses des trois autres. Ceci résulte immédiatement des remarques suivantes :

Lorsqu'on intervertit l'ordre de deux points associés, le rapport devient **inverse** ; ainsi

$$(\overline{AB}\ \overline{CD}) = \frac{1}{(\overline{BA}\ \overline{CD})}, \text{ d'où } (\overline{AB}\ \overline{CD}) = (\overline{BA}\ \overline{DC}).$$

Lorsqu'on intervertit l'ordre des groupes, le rapport ne change pas ; ainsi

$$(\overline{AB}\,\overline{CD}) = (\overline{CD}\ \overline{AB}).$$

En faisant abstraction des rapports inverses, les trois rapports anharmoniques distincts, sont

$$(\overline{AB}\,\overline{CD}),\ (\overline{AC}\ \overline{BD}),\ (\overline{AD}\ \overline{BC});$$

ou

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},\ \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC},\ \frac{BA}{BD} : \frac{CA}{CD}.$$

D'ailleurs, un de ces rapports étant connu, les valeurs des deux autres seront déterminées (Chasles Géométrie supérieure page 25).

Remarquons cependant que le rapport anharmonique est défini et unique, lorsque, par avance, on associe les points, c. à d. qu'on désigne les couples.

Ainsi, le rapport **anharmonique** des deux couples AB et CD est

$$(1) \qquad R = (\overline{AB}\,\overline{CD}) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA}.$$

Remarque. Nous conviendrons d'étendre cette définition du rapport anharmonique à un système de **quatre points imaginaires**, situés en ligne droite ; la distance de deux points imaginaires devant être entendue et définie comme il a été fait au N° (66)

164. Un système de droites issues d'un même point forme un **faisceau**.

On appelle **rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites**, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection du faisceau par une transversale quelconque. Cette définition est applicable à un faisceau de droites imaginaires.

Pour que cette définition ait un sens, il nous faut établir la proposition suivante.

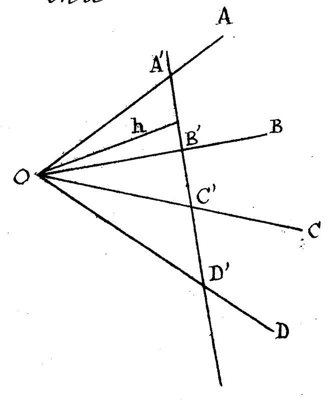
Lorsqu'on coupe un faisceau de quatre droites, réelles ou imaginaires, par une transversale quelconque, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection est constant

Si les quatre droites sont réelles, la valeur constante de ce rapport est

$$\frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}}$$

1° Supposons d'abord les quatre droites réelles.

Soient O le sommet du faisceau et OA, OB, OC, OD les quatre droites; A', B', C', D' les intersections du faisceau par une transversale quelconque. Désignant par h la distance du sommet à la transversale, et exprimant de deux manières différentes la surface de chacun des triangles déterminés par la transversale, on a



$$\underline{C'A'} . h = OA' . OB' . \sin \widehat{CA},$$
$$\underline{C'B'} . h = OC' . OB' . \sin \widehat{CB},$$
$$\underline{D'A'} . h = OA' . OD' . \sin \widehat{DA},$$
$$\underline{D'B'} . h = OB' . OD' . \sin \widehat{DB}.$$

On voit que ces égalités auront lieu en grandeur et signe, si, convenant de regarder les segments, tels que C'A' et A'C', comme ayant des signes contraires, on convient en même temps de regarder les angles correspondants, $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOC}$, comme ayant des signes contraires.

On conclut de ces égalités:

$$(2) \qquad (A'B'C'D') = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}} ;$$

C. Q. F. D.

2° Supposons maintenant les droites imaginaires.

Les droites étant concourantes, si x_0, y_0, sont les coordonnées réelles ou imaginaires de leur point de concours, on pourra, en posant

$$x = x_0 + x', \ y = y_0 + y'$$

ramener les équations de ces quatre droites à la forme suivante:

$$(3) \qquad OA : y = ax ; \ OB : y = bx ; \ OC : y = cx ; \ OD : y = dx .$$

Soient A', B', C', D', les intersections de ces quatre droites par la transversale

$$(2°) \qquad x = \lambda y + \mu,$$

et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées respectives de ces quatre points.

D'après la formule (6) du N° (66), laquelle définit la distance algébrique de deux points imaginaires, on aura

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} , \quad \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}$$

Or les équations (3) et (2°) donnent

$$y_1 = \frac{\mu a}{1 - \lambda a}, \quad y_2 = \frac{\mu b}{1 - \lambda b}, \quad y_3 = \frac{\mu c}{1 - \lambda c}, \quad y_4 = \frac{\mu d}{1 - \lambda d}$$

De là, on conclut, sans difficulté:

$$(4) \qquad (A'B'C'D') = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

165. D'après cela, nous pourrons définir le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites réelles

par l'expression suivante:

$$(5)\qquad R = (O, ABCD) = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}};$$

on désigne souvent ce rapport à l'aide de la notation (O, ABCD).

Dans le rapport anharmonique que nous considérons, nous dirons que les droites OA & OB sont associées, ainsi que les deux droites OC et OD; ou encore, que les deux droites OA et OB forment un premier couple; et les deux droites OC et OD, un second couple.

166. Nous énoncerons seulement les propositions suivantes:

Lorsque deux systèmes de quatre points correspondants ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.

Lorsque deux faisceaux de quatre droites correspondantes ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.

II° Proportion harmonique.

167. On dit que quatre points A, B, C, D, forment un système harmonique lorsque leur rapport anharmonique est égal à −1, c. à. d. que

$$(6)\qquad (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1;$$

les points associés A et B sont dits conjugués harmoniques par rapport au couple des points associés C et D; et réciproquement.

Cette qualification d'harmonique a été donnée par les Géomètres Grecs; la dénomination anharmonique est due à M. Chasles.

Un faisceau de quatre droites OA, OB, OC, OD, forme un système harmonique lorsque leur rapport anharmonique est égal à −1; c. à. d. que

$$(7)\qquad (O, ABCD) = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = -1;$$

les deux droites associées OA et OB sont dites conjuguées harmoniques par rapport au second couple des droites associées OC et OD, et réciproquement.

168. La relation harmonique de quatre points, savoir

$$(6)\qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

peut se mettre sous différentes formes qu'il importe de connaître.

1° La relation (6) donne successivement

A C B D

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}, \text{ ou } \frac{CA}{DA} = \frac{BC}{DB}; \text{ ou } \frac{CA}{DA.DC} = \frac{BC}{DB.DC};$$

$$\text{ou } \frac{DA - DC}{DA.\,DC} = \frac{DC - DB}{DB.\,DC}; \text{ ou } \frac{1}{DC} - \frac{1}{DA} = \frac{1}{DB} - \frac{1}{DC};$$

on a donc enfin

$$(6\ bis)\qquad \frac{2}{DC} = \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}.$$

Relation que nous traduirons par l'énoncé suivant:

La distance du point C au point D est moyenne harmonique entre les distances des points A et B au point D; ou encore, le point C est, par rapport au point D, le centre harmo-

nique des points A et B.

2° Désignons par I le milieu du segment AB divisé harmoniquement par le segment CD; on a (N° 11)

$$\left\{\begin{array}{l} AI + IC + CA = 0, \text{ d'où } CA = CI + IA; \\ BC + CI + IB = 0, \text{ d'où } CB = CI + IB; \\ DA + AI + ID = 0, \text{ d'où } DA = DI + IA; \\ DB + BI + ID = 0, \text{ d'où } DB = DI + IB. \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans la relation harmonique (6), et remarquant que

$$AI = IB \text{ ou } IB = -IA,$$

on trouve, les réductions faites:

$$(6\,ter) \qquad \overline{IA}^2 = IC \,.\, ID.$$

D'où: Lorsqu'un segment AB est divisé harmoniquement par deux points C et D, la moitié de ce segment est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu I aux points conjugués C et D; et réciproquement.

On démontrera la réciproque en reprenant ces calculs dans l'ordre inverse.

169. La relation harmonique d'un faisceau de quatre droites, savoir

$$(7) \qquad \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}} = -1$$

donne lieu aussi à des transformations analogues.

1° La relation (7) donne successivement

$$\frac{\sin CA}{\sin DA} = \frac{\sin BC}{\sin DB}, \text{ ou } \frac{\sin CA}{\sin DA \,.\, \sin DC} = \frac{\sin BC}{\sin DB \,.\, \sin DC}.$$

Or,

$$\widehat{CA} + \widehat{AD} + \widehat{DC} = 0, \text{ d'où } \widehat{CA} = \widehat{DA} - \widehat{DC};$$

$$\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 0, \text{ d'où } \widehat{BC} = \widehat{DC} - \widehat{DB};$$

de là nous concluons

$$\sin \widehat{CA} = \sin \widehat{DA} \cos \widehat{DC} - \sin \widehat{DC} \cos \widehat{DA},$$

$$\sin \widehat{BC} = \sin \widehat{DC} \cos \widehat{DB} - \sin \widehat{DB} \cos \widehat{DC};$$

la relation harmonique devient alors

$$\frac{\sin \widehat{DA} \cos \widehat{DC} - \sin \widehat{DC} \cos \widehat{DA}}{\sin \widehat{DA} \,.\, \sin \widehat{DC}} = \frac{\sin \widehat{DC} \cos \widehat{DB} - \sin \widehat{DB} \cos \widehat{DC}}{\sin \widehat{DB} \,.\, \sin \widehat{DC}},$$

ou définitivement

$$(7\,bis) \qquad \frac{2}{\operatorname{tang} \widehat{DC}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DA}} + \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DB}}.$$

Nous énoncerons cette relation en disant que:

La droite OC est, par rapport à la droite OD, l'axe harmonique des deux droites OA & OB.

2° Désignons par OI la bissectrice de l'angle AOB divisé harmoniquement par l'angle COD; on a

$$\widehat{AI} = \widehat{IB}, \text{ ou } \widehat{AI} = -\widehat{BI}.$$

D'un autre côté:

$$AI + IC + CA = 0, \text{ ou } CA = CI + IA; \text{ d'où } \sin \widehat{CA} = \sin(\widehat{CI} + \widehat{IA});$$

$$CB + BI + IC = 0, \text{ ou } CB = CI - IA; \text{ d'où } \sin \widehat{CB} = \sin(\widehat{CI} - \widehat{IA});$$

$$DA + AI + ID = 0, \text{ ou } DA = DI + IA; \text{ d'où } \sin \widehat{DA} = \sin(\widehat{DI} + \widehat{IA});$$

$$DB + BI + ID = 0, \text{ ou } DB = DI - IA; \text{ d'où } \sin \widehat{DB} = \sin(\widehat{DI} - \widehat{IA}).$$

Substituant ces valeurs dans la relation harmonique (7), on trouve

$$(7\,ter) \qquad \operatorname{tang}^2 \widehat{IA} = \operatorname{tang} \widehat{IC} \,.\, \operatorname{tang} \widehat{ID}.$$

Lorsqu'un angle AOB est divisé harmoniquement par un angle COD, la tangente de la moitié de cet angle est moyenne proportionnelle entre les tangentes des angles que forme sa bissectrice avec les droites conjuguées OC et OD; et réciproquement.

Remarque. Constatons, en passant, l'identité des relations (6 bis) et (7 bis) avec celles qui nous ont servi à définir les polaires N.os (83) et (134); ce qui légitime l'expression harmonique que nous avons employée à cette occasion.

III.° Expression du rapport anharmonique de quatre droites.

170. Supposons d'abord les quatre droites données par leurs équations.

Puisque les quatre droites sont concourantes, si

$$M = o, N = o$$

sont les équations de deux droites passant par le point de concours, les équations des quatre droites du faisceau pourront toujours se ramener à la forme

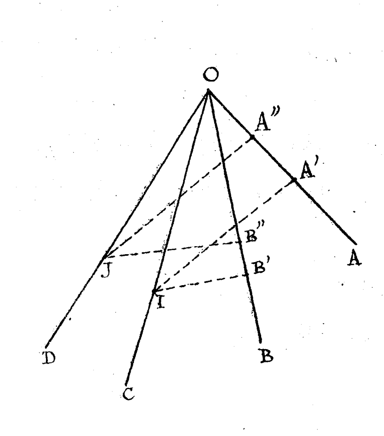
$$(8) \quad \begin{cases} A = M - aN = o, \\ B = M - bN = o, \\ C = M - cN = o, \\ D = M - dN = o, \end{cases}$$

a, b, c, d, étant des constantes; le système des coordonnées reste d'ailleurs arbitraire, système Cartésien ou système Trilatère.

Il s'agit de déterminer l'expression du rapport anharmonique de ce faisceau, en regardant comme associées les droites A et B, puis les droites C et D.

Ce rapport anharmonique est

$$(9) \qquad R = (O, \overline{AB}\,\overline{CD}) = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}}.$$



Prenons un point quelconque I sur la droite OC, de sorte que l'on aura

$$(1°) \qquad M_o - cN_o = o,$$

si M_o et N_o désignent les résultats de la substitution des coordonnées du point I dans les fonctions linéaires M et N.

Si IA' et IB' sont les perpendiculaires abaissées du point I sur les droites OA et OB, on aura

$$IA' = OI. \sin \widehat{CA} = \frac{M_o - a\,N_o}{a_1},$$

$$IB' = OI. \sin \widehat{CB} = \frac{M_o - b\,N_o}{b_1},$$

les dénominateurs a_1 et b_1 ne dépendant que des coefficients des équations $A = o$, $B = o$ et nullement des coordonnées du point considéré N.° (76), N.° (98); on peut, en outre, supposer que a_1 et b_1 désignent des valeurs absolues, car le sens de l'angle CA, par exemple, change visiblement avec le signe de $(M_o - a\,N_o)$.

On conclut de là, eu égard à l'égalité (1°):

$$\frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{M_o - a\,N_o}{M_o - b\,N_o} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{\frac{M_o}{N_o} - a}{\frac{M_o}{N_o} - b} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{c - a}{c - b}.$$

Prenons maintenant un point quelconque J sur la droite OD, de sorte que l'on aura

$$(2°) \qquad M_1 - d\,N_1 = o,$$

si M_1 et N_1 désignent les résultats de la substitution des coordonnées du point J dans les fonctions linéaires M et N. Si JA″ et JB″ sont les perpendiculaires abaissées du point J sur les droites OA et OB, on aura

$$JA'' = OJ.\ \sin\widehat{DA} = \frac{M_1 - a N_1}{a_1},$$

$$JB'' = OJ.\ \sin\widehat{DB} = \frac{M_1 - b N_1}{b_1}:$$

Eu égard à l'égalité (2°) on conclut de là

$$\frac{\sin\widehat{DA}}{\sin\widehat{DB}} = \frac{b_1}{a_1} : \frac{M_1 - a N_1}{M_1 - b N_1} = \frac{b_1}{a_1}\ \frac{\frac{M_1}{N_1} - a}{\frac{M_1}{N_1} - b} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{d - a}{d - b}.$$

Par conséquent, l'expression cherchée du rapport anharmonique du faisceau des quatre droites (8) sera

$$(10) \qquad R = (O, ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)},$$

en regardant comme associées A et B, C et D.

Lorsque les équations du faisceau sont de la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} A = M \\ B = N \\ C = M - h\,N, \\ D = M - k\,N, \end{cases}$$

l'expression du rapport anharmonique sera (en faisant $a = 0,\ b = \infty,\ c = h,\ d = k$)

$$(12) \qquad R = (O,\ ABCD) = \frac{h}{k},$$

en regardant toujours comme associées A et B, C et D.

Ces formules ont lieu, quelque soit le système de coordonnées, coordonnées cartésiennes, ou coordonnées trilatères.

Remarque. Ces résultats sont encore exacts lorsque les droites du faisceau sont imaginaires. En effet, les équations (8) peuvent, par un changement de variables, se ramener à la forme (3) du N.° (164); et l'égalité (4) du même N°. donne précisément l'expression qu'il s'agit de trouver.

171. Des relations (10) et (12) nous concluons que le faisceau

$$(13) \qquad (A) = M - aN,\ (B) = M - bN,\ (C) = M - cN,\ (D) = M - dN$$

est harmonique, lorsque

$$(14) \qquad (c-a)(d-b) + (c-b)(d-a) = 0.$$

Le faisceau

$$(15) \qquad (A) = M;\ (B) = N;\ (C) = M - h\,N,\ (D) = M - kN$$

sera harmonique lorsqu'on aura

$$(16) \qquad h + k = 0.$$

Les droites A et B sont associées, ainsi que C et D.

172. Supposons maintenant les quatre droites du faisceau données par leurs coordonnées.

1° Coordonnées (bilatères) u et v (Chap. III).

Soient (u', v'), (u'', v'') les coordonnées de deux droites déterminant le sommet du faisceau; soient (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4) les coordonnées respectives des droites OA, OB, OC, OD.

D'après les formules du N.° (121), les coordonnées (u_1, v_1) de la droite OA seront de la forme

$$(1°) \qquad u_1 = \frac{u' - a u''}{1 - a},\quad v_1 = \frac{v' - a v''}{1 - a};$$

l'équation de cette droite sera, par conséquent, N.° (110)

$$u_1 x + v_1 y - 1 = 0,$$

ou

$$\text{(OA)} \qquad (u'x + v'y - 1) - a\,(u''x + v''y - 1) = 0.$$

On aura de la même manière pour les équations des autres droites

$$\text{(OB)} \qquad (u'x + v'y - 1) - b\,(u''x + v''y - 1) = 0,$$

$$\text{(OC)} \qquad (u'x + v'y - 1) - c\,(u''x + v''y - 1) = 0,$$

$$\text{(OD)} \qquad (u'x + v'y - 1) - d\,(u''x + v''y - 1) = 0.$$

Appliquant alors le théorème du N.° (170), nous aurons

$$R = (O, ABCD) = \frac{(c-a)}{(c-b)} \cdot \frac{(d-b)}{(d-a)}.$$

Or, si des égalités (1°) et des analogues on tire les valeurs de a, b, c, d, en fonction des u_i, v_i, et qu'on substitue dans la formule qui précède, on trouve pour l'expression du rapport anharmonique les deux formes suivantes

$$(17) \qquad R = (O, ABCD) = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} : \frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_2} \;\overset{ou}{=}\; \frac{v_3 - v_1}{v_3 - v_2} : \frac{v_4 - v_1}{v_4 - v_2}.$$

2.° Coordonnées trilatères d'une droite. (Chap. IV)

Soient (U', V', W'), (U'', V'', W''), les coordonnées de deux droites déterminant le sommet du faisceau; soient, en outre, (U_1, V_1, W_1), (U_2, V_2, W_2), (U_3, V_3, W_3), (U_4, V_4, W_4) les coordonnées respectives des droites OA, OB, OC, OD.

D'après les formules du N.° (142), les coordonnées (U_1, V_1, W_1) de la droite OA pourront se mettre sous la forme

$$(1°) \qquad U_1 = \frac{U' - a\,U''}{\rho'}, \quad V_1 = \frac{V' - a\,V''}{\rho'}, \quad W_1 = \frac{W' - a\,W''}{\rho'}.$$

l'équation de cette droite sera, par conséquent, N.° (139)

$$U_1 X + V_1 Y + W_1 Z = 0,$$

ou

$$(U'X + V'Y + W'Z) - a\,(U''X + V''Y + W''Z) = 0.$$

On opèrera de même pour les autres droites, et on conclura pour l'expression du rapport anharmonique

$$R = (O, ABCD) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}.$$

Maintenant, si des égalités (1°) et des analogues on tire les valeurs des a, b, c, d, en fonctions des U_i, V_i; U', V', etc. et qu'on substitue dans la formule qui précède, on trouve, pour l'expression du rapport anharmonique, les formes suivantes:

$$(18) \quad \begin{cases} R = (O, ABCD) = \dfrac{U_3 V_1 - U_1 V_3}{U_3 V_2 - U_2 V_3} : \dfrac{U_4 V_1 - U_1 V_4}{U_4 V_2 - U_2 V_4}; \\[2ex] R = (O, ABCD) = \dfrac{V_3 W_1 - V_1 W_3}{V_3 W_2 - V_2 W_3} : \dfrac{V_4 W_1 - V_1 W_4}{V_4 W_2 - V_2 W_4}; \\[2ex] R = (O, ABCD) = \dfrac{W_3 U_1 - W_1 U_3}{W_3 U_2 - W_2 U_3} : \dfrac{W_4 U_1 - W_1 U_4}{W_4 U_2 - W_2 U_4}. \end{cases}$$

Seconde démonstration.

1.° Coordonnées bilatères.

Le rapport anharmonique du faisceau est égal au rapport anharmonique du système de points déterminé sur l'axe des x, par exemple

Or
$$ca = Oa - Oc = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_3},$$
$$cb = Ob - Oc = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3},$$
$$da = Oa - Od = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_4},$$
$$db = Ob - Od = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_4};$$
donc, en raisonnant de même pour l'axe Oy :

$$(17) \qquad (S, ABCD) = \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} : \frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_2} \text{ ou } = \frac{v_3 - v_1}{v_3 - v_2} : \frac{v_4 - v_1}{v_4 - v_2}.$$

2° Coordonnées trilatères.

Si l'on détermine les intersections des droites du faisceau avec l'un des côtés du triangle de référence, le côté AB par exemple, les équations des quatre points seront

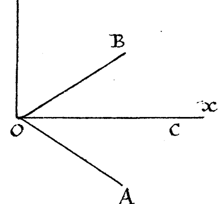
$$U - \frac{U_1}{V_1} V = 0,\ U - \frac{U_2}{V_2} V = 0,\ U - \frac{U_3}{V_3} V = 0,\ U - \frac{U_4}{V_4} V = 0.$$

Alors, on pourra, à l'aide de la formule (20) démontrée plus loin, en conclure les expressions (18).

173. Citons les deux propriétés suivantes relatives aux faisceaux harmoniques:

1° Lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués OC et OD sont rectangulaires, ces rayons seront les bissectrices des deux angles supplémentaires formés par les rayons OA et OB.

2° Dans un faisceau harmonique, toute transversale, parallèle à l'un des rayons, est coupée par les trois autres en deux parties égales.



Pour démontrer la 1ère proposition, prenons pour axes les deux droites rectangulaires OC et OD; les équations des deux droites OA et OB seront

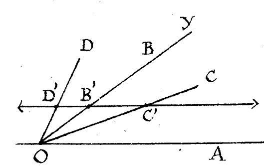
$$y - ax = 0,\ y - bx = 0;$$

et comme le faisceau est harmonique, on aura N.° (171)

$$a + b = 0, \text{ ou } b = -a;$$

donc OC est bissectrice de AOB ; etc....

Pour établir la seconde proposition, prenons l'un des rayons pour un des axes de coordonnées, OA par exemple; et, pour axe des y, la droite OB associée de OA.



Les équations de OC et OD seront, puisque le faisceau est harmonique,

$$OC \quad y - kx = 0; \quad OD \quad y + kx = 0.$$

Coupons le faisceau par la droite C'B'D' parallèle à Ox, y = h ; on aura pour les abscisses des points C' et B' des valeurs égales et de signes contraires ; donc etc....

IV.° Expression du rapport anharmonique de quatre points.

174. Supposons d'abord les quatre points donnés par leurs équations.

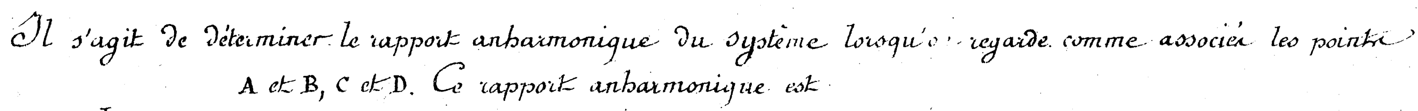
Puisque les quatre points sont en ligne droite, si

$$M = 0,\ N = 0$$

sont les équations de deux points déterminant cette droite, les équations des quatre points du système pourront toujours se ramener à la forme

$$(19) \quad \begin{cases} (A) = M - aN = 0, \\ (B) = M - bN = 0, \\ (C) = M - cN = 0, \\ (D) = M - dN = 0, \end{cases}$$

a, b, c, d, étant des constantes; le système des coordonnées reste d'ailleurs arbitraire.



Il s'agit de déterminer le rapport anharmonique du système lorsqu'on regarde comme associés les points A et B, C et D. Ce rapport anharmonique est

$$R = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Imaginons une droite quelconque CI passant par le point C, de sorte qu'on aura

$$(1^\circ) \qquad M_0 - cN_0 = 0,$$

si M_0 et N_0 désignent les résultats de la substitution des coordonnées de la droite CI dans les fonctions linéaires M et N.

Si AA′ et BB′ sont les perpendiculaires abaissées des points A et B sur la droite CI, on a

$$\left\{ \begin{aligned} AA' &= CA.\sin C = \frac{M_0 - aN_0}{k\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\cos\theta}}, \\ BB' &= CB.\sin C = \frac{M_0 - bN_0}{k_1\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0\cos\theta}}, \end{aligned} \right\} \text{dans le cas des coordonnées bilatères, N}^{\circ}\ (129).$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} AA' &= CA.\sin C = \frac{M_0 - aN_0}{a_1}, \\ BB' &= CB.\sin C = \frac{M_0 - bN_0}{b_1}, \end{aligned} \right\} \text{dans le cas des coordonnées trilatères, N}^{\circ}\ (156).$$

Considérons une autre droite passant par le point D, de sorte qu'on aura

$$(2^\circ) \qquad M_1 - dN_1 = 0,$$

si M_1 et N_1 désignent les résultats de la substitution des coordonnées de la droite DJ dans les fonctions linéaires M et N.

Si AA″ et BB″ sont les perpendiculaires abaissées des points A et B sur la droite DJ, on a

$$\left\{ \begin{aligned} AA'' &= DA.\sin D = \frac{M_1 - aN_1}{k\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta}}, \\ BB'' &= DB.\sin D = \frac{M_1 - bN_1}{k_1\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta}}, \end{aligned} \right\} \text{dans le cas des coordonnées bilatères N}^{\circ}\ (129).$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} AA'' &= DA.\sin D = \frac{M_1 - aN_1}{a_1}, \\ BB'' &= DC.\sin D = \frac{M_1 - bN_1}{b_1} \end{aligned} \right\} \text{dans le cas des coordonnées trilatères. N}^{\circ}\ (156).$$

les constantes k, k_1, a_1, b_1, sont ici les mêmes que dans le groupe des formules ci-dessus.

On déduit de là, dans les deux systèmes de coordonnées

$$(20) \qquad R = (ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b};$$

en regardant comme associés A et B, C et D.

Lorsque les équations des quatre points du système seront de la forme

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} (A) &= M, \\ (B) &= N, \\ (C) &= M - hN, \\ (D) &= M - kN, \end{aligned} \right.$$

l'expression du rapport anharmonique sera

$$(22) \qquad R = (ABCD) = \frac{h}{k},$$

en associant A et B, C et D.

175. Le système

(23) $(A) = M - aN,\ (B) = M - bN,\ (C) = M - cN,\ (D) = M - dN;$

sera harmonique, lorsqu'on aura

(24) $(c-a)(d-b) + (c-b)(d-a) = 0.$

Le système

(25) $(A) = M,\ \ (B) = N;\ \ (C) = M - hN,\ \ (D) = M - kN,$

sera harmonique, lorsqu'on aura

(26) $h + k = 0.$

176. Supposons maintenant les quatre points du système donnés par leurs coordonnées.

1° Coordonnées Cartésiennes.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ les coordonnées respectives des quatre points A, B, C, D; si a', b', c', d', sont les projections de ces quatre points sur l'axe des x, le rapport anharmonique du système des projections sera égal au rapport anharmonique du système proposé.

Or

$$a'c' + c'o + oa' = 0,\quad \text{d'où}\quad c'a' = oa' - oc' = x_1 - x_3;$$
$$b'c' + c'o + ob' = 0,\quad \text{d'où}\quad c'b' = ob' - oc' = x_2 - x_3;$$
$$a'd' + d'o + oa' = 0,\quad \text{d'où}\quad d'a' = oa' - od' = x_1 - x_4;$$
$$b'd' + d'o + ob' = 0,\quad \text{d'où}\quad d'b' = ob' - od' = x_2 - x_4.$$

Par conséquent, en raisonnant de même pour l'axe des y:

(27) $$R = (ABCD) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \quad \text{ou} \quad \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}.$$

2° Coordonnées trilatères.

Joignons les quatre points à l'un des sommets du triangle de référence, le sommet A par exemple; le rapport anharmonique cherché sera égal au rapport anharmonique de ces quatre droites. Or ces quatre droites auront respectivement pour équations

$$Y - \frac{Y_1}{Z_1} Z = 0;\ \ Y - \frac{Y_2}{Z_2} Z = 0;\ \ Y - \frac{Y_3}{Z_3} Z = 0;\ \ Y - \frac{Y_4}{Z_4} Z = 0.$$

En appliquant à ce faisceau la formule (10) du N° (170), on trouve de suite la 1ère des relations suivantes.

(28) $$\left\{ \begin{aligned} R = (ABCD) &= \frac{Y_3 Z_1 - Y_1 Z_3}{Y_3 Z_2 - Y_2 Z_3} : \frac{Y_4 Z_1 - Y_1 Z_4}{Y_4 Z_2 - Y_2 Z_4}; \\ R = (ABCD) &= \frac{Z_3 X_1 - Z_1 X_3}{Z_3 X_2 - Z_2 X_3} : \frac{Z_4 X_1 - Z_1 X_4}{Z_4 X_2 - Z_2 X_4}; \\ R = (ABCD) &= \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3}{X_3 Y_2 - X_2 Y_3} : \frac{X_4 Y_1 - X_1 Z_4}{X_4 Y_2 - X_2 Z_4}. \end{aligned} \right.$$

Remarque. On pourra des formules (27) et (28) déduire assez simplement la formule (20) démontrée directement.

177. Supposons les deux couples de points ou les deux couples de droites donnés respectivement par des équations du second degré, telles que:

(29) $$\left\{ \begin{aligned} &1^{er}\ \text{Couple}: \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \\ &2^{me}\ \text{couple}: \quad A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient a et b les racines de la 1ère équation, c et d les racines de la seconde; le rapport anharmonique du système sera d'après la formule (10) du N° (170)

$$R = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{cd+ab-ad-bc}{cd+ab-bd-ac}.$$

Or les équations (29) donnent

$$\begin{cases} a+b = -\dfrac{B}{A}, & c+d = -\dfrac{B_1}{A_1}; \\ ab = \dfrac{C}{A}; & cd = \dfrac{C_1}{A_1}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de R, on trouvera

$$(30) \qquad R = \frac{2(AC_1 + A_1C) - BB_1 + \sqrt{B^2-4AC}\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}{2(AC_1+A_1C) - BB_1 - \sqrt{B^2-4AC}\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}.$$

Le système sera harmonique, lorsqu'on aura

$$(31) \qquad 2(AC_1 + A_1C) - BB_1 = 0.$$

En ayant égard à la formule (27) du N° (176), le même calcul et les mêmes conséquences sont applicables au cas où les équations (29) définiraient des couples de points.

Remarque. Lorsque les abscisses des quatre points (ou les coordonnées de même nom des quatre droites), sont les racines d'une équation du 4ème degré, telle que

$$(32) \qquad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

les trois rapports anharmoniques du système des quatre points sont donnés par l'équation en ρ

$$(33) \qquad I^3(\rho+2)(\rho-\frac{5}{2})^2 = 27J^2(\rho+1)^3;$$

équation, dans laquelle, I et J représentent les invariants

$$(34) \qquad \begin{cases} I = AE - 4BD + 3C^2, \\ J = ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3 \end{cases}$$

Nouvelles Annales tome XIX page 107.

---

§II Divisions homographiques - Involution.

1° Divisions homographiques.

178. Divisions homographiques sur deux droites distinctes.

Faisceaux homographiques de sommets différents.

On donne le nom de division à une suite quelconque de points en ligne droite, la droite est appelée base de la division.

Considérons deux divisions sur deux droites distinctes D et D'; ces deux divisions seront homographiques, si à un point de l'une des divisions correspond un point et un seul de l'autre division, et réciproquement.

Les points qui se correspondent sont dits points homologues.

D'après cela, si O et O' sont deux origines arbitraires choisies sur chacune des droites, et si m et m' sont deux points homologues, Om et O'm' seront liées par la relation

$$(1) \qquad A.Om.O'm' + B.Om + C.O'm' + D = 0,$$

ou, en représentant par x et x' les distances Om et O'm'

$$(1 bis) \qquad Axx' + Bx + Cx' + D = 0;$$

A, B, C, D, sont des coefficients arbitraires.

La relation (1) ne renfermant que trois rapports arbitraires $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$, il en résulte que deux divisions homographiques seront déterminées lorsqu'on se donnera trois couples de points homologues.

Nous énoncerons seulement la propriété fondamentale suivante et dont la vérification est facile à l'aide de la formule (27) N° (176) :

Le rapport anharmonique de quatre points quelconques d'une des divisions est égal à celui de leurs homologues.

179. On donne le nom de faisceau à un système quelconque de droites passant par un même point, lequel point est dit sommet du faisceau.

Considérons deux faisceaux de sommets différents, ces deux faisceaux seront homographiques, si à une droite de l'un des faisceaux correspond une droite et une seule de l'autre faisceau ; et réciproquement.

Il résulte évidemment de là que :

Deux droites quelconques déterminent sur chacun des faisceaux deux divisions qui seront homographiques.

180. Divisions homographiques de même base.

Faisceaux homographiques de même sommet.

Deux divisions situées sur la même droite ont même base.

On appelle point double tout point de la droite qui, considéré comme appartenant à la 1ère division, coïncide avec son homologue de la seconde division.

Deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires.

Considérons deux faisceaux homographiques de même sommet ; on appelle rayon double toute droite qui, considérée comme appartenant au 1er faisceau, coïncide avec son homologue du second faisceau.

Deux faisceaux homographiques de même sommet ont deux rayons doubles réels ou imaginaires.

Lorsqu'un angle tourne autour de son sommet, ses côtés engendrent deux faisceaux homographiques, les rayons doubles sont imaginaires, et leur position est indépendante de la grandeur de l'angle.

Nous renverrons, pour plus détails, à la Géométrie Supérieure de M. Chasles, ou à la Géométrie Élémentaire de M. Rouché

II°. Involution (Définitions).

181. Divisions en involution.

On dit que deux divisions homographiques sont en involution, lorsque, m et m' étant deux points correspondants, m, considéré comme appartenant à la 1ère division, a pour homologue m' dans la seconde ; et, réciproquement, m', considéré comme appartenant à la 1ère division, a pour homologue m dans la seconde.

D'après cette définition, la relation homographique (1) N° (170) ne doit pas changer lorsqu'on change m et m', ou lorsqu'on permute x et x'.

Si O est l'origine commune des deux divisions, la relation d'involution pourra s'écrire

O m m'

$$x x' - \lambda (x + x') - \mu = 0, \quad (1)$$

x et x' désignant les valeurs algébriques des distances Om et Om' ; λ et μ sont des constantes.

D'après cette relation qui ne contient que deux constantes, on voit que

1° Il suffit de deux couples de points homologues pour déterminer deux divisions en involution.

Si I est le point de la 1ère division homologue de l'infini dans la seconde, et J le point de la 2ème division homologue de l'infini dans la première, on trouve à l'aide de la relation (1) :

$$OI = \lambda, \quad OJ' = \lambda \; ; \quad OI = OJ'$$

2° Pour que deux divisions homographiques soient en involution, il faut et il suffit que les points I et J', homologues de l'infini, coïncident.

Les points doubles de l'involution seront donnés en supposant $x' = x$, c.à.d. par l'équation

$$x^2 - 2\lambda x - \mu = 0.$$

Désignons par e et f ces deux points; on voit que le point I homologue de l'infini, est le milieu du segment (réel ou imaginaire) ef; le point I est le centre de l'involution.

Si l'on rapporte les divisions au centre I, on doit faire $\lambda = 0$, et la relation d'involution prend la forme simple

$$(2) \qquad x x' = \mu, \quad \text{ou} \quad \mathrm{I}m.\mathrm{I}m' = \overline{\mathrm{I}e}^2.$$

De là on conclut: N.° (168)

3.° Le segment ef, formé par les deux points doubles de l'involution, est divisé harmoniquement par tous les couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), ...

Nous citerons encore cette propriété, dont la démonstration est immédiate à l'aide de la relation précédente (2) et de la formule (27) du N.° (176):

4.° Si trois couples (a, a'), (b, b'), (c, c') sont involution, quatre quelconques de ces six points ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues; et réciproquement, les trois couples seront en involution, si quatre quelconques d'entre eux ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre homologues.

Ainsi

$$(a\,b\,c\,a') = (a'b'c'a), \quad (a\,a'b\,b') = (a'a\,b'b), \text{ etc....}$$

182. Faisceaux en involution.

Deux faisceaux homographiques sont en involution, lorsqu'on peut trouver une droite qui les coupe suivant deux divisions en involution.

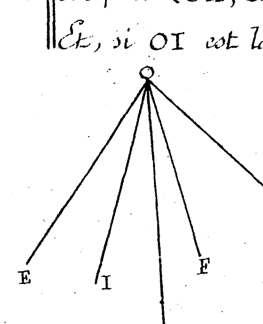
1.° Deux faisceaux en involution seront déterminés par deux couples de rayons homologues.

2.° Dans deux faisceaux en involution, il y a toujours deux rayons doubles réels ou imaginaires.

Les intersections de ces deux rayons doubles par une sécante quelconque sont les points doubles des deux divisions en involution déterminées par cette sécante.

3.° Les deux rayons doubles OE, OF forment un système harmonique avec chacun des autres couples (OA, OA'), (OB, OB'), (OC, OC'), etc...

Et, si OI est la bissectrice de l'angle EOF, on a (7ter) N.° (169)



$$(3) \qquad \tang^2 \widehat{\mathrm{IE}} = \tang \widehat{\mathrm{IM}}.\tang \widehat{\mathrm{IM}'};$$

la bissectrice OI peut être nommée l'axe de l'involution.

Nous énoncerons la proposition suivante

Si trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C') de droites sont en involution, quatre quelconques de ces six droites ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites homologues; et réciproquement.

Ainsi

$$(O, A\,B\,C\,A') = (O, A'B'C'A); \quad (O, A\,B\,A'B') = (O, A'B'A\,B); \text{ etc.}$$

Remarque. La notion de l'involution a été généralisée par M. de Jonquières; voir Teoria geometrica par L. Cremona.

III.° Involution (Équations).

183. Faisceaux en involution.

Soient les équations de deux droites quelconques

$$M = 0, \quad M' = 0$$

déterminant le sommet commun des deux faisceaux; soient, en outre, les équations des trois couples

$$(1)\quad \begin{cases} OA, & M - a M' = 0, \\ OA', & M - a' M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} OB, & M - b M' = 0, \\ OB', & M - b' M' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} OC, & M - c M' = 0, \\ OC', & M' - c' M = 0. \end{cases}$$

Nous exprimerons que ces trois couples forment une involution, en traduisant analytiquement la propriété (4°) du N.° (182); ou, mieux encore, d'après la propriété (3°) du même numéro, qu'il existe un couple

$$(2)\quad \begin{cases} OE & M - \lambda N = 0 \\ OF & M - \lambda' N = 0, \end{cases}$$

tel, que les trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C') soient conjugués par rapport au couple (E, F); ce dernier couple formera le système des rayons doubles de l'involution.

Or, d'après la relation (14) du N.° (171), les conditions pour les trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C'), forment respectivement un système harmonique avec le couple (E, F), seront

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(a + a') + aa' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(b + b') + bb' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')(c + c') + cc' = 0. \end{cases}$$

Éliminant $\lambda\lambda'$ et $(\lambda + \lambda')$ entre ces trois équations, nous trouverons

$$(4)\quad \begin{vmatrix} aa' & a + a' & 1 \\ bb' & b + b' & 1 \\ cc' & c + c' & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

telle est la condition pour que les trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C') soient en involution.

Cette relation étant vérifiée, nous aurons les valeurs de λ et λ' à l'aide de deux des équations (3), et les rayons doubles de l'involution seront alors déterminés par les équations (2).

184. Supposons que $M = 0$ et $M' = 0$ soient les équations de deux rayons homologues, OC et OC' par exemple; il faudra alors faire

$$c = 0, \ c' = \infty,$$

et la condition d'involution deviendra

$$(5)\quad aa' = bb' = \text{constante} = k.$$

De sorte que, si

$$(6)\quad \begin{cases} L = 0, \\ L' = 0, \end{cases}$$

sont les équations de deux rayons homologues, les équations d'un couple quelconque de l'involution seront

$$(7)\quad \begin{cases} L - a\ L' = 0, & OM \\ L - \frac{k}{a}\ L' = 0, & OM' \end{cases}$$

a étant une constante arbitraire, et k une quantité fixe.

185. Supposons, enfin, que $M = 0$, $M' = 0$, soient les deux rayons doubles de l'involution, savoir

$$OE:\ M - \lambda M' = 0,$$
$$OF;\ M - \lambda' M' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\lambda = 0, \ \lambda' = \infty;$$

les relations (3) donnent alors

$$(8)\quad a + a' = 0.$$

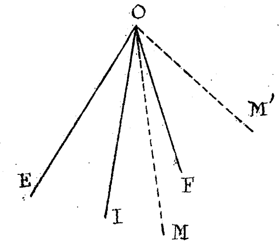
Donc, si

$$(9)\quad \begin{cases} E = 0 \\ F = 0, \end{cases}$$

sont les équations des rayons doubles, les équations d'un couple quelconque de l'involution seront

$$(10)\quad \begin{cases} E - a\,F = 0, & OM \\ F + a\,F = 0; & OM' \end{cases}$$

a étant une constante arbitraire.



Les deux droites OM et OM' étant conjuguées par rapport à OE et OF, on aura, en désignant par OI, la bissectrice EOF N.° (169) (7 ter)

$$(11)\qquad \tan^2 \widehat{IF} = \tan \widehat{IM}.\tan \widehat{IM'};$$

relation qu'on vérifierait aisément à l'aide des équations (10).

Enfin, les équations (10) nous montrent encore que :

Dans deux faisceaux en involution, il existe toujours deux rayons homologues rectangulaires; l'un de ces rayons est l'axe de l'involution.

On le voit en prenant les deux droites OE et OF comme axes de coordonnées.

186. ## Divisions en involution.

Soient les équations de deux points quelconques

$$M = 0,\ M' = 0$$

déterminant la base de deux divisions en involution; soient, en outre, les équations des trois couples

$$(12)\quad \begin{cases} (A)\ \ M - aM' = 0, \\ (A')\ M - a'M' = 0, \end{cases} \begin{cases} (B)\ \ M - bM' = 0, \\ (B')\ M - b'M' = 0, \end{cases} \begin{cases} (C)\ \ M - cM' = 0, \\ (C')\ M - c'M' = 0. \end{cases}$$

Nous écrirons que ces trois couples forment une involution, en écrivant qu'il existe un couple

$$(13)\quad \begin{cases} (E)\ \ M - \lambda\, M' = 0, \\ (F)\ \ M - \lambda'\, M' = 0, \end{cases}$$

tel que les trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C') soient conjugués par rapport au couple (E, F); ce dernier couple formera le système des points doubles de l'involution.

Or d'après la relation (24) du N.° (175), les conditions cherchées seront

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(a+a') + aa' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(b+b') + bb' = 0, \\ \lambda\lambda' - \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')(c+c') + cc' = 0. \end{cases}$$

Éliminant $\lambda\lambda'$ et $(\lambda+\lambda')$ entre ces trois équations nous trouvons

$$(15)\quad \begin{vmatrix} aa' & a+a' & 1 \\ bb' & b+b' & 1 \\ cc' & c+c' & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est la condition pour que les trois couples (12) soient en involution.

Cette relation étant vérifiée, les points doubles de l'involution seront déterminés à l'aide des équations (14) et (13).

187. Supposons que M = 0, M = 0 soient les équations de deux points homologues C et C', par exemple; il faudra faire alors

$$c = 0,\ c' = \infty$$

et la relation d'involution deviendra

$$(16)\qquad aa' = bb' = \text{constante} = k.$$

De sorte que si

$$(17)\quad \begin{cases} L = 0 \\ L' = 0 \end{cases}$$

sont les équations de deux points homologues, les équations d'un couple quelconque de l'involution seront

$$(18)\quad \begin{cases} L - a\,L' = 0, & (M) \\ L - \frac{k}{a}\,L' = 0; & (M') \end{cases}$$

a étant une constante arbitraire, et k un nombre fixe.

188. Supposons enfin que $M=0$, $M'=0$ soient les équations des deux points doubles de l'involution, savoir

$$\begin{cases} E : M-\lambda M'=0 \\ F : M-\lambda' M'=0, \end{cases}$$

ce qui exige que l'on ait

$$\lambda=0,\ \lambda'=\infty;$$

les relations (14) donnent alors

$$(19)\qquad a+a'=0.$$

Donc, si

$$(20)\qquad \begin{cases} E=0, \\ F=0, \end{cases}$$

sont les équations des deux points doubles, les équations d'un couple quelconque de l'involution seront

$$(21)\qquad \begin{cases} E-aF=0\ (M) \\ E+aF=0\ (M') \end{cases}$$

a étant une constante arbitraire.

Les deux points M et M' étant conjugués par rapport à E et F, on aura, en désignant par I le milieu du segment EF N.o (168) : (6 ter)

$$(22)\qquad \overline{IE}^2=IM.IM'\ldots$$

§III Figures homographiques.

1.o Homographie

189. Si l'on transforme une figure en une autre, de manière qu'à un point $\mu(\xi,\eta)$ de la 1.ère corresponde un seul point $m(x,y)$ de la seconde; et réciproquement qu'à un point m de la 2.ème figure corresponde un seul point μ de la 1.ère; on effectue une transformation conique.

A un point $\mu(\xi,\eta)$ de la 1.ère figure doit correspondre un seul point $m\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$ de la 2.ème figure et réciproquement; (ξ,η, sont les coordonnées Cartésiennes du point μ; x, y, z, sont les coordonnées homogènes du point m); donc ξ et η doivent être des fonctions rationnelles de $\frac{x}{z},\frac{y}{z}$, et de la forme

$$(1)\qquad \xi=\frac{Ax+By+Cz}{A_2x+B_2y+C_2z},\quad \eta=\frac{A_1x+B_1y+C_1z}{A'_2x+B'_2y+C'_2z};$$

puisqu'à une valeur de $\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$ doit correspondre une valeur de (ξ,η), et réciproquement.

Dans ce cas, à une droite donnée dans le 1.er système

$$(2)\qquad M\xi+N\eta+P=0,$$

correspond, dans le second système, la conique

$$(2\,bis)\quad M(Ax+By+Cz)(A'_2x+B'_2y+C'_2z)+N(A_1x+B_1y+C_1z)(A_2x+B_2y+C_2z)+P(A_2x+B_2y+C_2z)(A'_2x+B'_2y+C'_2z)=0;$$

de là le nom de transformation conique.

190. Une figure est transformée homographiquement en une autre, lorsqu'à un point de la 1.ère correspond un point unique de la seconde, et réciproquement; et, en outre, lorsqu'à une droite du 1.er système correspond une droite unique dans le second, et réciproquement.

Il faut donc, pour que la seconde condition soit remplie, que la droite (2) se transforme toujours en une droite; c.à.d. que l'équation (2 bis) se réduise, quels que soient M, N, P à une équation du 1.er degré; ce qui n'est évidemment possible, que si l'on suppose

$$A'_2 = A_2,\ B'_2 = B_2,\ C'_2 = C_2.$$

Par conséquent, les formules générales de la transformation homographique seront

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A x + B y + C z}{A_2 x + B_2 y + C_2 z}; \\ \eta = \dfrac{A_1 x + B_1 y + C_1 z}{A_2 x + B_2 y + C_2 z}; \end{cases}$$

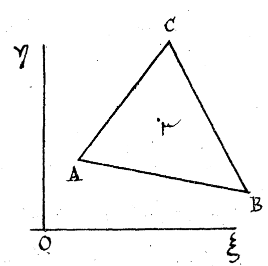
les points correspondants sont $\mu(\xi, \eta)$ & $m\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$.

Or, si l'on se reporte aux formules (7) du N.º (92), on pourra interpréter les formules précédentes (3) à un double point de vue.

I.º ξ et η étant les **coordonnées Cartésiennes** d'un point μ par rapport aux axes, rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, nous « pouvons regarder x, y et z comme les **coordonnées trilatères** du même point μ, qui sera alors rapporté à un triangle, « tel que ABC.

« Dans ce cas, les coordonnées x, y, z, devront vérifier une relation de la forme

$$m x + n y + p z = \text{constante}.$$



La forme de la courbe n'est pas altérée; mais on pourra profiter des **huit** constantes que les formules de transformation (3) introduiront dans l'équation de la courbe, pour donner à cette équation la forme la plus simple possible.

II.º « ξ et η étant les coordonnées cartésiennes d'un point μ par rapport aux axes $O\xi$ et $O\eta$, nous pouvons « regarder $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ comme les coordonnées cartésiennes homogènes d'un autre point m, rapporté aux mêmes « axes et **correspondant** au point μ. Par cette substitution, la courbe Σ

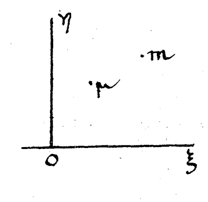
$$(\Sigma)\quad F(\xi, \eta) = 0$$

« se trouve **transformée** en une autre courbe (S)

$$(S)\quad F\left(\frac{A x + B y + C z}{A_2 x + B_2 y + C_2 z},\ \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z}{A_2 x + B_2 y + C_2 z}\right) = 0;$$

« la courbe (S) est la **transformée homographique** de la courbe Σ.

Dans ce cas, les coordonnées $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ne sont assujeties à aucune relation.



Donc

On arrive à donner à une équation la forme la plus simple possible, soit, en la rapportant à un triangle fixe, c. à. d. en faisant usage des coordonnées trilatères; soit, en transformant homographiquement la courbe qu'elle représente; les formules de transformation sont les mêmes dans les deux cas.

Dans le 1.er cas, la forme de la courbe n'est pas altérée, la droite de l'infini reste la droite de l'infini; seulement, l'équation de la droite de l'infini n'a plus la même forme. Les coordonnées x, y, z, doivent vérifier une relation linéaire.

Dans le second cas, la forme de la courbe est modifiée; les points à l'infini, dans le 1.er système, se trouvent, dans le 2.ème système, sur la droite à distance finie

$$(J)\qquad A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0,$$

comme on le voit par les formules (3); et inversement, aux points à l'infini de la 2.ème figure, correspondront des points sur la droite à distance finie

$$(J')\qquad a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 = 0;$$

cette dernière équation s'obtiendra en égalant à zéro le dénominateur commun des valeurs de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ fournies par les équations (3).

191. Considérons les formules générales du N.º (101)

$$(4)\quad \begin{cases} X = a X' + b Y' + c Z', \\ Y = a' X' + b' Y' + c' Z', \\ Z = a'' X' + b'' Y' + c'' Z', \end{cases}$$

dans lesquelles X, Y, Z, X', Y', Z', désignent des coordonnées trilatères.

Nous pourrons aussi interpréter ces formules à un double point de vue.

I° On peut regarder les formules (4) comme servant à passer d'un triangle de référence ABC à un autre triangle de référence A'B'C'.

Dans ce cas, la figure n'est pas altérée, et la droite de l'infini reste la droite de l'infini. Les coordonnées X, Y, Z, doivent vérifier une relation de la forme

$$mX + nY + pZ = \text{Constante};$$

et les coordonnées X', Y', Z', devront vérifier une autre relation de la même forme, mais dont les coefficients ne sont plus les mêmes

$$m'X' + n'Y' + p'Z' = \text{Constante}.$$

II° On peut regarder les formules (4) comme servant à effectuer une transformation homographique.

Dans ce cas, on conserve le même triangle de référence ABC; à un point $M(X, Y, Z)$ correspond un autre point $M'(X'Y'Z')$; les coordonnées $X, Y, Z; X', Y', Z'$, de ces deux points doivent vérifier une même relation, telle que

$$mX + nY + pZ = \text{constante} = k,$$
$$mX' + nY' + pZ' = \text{constante} = k.$$

La figure primitive est altérée; à la droite de l'infini du 1er système correspond, dans le second système, une droite I à distance finie; et, à la droite de l'infini du second système correspond, dans le premier, une droite J à distance finie.

Remarque. Il faut observer que les formules (4) ne sont pas les formules les plus générales de la transformation homographique, elles correspondent au cas où un seul point double est à distance finie.

Les formules générales, en coordonnées trilatères, de la transformation homographique, sont

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{aX' + bY' + cZ'}{AX' + BY' + CZ'}, \\ Y &= \frac{a_1X' + b_1Y' + c_1Z}{AX' + BY' + CZ}, \\ Z &= \frac{a_2X' + b_2Y' + cZ}{AX' + BY' + CZ}. \end{aligned} \right.$$

$X, Y, Z; X', Y', Z'$, sont les coordonnées de deux points homologues M, M', rapportés au même triangle. Ces coordonnées doivent vérifier toutes une même relation linéaire, c'est à dire qu'on doit avoir en même temps

$$lX + mY + nZ = k,$$
$$lX' + mY' + nZ' = k.$$

L'équation transformée de la courbe se présentera sous la même forme, lorsqu'on fera usage soit des formules (4), soit des formules (5); mais néanmoins cette équation ne représentera pas la même courbe, car à un point (X, Y, Z) correspond un point (X', Y', Z') différent suivant qu'on le détermine à l'aide des relations (4), ou à l'aide des relations (5).

192 Revenons à la transformation homographique.

Quoique nous n'ayons pas à faire usage de cette transformation, nous citerons, sans les démontrer, les propriétés principales suivantes:

a Quand trois points sont en ligne droite dans l'une des figures, les trois points homologues de l'autre figure sont aussi en ligne droite.

ɞ Quand trois droites d'une figure passent par un même point, les trois droites homologues de l'autre figure passent également par un même point.

ɣ Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite dans l'une des figures est égal à celui des quatre points homologues.

« Le rapport anharmonique d'un faisceau de l'une des figures est égal à celui des quatre droites homologues.
« A quatre points (ou quatre droites) pris à volonté dans l'une des figures, on peut faire correspondre quatre points (ou quatre droites) pris arbitrairement dans l'autre figure.
« Il y a, dans le plan, **trois points doubles**, c. à. d. trois points qui sont à eux-mêmes leurs correspondants dans la transformation homographique; il y a **trois droites doubles**. c. à d. des droites qui se correspondent à elles-mêmes.

Remarque. La transformation homographique a été présentée, pour la première fois, par M. Chasles, dans un mémoire intitulé: **sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie**, présentée en 1830 à l'Académie de Bruxelles.

II°. Homologie.

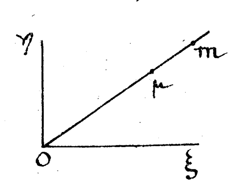
193. Lorsque, dans une transformation homographique, les droites qui joignent **deux points correspondants**, tels que μ et m, passent par un **point fixe**, la transformation est dite **homologique**; il arrive alors que les **droites correspondantes** se coupent sur une **droite fixe**.

Le point fixe O, par lequel passent les droites qui joignent deux points homologues est appelé **centre d'homologie**; la droite fixe sur laquelle se coupent les droites correspondantes est dite **axe d'homologie**.

Prenons les formules (3)

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{A\,x + B\,y + C\,z}{A_2\,x + B_2\,y + C_2 z}, \\ \eta &= \frac{A_1\,x + B_1\,y + C_1 z}{A_2\,x + B_2\,y + C_2 z}, \end{aligned}\right.$$

et exprimons que les droites qui joignent deux points homologues quelconques μ et m passent par un point fixe. Si l'on choisit ce point pour origine des coordonnées, on trouve, sans difficulté, que les **formules de la transformation homologique** sont, en coordonnées Cartésiennes,



$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{A\,x}{A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z}, \\ \eta &= \frac{A\,y}{A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z}. \end{aligned}\right.$$

On constate alors que les droites homologues

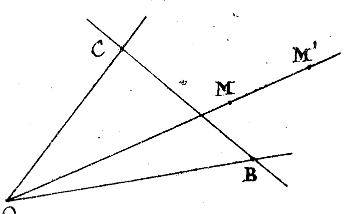
$$M\xi + N\eta + P = 0$$

$$A\,(M\xi + N\eta) + P\,(A_2\xi + B_2\eta + C_2) = 0$$

se coupent sur la droite fixe, ou axe d'homologie,

$$(6)\qquad A_2\,\xi + B_2\,\eta + (C_2 - A) = 0$$

194. Les formules de la transformation homologique se présenteront, en coordonnées trilatères, sous une forme très simple, si l'on prend le **centre d'homologie O** pour un des sommets du triangle de référence, et **l'axe d'homologie** pour coté opposé BC.



Exprimons que les formules générales (5) N° (191) satisfont à cette double condition, et nous arriverons aux expressions suivantes

$$(7)\qquad \frac{X}{a\,X'} = \frac{Y}{b\,Y'} = \frac{Z}{c\,Z'} = \frac{1}{A\,X' + B\,Y' + C\,Z'};$$

X, Y, Z; X', Y', Z', sont les coordonnées trilatères des points correspondants M et M'; elles doivent vérifier la même relation linéaire, telle que

$$l\,X' + m\,Y' + n\,Z' = k.$$

195\. Les formules (7) nous donnent immédiatement la démonstration des propositions suivantes :

1° Dans la transformation homologique, il y a une infinité de points doubles, c. à d. de points qui sont à eux mêmes leurs correspondants ; ces points doubles sont : le centre d'homologie, et tous les points de l'axe d'homologie.

2° Il y a une infinité de droites doubles, c. à d. de droites qui se correspondent à elles-mêmes ; ce sont les droites passant par le centre d'homologie.

3° Les rapports des distances de deux points homologues à l'axe d'homologie et à une droite double sont proportionnels. Cette propriété est la traduction de l'égalité

$$\frac{X}{X'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{Y}{Y'}.$$

196\. Si deux figures S et S_1 sont l'une perspective de l'autre, et qu'on rabatte sur un même plan les plans de ces figures, on aura alors deux figures placées homologiquement. Réciproquement, deux figures homologiques sont d'une infinité de manières perspectives l'une de l'autre.

Cette proposition se démontre facilement par des considérations géométriques.

L'homologie a été imaginée par M. Poncelet et employée dans son Traité des propriétés projectives des figures (1822).

Nous citerons enfin ce théorème important :

La transformation homographique la plus générale peut toujours être ramenée à une transformation homologique ; ou, en d'autres termes, deux figures planes homographiques peuvent être placées de manière à être homologiques.

Nous allons démontrer qu'en faisant mouvoir, dans le plan, la 2ème figure (S), et laissant fixe la 1ère (Σ), on peut amener les formules générales (3) N° (190)

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A x + B y + C}{A_2 x + B_2 y + C_2}, \\[2ex] \eta = \dfrac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}, \end{cases}$$

de la transformation homographique à avoir la forme particulière (5), N° (193), qui caractérise la transformation homologique.

A la droite de l'infini de la 2ème figure correspond, dans la 1ère figure, la droite à distance finie

$$(\mathrm{I})\qquad \underbrace{(A_1 B_2 - A_2 B_1)}_{A'}\,\xi + \underbrace{(A_2 B - A B_2)}_{B'}\,\eta + \underbrace{(A B_1 - A_1 B)}_{C'} = 0,$$

on l'obtient en résolvant les équations (3) par rapport à x et y, et égalant à zéro le dénominateur.

A la droite de l'infini de la 1ère figure correspond, dans la 2ème figure, la droite à distance finie

$$(\mathrm{J}')\qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

A l'axe des ξ de la 1ère figure, $\eta = 0$, correspond, dans la 2ème, la droite

$$(\Delta)\qquad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$

et à l'axe des η de la 1ère figure, $\xi = 0$, correspond, dans la 2ème, la droite

$$(\Delta_1)\qquad A x + B y + C = 0.$$

La droite I coupe Ox et Oy en a et b ; par a menons une parallèle à la droite Δ, et considérons cette droite comme appartenant à la 1ère figure ; de même, menons par b une parallèle à la droite Δ_1, et considérons cette droite comme appartenant à la 1ère figure ; les équations respectives de ces deux droites seront

$$(0')\quad \begin{cases} A_1 \xi + B_1 \eta + \dfrac{C'}{A'} A_1 = 0, \\[2ex] A \xi + B \eta + \dfrac{C'}{B'} B = 0. \end{cases}$$

Prenons, pour origine des coordonnées, le point de rencontre O' de ces deux droites, ce qui exige que A_1 et B soient nuls. Les formules de transformation deviendront alors

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{A x' + C}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}, \\ \eta' = \dfrac{B_1 y' + C_1}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}; \end{cases}$$

et les équations des droites (I) et (J') seront

$$(I)\qquad \frac{A_2}{A}\xi' + \frac{B_2}{B_1}\eta' - 1 = 0,$$

$$(J')\qquad A_2 x' + B_2 y' + C_2 = 0.$$

Les droites de la deuxième figure correspondant aux nouveaux axes $O'\xi'$, $O'\eta'$ seront

$$A x' + C = 0,\ B_1 y' + C_1 = 0;$$

elles se couperont en un certain point O''. Transportons la 2ème figure parallèlement à elle-même de manière que le point O'' vienne coïncider avec l'origine O'; ce qui exige que l'on ait

$$C = 0,\ C_1 = 0;$$

les formules de transformation deviennent alors

$$(3\ ter)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{A x'}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}, \\ \eta' = \dfrac{B_1 y'}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}. \end{cases}$$

Enfin, faisons tourner la 2ème figure dans son plan autour du point O'' (qui maintenant coïncide avec O') jusqu'à ce que la droite (J') devienne parallèle à la droite (I); on aura alors $A = B_1$; et les formules de transformation prendront la forme définitive

$$(5)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{A x'}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}, \\ \eta = \dfrac{A y'}{A_2 x' + B_2 y' + C_2}; \end{cases}$$

ce sont précisément les formules de la transformation homologique.

---

§IV Figures corrélatives.

1° Transformation corrélative

197. Si l'on transforme une figure en une autre de manière qu'à un point de la 1ère corresponde une droite unique de la seconde; et que, réciproquement, à une droite de la seconde corresponde, dans la première, un point, et un seul; les deux figures ainsi obtenues sont corrélatives.

Nous rapporterons de suite, pour plus de symétrie, les deux figures à un même triangle de référence.

Soient x, y, z, les coordonnées trilatères d'un point M de la première figure; et u, v, w, les coordonnées trilatères de la droite D correspondante dans la 2ème figure.

D'après la définition, on devra avoir entre ces coordonnées les relations suivantes

$$(1)\qquad \frac{x}{au + bv + cw} = \frac{y}{a_1 u + b_1 v + c_1 w} = \frac{z}{a_2 u + b_2 v + c_2 w};$$

lesquelles, résolues par rapport à u, v, w, donneront, par exemple :

$$(2)\qquad \frac{u}{a'x + a'_1 y + a'_2 z} = \frac{v}{b'x + b'_1 y + b'_2 z} = \frac{w}{c'x + c'_1 y + c'_2 z};$$

$a, a_1 \dots a', a'_1, \dots$ sont des constantes ; u, v, w, sont les coordonnées trilatères de la droite D de la 2ème figure correspondant au point $M(x, y, z)$ de la 1ère figure

198. Lorsqu'un point décrit une droite fixe, les droites correspondantes passent par un point fixe.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'une droite D_0 de la 1ère figure ; son équation sera

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0,$$

x, y, z étant un point quelconque de cette droite. En remplaçant x, y, z, par les valeurs (1), on trouve

$$u(a u_0 + a_1 v_0 + a_2 w_0) + v(b u_0 + b_1 v_0 + b_2 w_0) + w(c u_0 + c_1 v_0 + c_2 w_0) = 0.$$

Cette équation représente un point par lequel passent toutes les droites (u, v, w) de la 2ème figure correspondant au point quelconque (x, y, z) situé sur la droite (u_0, v_0, w_0) ; les coordonnées (x_1, y_1, z_1), de ce point, seront

$$(3)\qquad \frac{x_1}{a u_0 + a_1 v_0 + a_2 w_0} = \frac{y_1}{b u_0 + b_1 v_0 + b_2 w_0} = \frac{z_1}{c u_0 + c_1 v_0 + c_2 w_0};$$

le point (x_1, y_1, z_1) est le point correspondant, dans la 2ème figure, à la droite D_0 de la 1ère.

Lorsqu'une droite passe par un point fixe, les points correspondants décrivent une droite fixe.

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point M_1 de la 2ème figure ; son équation sera

$$u x_1 + v y_1 + w z_1 = 0,$$

u, v, w, étant les coordonnées d'une droite quelconque passant par ce point.

En remplaçant u, v, w, par les valeurs (2), on trouve

$$x(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1) + y(a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1 z_1) + z(a'_2 x_1 + b'_2 y_1 + c'_2 z_1) = 0.$$

Cette équation représente une droite sur laquelle se trouvent tous les points (x, y, z) de la 1ère figure, correspondant à la droite quelconque (u, v, w) passant par le point (x_1, y_1, z_1). Les coordonnées u_0, v_0, w_0, de cette droite seront

$$(4)\qquad \frac{u_0}{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1} = \frac{v_0}{a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1 z_1} = \frac{w_0}{a'_2 x_1 + b'_2 y_1 + c'_2 z_1};$$

la droite (u_0, v_0, w_0) est la droite correspondant, dans la 1ère figure, au point (x_1, y_1, z_1) de la 2ème.

199. Ainsi :

1° A un point (x_0, y_0, z_0) ou M_0 de la 1ère figure, correspond, dans la seconde, une droite D_1 (u_1, v_1, w_1) définie par les relations (2), ou

$$(2\text{ bis})\qquad \frac{u_1}{a'x_0 + a'_1 y_0 + a'_2 z_0} = \frac{v_1}{b'x_0 + b'_1 y_0 + b'_2 z_0} = \frac{w_1}{c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0}.$$

2° A une droite D_0 (u_0, v_0, w_0) de la 1ère figure, correspond, dans la seconde, un point M_1 (x_1, y_1, z_1) défini par les relations (3), ou

$$(3\text{ bis})\qquad \frac{x_1}{a u_0 + a_1 v_0 + a_2 w_0} = \frac{y_1}{b u_0 + b_1 v_0 + b_2 w_0} = \frac{z_1}{c u_0 + c_1 v_0 + c_2 w_0}.$$

3° A un point M_1 (x_1, y_1, z_1) de la 2ème figure, correspond, dans la première, une droite D_0 (u_0, v_0, w_0) définie par les relations (4), ou

$$(4\text{ bis})\qquad \frac{u_0}{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1} = \frac{v_0}{a'_1 x_1 + b'_1 y_1 + c'_1 z_1} = \frac{w_0}{a'_2 x_1 + b'_2 y_1 + c'_2 z_1}.$$

4° A une droite D_1 (u_1, v_1, w_1) de la 2ème figure, correspond, dans la première, un point M_0 (x_0, y_0, z_0) défini par les relations (1), ou

$$(1\text{ bis})\qquad \frac{x_0}{a u_1 + b v_1 + c w_1} = \frac{y_0}{a_1 u_1 + b_1 v_1 + c_1 w_1} = \frac{z_0}{a_2 u_1 + b_2 v_1 + c_2 w_1}$$

200. Nous citerons, sans les démontrer, les propriétés suivantes :

« A quatre droites, prises à volonté dans l'une des figures, on peut faire correspondre quatre points pris à volonté dans l'autre figure.

« Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite dans l'une des figures est égal au rapport anharmonique des quatre droites correspondantes de l'autre figure.

« Le lieu des points M_0 de la 1ère figure, tels que les droites correspondantes D_1 de la 2ème figure passent par ces mêmes points, est une conique S; et les droites D_1 enveloppent elles mêmes une conique S_1.

« Le lieu des points M_1 de la 2ème figure, tels que les droites correspondantes D_0 de la 1ère figure passent par ces mêmes points, est la conique précédente S; et les droites D_0 enveloppent aussi la conique S_1.

« Les deux coniques S et S_1 sont corrélatives l'une de l'autre; on les appelle **coniques doubles** de la transformation corrélative. Ces deux coniques sont doublement tangentes.

« Toutes ces propositions se démontrent, avec la plus grande facilité, à l'aide des formules du N° (199).

II°: Transformation par polaires réciproques.

201. Dans la transformation corrélative générale, à un point, regardé comme appartenant à la 1ère ou à la 2ème figure, correspondent des droites distinctes.

Soit un point (x_0, y_0, z_0) appartenant à la 1ère figure; les coordonnées de la droite correspondante, dans la 2ème figure, seront déterminées par les équations (2 bis); l'équation de cette droite sera

$$D_1 \qquad x(a'x_0 + a'_1 y_0 + a'_2 z_0) + y(b'x_0 + b'_1 y_0 + b'_2 z_0) + z(c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0) = 0.$$

Au même point (x_0, y_0, z_0) regardé comme appartenant à la 2ème figure, correspondra, dans la 1ère figure, une droite D_0 dont les coordonnées seront déterminées par les relations (1 bis); l'équation de cette droite sera

$$D_0 \qquad x(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0) + y(a'_1 x_0 + b'_1 y_0 + c'_1 z_0) + z(a'_2 x_0 + b'_2 y_0 + c'_2 z_0) = 0.$$

Or les droites D_1 et D_0 sont visiblement distinctes, lorsque le point (x_0, y_0, z_0) reste arbitraire.

Lorsque la transformation corrélative est telle qu'à un point considéré comme appartenant à la 1ère ou à la 2ème figure, corresponde toujours la même droite, la transformation corrélative prend le nom de **transformation par polaires réciproques**.

Nous verrons, plus tard, la raison de cette dénomination.

Cherchons les conditions pour que les deux droites D_1 et D_0 coïncident, quel que soit le point (x_0, y_0, z_0) considéré. On doit avoir

$$\frac{a'x_0 + a'_1 y_0 + a'_2 z_0}{a'x_0 + b'y_0 + c'z_0} = \frac{b'x_0 + b'_1 y_0 + b'_2 z_0}{a'_1 x_0 + b'_1 y_0 + c'_1 z_0} = \frac{c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0}{a'_2 x_0 + b'_2 y_0 + c'_2 z_0},$$

quels que soient x_0, y_0, z_0.

Or, si l'on multiplie respectivement par x_0, y_0, z_0, les deux termes de chacun de ces rapports, et qu'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on trouve l'unité. Ces rapports devant être constants et égaux à l'unité, on en conclut

$$\frac{a'_1}{b'} = \frac{a'_2}{c'} = \frac{b'_2}{c'_1} = 1.$$

L'équation de la droite D_0 ou D_1 devient alors

$$x(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0) + y(b'x_0 + b'_1 y_0 + c'_1 z_0) + z(c'x_0 + c'_1 y_0 + c'_2 z_0) = 0.$$

Nous verrons, plus loin, que c'est la polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à la conique

$$a'x^2 + b'_1 y^2 + c'_2 z^2 + 2c'_1 yz + c'xz + 2b'xy = 0.$$

202. Nous terminerons par l'énoncé de la proposition suivante :

On peut toujours, sans altérer la forme d'une transformée corrélative générale, l'amener à être une transformée par polaires réciproques de la figure primitive.

On pourra démontrer ce théorème par une méthode à peu près semblable à celle qui a été développée dans le N° (196).

Remarque. M. Chasles a développé d'importantes considérations sur l'usage des méthodes que nous venons d'exposer (Géométrie supérieure page 132 à 156); nous ne pouvons mieux faire que d'y renvoyer le lecteur.

Nous ne ferons pas usage de ces méthodes de transformation; il est cependant important de les connaître, car la Géométrie et l'Analyse ne doivent pas rester étrangères l'une à l'autre. D'ailleurs les propriétés harmoniques, ou homologiques, ou réciproques, sont des propriétés caractéristiques; et l'Analyse doit en savoir constater l'existence, lorsqu'elles se présentent.

Exercices.

203. 1° Lorsque les trois côtés d'un triangle variable ABC, tournent autour de trois points fixes P, P′, P″, situés en ligne droite, tandis que deux des sommets A & B glissent sur deux droites fixes; le troisième sommet (C) décrit une ligne droite, passant par le point de concours des deux droites.

2° Étant donné un polygone de n côtés, si on le déforme en faisant tourner tous ses côtés autour d'autant de pôles situés en ligne droite, de manière que tous ses sommets, moins un, glissent sur des droites fixes; 1° le dernier sommet décrira une droite; 2° le point de concours de deux côtés quelconques non contigus décrira aussi une ligne droite.

3° Lorsque les trois sommets d'un triangle variable ABC décrivent respectivement trois droites fixes OA, OB, OC, passant par un même point, tandis que deux de ses côtés tournent autour de deux points fixes, le troisième côté tourne autour d'un troisième point fixe en ligne droite avec les deux premiers.

4° Étant donné un polygone de n côtés, si on le déforme en faisant glisser ses n sommets sur des droites concourantes en un même point, tandis que (n−1) de ses côtés tournent autour de (n−1) points fixes pris arbitrairement, le nième coté du polygone tournera autour d'un point fixe, ainsi que chacune de ses diagonales.

5° Deux des sommets A & B d'un triangle variable ABC se meuvent sur deux droites fixes OA, OB; ses côtés passent par trois points fixes, P, P′, P″; les deux pôles P′ et P″ autour desquels tournent AC & BC sont en ligne droite avec le point O; le 3ème sommet, C, décrit une ligne droite.

6. Les sommets d'un triangle variable ABC décrivent trois droites fixes arbitrairement choisies; deux de ses côtés AB et AC passent par deux points fixes, en ligne droite avec le point de rencontre des lignes sur lesquelles se meuvent les sommets B et C; le troisième côté BC passe par un point fixe.

N. B. Les théorèmes 5°, 1°, & 2° sont énoncés dans les Collections Mathématiques de Pappus (vers la fin du 4e siècle).

7° Si une ligne droite est telle, que la somme des perpendiculaires abaissées sur cette droite de n points fixes et respectivement multipliées par des nombres constants est nulle, cette droite passe par un point fixe; ce point est le centre des distances proportionnelles des n points donnés.

8° Lorsque deux triangles sont tels que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second se rencontrent en un même point, réciproquement les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés du premier passent aussi par un même point.

9° Un triangle variable ABC reste semblable à lui-même; le sommet A reste fixe, le second B décrit une droite fixe; le troisième sommet décrira une droite.

10° Étant données cinq droites, on en prend quatre qui forment un quadrilatère complet, dans lequel les milieux des trois diagonales sont en ligne droite; les cinq droites ainsi obtenues passent par un même point.

11° Étant données quatre droites, on en prend trois pour former un triangle dont on détermine le point de rencontre des hauteurs; les quatre points ainsi obtenus sont en ligne droite.

12° Étant donnés trois points A, B, C et deux droites X et Y, sur AB comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à X et Y; on opère de même avec BC et CA; les secondes diagonales des trois parallélogrammes ainsi formés passent par un même point.

13° Toute transversale menée dans le plan d'un quadrilatère rencontre ses quatre côtés et ses deux diagonales en six points qui sont en involution.

14° Les six droites, menées d'un même point aux quatre sommets et aux points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, forment un faisceau en involution.

15° Étant pris arbitrairement un point P dans le plan du quadrilatère, on construit les polaires de ce point relatives aux trois angles dont l'un est formé par deux côtés opposés d'un quadrilatère, le second par les deux autres côtés opposés, et le troisième par les deux diagonales; ces trois polaires, passent par un même point.

16° Étant pris arbitrairement une droite D dans le plan d'un quadrilatère, on détermine les points polaires de cette droite par rapport aux trois systèmes de deux points, le 1er fourni par les extrémités d'une des diagonales, le 2ème par les extrémités de l'autre diagonale, et le 3ème par les points de rencontre des côtés opposés; ces trois points polaires sont en ligne droite.

17° Quand deux côtés opposés d'un quadrilatère sont rectangulaires, ainsi que les deux diagonales, les deux autres côtés sont aussi rectangulaires.

18° Étant donnés un triangle et une transversale, si d'un même point on mène des droites aux sommets du triangle et aux points où la transversale rencontre les côtés opposés, ces droites formeront trois couples en involution. La réciproque est vraie.

19° Si d'un même point on mène trois droites aux sommets d'un triangle, toute transversale rencontrera ces droites et les côtés du triangle en six points formant trois couples en involution; et réciproquement.

20° Si d'un point on conduit des rayons aux trois sommets d'un triangle, les droites menées par ce même point perpendiculairement à ces rayons, iront rencontrer les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

21° Si trois rayons partant des sommets d'un triangle vont se réfléchir en un même point sur une droite, les rayons réfléchis rencontreront, respectivement, les trois côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

22° Quand trois triangles, homologiques deux à deux, ont le même axe d'homologie, leurs trois centres d'homologie sont en ligne droite.

23° Quand trois triangles homologiques ont deux à deux, le même centre d'homologie, leurs trois axes d'homologie passent par un même point.

N. B. Les énoncés des propositions (13°, 14°, 15°, 17°, ... 23°) ont été extraits de la Géométrie Supérieure de M. Chasles.

24° Dans tout quadrilatère, les bissectrices des quatre angles forment un second quadrilatère dont les diagonales passent par le point de concours des côtés opposés.

25° Étant donnés n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ en ligne droite, et un point O sur cette droite; on appelle centre harmonique de ce système, par rapport au point O, un point C tel que

$$\frac{n}{OC} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \cdots + \frac{1}{OA_n}.$$

Si l'on joint un point quelconque S aux points O; $A_1, A_2 \dots A_n$; C; et qu'une transversale quelconque rencontre les rayons du faisceau aux points ω; $a_1, a_2, \dots, a_n$; γ; le point γ sera, par rapport à ω, le centre harmonique du système $a_1, a_2, \dots a_n$.

26° Soient n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ disposés d'une manière quelconque dans le plan, et une droite fixe D; joignons un point quelconque O de la droite D aux n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, et coupons le faisceau (OD; OA_1, $OA_2, \dots, OA_n$) par une transversale quelconque, soient d; $a_1, a_2, \dots, a_n$ les points d'intersection

Prenons le centre harmonique γ des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par rapport au point d, et joignons $O\gamma$; la droite $O\gamma$ passera toujours par un certain point fixe C, quelle que soit la transversale considérée et quelque soit le point O pris sur la droite D. Le point C a été nommé par M. Poncelet le centre harmonique du système plan $A_1, A_2, \ldots A_n$ par rapport à la droite D.

LIVRE SECOND.

Cercle

Chapitre I

Cercle (Coordonnées Cartésiennes)

§I Equation du Cercle.

1°. Equation du Cercle d'après sa définition Géométrique.

204. Le Cercle est le lieu des points également distants d'un point fixe.

Le point fixe est le centre du cercle; la distance constante du centre aux différents points est le rayon.

Si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence; a, b, les coordonnées du centre et R le rayon; on aura, d'après la définition et la formule (2) du N.° (31)

$$(1) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta = R^2;$$

nous aurons ainsi une relation entre les coordonnées x, y d'un point quelconque du cercle et les constantes $a, b, R, \& \theta$; c'est donc l'équation du cercle.

Lorsque les axes Ox et Oy sont rectangulaires, on a $\theta = 90°$, et l'équation du cercle prend la forme

$$(2) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

205. Lorsque le centre du cercle coïncide avec l'origine des coordonnées, les quantités a et b sont nulles; l'équation du cercle est alors

$$(3) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta = R^2,$$

dans le cas des axes obliques; et

$$(4) \qquad x^2+y^2-R^2=0$$

dans le cas des axes rectangulaires.

Lorsque le cercle est tangent à l'axe des y, on a

$$R = a \sin\theta;\ \text{ou}\ R = a,\ \text{si}\ \theta = 90°;$$

lorsqu'il est tangent à l'axe des x, on a

$$R = b \sin\theta;\ \text{ou}\ R = b,\ \text{si}\ \theta = 90°.$$

Nous voyons que l'équation d'un cercle est du second degré par rapport aux variables x et y; nous allons chercher maintenant les conditions pour que l'équation du second degré représente un cercle.

II.° Conditions pour que l'équation générale du second degré représente un cercle.

206. L'équation générale du second degré, par rapport aux variables x et y, est de la forme

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

D'un autre côté, l'équation (1) du N.° (204) devient, en développant

$$(2)\qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2(a + b\cos\theta)x - 2(b + a\cos\theta)y + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2 = 0.$$

Pour que l'équation (1) représente un cercle, il faudra qu'on puisse l'identifier avec l'équation (2) c. à. d. écrire que les coefficients des mêmes puissances des variables x et y sont proportionnels; on obtient ainsi

$$(3)\qquad \frac{1}{A} = \frac{\cos\theta}{B} = \frac{1}{C} = \frac{a + b\cos\theta}{-D} = \frac{b + a\cos\theta}{-E} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2}{F}.$$

Cette suite de rapports égaux nous donne les relations qui doivent exister entre A, B, C, D, E, F, pour que l'équation (1) représente un cercle.

Remarquons d'abord que les trois premiers rapports sont indépendants des indéterminées a, b, et R; on a donc les conditions nécessaires

$$(4)\qquad \begin{cases} A = C, \\ \dfrac{B}{A} = \cos\theta, \end{cases}$$

lorsque les axes de coordonnées sont obliques; ou

$$(5)\qquad A = C,\quad B = 0,$$

si les axes sont rectangulaires; c.à.d, que

1.° Les carrés des coefficients des variables doivent être égaux et de même signe;

2.° Le rapport du demi-coefficient du terme en xy au coefficient de l'un des carrés doit être égal au cosinus de l'angle des axes.

Ces deux conditions sont nécessaires; elles sont, de plus, suffisantes. Car, si elles sont remplies, il restera trois équations qui permettront de déterminer les quantités inconnues a, b, R. Ces trois équations sont

$$(6)\qquad \begin{cases} a + b\cos\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ a\cos\theta + b = -\dfrac{E}{A}, \\ a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = R^2 + \dfrac{F}{A}. \end{cases}$$

Les coordonnées a et b du centre du cercle sont réelles, puisqu'elles sont données par deux équations du 1.er degré; elles sont finies, car le dénominateur commun est $(1 - \cos^2\theta)$ ou $\sin^2\theta$, quantité différente de zéro. Quand au rayon R, comme il est donné par son carré, il pourra arriver que R soit réel, nul ou imaginaire.

Lorsque R sera réel, l'équation (1) représentera un cercle réel;

Lorsque R sera nul, l'équation (1) représentera un cercle réduit à son centre; on dit alors qu'on a un cercle infiniment petit, ou un cercle évanouissant.

Lorsque R sera imaginaire, nous dirons que l'équation (1) représente un cercle imaginaire; ce cercle ne peut pas se représenter Géométriquement; c'est une conception purement Analytique à laquelle nous

sommes conduits en remarquant que, dans ce cas, l'équation (1) satisfait à toutes les conditions nécessaires pour qu'elle représente un cercle.

207. Construction du cercle représenté par l'équation (1).

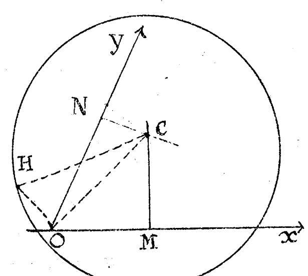
Les coordonnées du centre sont données par les deux équations

$$\begin{cases} a + b\cos\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ a\cos\theta + b = -\dfrac{E}{A}; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, le centre est déterminé par l'intersection des deux droites

$$\begin{cases} x + y\cos\theta = -\dfrac{D}{A}, \\ x\cos\theta + y = -\dfrac{E}{A}. \end{cases}$$

La 1ère de ces droites passe par le point $(y=0, x=-\frac{D}{A})$, (soit M ce point), et est perpendiculaire à l'axe des x, puisque son coefficient angulaire est $-\frac{1}{\cos\theta}$; la 2ème droite passe par le point $(x=0, y=-\frac{E}{A})$, (soit N ce point), et est perpendiculaire à l'axe des y, puisque son coefficient angulaire est $-\cos\theta$. Le point C, intersection des deux droites MC et NC, est donc le centre du cercle.



Construisons le rayon R. On a

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - \frac{F}{A};$$

or

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = \overline{OC}^2;$$

donc

$$R^2 = \overline{OC}^2 - \frac{F}{A}.$$

Supposons R réel; si $(-\frac{F}{A}) > 0$, R sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés sont OC et $\sqrt{-\frac{F}{A}}$; si $(-\frac{F}{A}) < 0$, R sera le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est OC et le second coté $\sqrt{\frac{F}{A}}$.

208. Nous conclurons de ce qui précède que toute équation du second degré représentant un cercle peut se ramener à la forme

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2ax - 2by + c = 0,$$

lorsque les axes de coordonnées sont obliques; ou, à la forme

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

lorsque les axes sont rectangulaires.

Dans ce dernier cas, il est facile de mettre en évidence le centre et le rayon; pour cela, complétons les carrés en x et en y, c. à. d. écrivons l'équation sous la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c;$$

nous voyons, sous cette forme, que a et b sont les coordonnées du centre, et que le rayon R est

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

---

§II Intersection d'une droite et d'un cercle. Tangente.

1° Intersection d'un cercle et d'une droite quelconque.

209. Nous supposerons le cercle rapporté à son centre et à deux axes rectangulaires, son équation sera alors

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

cherchons les points d'intersection de ce cercle avec la droite

$$(2) \qquad y = mx + n.$$

Les coordonnées des points d'intersection sont les valeurs de x et y qui vérifient à la fois ces deux équations. En éliminant y on trouve

$$(3) \qquad x^2(1+m^2) + 2mnx + n^2 - R^2 = 0;$$

cette équation donnera les x des points d'intersection. Or l'équation (3) est du second degré; et à une valeur de x, correspond d'après l'équation (2) une seule et unique valeur pour y; donc une droite rencontre un cercle en deux points.

La quantité dont dépend la réalité des racines de l'équation (3) est

$$m^2n^2 - (1+m^2)(n^2 - R^2),$$

$$\text{ou} \qquad R^2(1+m^2) - n^2.$$

1° Si $R^2(1+m^2) - n^2 > 0$, ou $\frac{n^2}{1+m^2} < R^2$,

c. à. d. la distance du centre à la droite est moindre que le rayon, il y a deux points d'intersection réels.

2° Si $R^2(1+m^2) - n^2 < 0$, ou $\frac{n^2}{1+m^2} > R^2$,

c. à. d. la distance du centre à la droite est plus grande que le rayon, les deux points d'intersection sont imaginaires. Remarquons de suite que ces deux points sont imaginaires conjugués car si les valeurs de x sont imaginaires, elles seront conjuguées; et, comme les valeurs de y sont données par une équation du 1er degré à coefficients réels, ces valeurs seront également conjuguées.

3° Si $R^2(1+m^2) = n^2$, ou $\frac{n^2}{1+m^2} = R^2$,

c. à. d. la distance du centre à la droite est égale au rayon, les deux points d'intersection se confondent; la droite est tangente.

210. Nous voyons, par ce qui précède, que pour trouver l'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée

$$(4) \qquad y - mx = 0,$$

on prendra l'équation d'une droite parallèle, savoir

$$y = mx + n,$$

n étant une indéterminée; on exprimera que les deux points d'intersection de cette droite avec le cercle, viennent coïncider, c. à. d. que l'équation (3) a deux racines égales, on a ainsi l'équation de condition

$$n^2 = R^2(1+m^2),$$

qui donnera la valeur cherchée de n.

L'équation d'une tangente au cercle (1), parallèle à la droite donnée (4), est donc

$$(5) \qquad y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}.$$

Nous voyons par là qu'on peut toujours mener deux tangentes parallèles à une droite donnée

On peut aussi prendre l'équation de la droite sous la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0;$$

la quantité p est indéterminée, mais α donné; c'est l'angle avec Ox de l'axe de la droite dont on connaît la direction. En identifiant l'équation précédente avec l'équation (5); ou bien, en cherchant l'intersection de la droite avec le cercle et en exprimant que les deux points coïncident, on trouve

$$p = \pm R;$$

l'équation de la tangente au cercle (1) sera donc

$$(6) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha \pm R = 0.$$

Nous concluons de ce dernier calcul que la tangente est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact. En effet, d'après l'équation (6), la distance de l'origine à la tangente est égale à R; le pied de cette perpendiculaire est donc sur la circonférence, c'est, par suite, le point de contact de la tangente.

II. Points circulaires à l'infini.

211. Cherchons les intersections d'un cercle avec la droite de l'infini.

Prenons l'équation d'un cercle rapporté à des axes quelconques

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-2ax-2by+c=o;$$

rendons cette équation homogène en y remplaçant les coordonnées x et y par les coordonnées homogènes $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; elle prend alors la forme

$$(1) \qquad x^2+2xy\cos\theta+y^2-2(ax+by)z+cz^2=o.$$

L'équation de la droite de l'infini est $z=o$ N.º (42); en faisant $z=o$ dans l'équation précédente, il vient

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=o.$$

Les points du cercle situés sur la droite de l'infini sont imaginaires, et sont donnés par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2+y^2+2xy\cos\theta=o, \\ z=o, \end{cases}$$

dans le cas des axes obliques; ou par

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2+y^2=o, \\ z=o, \end{cases}$$

dans le cas des axes rectangulaires.

La première des équations (2) représente un cercle évanouissant ou les deux droites imaginaires

$$(4) \qquad \left[y+x\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right)\right]\left[y+x\left(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta\right)\right]=o.$$

La première des équations (3) représente un cercle évanouissant ou les deux droites imaginaires

$$(5) \qquad (y+x\sqrt{-1})(y-x\sqrt{-1})=o.$$

Nous voyons que les équations qui déterminent les points du cercle (1) situés sur la droite de l'infini sont indépendants des quantités a, b, c.

Donc: tous les cercles, situés dans un plan, passent par deux points fixes, imaginaires et à l'infini; ces points ont été nommés **points circulaires à l'infini**.

Remarque. Lorsqu'une courbe du second degré

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)z+Fz^2=o,$$

passe par les points circulaires à l'infini

$$z=o, \; x^2+y^2=o,$$

cette courbe est un cercle.

En effet, d'après l'hypothèse admise, les deux équations

$$\begin{cases} x^2+y^2=o, \\ Ax^2+2Bxy+Cy^2=o, \end{cases}$$

doivent avoir les mêmes racines; ce qui exige que l'on ait

$$A=C, \quad B=o;$$

donc.........

III. Tangente à un cercle en un point donné.

212. La tangente en un point M_1 est la position limite d'une sécante passant par ce point lorsque le second point d'intersection M_2 se rapproche indéfiniment du premier.

Soit l'équation du cercle donné

$$(1) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=o,$$

et x_1, y_1; x_2, y_2, les coordonnées respectives du point fixe M_1 et du point mobile M_2.

L'équation de la sécante est

$$(2) \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

il faut trouver la limite du rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ lorsque le point M_2 vient se confondre avec le point M_1 en restant toujours sur la circonférence.

Or si l'on pose

$$y_2 = y_1 + k, \quad x_2 = x_1 + h,$$

on voit que le quotient

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ou \quad \frac{k}{h},$$

est le rapport de l'accroissement, k, de la fonction y à l'accroissement, h, de la variable x, pour la valeur particulière x_1 de x ; la limite est donc la dérivée de y par rapport à x, y étant une fonction de x définie par l'équation (1).

On aura, d'après la règle de différentiation des fonctions implicites

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{x + y\cos\theta + a}{x\cos\theta + y + b};$$

d'où

$$\lim. \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y'_{x_1} = -\frac{x_1 + y_1\cos\theta + a}{x_1\cos\theta + y_1 + b}.$$

L'équation de la tangente au cercle (1), au point (x_1, y_1), sera donc

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + y_1\cos\theta + a}{x_1\cos\theta + y_1 + b}(x - x_1);$$

avec la condition

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta + 2ax_1 + 2by_1 + c = 0.$$

Si l'on chasse le dénominateur de la 1ère de ces équations et qu'on tienne compte de l'équation de condition, on a enfin pour équation de la tangente au point (x_1, y_1)

$$(3) \qquad x(x_1 + y_1\cos\theta + a) + y(x_1\cos\theta + y_1 + b) + ax_1 + by_1 + c = 0,$$

avec la condition

$$(3\,bis) \qquad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta + 2ax_1 + 2by_1 + c = 0.$$

En désignant par $f(x, y, z)$ le premier membre de l'équation (1) rendue homogène, l'équation de la tangente pourra s'écrire

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0.$$

Lorsque l'équation du cercle est de la forme

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

l'équation de la tangente au point (x_1, y_1) est

$$(5) \qquad xx_1 + yy_1 - R^2 = 0,$$

avec la condition

$$(5\,bis) \qquad x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Nous constaterons encore que la tangente est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact. En effet, le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{x_1}{y_1}$; celui du rayon qui passe par le point de contact est $\frac{y_1}{x_1}$; leur produit est égal à -1; donc ces deux droites sont rectangulaires.

IV° Tangentes à un cercle par un point pris dans le plan du cercle.

214. Nous supposerons le cercle rapporté à son centre et à deux axes rectangulaires; son équation sera dès-lors

$$(1) \qquad x^2+y^2-R^2=0.$$

Soient x_0 et y_0 les coordonnées du point donné P; x_1, y_1, celles du point de contact d'une des tangentes. L'équation de la tangente en ce point est

$$x x_1 + y y_1 - R^2 = 0;$$

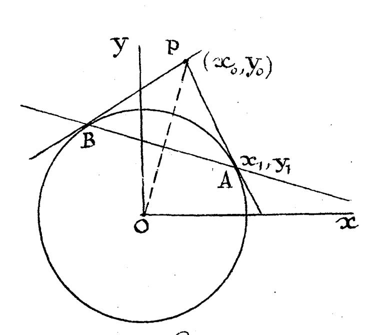
exprimons qu'elle passe par le point P, il vient

$$x_0 x_1 + y_0 y_1 - R^2 = 0;$$

on a, en outre, l'équation de condition

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Les coordonnées inconnues des points de contact seront données par ces deux dernières équations, lesquelles deviennent, en supprimant l'indice 1:



$$(2) \qquad \begin{cases} x x_0 + y y_0 - R^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine y entre ces deux équations, on aura l'équation

$$(3) \qquad x^2(x_0^2+y_0^2) - 2R^2 x_0 x + R^2(R^2-y_0^2) = 0,$$

qui déterminera les abscisses des points de contact.

Comme à une valeur de x correspond une seule valeur de y, il en résulte que **par un point, pris dans le plan d'un cercle, on peut toujours mener deux tangentes à ce cercle.**

La réalité des racines de l'équation (3) dépend du signe de l'expression

$$R^4 x_0^2 - R^2(R^2-y_0^2)(x_0^2+y_0^2),$$

ou

$$R^2 y_0^2 (x_0^2+y_0^2-R^2).$$

1° Si $x_0^2+y_0^2-R^2>0$, ou $\overline{OP}>R$,

c. à. d. si le point est extérieur au cercle, les deux tangentes sont réelles.

2° Si $x_0^2+y_0^2-R^2<0$, ou $\overline{OP}<R$,

c. à. d. si le point est intérieur au cercle, les tangentes sont imaginaires, ce sont deux droites imaginaires conjuguées; les deux points de contact sont deux points imaginaires conjugués.

3° Si $x_0^2+y_0^2-R^2=0$, ou $\overline{OP}=R$,

c. à. d. si le point est sur le cercle, les deux tangentes se confondent; on voit par là qu'**une tangente en un point du cercle est la superposition de deux tangentes issues de ce point.**

215. On peut regarder les équations (2), savoir

$$(2) \qquad \begin{matrix} x x_0 + y y_0 - R^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0, \end{matrix}$$

comme représentant deux lieux géométriques, et les points de contact cherchés se trouveront à l'intersection de ces deux courbes. La seconde de ces équations est celle du cercle lui-même; la première représente une droite, cette droite est donc la **corde des contacts**. Nous voyons que la corde des contacts est toujours réelle, quelle que soit la position du point P; cela tient à ce que les deux points de contact, lorsqu'ils sont imaginaires, sont imaginaires conjugués.

Au système des équations (2) on peut substituer le système équivalent

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2+y^2-x x_0 - y y_0 = 0, \\ x^2+y^2-R^2=0, \end{cases}$$

si l'on regarde x et y comme des inconnues ; la 1ère a été obtenue en retranchant les équations (2) membre à membre. Les points de contact seront encore à l'intersection des deux courbes représentées par ces équations ; la 2ème est celle du cercle donné ; la 1ère est celle d'un cercle décrit sur OP comme diamètre.

V.° Équation des tangentes menées par un point donné.

216. Supposons le cercle rapporté à son centre et à deux axes rectangulaires ;

$$(1) \qquad x^2+y^2-R^2=0 ;$$

et soient α, β, les coordonnées du point donné.

Prenons l'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée, savoir N.° (210)

$$y=mx\pm R\sqrt{1+m^2} ;$$

et exprimons que cette droite passe par le point (α,β), ce qui donne

$$\beta=m\alpha\pm R\sqrt{1+m^2} .$$

Cette équation, rendue rationnelle et ordonnée par rapport à m, devient

$$(2) \qquad m^2(\alpha^2-R^2)-2\alpha\beta m+\beta^2-R^2=0 ;$$

cette équation donne les coefficients angulaires des deux tangentes menées au cercle (1) par le point (α,β).

Or, si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces tangentes, on a

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha} ;$$

cette valeur du coefficient angulaire doit vérifier l'équation (2) ; on trouve, après cette substitution :

$$(3) \qquad (y-\beta)^2(\alpha^2-R^2)-2\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta)+(x-\alpha)^2(\beta^2-R^2)=0.$$

Nous avons ainsi une relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes ; c'est l'équation des tangentes menées au cercle (1) par le point (α,β).

L'équation (3) développée, devient

$$x^2(\beta^2-R^2)+y^2(\alpha^2-R^2)-\alpha^2R^2-\beta^2R^2-\{2\alpha\beta xy-2\beta R^2y-2\alpha R^2x\}=0 ;$$

or cette équation peut encore s'écrire

$$x^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)+y^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)-R^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+R^4+2\alpha\beta xy-2\alpha R^2x-2\beta R^2y ;$$

on constate alors aisément que l'équation (3) peut se ramener à la forme

$$(3\,bis) \qquad (x^2+y^2-R^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)-(\alpha x+\beta y-R^2)^2=0.$$

217. Si le point (α,β) est sur le cercle, on a $\alpha^2+\beta^2-R^2=0$, et l'équation (3 bis) donne

$$(\alpha x+By-R^2)^2=0 ;$$

c. à d. que la tangente en un point d'un cercle est la superposition de deux tangentes issues de ce point.

Si le point (α,β) est le centre du cercle, on a $\alpha=0, \beta=0$; l'équation quadratique des tangentes devient alors

$$x^2+y^2=0 ;$$

ce sont les deux droites qui déterminent les points circulaires à l'infini N.° (211) ; le centre est donc l'intersection de deux tangentes dont les coefficients angulaires sont $\pm\sqrt{-1}$; la corde de contact est la droite de l'infini ; les points de contact sont les points circulaires à l'infini. Nous verrons plus tard que ces droites sont les asymptotes du cercle.

VI° Puissance d'un point par rapport au cercle.

218. Prenons l'équation générale du cercle

$$(1) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=0;$$

si x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point P du plan et qu'on substitue leurs valeurs dans le 1er membre de l'équation du cercle, l'expression

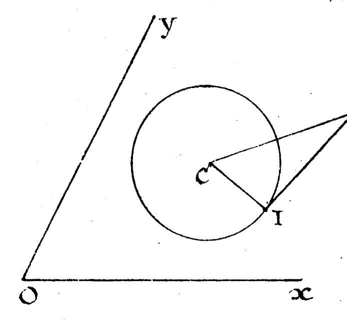
$$(2) \qquad x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta+2ax_0+2by_0+c$$

est dite la puissance du point (x_0, y_0) par rapport au cercle.

Nous allons démontrer que

La puissance d'un point par rapport à un cercle est égale au carré de la tangente menée du point à ce cercle;

ou autrement: Le carré de la tangente menée d'un point à un cercle est égal au premier membre de l'équation du cercle dans lequel on remplace les coordonnées variables par les coordonnées du point, pourvu qu'on ait réduit à l'unité les coefficients des carrés des variables.



En effet, α et β étant les coordonnées du centre du cercle et R son rayon, le premier membre de l'équation (1) peut N° (206) se mettre sous la forme identique

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta-R^2;$$

on aura donc, en remplaçant x, y, par x_0, y_0:

$$x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta+2ax_0+2by_0+c=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+2(x_0-\alpha)(y_0-\beta)\cos\theta-R^2;$$

Or, I étant le point de contact de la tangente menée du point P, on a:

$$\overline{CP}^2=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+2(x_0-\alpha)(y_0-\beta)\cos\theta,$$
$$\overline{PI}^2=\overline{CP}^2-R^2;$$

donc

$$(2) \qquad \overline{PI}^2=x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta+2ax_0+2by_0+c;$$

C. Q. F. D.

219. Cette proposition nous permet de résoudre immédiatement le problème suivant:

Trouver le lieu des points dont le rapport des distances à deux cercles est constant.

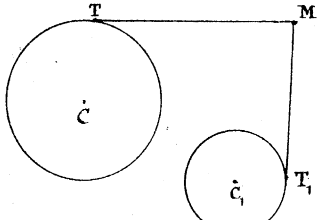
Nous entendons ici par distance d'un point à un cercle la longueur de la tangente menée de ce point au cercle.

Soient les équations des deux cercles

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=0,$$
$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+2a_1x+2b_1y+c_1=0;$$

et soient x et y les coordonnées d'un point M du lieu, tel que l'on ait

$$\overline{MT}^2=k^2.\overline{MT_1}^2.$$



D'après le théorème précédent, cette égalité donnera lieu à la relation suivante

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=k^2(x^2+y^2+2xy\cos\theta+2a_1x+2b_1y+c_1);$$

c'est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu, c'est donc l'équation du lieu.

On peut mettre cette équation sous la forme

$$(3) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2\frac{a-a_1k^2}{1-k^2}x+2\frac{b-b_1k^2}{1-k^2}y+\frac{c-c_1k^2}{1-k^2}=0;$$

on voit que le lieu est un cercle.

VII. Rapport dans lequel un cercle divise un segment donné.

220. Nous prendrons l'équation du cercle sous la forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ les extrémités du segment; les coordonnées x et y d'un point, divisant ce segment dans un rapport $\frac{m_2}{m_1}$, seront N.° (52) et (53)

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \\[2mm] y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \end{cases}$$

où

$$(2\,bis) \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1 M}{M M_2}.$$

Si le point M est un point du cercle, les valeurs (2) devront vérifier l'équation (1) de ce cercle, ce qui donne

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2)^2 + (m_1 y_1 + m_2 y_2)^2 - R^2 (m_1 + m_2)^2 = 0;$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$(3) \quad m_1^2 (x_1^2 + y_1^2 - R^2) + 2\, m_1 m_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 - R^2) + m_2^2 (x_2^2 + y_2^2 - R^2) = 0.$$

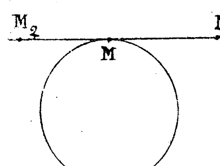
Cette équation détermine les valeurs des rapports

$$\frac{m_2}{m_1} \quad \text{ou} \quad \frac{M_1 M}{M M_2}$$

dans lesquels le cercle (1) divise le segment $M_1 M_2$.

221. L'équation (3) donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

1.° Lorsque la droite $M_1 M_2$ est tangente au cercle, les deux rapports deviennent égaux, puisque les deux points M et M' se confondent; par conséquent l'équation (3) doit avoir deux racines égales. On a alors



$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 - R^2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 - R^2)(x_2^2 + y_2^2 - R^2) = 0.$$

Or si nous regardons x_2 et y_2 comme variables, et x_1 et y_1 comme fixes, l'équation

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 - R^2)(x_1^2 + y_1^2 - R^2) - (x x_1 + y y_1 - R^2)^2 = 0$$

donnera une relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque des tangentes menées au cercle par le point M_1; ce sera l'équation des tangentes menées par le point (x_1, y_1).

Nous retrouvons ainsi l'équation (3 bis) du N.° (216).

2.° Supposons que les deux racines de l'équation (3) soient égales et de signes contraires; on aura

$$\frac{M_1 M}{M M_2} + \frac{M_1 M'}{M' M_2} = 0,$$

ou

$$\frac{M M_1}{M' M_1} : \frac{M M_2}{M' M_2} = -1;$$

c. à d. que les deux couples M_1, M_2; M, M', forment un système harmonique.

On a alors la relation

$$x_2 x_1 + y_2 y_1 - R^2 = 0.$$

ou, en regardant x_2 et y_2 comme variables,

$$(5) \qquad x x_1 + y y_1 - R^2 = 0.$$

Cette équation donne le lieu des points M_2 conjugués du point fixe M_1 par rapport aux deux points d'intersection, avec le cercle, d'une sécante quelconque passant par le point M_1.

Nous reconnaissons l'équation de la corde des contacts des tangentes menées au cercle par le point $M_1(x_1, y_1)$.

---

§III Intersections de cercles.

1° Intersection de deux cercles.

222. Soient les équations des deux cercles

$$(1)\qquad \begin{cases} C = x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\theta + 2\,ax + 2by + c = 0, \\ C_1 = x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\theta + 2\,a_1x + 2b_1y + c_1 = 0; \end{cases}$$

les coordonnées des points d'intersection sont les valeurs de x et y vérifiant à la fois ces deux équations ou des combinaisons de ces deux équations.

Rendons homogènes les équations (1) ce qui donne

$$(2)\qquad \begin{aligned} C &= x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2\,axz + 2\,byz + cz^2 = 0, \\ C_1 &= x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2\,a_1xz + 2\,b_1yz + c_1z^2 = 0; \end{aligned}$$

retranchant membre à membre, il vient

$$z\,[\,2(a-a_1)x + 2(b-b_1)y + (c-c_1)z\,] = 0.$$

Les points d'intersection sont donc sur l'un des cercles donnés, et sur l'une ou l'autre des deux droites

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2\,(a-a_1)x + 2\,(b-b_1)y + (c-c_1)z = 0. \end{cases}$$

La première de ces droites est la droite de l'infini, elle donne les points circulaires à l'infini; ces points appartiennent, en effet, à toutes les circonférences.

La deuxième droite détermine les points situés, en général, à distance finie; on l'appelle **axe radical** des deux cercles. Cette droite est toujours réelle, même quand les cercles ne se coupent pas; c'est qu'alors les points d'intersection, à distance finie, sont imaginaires conjugués; et on sait que la droite passant par deux points imaginaires conjugués est réelle.

L'équation de l'axe radical des deux cercles (1) est donc

$$(3)\qquad A = C - C_1 = 2\,(a-a_1)x + 2(b-b_1)y + c - c_1 = 0.$$

223. **Discussion de l'intersection de deux cercles.**

Rapportons les deux cercles à deux axes rectangulaires, en prenant le centre de l'un pour origine, et la ligne des centres, pour axe des x, les équations des deux cercles seront alors

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ (x-d)^2 + y^2 - r^2 = 0. \end{cases}$$

Retranchons ces équations membre à membre, on trouve

$$(5)\qquad x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d};$$

c'est l'équation de l'axe radical; on conclut de là que

l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la ligne des centres.

Substituant la valeur (5) de x dans la 1ère des équations (4), on a

$$y^2 = \frac{4\,d^2R^2 - (d^2+R^2-r^2)^2}{4\,d^2},$$

valeur qui pourra se mettre sous la forme suivante

$$(6)\qquad y^2 = \frac{(d+R+r)(d+R-r)(d+r-R)(r+R-d)}{4\,d^2}.$$

A une valeur réelle ou imaginaire de y correspond, d'après l'équation (5), une valeur réelle ou imaginaire de x; la question est donc ramenée à la discussion de l'équation (6).

Or on peut toujours choisir les axes de manière à avoir

$$d > 0 \quad \text{et } R > r;$$

alors le premier et le deuxième facteur de y^2 sont positifs, et il suffit de nous occuper du signe du produit

$$(d + r - R)(r + R - d).$$

1° Pour que la valeur (6) de y soit réelle, il faut et il suffit que le produit précédent soit positif; ce qui aura lieu si l'on a à la fois

$$\begin{cases} r + d - R > 0, \\ r - d + R > 0; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r + d - R < 0, \\ r - d + R < 0. \end{cases}$$

La dernière hypothèse est inadmissible, car, en ajoutant les deux inégalités, on trouve $2r < 0$; ce qui ne peut avoir lieu. Donc, pour que les valeurs de y soient réelles, il faut et il suffit que

$$(7) \qquad \begin{cases} d < R + r, \\ d > R - r; \end{cases}$$

c. à. d. que la distance des centres doit être plus petite que la somme des rayons et plus ~~grande~~ que leur différence.

2° Les valeurs de y seront égales, et par suite nulles, si l'on a

$$(8) \qquad \begin{cases} d = R + r, \\ \text{ou} \quad d = R - r; \end{cases}$$

dans le 1er cas, les cercles sont tangents extérieurement; dans le second cas, ils sont tangents intérieurement.

3° Les valeurs de y seront imaginaires, lorsque les deux facteurs seront de signes contraires; ce qui aura lieu si

$$(9) \qquad \begin{cases} d > R + r, \\ \text{ou} \quad d < R - r; \end{cases}$$

dans le 1er cas, les cercles sont extérieurs; dans le second, ils sont intérieurs.

224. Examinons le cas où les deux cercles sont concentriques.

Les équations homogènes de ces deux cercles pourront s'écrire

$$(10) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - R_1^2 z^2 = 0. \end{cases}$$

Retranchant membre à membre ces deux équations, il vient

$$(R^2 - R_1^2) z^2 = 0, \text{ ou } z^2 = 0;$$

ce sont les équations des droites passant par les points communs aux deux cercles. On voit que les points d'intersection, qui dans le cas général sont à distance finie, vont alors se confondre avec les points circulaires à l'infini. Ce que l'on reconnait encore en remarquant que l'axe radical (3) N.° (222)

$$2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + (c - c_1)z = 0,$$

va se confondre avec la droite de l'infini lorsque $(a - a_1)$ et $(b - b_1)$ deviennent nuls.

Les deux circonférences (10) sont donc tangentes l'une à l'autre en deux points, ou doublement tangentes; les points de contact sont les points circulaires à l'infini; la corde des contacts est la droite de l'infini; les tangentes (ou asymptotes du cercle) ont pour équation

$$(11) \qquad x^2 + y^2 = 0;$$

on l'obtient en faisant $z = 0$ dans l'équation d'un des cercles. C'est aussi l'équation d'un cercle évanouissant tangent aux deux cercles.

II.° Propriétés des axes radicaux.

225. Nous avons vu N.° (222), que l'équation de l'axe radical des deux cercles

$$(1)\quad \begin{cases} C = x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=0, \\ C_1 = x^2+y^2+2xy\cos\theta+2a_1x+2b_1y+c_1=0, \end{cases}$$

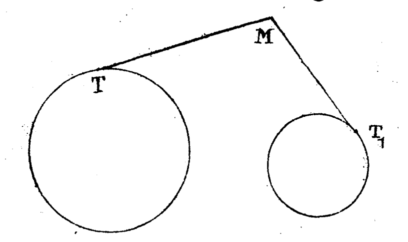
est

$$C-C_1 = 2(a-a_1)x+2(b-b_1)y+c-c_1=0.$$

L'axe radical est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux cercles des tangentes égales.

Cherchons, en effet, le lieu des points M défini par la relation

$$MT = MT_1.$$



On a N.° (218)

$$\overline{MT}^2 = C = x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c;$$
$$\overline{MT_1}^2 = C_1 = x^2+y^2+2xy\cos\theta+2a_1x+2b_1y+c_1;$$

d'où l'on conclut

$$C = C_1, \text{ ou } C-C_1=0;$$

c'est précisément l'équation de l'axe radical.

226. Les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point.

Soient, en adoptant les notations précédentes

$$(3)\qquad C_1=0,\quad C_2=0,\quad C_3=0$$

les équations des trois cercles; les équations des axes radicaux seront

pour le 2.ème et 3.ème cercles: $A_1 = C_2 - C_3$;
pour le 3.ème et 1.er cercles: $A_2 = C_3 - C_1$;
pour le 1.er et 2.ème cercles: $A_3 = C_1 - C_2$.

Or, ces trois droites sont concourantes; car, en ajoutant leurs trois équations, on a

$$A_1+A_2+A_3=0,$$

c. à. d. que l'équation d'une des droites est une conséquence des deux autres; ou, les coordonnées du point commun aux droites A_2 et A_3, par exemple, vérifient l'équation de la droite A_1.

227. Lorsque plusieurs cercles passent par deux points fixes, leurs cordes d'intersection avec un cercle donné passent par un point fixe.

Si les équations de deux des cercles passant par les deux points fixes sont

$$C_1=0,\quad C_2=0,$$

l'équation d'un cercle quelconque passant par les deux mêmes points sera

$$C_1+\lambda C_2=0,$$

ou, en réduisant à l'unité les coefficients des carrés:

$$(4)\qquad C'=\frac{C_1+\lambda C_2}{1+\lambda}=0;$$

car ce cercle passe évidemment par les deux points communs aux cercles C_1 et C_2, c. à. d. par les deux points donnés.

Soit maintenant un cercle fixe C, dont l'équation est

$$(5)\qquad C=0;$$

l'axe radical des deux cercles (4) et (5) aura pour équation

$$C'-C=0,\text{ ou }\frac{C_1+\lambda C_2}{1+\lambda}-C=0;$$

ou enfin

$$(6) \qquad (C_1 - C) + \lambda\,(C_2 - C) = 0 ;$$

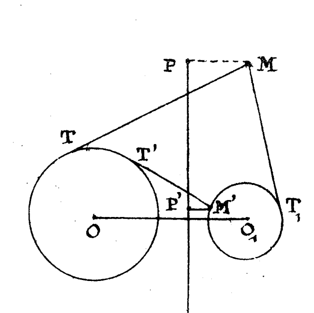
cette droite passe évidemment, quel que soit λ, par le point fixe

$$C_1 - C = 0, \quad C_2 - C = 0 ;$$

intersection des axes radicaux des cercles C_1 et C, C_2 et C.

228. La tangente, menée à un cercle par un point pris sur la circonférence d'un autre cercle, est moyenne proportionnelle entre la distance des centres et le double de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical des deux cercles.

Les deux cercles étant rapportés à deux axes rectangulaires, leurs équations pourront s'écrire



$$(1) \quad \begin{cases} C = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \\ C_1 = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0 ; \end{cases}$$

et l'axe radical des deux cercles sera

$$A = C - C_1 = 2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + (c_1 - c) = 0.$$

La distance MP d'un point quelconque M du plan à l'axe radical A est

$$MP = \frac{C - C_1}{2\sqrt{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2}} ;$$

or, si O et O_1 sont les centres des deux cercles, et si MT et MT_1 sont les tangentes menées du point M aux deux cercles, on a

$$OO_1 = \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2} \; ; \; \overline{MT}^2 = C, \; \overline{MT_1}^2 = C_1 ;$$

la relation précédente donne donc

$$\overline{MT}^2 - \overline{MT_1}^2 = 2\,\overline{MP}.\overline{OO_1} \; ;$$

en prenant la différence toujours positive.

En supposant le point M sur le cercle C_1, on a, comme cas particulier, la proposition énoncée :

$$\overline{M'T'}^2 = 2\,\overline{M'P'}.\,\overline{OO_1}.$$

III.° Tangentes communes à deux cercles.

229. Soient deux cercles rapportés à deux axes rectangulaires, ayant pour équations

$$(1) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \qquad (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0.$$

Une tangente quelconque au cercle (1), c. à d. une droite dont la distance au centre (a, b) est égale à R, aura pour équation

$$(3) \qquad (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha - R = 0$$

α est une indéterminée. Exprimons que cette droite est tangente à la seconde circonférence, c. à d. que la distance du centre (a_1, b_1) à cette droite est égale à R_1 ; on a ainsi l'équation de condition

$$(4) \qquad (a_1 - a)\cos\alpha + (b_1 - b)\sin\alpha - R = \pm R_1.$$

Tirant de cette équation la valeur de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis substituant les valeurs obtenues dans l'équation (3), on obtiendra les équations des tangentes communes.

Avant d'effectuer cette substitution, nous combinerons les équations (3) & (4), en retranchant de la 1.ère la moitié de la seconde, on forme ainsi l'équation plus symétrique

$$(5) \qquad \left(x - \frac{a + a_1}{2}\right)\cos\alpha + \left(y - \frac{b + b_1}{2}\right)\sin\alpha = \frac{R \mp R_1}{2}.$$

Or en représentant par d^2 la distance des centres, c. à d. en posant

$$(6) \qquad d^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2,$$

on déduit de la relation (4)

$$\begin{cases} d^2 \sin\alpha = (b_1-b)(R\pm R_1) + (a_1-a)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}, \\ d^2 \cos\alpha = (a_1-a)(R\pm R_1) - (b_1-b)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5), on trouve définitivement pour les équations des tangentes communes.

$$(7)\quad \left.\begin{aligned} &\left(x-\frac{a_1+a}{2}\right)\left[(a_1-a)(R\pm R_1)-(b_1-b)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}\right] \\ +&\left(y-\frac{b_1+b}{2}\right)\left[(b_1-b)(R\pm R_1)+(a_1-a)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}\right] \end{aligned}\right\} = d^2\,\frac{R\mp R_1}{2};$$

$$(7\ bis)\quad \left.\begin{aligned} &\left(x-\frac{a_1+a}{2}\right)\left[(a_1-a)(R\pm R_1)+(b_1-b)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}\right] \\ +&\left(y-\frac{b_1+b}{2}\right)\left[(b_1-b)(R\pm R_1)-(a_1-a)\sqrt{d^2-(R\pm R_1)^2}\right] \end{aligned}\right\} = d^2\,\frac{R\mp R_1}{2};$$

les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble. On a donc quatre tangentes communes. La réalité des tangentes dépend du signe de la quantité $[d^2-(R\pm R_1)^2]$.

230. L'équation de la ligne des centres est

$$(8)\qquad \frac{x-a}{a_1-a} = \frac{y-b}{b_1-b};$$

l'intersection de cette droite avec les tangentes communes donnera les centres de similitude des deux cercles. Mais, si l'on veut déterminer ces points, il sera beaucoup plus simple de chercher directement l'intersection des droites (5) et (8), en ayant égard à la relation (4); on trouve ainsi, très facilement, que les coordonnées des centres de similitude des deux cercles sont

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1 R \pm a R_1}{R\pm R_1}, \\ y = \dfrac{b_1 R \pm b R_1}{R\pm R_1}; \end{cases}$$

valeurs qu'on peut écrire de suite, en supposant connu que les centres de similitude divisent le segment formé par les centres dans le rapport des rayons, et en faisant usage alors des formules du N.° (52).

§IV Polaire d'un point par rapport à un cercle.

1.° Définition et équation de la polaire.

231. Par un point fixe, P, pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante quelconque qui rencontre le cercle aux points A et B; sur cette sécante, on prend un point M tel que

$$(1)\qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB};$$

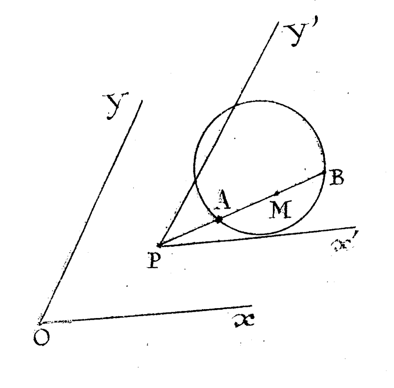
le lieu des points M est une droite, qu'on appelle la polaire du point P.

Il est important de rappeler N.° (83) que la relation (1) peut encore se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \frac{MA}{PA} + \frac{MB}{PB} = 0.$$

232. Soit l'équation du cercle

$$(1)\quad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=0;$$



transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point P, en posant

$$(2)\quad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \end{cases}$$

si x_0 et y_0 sont les coordonnées du point P. L'équation du cercle devient alors

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta + 2x'(x_0 + y_0\cos\theta + a) + 2y'(x_0\cos\theta + y_0 + b) \\ &+ \underbrace{x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta + 2ax_0 + 2by_0 + c}_{C_0} \end{aligned}\right\} = 0;$$

nous désignerons par C_0 le terme indépendant.

En appelant ρ la distance de la nouvelle origine P à un point quelconque (x', y') de la sécante PM, on peut poser

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \lambda\rho, \\ y' = \mu\rho, \end{cases}$$

λ et μ étant des constantes N.° (84). Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2, les longueurs des segments PM, PA, PB, la relation (1) deviendra

$$(5)\qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Or les quantités ρ_1 et ρ_2 s'obtiendront en remplaçant x' et y' par les valeurs (4) dans l'équation (3); on aura ainsi

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \frac{2}{\rho}\left\{\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)\right\} + \frac{C_0}{\rho^2} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\frac{2}{C_0}\left\{\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)\right\}.$$

La relation (5) devient alors

$$(6)\qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{C_0}\left\{\lambda(x_0 + y_0\cos\theta + a) + \mu(x_0\cos\theta + y_0 + b)\right\} = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque du lieu vérifieront les équations (4) et (6), et toute combinaison de ces équations; elles vérifieront, en particulier, la combinaison obtenue en éliminant λ et μ, ce qui conduit à

$$(7)\qquad x'(x_0 + y_0\cos\theta + a) + y'(x_0\cos\theta + y_0 + b) + C_0 = 0.$$

Cette équation, étant une relation entre des constantes et les coordonnées x' et y' d'un point quelconque du lieu, sera l'équation du lieu du point M; on voit que ce lieu est une droite.

Pour avoir l'équation de cette droite par rapport aux axes primitifs, il faut remplacer x' par $(x - x_0)$ et y' par $(y - y_0)$; on trouvera, toutes réductions faites:

$$(8)\qquad x(x_0 + y_0\cos\theta + a) + y(x_0\cos\theta + y_0 + b) + ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Remarquons que si l'on rend homogène le premier membre de l'équation (1), de sorte que

$$(9)\qquad C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2axz + 2byz + cz^2 = 0;$$

l'équation de la polaire du point (x_0, y_0) pourra s'écrire

$$(10)\qquad x\,C'_{x_0} + y\,C'_{y_0} + z\,C'_{z_0} = 0.$$

Remarque I. On voit que la polaire est la corde des contacts des tangentes menées au cercle du point (x_0, y_0) N.° (213)

Remarque II. Lorsque le point (x_0, y_0) est sur le cercle, la polaire coïncide avec la tangente en ce point N.° (212).

233. On peut aussi trouver l'équation de la polaire en prenant pour point de départ la relation (2) N.° (231), savoir

$$(11)\qquad \frac{MA}{AP} + \frac{MB}{BP} = 0.$$

Désignons par : x_0, y_0, les coordonnées du point P ; x et y, celles du point M, et $\frac{m_2}{m_1}$ un quelconque des rapports $\frac{MA}{AP}$ dans lesquels le cercle

$$(12) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2ax+2by+c=0$$

divise le segment PM. Les coordonnées du point A seront

$$\frac{m_1 x+m_2 x_0}{m_1+m_2}, \quad \frac{m_1 y+m_2 y_0}{m_1+m_2};$$

elles doivent vérifier l'équation (12) du cercle, on aura alors

$$(13) \qquad \left.\begin{array}{l}(m_1 x+m_2 x_0)^2+(m_1 y+m_2 y_0)^2+2(m_1 x+m_2 x_0)(m_1 y+m_2 y_0)\cos\theta \\ +2a(m_1+m_2)(m_1 x+m_2 x_0)+2b(m_1+m_2)(m_1 y+m_2 y_0)+c(m_1+m_2)^2\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation déterminera les valeurs de $\frac{m_2}{m_1}$; les deux racines donneront en grandeur et signe les rapports $\frac{MA}{AP}$, $\frac{MB}{BP}$; or, d'après la relation (11) la somme de ces valeurs doit être nulle. On obtiendra donc l'équation de la polaire du point (x_0, y_0) en égalant à zéro le coefficient de $m_1 m_2$ dans l'équation (13) ; on trouve ainsi

$$(14) \qquad x(x_0+y_0\cos\theta+a)+y(x_0\cos\theta+y_0+b)+ax_0+by_0+c=0;$$

équation identique avec l'équation (8).

234\. Lorsque l'équation du cercle est

$$(15) \qquad x^2+y^2-R^2=0,$$

l'équation de la polaire d'un point (x_0, y_0) devient

$$(16) \qquad xx_0+yy_0-R^2=0;$$

on reconnait l'équation de la corde des contacts des tangentes menées du point (x_0, y_0).

II° Propriétés et construction de la polaire.

235\. La polaire d'un point est perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point ; et le produit des distances du centre au pôle et à sa polaire est égal au carré du rayon.

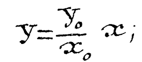
Prenons, en effet, l'équation du cercle sous la forme

$$(1) \qquad x^2+y^2-R^2=0;$$

la polaire d'un point (x_0, y_0) est

$$(2) \qquad xx_0+yy_0-R^2=0.$$

La perpendiculaire abaissée du centre O sur la polaire est



$$y=\frac{y_0}{x_0}x;$$

elle passe évidemment par le point P.

La distance du point O à la polaire est

$$OI=\frac{R^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}; \quad \text{or } OP=\sqrt{x_0^2+y_0^2};$$

donc

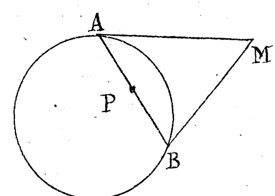
$$(3) \qquad \overline{OI}.\overline{OP}=R^2$$

Nous concluons de là que la polaire coupe le cercle, si le point P est extérieur ; elle ne le coupe pas, si le point P est intérieur.

On voit encore, en rendant homogène l'équation (2), que la polaire du centre est la droite de l'infini.

236\. Si par un point fixe P, on mène une sécante quelconque ; et les tangentes au cercle aux points A et B où la sécante coupe le cercle ; le lieu des intersections de ces tangentes est la polaire du point P.

Soient, en effet, x_0, y_0 les coordonnées du point P ; X, Y, les coordonnées du point M, intersection des deux tangentes. La sécante APB est la polaire du point M, son équation sera donc



$$xX + yY - R^2 = 0;$$

or, cette sécante passant par le point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point; on aura alors

$$x_0 X + y_0 Y - R^2 = 0.$$

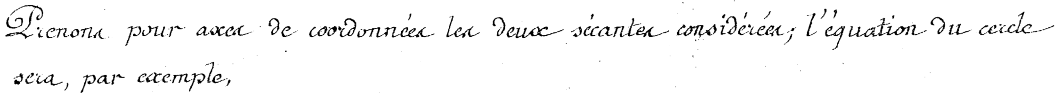
Nous avons ainsi une relation entre les coordonnées du point quelconque M, c'est donc l'équation du lieu de ces points. Or, on reconnait, dans cette équation, celle de la polaire du point (x_0, y_0); donc......

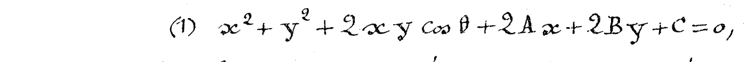
Remarque. Lorsque le point P est extérieur au cercle, sa polaire est la corde des contacts des tangentes menées de ce point; il est alors facile de construire cette polaire.

Lorsque le point P est intérieur, la construction précédente n'est plus applicable; mais la proposition qu'on vient de démontrer permet alors de résoudre la question.

237. Si par un point fixe P, on mène des sécantes quelconques, et qu'on joigne diagonalement les points d'intersection de ces sécantes avec le cercle; ces diagonales se coupent sur la polaire du point P.

Soient les deux sécantes PAA_1, PBB_1; soient M et N les intersections respectives des cordes AB et A_1B_1; AB_1 et A_1B; la droite MN est la polaire du point P.


Prenons pour axes de coordonnées les deux sécantes considérées; l'équation du cercle sera, par exemple,


$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2Ax + 2By + C = 0,$$

équation dans laquelle θ, A, B, C, représentent des quantités variables avec la position des axes Ox et Oy, c. à d. des sécantes.

Désignons par α, α_1; β, β_1, les distances PA, PA_1; PB, PB_1; les équations des différentes droites AB, A_1B_1; AB_1, A_1B seront alors

$$(2)\quad \begin{cases} AB: \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0, & \text{droites déterminant le point M;} \\ A_1B_1: \dfrac{x}{\alpha_1} + \dfrac{y}{\beta_1} - 1 = 0; & \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} AB_1: \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta_1} - 1 = 0, & \text{droites déterminant le point N.} \\ A_1B: \dfrac{x}{\alpha_1} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0; & \end{cases}$$

En ajoutant les équations (2) on a

$$(4) \qquad x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1}\right) + y\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_1}\right) - 2 = 0,$$

c'est l'équation d'une droite passant par le point M; en ajoutant les équations (3), on a

$$(4\ bis) \qquad x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1}\right) + y\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_1}\right) - 2 = 0,$$

c'est l'équation d'une droite passant par le point N. Les équations (4) et (4 bis) étant identiques, l'une ou l'autre de ces équations représente la droite MN.

Mais α et α_1 sont les abscisses des points d'intersection de la droite Px avec la circonférence (1), ou les racines de l'équation obtenue en faisant $y = 0$ dans l'équation de cette circonférence, savoir

$$x^2 + 2Ax + C = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{C}{x^2} + 2A.\frac{1}{x} + 1 = 0;$$

on en conclut

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} = -\frac{2A}{C}.$$

De même β et β_1 sont les racines de l'équation obtenue en faisant $y=0$ dans l'équation de la circonférence (1), savoir

$$y^2+2By+C=0, \quad \text{ou} \quad C.\frac{1}{y^2}+2B.\frac{1}{y}+1=0;$$

on en conclut

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=-\frac{2B}{C}.$$

Remplaçons $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_1}\right)$, $\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}\right)$ par ces valeurs dans l'équation (4), on trouvera pour l'équation de la droite MN

$$(5) \qquad Ax+By+C=0.$$

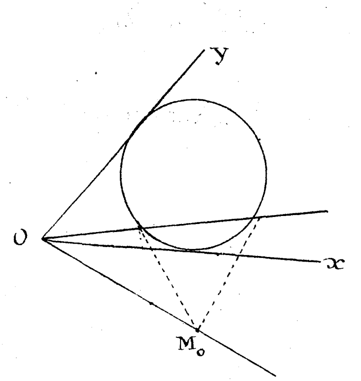
Or c'est l'équation, par rapport aux axes choisis, de la polaire de l'origine; cette droite est fixe, quels que soient les axes; par suite, la droite MN reste fixe, quelles que soient les sécantes, et elle est la polaire du point P.

238. **Si, par le point de concours de deux tangentes à un cercle, on mène deux droites conjuguées harmoniques par rapport à ces deux tangentes, le pôle de l'une sera sur l'autre**

Ces deux droites sont appelées **droites conjuguées** par rapport au cercle.

Prenons les deux tangentes pour axes de coordonnées, l'équation du cercle sera

$$(1) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2a(x+y)+a^2=0.$$



La polaire d'un point (x_o, y_o) a pour équation N.° (232).

$$(2) \qquad x(x_o+y_o\cos\theta+a)+y(x_o\cos\theta+y_o+a)+ax_o+ay_o+a^2=0.$$

Soient deux droites conjuguées harmoniques N.° (175) par rapport aux axes Ox et Oy; leurs équations seront

$$(3) \qquad (D_o) \quad y-kx=0, \quad (D_1) \quad y+kx=0.$$

Le pôle de la droite D_o s'obtiendra en identifiant son équation avec l'équation (2), on a ainsi

$$\frac{x_o+y_o\cos\theta+a}{k}=\frac{x_o\cos\theta+y_o+a}{-1}=\frac{a^2+a(x_o+y_o)}{0}.$$

De là on déduit

$$a+x_o+y_o=0, \quad x_o+y_o\cos\theta+a+k(x_o\cos\theta+y_o+a)=0;$$

or, eu égard à la 1.ère relation, la seconde devient

$$y_o+kx_o=0;$$

c. à. d. que le pôle de la droite D_o se trouve sur la droite D_1.

III: Propriétés des cercles passant par deux points fixes.

239. Supposons une série de cercles ayant même axe radical, et passant par deux points fixes (réels ou imaginaires conjugués) situés sur cet axe; prenons pour axe des y la droite passant par les deux points fixes, pour origine le milieu (toujours réel) de la droite qui joint ces deux points; l'équation générale des cercles passant par les deux points fixes sera

$$(1) \qquad x^2+y^2-2\lambda x+c=0,$$

λ étant une indéterminée et c une constante fixe.

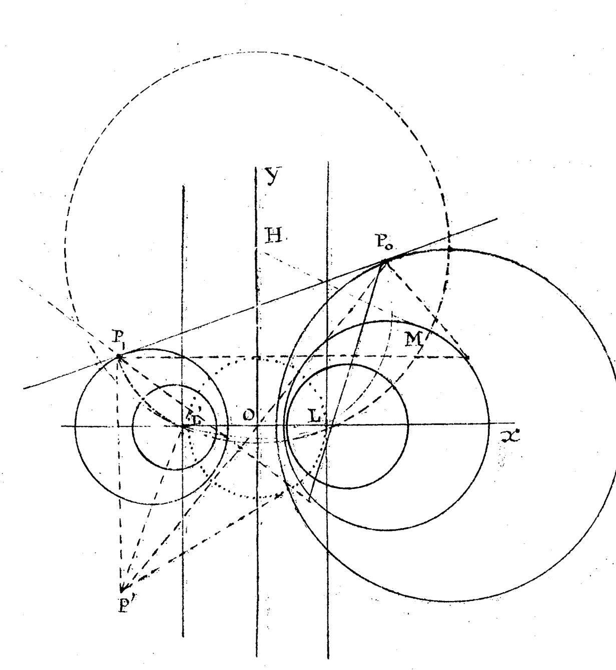
Soit

$$(2) \qquad c=\pm d^2;$$

si $c=+d^2$, les points d'intersections des circonférences (1) avec l'axe radical commun Oy sont imaginaires; ces points sont réels, si $c=-d^2$.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(3)\qquad (x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2-c.$$



Parmi les cercles satisfaisant à la question, il y a deux cercles évanouissants, lesquels correspondent à

$$\lambda^2=c;$$

les centres de ces deux cercles donnent deux points

$$(4)\qquad \lambda=\pm\sqrt{c}$$

situés sur Ox, également distant du point O. Ces points ont été appelés, par M. Poncelet, **points limites**.

Les deux points limites L et L' sont réels ou imaginaires suivant que c est égal à $+d^2$ ou $-d^2$, c. à. d. suivant que les cercles ne coupent pas ou coupent l'axe radical.

La puissance de l'origine O par rapport à tous les cercles (1) est constante et égale à c ou $\pm d^2$; donc la distance des points limites L et L' au point O est égale à la longueur constante des tangentes menées du point O aux cercles (1).

240. La puissance d'un point fixe H, pris sur l'axe radical, par rapport à tous les cercles de la série (1) est constante; et si OH $=h$, on a

$$\overline{HM}^2=h^2+c,$$

HM étant la tangente menée du point H à un quelconque de ces cercles; cette propriété est d'ailleurs une conséquence immédiate de celle de l'axe radical N° (225).

La circonférence décrite du point H, comme centre, avec le rayon HM, aura pour équation

$$(4)\qquad x^2+(y-h)^2=h^2+c.$$

Or le carré de la distance des centres des cercles (3) & (4) est égal à la somme des carrés des rayons, car

$$\lambda^2+h^2=(\lambda^2-c)+(h^2+c);$$

c. à. d. comme nous le verrons plus loin, que les cercles (3) et (4) se coupent orthogonalement.

On constate, en outre, que le cercle (4) passe par les points limites L et L', ou $y=0$, $x^2=c$. Donc:

Si d'un point quelconque de l'axe radical commun, on mène des tangentes à tous les cercles de la série (1), les points de contact seront sur un même cercle ayant pour centre le point choisi; ce cercle passe par les points limites L et L' et coupe orthogonalement tous les cercles de la série (1)

Nous pouvons, d'après cette propriété, construire facilement les cercles de la série (1), lorsqu'ils ne coupent pas l'axe radical commun, et qu'on a choisi arbitrairement un de ces cercles.

241. **Les polaires des points limites, par rapport aux cercles de la série, sont fixes.**

La polaire d'un point (x_0, y_0) par rapport au cercle (1) a pour équation

$$(5)\qquad x(x_0-\lambda)+yy_0-\lambda x_0+c=0.$$

La polaire du point L $(x_0=+\sqrt{c},\ y_0=0)$ sera

$$(6)\qquad x+\sqrt{c}=0;$$

et celle du point L' sera

$$(6\,bis)\qquad x-\sqrt{c}=0.$$

Or les équations (6) et (6 bis) sont indépendantes de λ; donc ces droites sont fixes.

Ainsi la polaire d'un point limite L, par rapport à tous les cercles de la série, est fixe; c'est une parallèle à l'axe radical passant par l'autre point limite L'.

Cette propriété donne encore une construction facile des cercles de la série (1), lorsqu'on se donne les points

limites.

Les polaires (6) et (6 bis) seront imaginaires, si les points limites sont imaginaires.

242. Si l'on se donne un point fixe P_0 dans le plan des cercles (1), les polaires du point P_0, par rapport à ces cercles, passeront par un point fixe P_1; et réciproquement, les polaires du point P_1 passeront par le point P_0.

La circonférence décrite sur la droite P_0P_1, comme diamètre passera par les points limites L et L'; c. à. d. que le segment P_0P_1 sera vu, d'un quelconque des points limites, sous un angle droit.

La droite P_0P_1 sera la tangente commune en P_0 et P_1 à deux des cercles de la série.

Si x_0 et y_0 sont les coordonnées du point P_0, la polaire de ce point par rapport aux cercles de la série (1), sera donnée par l'équation (5); or cette droite passe, quel que soit λ, par le point fixe

$$(7)\quad \begin{cases} x + x_0 = 0, \\ x x_0 + y y_0 + c = 0. \end{cases}$$

La 1ère équation représente une parallèle à l'axe radical et passant par le point symétrique du point P_0; la 2ème équation est la polaire, par rapport au cercle décrit sur L et L', du point $P'(-x_0, -y_0)$, symétrique de P_0 par rapport au point O.

Les coordonnées x_1, y_1 du point P_1 seront donc données par les équations

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 + x_0 = 0, \\ x_1 x_0 + y_1 y_0 + c = 0; \end{cases}$$

la symétrie de ces équations nous montre que les points P_0 et P_1 jouissent de propriétés réciproques.

La circonférence décrite sur P_0P_1 comme diamètre a pour équation

$$\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0 + y_1}{2}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{x_1 + x_0}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{y_1 + y_0}{2}\right)^2;$$

ou, en tenant compte des relations (8) :

$$(9)\qquad x^2 + \left(y - \frac{x_0^2 + y_0^2 - c}{2y_0}\right)^2 = x_0^2 + \left(\frac{x_0^2 - y_0^2 - c}{4y_0^2}\right)^2;$$

or cette circonférence passe par les points limites ($y = 0$, $x^2 = c$); la vérification est facile.

Si l'on détermine le centre c_0 d'un cercle (1) passant par le point P_0, la droite qui joint ce centre au point P_0 a pour coefficient angulaire

$$+\ \frac{2x_0 y_0}{c + y_0^2 - x_0^2};$$

or le produit de ce coefficient angulaire par celui de la droite P_0P_1; c. à. d.

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

est, en ayant égard aux relations (8)

$$-\frac{2x_0 y_0}{c + y_0^2 - x_0^2} \cdot \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = -\frac{2x_0 y_0}{c + y_0^2 - x_0^2} \cdot \frac{y_0 - \dfrac{x_0^2 - c}{y_0}}{2x_0} = -1;$$

donc la droite c_0P_0 est perpendiculaire à la droite P_0P_1. On verra de même que si c_1 est le centre d'un cercle (1) passant par le point P_1, la droite c_1P_1 est encore perpendiculaire à P_0P_1. Donc la droite P_0P_1 est tangente commune en P_0 et P_1 à deux des cercles de la série (1).

Ces diverses propriétés peuvent s'établir facilement par des considérations de Géométrie Elémentaire. (Voir le Traité des propriétés projectives ou Applications d'Analyse et de Géométrie par M. Poncelet tome II page 338).

IV. Angle de deux droites.

243. Soient les équations de deux droites, rapportées à deux axes rectangulaires,

$$(1)\qquad \begin{matrix} D \\ D_1 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} & A x + B y + C z = 0, \\ & A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0, \end{aligned} \right.$$

x, y, z étant les coordonnées homogènes d'un point.

L'angle V de ces deux droites est donné par la formule N.° (70)

$$(2)\qquad \text{tang}\, V = \frac{A B_1 - A_1 B}{A A_1 + B B_1}.$$

Les traces δ et δ_1 des deux droites sur la droite de l'infini sont respectivement déterminées par les équations

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} & (\delta) \quad A x + B y = 0, \quad z = 0, \\ & (\delta_1) \quad A_1 x + B_1 y = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté les points circulaires de l'infini ω et ω_1 sont donnés par les équations

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} & (\omega) \quad y - x\sqrt{-1} = 0, \quad z = 0, \\ & (\omega_1) \quad y + x\sqrt{-1} = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \right.$$

Désignons par R le rapport anharmonique des quatre points à l'infini $\omega, \omega_1; \delta, \delta_1$, ou des quatre droites, passant par l'origine,

$$\left\{ \begin{aligned} & A x + B y = 0, \\ & A_1 x + B_1 y = 0, \\ & y - x\sqrt{-1} = 0, \\ & y + x\sqrt{-1} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui déterminent ces quatre points.

Rappelons nous les formules (8) et (10) du N.° (170)

$$(5)\qquad R = (0, \delta\delta_1\, \omega\omega_1) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)};$$

on a, dans le cas présent

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{A_1}{B_1}, \quad c = \sqrt{-1}, \quad d = -\sqrt{-1};$$

par conséquent

$$R = \frac{(B\sqrt{-1} + A)(A_1 - B_1\sqrt{-1})}{(B_1\sqrt{-1} + A_1)(A - B\sqrt{-1})} = \frac{A A_1 + B B_1 + (A_1 B - A B_1)\sqrt{-1}}{A A_1 + B B_1 - (A_1 B - A B_1)\sqrt{-1}}.$$

Or de l'équation (2), on tire

$$A B_1 - A_1 B = (A A_1 + B B_1)\, \text{tang}\, V;$$

substituant cette valeur dans l'expression de R, on a définitivement

$$(6)\qquad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\,\text{tang}\, V}{1 + \sqrt{-1}\,\text{tang}\, V} = e^{-2V\sqrt{-1}};$$

d'où

$$(6\ bis)\qquad \text{tang}\, V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}$$

Ainsi l'angle de deux droites est une fonction seulement du rapport anharmonique du système des quatre points formé par les points circulaires à l'infini et par les traces des deux droites sur la

droite de l'infini.

On a donc ce théorème important :

Si R est le rapport anharmonique du système des quatre points formé par les points circulaires à l'infini et les traces de deux droites sur la droite de l'infini, l'angle V de ces deux droites sera lié au rapport anharmonique R par la relation très simple

$$(7) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{1-R}{(1+R)\sqrt{-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad R = \frac{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} V}{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} V}.$$

Dans l'évaluation de ce rapport anharmonique, on doit regarder comme associés les points circulaires à l'infini, et les traces des deux droites; de sorte que, si ω et ω_1 sont les points circulaires, et δ, δ_1 les traces des droites, on a

$$(8) \qquad R = (\delta\delta_1\ \omega\omega_1) = \frac{\omega\delta}{\omega\delta_1} : \frac{\omega_1\delta}{\omega_1\delta_1}.$$

L'équivalent de ce théorème a été donné par M. Chasles (Géométrie Supérieure N.° 652).

Lorsque les deux droites sont rectangulaires, le rapport anharmonique R est égal à -1, et réciproquement. Donc

Lorsque deux droites sont rectangulaires, leurs traces sur la droite de l'infini forment, avec les deux points circulaires à l'infini, un système harmonique, et réciproquement.

244. La proposition qu'on vient d'établir, indépendamment de son importance Géométrique, sera fort utile pour déterminer l'angle de deux droites dans un système quelconque de coordonnées.

Pour cela, on déterminera le rapport anharmonique formé par les traces des deux droites sur la ligne de l'infini et les points circulaires à l'infini; la formule (7) fera alors connaître l'angle des deux droites.

Nous verrons, dans les coordonnées trilatères, une application de cette méthode.

---

§ V Equation de cercles satisfaisant à certaines conditions.

1.° Equation d'un cercle passant par trois points.

245. Soient $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ les trois points donnés, et

$$(1) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta-2ax-2by+c=0,$$

l'équation du cercle cherché.

Les quantités indéterminées sont a, b, c, et on voit que trois points suffisent pour déterminer un cercle.

Exprimons que la circonférence (1) passe par les trois points donnés, et supposons les axes de coordonnées rectangulaires; l'équation du cercle est

$$(2) \qquad x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

et les trois équations de condition seront

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1+c=0, \\ x_2^2+y_2^2-2ax_2-2by_2+c=0, \\ x_3^2+y_3^2-2ax_3-2by_3+c=0. \end{cases}$$

Pour résoudre la question il faudra tirer les valeurs de a, b, c, des équations (3) et substituer leurs valeurs dans l'équation (2); ou, ce qui revient au même, il faudra éliminer a, b, c, entre les quatre équations (2) et (3); le résultat de cette élimination sera

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation du cercle passant par les trois points donnés.

246. Construction du centre.

Les coordonnées du centre du cercle (2) sont a et b; pour les déterminer, nous éliminerons c entre les équations (3) en les retranchons membre à membre.

Effectuons cette opération, et remplaçons a et b par x et y que nous regarderons comme les coordonnées variables d'un point, nous obtiendrons ainsi les trois équations suivantes:

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2(x_1 - x_2)x - 2(y_1 - y_2)y = 0,$$
$$x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 - 2(x_2 - x_3)x - 2(y_2 - y_3)y = 0,$$
$$x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - 2(x_3 - x_1)x - 2(y_3 - y_1)y = 0.$$

Ces trois équations représentent trois droites passant par un même point, puisque l'une de ces équations est évidemment une conséquence des deux autres; le point de concours de ces trois droites est le centre du cercle cherché.

Or la 1ère de ces droites passe par le milieu de la droite M_1M_2 et est perpendiculaire à cette même droite. En effet, les coordonnées du point milieu de M_1M_2, savoir

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

vérifient visiblement la 1ère des équations ci-dessus. Les coefficients angulaires des deux droites sont respectivement

$$-\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, \quad + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};$$

elles sont donc perpendiculaires N.° (70). La même remarque est applicable aux deux autres droites. On retrouve ainsi la construction élémentaire du centre d'un cercle passant par trois points.

247. L'équation (4) nous conduit à une propriété relative à un cercle passant par trois points. Soit M un point quelconque (x, y) du cercle passant par les trois points M_1, M_2, M_3, et O l'origine des coordonnées.

L'équation (4) développée donne

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on a

$$x^2 + y^2 = \overline{OM}^2, \quad x_1^2 + y_1^2 = \overline{OM_1}^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = \overline{OM_2}^2, \quad x_3^2 + y_3^2 = \overline{OM_3}^2;$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{Surf. } M_1M_2M_3, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{Surf. } MM_2M_3, \text{ etc...};$$

de là nous concluons la relation métrique

$$(5) \qquad \overline{OM}^2 \text{ Surf. } M_1M_2M_3 = \overline{OM_1}^2 \text{ Surf. } MM_2M_3 + \overline{OM_2}^2 \text{ Surf. } MM_3M_1 + \overline{OM_3}^2 \text{ Surf. } MM_1M_2;$$

O est un point arbitrairement choisi dans le plan, et M un point quelconque de la circonférence passant par les trois points fixes M_1, M_2, M_3.

(Surf. M'M''M''') représentera plus ou moins la valeur numérique de la surface, suivant que pour aller de M', vers M'', vers M''', on tourne dans un certain sens ou en sens contraire N.° (79).

248. Nous pouvons encore conclure de l'équation (4) une relation entre les distances mutuelles de

quatre points M, M_1, M_2, M_3 situés sur un cercle.

On a en effet, d'après l'équation (4), l'égalité

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0;$$

cette égalité peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Or multiplions ces déterminants membre à membre d'après la règle connue, (ici multiplions lignes par lignes), et posons

$$\begin{cases} d_{12} = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2, & d_{13} = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2, & d_{14} = (x-x_3)^2+(y-y_3)^2, \\ d_{23} = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, & d_{24} = (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2, & d_{34} = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2, \end{cases}$$

on trouve immédiatement la relation cherchée, savoir

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad d_{rs} = d_{sr}.$$

La relation (6) revient au fond au théorème de Ptolémée. Ce mode de calcul a été indiqué par M. Cayley (Journal de Cambridge tome II).

II° Équation des cercles coupant orthogonalement des cercles donnés.

249. Deux cercles se coupent orthogonalement lorsque leurs tangentes au point d'intersection sont perpendiculaires entre elles.

Si M est le point où deux cercles (O) et (O_1) se coupent à angle droit, les rayons OM et O_1M sont perpendiculaires entre eux, comme respectivement perpendiculaires aux deux tangentes en M supposées rectangulaires; le triangle OO_1M étant rectangle en M, on a donc

$$\overline{OO_1}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O_1M}^2;$$

c. à. d. pour que deux circonférences soient orthogonales il faut et il suffit que le carré de la distance des centres soit égal à la somme des carrés des rayons.

Nous laisserons à faire, comme exercice, la démonstration analytique de cette proposition.

250. Soient deux cercles donnés

$$(1) \quad \begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=0, & (O) \\ x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0; & (O_1) \end{cases}$$

soit l'équation d'un cercle

$$(2) \qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0, \qquad (C),$$

devant couper orthogonalement les deux cercles donnés; cherchons les relations que doivent vérifier les indéterminées α, β, γ, pour qu'il en soit ainsi.

Les coordonnées du centre du cercle (O) sont a, b; le carré de son rayon est (a^2+b^2-c); et de même pour les

autres. On devra donc avoir d'après la proposition qui précède

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = (a^2 + b^2 - c) + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma),$$
$$(\alpha - a_1)^2 + (\beta - b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2 - c_1) + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma);$$

ou en réduisant

$$(3) \quad \begin{cases} 2\alpha a + 2\beta b - \gamma - c = 0, \\ 2\alpha a_1 + 2\beta b_1 - \gamma - c_1 = 0; \end{cases}$$

ce sont les conditions pour que le cercle (C) coupe orthogonalement les cercles (O) et (O_1).

Si l'on élimine α et β entre les équations (2) et (3), on trouve

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + \gamma & x & y \\ c + \gamma & a & b \\ c_1 + \gamma & a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation générale des cercles coupant orthogonalement les cercles (1).

L'équation renferme la constante arbitraire γ; le nombre de ces cercles (4) est par conséquent infini.

Lieu des centres des cercles (4).

Les coordonnées α et β du centre d'un quelconque de ces cercles seront données par les équations (3); si on les retranche membre à membre, après avoir remplacé α et β par les variables x et y, on trouvera pour le lieu des centres

$$(5) \qquad 2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y - (c - c_1) = 0.$$

Cette équation représente une droite; or, si l'on retranche membre à membre les équations (1), on retrouve cette même droite. Donc

Le lieu des centres des cercles coupant orthogonalement les cercles (O) et (O_1) est l'axe radical de ces deux cercles.

251. Equation du cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés.

Soient les équations rendues homogènes

$$(1) \quad \begin{aligned} F &= x^2 + y^2 - 2(a_1 x + b_1 y)z + c_1 z^2 = 0, \\ G &= x^2 + y^2 - 2(a_2 x + b_2 y)z + c_2 z^2 = 0, \\ H &= x^2 + y^2 - 2(a_3 x + b_3 y)z + c_3 z^2 = 0, \end{aligned}$$

des trois cercles donnés, et

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2(\alpha x + \beta y)z + \gamma z^2 = 0,$$

l'équation du cercle devant couper orthogonalement les trois cercles donnés.

D'après le théorème du N° [249], les conditions pour que le cercle (2) coupe orthogonalement les cercles (1), seront

$$(3) \quad \begin{cases} + c_1 - 2\alpha a_1 - 2\beta b_1 + \gamma = 0, \\ + c_2 - 2\alpha a_2 - 2\beta b_2 + \gamma = 0, \\ + c_3 - 2\alpha a_3 - 2\beta b_3 + \gamma = 0; \end{cases}$$

Eliminant α, β, γ, entre les équations (2) et (3), on trouvera pour l'équation cherchée du cercle Orthomique

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ c_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut se transformer comme il suit: Retranchons la première ligne de chacune des suivantes, puis changeons les signes, il vient:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x^2+y^2-c_1 & x-a_1 & y-b_1 & 0 \\ x^2+y^2-c_2 & x-a_2 & y-b_2 & 0 \\ x^2+y^2-c_3 & x-a_3 & y-b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-c_1 & x-a_1 & y-b_1 \\ x^2+y^2-c_2 & x-a_2 & y-b_2 \\ x^2+y^2-c_3 & x-a_3 & y-b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons enfin de la 1ère colonne, la somme des deux dernières respectivement multipliées par x et y, on a définitivement

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1x+b_1y-c_1 & x-a_1 & y-b_1 \\ a_2x+b_2y-c_2 & x-a_2 & y-b_2 \\ a_3x+b_3y-c_3 & x-a_3 & y-b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{vmatrix} = 0 \ (6);$$

telle est la forme remarquable qu'on peut donner à l'équation du cercle orthomique.

Nous signalerons la propriété suivante :

Les trois polaires d'un point quelconque P_0 du cercle orthomique, prises par rapport aux trois cercles donnés, passant par un même point P_1, lequel point appartient également au cercle orthonique ; les deux points P_0 et P_1 jouissent réciproquement de cette propriété.

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées homogènes du point P_0 ; les polaires respectives de ce point par rapport aux cercles F, G, H, auront pour équations

$$(7) \quad \begin{cases} x F'_{x_0} + y F'_{y_0} + z F'_{z_0} = 0, \\ x G'_{x_0} + y G'_{y_0} + z G'_{z_0} = 0, \\ x H'_{x_0} + y H'_{y_0} + z H'_{z_0} = 0; \end{cases} \quad \text{ou} \ (7 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x_0 F'_x + y_0 F'_y + z_0 F'_z = 0, \\ x_0 G'_x + y_0 G'_y + z_0 G'_z = 0, \\ x_0 H'_x + y_0 H'_y + z_0 H'_z = 0. \end{cases}$$

Or si l'on exprime que les trois droites (7) se coupent en un même point, on trouve précisément l'équation (6) du cercle orthomique ; donc si le point P_0 se trouve sur ce cercle, les trois droites (7) concourront en un même point P_1.

Les coordonnées du point P_1 sont données par les équations (7) ou (7 bis) ; si l'on fait varier la position du point P_0, on aura le lieu du point P_1 en éliminant x_0, y_0, z_0 entre les équations (7 bis), ce qui conduit encore à l'équation (6) du cercle orthomique.

Les équations (7 bis) nous montrent encore que les polaires du point P_1 passent par le point P_0. En effet, une de ces polaires est

$$x F'_{x_1} + y F'_{y_1} + z F'_{z_1} = 0;$$

mais les coordonnées du point P_1 doivent vérifier les équations (7 bis) ; on a, par exemple,

$$x_0 F'_{x_1} + y_0 F'_{y_1} + z_0 F'_{z_1} = 0;$$

or cette relation exprime que la droite précédente passe par le point (x_0, y_0, z_0). Donc.....

III° Démonstration analytique de quelques propriétés élémentaires du cercle.

252 Remarque.

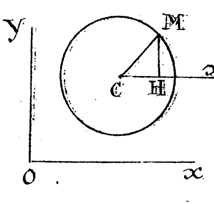
L'équation d'une courbe est une relation entre les coordonnées x et y d'un quelconque de ses points ; on peut donc regarder une des coordonnées comme une fonction de l'autre, ou, plus généralement, on peut regarder les deux coordonnées comme des fonctions d'une quantité arbitraire ou paramètre arbitraire ; la forme d'une de ces fonctions peut être choisie à volonté, l'autre résulte alors de l'équation donnée.

Il est souvent commode d'exprimer les deux coordonnées d'un point d'une courbe à l'aide d'un paramètre arbitraire; nous en verrons de nombreux exemples.

Pour premier exemple, prenons l'équation d'un cercle rapporté à des axes rectangulaires

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

les coordonnées d'un point quelconque de ce cercle pourront s'exprimer à l'aide d'une seule indéterminée par les relations suivantes



(2) $\begin{cases} x-a=R\cos\varphi, \\ y-b=R\sin\varphi, \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=a+R\cos\varphi, \\ y=b+R\sin\varphi; \end{cases}$

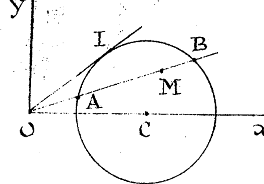
ces valeurs vérifient évidemment l'équation (1) quel que soit φ; l'indéterminée φ s'appelle le paramètre angulaire du point M (x, y).

On voit que φ est l'angle du rayon CM avec l'axe des x, C étant le centre du cercle. Car on a visiblement (voir la figure) $CH = x-a$, $MH = y-b$; d'où

$$\begin{cases} \cos\varphi = \cos \widehat{MCx'}, \\ \sin\varphi = \sin \widehat{MCx'}. \end{cases}$$

253. Le produit des segments d'une sécante, passant par un point fixe, est constant.

Prenons le point fixe pour origine, et pour axe des x le diamètre qui passe par ce point; l'équation du cercle sera de la forme



(1) $x^2+y^2-2ax+c=0$.

Si OA est une sécante quelconque, α son angle avec l'axe Ox, M(x, y) un quelconque de ses points, et ρ la distance OM; on a

(2) $x=\rho\cos\alpha$, $y=\rho\sin\alpha$.

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

(3) $\rho^2 - 2a\rho\cos\alpha + c = 0$.

Les racines ρ_1, ρ_2, de l'équation (3) seront les distances au point O des points A et B où la sécante OAB rencontre le cercle; or on a

(4) $\rho_1\rho_2 = c$, ou $OA.OB = c =$ Constante.

Mais la quantité c est le carré de la tangente menée du point O au cercle N° (218); donc le produit des segments OA, OB est constant et égal au carré de la tangente menée du point O. Nous laissons à démontrer analytiquement la réciproque de cette proposition.

254 Les angles inscrits dans un même segment de cercle sont égaux.

Prenons pour axe des x la base AB du segment, et, pour axe des y, la perpendiculaire élevée par son milieu. Si h est l'ordonnée du centre, l'équation de la circonférence sera

(1) $x^2+(y-h)^2=R^2$;

et, en désignant par $2a$ la longueur AB, on a

(2) $R^2=a^2+h^2$.

Soient M un point du cercle, x_1, y_1 ses coordonnées; V l'angle AMB; on a

$$V = \widehat{MAx} - \widehat{MBx} = \alpha - \beta;$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$$

Or α et β étant les angles de AM et BM avec la direction positive de Ox, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y_1}{x_1-a}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{y_1}{x_1+a};$$

par conséquent

$$\text{tang}\,V = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - a} - \dfrac{y_1}{x_1 + a}}{1 + \dfrac{y_1^2}{x_1^2 - a^2}} = \frac{2ay_1}{x_1^2 + y_1^2 - a^2}$$

Mais le point M appartenant au cercle, on a

$$x_1^2 + y_1^2 - 2hy_1 + h^2 = R^2, \quad \text{ou} \quad x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 2hy_1;$$

donc

$$(3) \qquad \text{tang}\,V = \frac{a}{h};$$

par suite, l'angle V est constant.

Si l'on joint le centre C au point A, on a

$$a = h\,\text{tang}\,\widehat{OCA}; \text{ donc } \widehat{OCA} = V.$$

Si en A on mène une perpendiculaire à CA, en la prolongeant au dessous de AB, il en résultera $\widehat{BAT} = \widehat{OCA} = V$. De là on conclut la méthode connue de la Géométrie élémentaire pour construire, sur un segment donné AB, un cercle AMB capable de l'angle donné V.

255. Nous allons encore établir plusieurs propriétés importantes du Cercle, propriétés qui se démontrent facilement par la Géométrie élémentaire; mais la démonstration analytique présente, sinon des difficultés, au moins des longueurs très-grandes, si on ne la dirige pas avec certaines précautions.

Centres de similitude de deux cercles.

Soient les deux cercles

$$(1) \quad \begin{cases} c_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0, \\ c_2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - R_2^2 = 0. \end{cases}$$

Comme on l'a vu au N° (230), les tangentes communes aux deux cercles, soient réelles ou imaginaires coupent la ligne des centres en deux points S et S' dont les coordonnées respectives sont

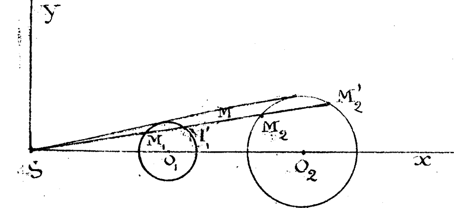
$$(2) \qquad S \begin{cases} x = \dfrac{a_1 R_2 - a_2 R_1}{R_2 - R_1}, \\ y = \dfrac{b_1 R_2 - b_2 R_1}{R_2 - R_1}; \end{cases} \qquad S' \begin{cases} x = \dfrac{a_1 R_2 + a_2 R_1}{R_2 + R_1}, \\ y = \dfrac{b_1 R_2 + b_2 R_1}{R_2 + R_1}. \end{cases}$$

Les rayons vecteurs menés aux deux cercles par un quelconque de ces points sont dans le rapport des rayons; ces deux points sont appelés: le 1.er S, **centre de similitude externe**; le 2.ème S', **centre de similitude interne**.

En effet, prenons le point S, par exemple, pour origine des coordonnées, et la ligne des centres pour axe des x; on aura

$$(3) \qquad b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{R_2}{R_1} = k;$$

les équations des deux circonférences seront



$$(4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1 x + a_1^2 - R_1^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ka_1 x + k^2(a_1^2 - R_1^2) = 0. \end{cases}$$

Menons par le point S, une sécante quelconque; soit α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x; soient x et y les coordonnées d'un quelconque de ses points et ρ la distance OM; on aura

$$x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha,$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations des cercles (4), les distances ρ, au point S, des points

M_1 et M'_1 où elle rencontre le cercle O_1 seront données par l'équation

$$(5)\qquad \rho^2 - 2a_1 \cos\alpha . \rho + a_1^2 - R_1^2 = 0, \text{ d'où } \begin{cases} SM_1 = a_1 \cos\alpha - \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha}, \\ SM'_1 = a_1 \cos\alpha + \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha}; \end{cases}$$

les distances ρ', au point S, des points M_2 et M'_2 où elle rencontre le cercle O_2 seront données par l'équation

$$(6)\qquad \rho'^2 - 2ka_1 \cos\alpha\, \rho' + k^2(a_1^2 - R_1^2) = 0, \text{ d'où } \begin{cases} SM_2 = k\,(a_1 \cos\alpha - \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha}), \\ SM'_2 = k\,(a_1 \cos\alpha + \sqrt{R_1^2 - a_1^2 \sin^2\alpha}). \end{cases}$$

On voit, d'après ces valeurs, que l'on a, quel que soit α :

$$(7)\qquad \frac{SM_2}{SM_1} = k, \quad \frac{SM'_2}{SM'_1} = k;$$

cette propriété n'a plus lieu pour les rayons vecteurs SM_1 et SM_2, SM'_1 et SM_2 ; les points tels que M_1 et M_2, M'_1 et M'_2 sont dits points homologues.

On vérifiera sans difficulté que les tangentes N.° (212) aux points homologues tels que M_1 et M_2, ou M'_1 et M'_2 sont parallèles ; les tangentes, aux points correspondants mais non homologues, tels que M_1 et M'_2, M'_1 et M_2 ne sont pas parallèles.

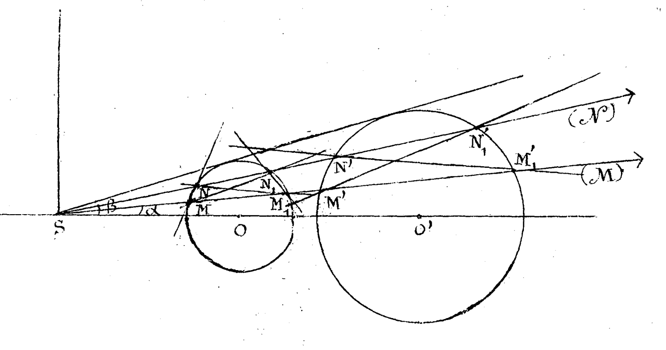
Ces dernières propriétés sont d'ailleurs des conséquences de la proposition suivante.

256. Par un quelconque des centres de similitude de deux cercles, on mène des sécantes arbitraires ; on joint deux des points d'intersection situés sur l'un des cercles, et deux des points d'intersection situés sur l'autre cercle ; soient M et N les deux points situés sur le premier cercle ; M' et N' les deux points situés sur le second cercle : M et M' étant sur une des sécantes, N et N' sur l'autre :

1.° Si M' est l'homologue de M, et N' l'homologue de N, les deux droites MN et $M'N'$ sont parallèles.

2.° Si M' n'est pas l'homologue de M, et que N' ne soit pas non plus l'homologue de N ; les deux droites MN et $M'N'$ se coupent sur l'axe radical des deux cercles.

3.° Si M' est l'homologue de M, et que N' ne soit pas l'homologue de N, les droites MN et $M'N'$ ne sont plus parallèles, et ne se coupent plus sur l'axe radical.



La première partie de cette proposition résulte de la propriété précédente, car les deux droites MN et $M'N'$ sont alors deux droites homologues ; donc....

Pour démontrer les autres propriétés, prenons le centre S de similitude externe, par exemple, et choisissons-le pour origine des coordonnées ; prenons la ligne des centres pour axe des x ; les équations des deux cercles seront alors, d'après le N.° qui précède :

$$(1)\qquad \begin{cases} (O) & x^2 + y^2 - 2ax + (a^2 - R^2) = 0, \\ (O') & x^2 + y^2 - 2kax + k^2(a^2 - R^2) = 0. \end{cases}$$

Soient α et β les angles des deux sécantes OM et ON avec l'axe des x ; ρ, la distance au point S d'un point (x, y) pris sur la première ; σ, la distance au point S d'un point (x, y) pris sur la seconde ; on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \rho \cos\alpha, \\ y = \rho \sin\alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sigma \cos\beta, \\ y = \sigma \sin\beta. \end{cases}$$

D'après cela, les équations déterminant les distances du point S à l'une et l'autre circonférence sur les sécantes considérées, seront :

$$\left\{\begin{array}{lll}(3) & \rho^2-2a\cos\alpha.\rho+a^2-R^2=0, \text{ donnant } SM \text{ et } SM_1 \ldots\ldots\ldots & (O),\\ (4) & \rho'^2-2ak\cos\alpha.\rho'+k^2(a^2-R^2)=0;\ \ldots\ldots\ldots\ SM' \text{ et } SM'_1 \ldots\ldots\ldots & (O');\\ (5) & \sigma^2-2a\cos\beta.\sigma+a^2-R^2=0,\ \ldots\ldots\ldots\ SN \text{ et } SN_1 \ldots\ldots\ldots & (O),\\ (6) & \sigma'^2-2ak\cos\beta.\sigma'+k^2(a^2-R^2)=0;\ \ldots\ldots\ldots\ SN' \text{ et } SN'_1 \ldots\ldots\ldots & (O').\end{array}\right.$$

Si M et N sont deux points du cercle (O) sur l'une et l'autre sécante, puis M' et N' deux points du cercle (O') également situés sur l'une et l'autre sécante; d'après les formules (2) et la notation que nous venons d'adopter, les équations des droites correspondantes M N, M' N' seront

$$MN: \begin{vmatrix} x & y & 1\\ \rho\cos\alpha & \rho\sin\alpha & 1\\ \sigma\cos\beta & \sigma\sin\beta & 1\end{vmatrix}=0;\quad M'N': \begin{vmatrix} x & y & 1\\ \rho'\cos\alpha & \rho'\sin\alpha & 1\\ \rho'\cos\beta & \sigma'\sin\beta & 1\end{vmatrix}=0;$$

ou en développant, puis divisant par $\rho\sigma$ et $\rho'\sigma'$:

$$(7)\left\{\begin{array}{l} MN:\ x\left(\frac{\sin\alpha}{\sigma}-\frac{\sin\beta}{\rho}\right)+y\left(\frac{\cos\beta}{\rho}-\frac{\cos\alpha}{\sigma}\right)=\sin(\alpha-\beta),\\ M'N':\ x\left(\frac{\sin\alpha}{\sigma'}-\frac{\sin\beta}{\rho'}\right)+y\left(\frac{\cos\beta}{\rho'}-\frac{\cos\alpha}{\sigma'}\right)=\sin(\alpha-\beta).\end{array}\right.$$

Ces deux équations résolues par rapport à x et y donnent

$$(8)\left\{\begin{array}{l} x(\rho\sigma'-\rho'\sigma)=\sigma\sigma'(\rho-\rho')\cos\beta-\rho\rho'(\sigma-\sigma')\cos\alpha,\\ y(\rho\sigma'-\rho'\sigma)=\sigma\sigma'(\rho-\rho')\sin\beta-\rho\rho'(\sigma-\sigma')\sin\alpha.\end{array}\right.$$

Supposons maintenant que ρ et ρ' soient les distances sur SM, du point S à deux points non homologues; et que de même, σ et σ' soient les distances, sur SN, du point S à deux points non homologues? Nous allons d'abord établir entre ces longueurs plusieurs relations remarquables.

Eliminons $\cos\alpha$ entre les relations (3) et (4), puis $\cos\beta$ entre (5) et (6), on arrive aux égalités suivantes, en remarquant que ρ' est différent de $k\rho$, et σ' différent de $k\sigma$, d'après l'hypothèse précédente:

$$(9)\left\{\begin{array}{l}\rho\rho'=k(a^2-R^2),\\ \sigma\sigma'=k(a^2-R^2).\end{array}\right.$$

De là, en passant, ce théorème:

Si M et N sont deux points du 1er cercle, M' et N' deux points du second cercle et situés, respectivement avec les deux premiers, sur les mêmes sécantes; si, en outre, M' n'est pas homologue de M, et N' n'est pas homologue de N; on aura, quelles que soient les deux sécantes considérées

$$(10)\qquad \overline{SM}\times\overline{SM'}=\overline{SN}\times\overline{SN'}.$$

De cette proposition et de la réciproque de la proposition du N° [253] on conclut que:

Les quatre points M, N, M' N', satisfaisant aux conditions précitées, sont sur un même cercle.

Maintenant des équations (3) et (5) multipliées par k^2, retranchons respectivement les équations (4) et (6), nous trouverons

$$(11)\left\{\begin{array}{l}k\rho+\rho'=2ak\cos\alpha,\\ k\sigma+\sigma'=2ak\cos\beta.\end{array}\right.$$

Il est alors facile de constater que les deux droites M N et M' N' se coupent sur l'axe radical des deux cercles.

Si l'on a égard aux relations (9), puisqu'on remplace $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ par les valeurs que fournissent les relations (11) dans la première des équations (8), on trouve

$$(12)\qquad x=\frac{(1+k)(a^2-R^2)}{2a};$$

c'est précisément l'équation de l'axe radical des deux cercles (1). La seconde partie de la proposition énoncée se trouve donc démontrée.

Quant à la troisième partie de la proposition, on pourra l'étudier en se servant des deux équations (8).

Si l'on suppose, par exemple, que M' soit homologue de M et que N' ne soit pas homologue de N, on aura

$$(13)\qquad \rho' = k\rho,\quad \sigma\sigma' = k\,(a^2-R^2),\ k\sigma+\sigma' = 2\,ak\cos\beta.$$

On éliminera alors ρ' et σ', à l'aide de ces relations, dans les valeurs (8) de x et y; puis on tirera ρ et σ des équations (3) et (5). On arrive ainsi aux égalités suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} 2x\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta} = \left[a\cos\alpha+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}\right]\left[a(1-k)\cos\beta+(1+k)\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta}\right]\cos\alpha-(a^2-R^2)(1-k)\cos\beta, \\ 2y\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta} = \left[a\cos\alpha+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}\right]\left[a(1-k)\cos\beta+(1+k)\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta}\right]\sin\alpha-(a^2-R^2)(1-k)\sin\beta. \end{cases}$$

1° Supposons β fixe et éliminons α entre les deux équations (14). Dans ce but, posons

$$(15)\quad \begin{cases} A = \sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta}, \\ B = a(1-k)\cos\beta+(1-k)\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta}; \\ p = (a^2-R^2)(1-k)\cos\beta, \\ q = (a^2-R^2)(1-k)\sin\beta; \end{cases}\qquad \begin{cases} x' = 2Ax+p, \\ y' = 2Ay+q, \\ \text{d'où:} \\ x'^2+y'^2 = 4A^2(x^2+y^2)+2A(px+qy)+p^2+q^2; \end{cases}$$

les équations (14) deviennent:

$$x' = B\cos\alpha\left(a\cos\alpha+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}\right),$$
$$y' = B\sin\alpha\left(a\cos\alpha+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}\right).$$

Divisons membre à membre, puis ajoutons la somme des carrés après avoir isolé le radical, nous trouvons

$$\tan\alpha = \frac{y'}{x'},\quad x'^2+y'^2-2aB\cos\alpha\,(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)+(a^2-R^2)B^2=0.$$

L'élimination de α est alors facile, et l'on obtient définitivement

$$(16)\qquad 4A^2(x^2+y^2)+2A(px+qy)-2Ba(2Ax+p)+B^2(a^2-R^2)+p^2+q^2=0.$$

Cette équation représente un cercle; on aura ainsi deux cercles suivant que dans les valeurs de A et B on prendra le radical $\sqrt{R^2-a^2\sin^2\beta}$ avec le signe + ou avec le signe −. Donc

Si sur une sécante fixe, passant par S, on prend deux points non homologues et qu'on les joigne à deux points homologues situés sur une sécante mobile autour de S; le lieu des points d'intersection des droites ainsi obtenues se composera de deux cercles, l'un correspondant aux points non homologues extérieurs sur la sécante fixe, l'autre aux points non homologues intérieurs.

2° Supposons α fixe et éliminons β entre les deux équations (13); on trouvera alors une équation du second degré. Donc

Si sur une sécante fixe, passant par S, on prend deux points homologues et qu'on les joigne à deux points non homologues situés sur une sécante mobile autour de S, le lieu des points d'intersection des droites ainsi obtenues est une courbe du second degré, en général différente d'un cercle.

On constatera encore plusieurs autres propriétés simples, en étudiant les cas particuliers de cette question.

(Voir Applications d'Analyse et de Géométrie par M. Poncelet. Tome I)

257. Lorsqu'un cercle est tangent à deux autres cercles, la corde de contact passe par l'un des centres de similitude de deux cercles.

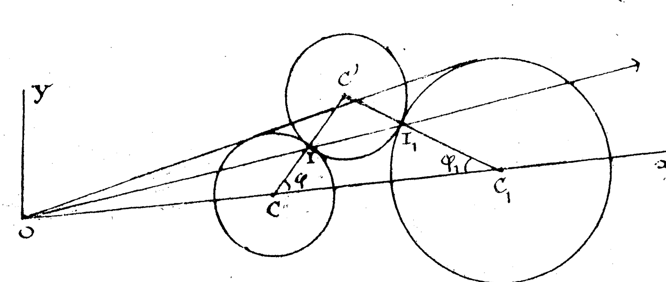
Cette propriété résulte d'une proposition démontrée dans le N° précédent; nous allons néanmoins l'établir par un calcul direct.

Supposons que le cercle touche les deux cercles donnés, tous deux extérieurement ou tous deux

intérieurement, et prenons alors pour origine le centre de similitude externe. Si le cercle touchait les deux cercles, l'un intérieurement et l'autre extérieurement, on prendrait pour origine le centre de similitude interne.

L'axe des x étant la ligne des centres, les équations des deux cercles fixes seront N°. [255]

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2-2ax+(a^2-R^2)=0, \\ x^2+y^2-2akx+k^2(a^2-R^2)=0. \end{cases}$$



On a $\frac{R_1}{R}=k$, si R_1 est le rayon du second cercle.

Soient I et I_1 les points de contact de la circonférence C' avec les cercles C et C_1; (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées respectives de I et I_1; soit enfin

$$\varphi=\widehat{ICx},\quad \varphi_1=\widehat{I_1C_1O};$$

on a

$$\text{pour I}\begin{cases} x_1=a+R\cos\varphi, \\ y_1=R\sin\varphi\ ; \end{cases}\quad \text{pour } I_1\begin{cases} x_2=ka-kR\cos\varphi_1, \\ y_2=kR\sin\varphi_1. \end{cases}$$

L'équation de la corde des contacts II_1 sera, par conséquent,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,\ \text{c. à. d.}\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a+R\cos\varphi & R\sin\varphi & 1 \\ ka-kR\cos\varphi_1 & kR\sin\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Pour que cette droite passe par le point O, il faut que son équation soit vérifiée pour $x=0, y=0$, c. à. d. qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a+R\cos\varphi & R\sin\varphi \\ ka-kR\cos\varphi_1 & kR\sin\varphi_1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant

$$(2)\qquad a(\sin\varphi_1-\sin\varphi)+R\sin(\varphi+\varphi_1)=0.$$

Or, si l'on désigne par R' le rayon du cercle C', le triangle $CC'C_1$ donne les égalités

$$\frac{R+R'}{\sin\varphi_1}=\frac{kR+R'}{\sin\varphi}=\frac{ka-a}{\sin(\varphi+\varphi_1)};$$

on déduit de là:

$$\frac{ka-a}{\sin(\varphi+\varphi_1)}=\frac{(R+R')-(kR+R')}{\sin\varphi_1-\sin\varphi}\ \text{ou}=\frac{R-kR}{\sin\varphi_1-\sin\varphi}.$$

C'est précisément la relation (2) qu'il s'agissait de vérifier.

258. Axes de similitude de trois cercles.

Soient les équations de trois cercles

$$(1)\quad \begin{cases} (O_1)\quad (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2=0, \\ (O_2)\quad (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-R_2^2=0, \\ (O_3)\quad (x-a_3)^2+(y-b_3)^2-R_3^2=0. \end{cases}$$

Désignons par:

E_1 et I_1 les centres de similitude externe et interne des cercles O_2 et O_3;

E_2 et I_2 . . . . O_3 et O_1;

E_3 et I_3 . . . . O_1 et O_2.

Les coordonnées des points E_1 et I_1 seront N°. [255].

$$(2)\quad E_1\begin{cases} x_1=\dfrac{a_2R_3-a_3R_2}{R_3-R_2}, \\ y_1=\dfrac{b_2R_3-b_3R_2}{R_3-R_2}, \end{cases}\qquad I_1\begin{cases} x_1'=\dfrac{a_2R_3+a_3R_2}{R_3+R_2}, \\ y_1'=\dfrac{b_2R_3+b_3R_2}{R_3+R_2}; \end{cases}$$

on aura des formules analogues pour les autres.

Pour démontrer les propriétés que nous avons en vue, il y aura avantage ici à se servir des équations tangentielles.

Les équations tangentielles des centres des trois cercles seront N.° (113)

$$(3)\quad \begin{cases} O_1 = a_1 u + b_1 v - 1 = 0, \\ O_2 = a_2 u + b_2 v - 1 = 0, \\ O_3 = a_3 u + b_3 v - 1 = 0. \end{cases}$$

L'équation tangentielle du point E_1, sera

$$u x_1 + v y_1 - 1 = 0,$$

ou

$$u(a_2 R_3 - a_3 R_2) + v(b_2 R_3 - b_3 R_2) - R_3 + R_2 = 0,$$

ou enfin

$$R_3(u a_2 + v b_2 - 1) - R_2(u a_3 + v b_3 - 1) = 0.$$

Les équations tangentielles des centres de similitude des trois cercles seront donc, en représentant par O_1, O_2, O_3, les fonctions linéaires (3)

$$(4)\quad \begin{cases} (E_1) \quad R_2 O_3 - R_3 O_2 = 0, & (I_1) \quad R_2 O_3 + R_3 O_2 = 0, \\ (E_2) \quad R_3 O_1 - R_1 O_3 = 0, & (I_2) \quad R_3 O_1 + R_1 O_3 = 0, \\ (E_3) \quad R_1 O_2 - R_2 O_1 = 0, & (I_3) \quad R_1 O_2 + R_2 O_1 = 0. \end{cases}$$

Or il est visible, d'après cela, que les six points (4) ou les six centres de similitude forment quatre groupes de trois points en ligne droite.

Ainsi nous aurons les droites

$$(5)\quad \begin{cases} E_1\ E_2\ E_3 \quad \text{dont les coordonnées sont données par les équations} \quad \dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_1\ I_2\ I_3 \quad \dots\dots\dots \quad -\dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_2\ I_3\ I_1 \quad \dots\dots\dots \quad \dfrac{O_1}{R_1} = -\dfrac{O_2}{R_2} = \dfrac{O_3}{R_3}, \\ E_3\ I_1\ I_2 \quad \dots\dots\dots \quad \dfrac{O_1}{R_1} = \dfrac{O_2}{R_2} = -\dfrac{O_3}{R_3}. \end{cases}$$

Il est facile de déduire de là les équations de ces quatre droites.

Prenons, par exemple, la première $E_1\ E_2\ E_3$; les coordonnées homogènes de cette droite étant u, v, w, son équation sera

$$u x + v y - w = 0$$

les premières des équations (5) donnent

$$u a_1 + v b_1 - w + \lambda R_1 = 0,$$
$$u a_2 + v b_2 - w + \lambda R_2 = 0,$$
$$u a_3 + v b_3 - w + \lambda R_3 = 0.$$

Éliminant u, v, w, et λ entre ces quatre équations, on obtiendra pour l'équation de l'axe de similitude

$$(6)\qquad E_1\ E_2\ E_3: \begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & R_1 \\ a_2 & b_2 & 1 & R_2 \\ a_3 & b_3 & 1 & R_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouvera de la même manière pour les autres

$$(6\,bis)\ E_1 I_2 I_3 \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & -R_1 \\ a_2 & b_2 & 1 & R_2 \\ a_3 & b_3 & 1 & R_3 \end{vmatrix} = 0;$$

etc.... etc.... etc....

Nous démontrerons encore la propriété suivante :

Les trois droites $O_1 I_1$, $O_2 I_2$, $O_3 I_3$ sont concourantes.

L'équation de la droite $O_1 I_1$ est (2)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 R_3 + a_3 R_2 & b_2 R_3 + b_3 R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = 0,$$

cette équation peut s'écrire

$$(O_1 I_1) \qquad R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} + R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

on trouvera de même

$$(O_2 I_2) \qquad R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} + R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(O_3 I_3) \qquad R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

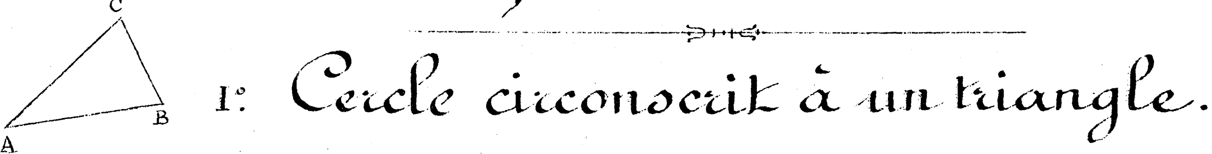
Or il est visible que ces trois droites passent par le point

$$(7) \qquad R_1 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = R_2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = R_3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Chapitre II

Cercle (Coordonnées Trilatères

§I Diverses formes de l'équation du C



1° Cercle circonscrit à un triangle.

259. On donne les équations des côtés du triangle ; nous les supposerons mises so

$$(1) \quad \begin{cases} X = p - x \cos\alpha - y \sin\alpha = 0, & BC \\ Y = q - x \cos\beta - y \sin\beta = 0, & CA \\ Z = r - x \cos\gamma - y \sin\gamma = 0, & AB \end{cases}$$

et nous prendrons le triangle proposé pour triangle de référence.

Ceci posé, l'équation

$$(2) \qquad aYZ + bXZ + cXY = 0,$$

où a, b, c, sont des constantes arbitraires, représente une courbe du second degré circonscrite au triangle ABC. Il est évident, en effet, que cette courbe passe par le sommet A, puisque son équation est vérifiée par les coordonnées ($Y=0, Z=0$) du sommet A; on constate de même qu'elle passe par les sommets B et C.

Nous démontrerons plus tard que cette équation est l'équation la plus générale des courbes du second degré passant par les trois points A, B, C.

Nous exprimerons que l'équation (2) représente un cercle en égalant les coefficients des carrés x^2 & y^2 et annulant le coefficient de xy; nous obtenons ainsi les deux relations

$$a \sin(\beta+\gamma) + b \sin(\alpha+\gamma) + c \sin(\alpha+\beta) = 0,$$
$$a \cos(\beta+\gamma) + b \cos(\alpha+\gamma) + c \cos(\alpha+\beta) = 0.$$

Résolvons ces deux équations par rapport à a et b, il vient

$$(3) \qquad \frac{a}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{b}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{c}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

D'où l'on conclut enfin, pour l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC

$$(4) \qquad YZ\sin(\beta-\gamma) + ZX\sin(\gamma-\alpha) + XY\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Si l'on suppose l'origine des coordonnées dans l'intérieur du triangle de référence, on pourra faire usage des relations (4) du N.° (94), et l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence sera

$$(5) \qquad YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C = 0.$$

D'ailleurs cette équation, ne renfermant plus que les éléments du triangle de référence, conserve la même forme quelle que soit la position de l'origine des coordonnées Cartésiennes.

Remarque I. Puissance d'un point par rapport au cercle (5).

La puissance d'un point est égale au premier membre de l'équation du cercle (en coordonnées Cartésiennes) divisé par la valeur commune des coefficients des carrés N.° (218).

Si, dans l'équation (5), on remplace X, Y, Z, par les valeurs (1), et si l'on désigne par k la valeur commune des coefficients des carrés, on trouve

$$k = \cos\beta\cos\gamma.\sin A + \cos\gamma\cos\alpha.\sin B + \cos\alpha\cos\beta.\sin C,$$
$$k = \sin\beta\sin\gamma.\sin A + \sin\gamma\sin\alpha.\sin B + \sin\alpha\sin\beta.\sin C.$$

En ajoutant et ayant égard aux relations (5) du N.° (94), il vient

$$2k = -\sin A\cos A - \sin B\cos B - \sin C\cos C,$$

d'où, en se rappelant que

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C = \frac{2S}{R^2},$$

on conclut

$$k = -\frac{S}{2R^2}.$$

Par conséquent, la puissance P^2 d'un point (X_0, Y_0, Z_0) par rapport au cercle (5) aura pour expression

$$(5 \text{ bis}) \qquad P^2 = -\frac{2R^2}{S}(Y_0Z_0\sin A + Z_0X_0\sin B + X_0Y_0\sin C).$$

On arriverait également à la valeur du facteur numérique $-\frac{2R^2}{S}$, en remarquant que la puissance d'un point a une expression de la forme

$$k_1(Y_0Z_0\sin A + Z_0X_0\sin B + X_0Y_0\sin C),$$

k_1 étant un facteur indépendant de la position du point; on déterminerait alors le facteur k_1 en prenant, pour le point (X_0, Y_0, Z_0), le centre du cercle N.° (260).

Remarque II. Si les équations des côtés du triangle étaient pris sous la forme générale

$$(6)\quad \begin{cases} M = ax + a'y + a'', & BC \\ N = bx + b'y + b'', & CA \\ P = cx + c'y + c'', & AB; \end{cases}$$

en désignant par X, Y, Z les distances d'un point quelconque du cercle aux droites M, N, P, on aurait alors, en prenant convenablement les signes,

$$X = \frac{M}{m_1},\quad Y = \frac{N}{n_1},\quad Z = \frac{P}{p_1},$$

en représentant par m_1, n_1, p_1 les radicaux

$$\sqrt{a^2+a'^2},\quad \sqrt{b^2+b'^2},\quad \sqrt{c^2+c'^2}.$$

En remplaçant X, Y, Z, par les valeurs précédentes, dans l'équation (5), on aurait

$$(7)\qquad m_1 NP \sin A + n_1 PM \sin B + p_1 MN \sin C = 0.$$

Cette remarque s'appliquera aux diverses équations que nous rencontrerons dans les recherches suivantes.

260. Détermination du centre et du rayon.

Le rayon R sera donné par une des égalités

$$(8)\qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

a, b, c, étant les longueurs des côtés du triangle de référence.

Pour déterminer les coordonnées X_0, Y_0, Z_0, du centre O, remarquons que

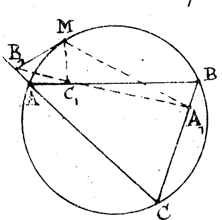
$$X_0 = OP = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R\sqrt{1-\sin^2 A} = R\cos A;$$

on a donc

$$(9)\quad \begin{cases} X_0 = R\cos A, \\ Y_0 = R\cos B, \\ Z_0 = R\cos C. \end{cases}$$

261. Signification géométrique de l'équation (5).

Soit M un point quelconque du cercle; X, Y, Z, ses coordonnées. D'après la position choisie pour le point M, on voit que X, Y ou MA_1, MB_1, sont positives, et Z ou MC_1 est négative; on aura donc



$$\begin{cases} -YZ \sin A = \text{aire}.\, MB_1C_1, \\ -XZ \sin B = \text{aire}.\, MA_1C_1, \\ +XY \sin C = \text{aire}.\, MA_1B_1, \end{cases}$$

l'équation (5) donne alors lieu à la relation

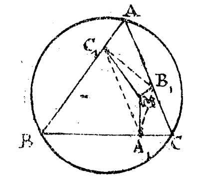
$$(10)\qquad \text{aire}.\, MB_1C_1 + \text{aire}.\, MA_1C_1 - \text{aire}\, MA_1B_1 = 0;$$

c. à. d. que l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ est nulle; donc les trois points A_1, B_1, C_1, sont en ligne droite. De là ce théorème:

Si d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

262. Nous énoncerons encore la proposition suivante:

Le lieu des points tels que, si l'on abaisse de ces points des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle fixe ABC, l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ formé par les pieds de ces trois perpendiculaires soit constante, est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC.



Soit M un de ces points; X, Y, Z, ses coordonnées; on aura

$$\text{aire}.\, MB_1C_1 = YZ \sin A,$$
$$\text{aire}.\, MA_1C_1 = ZX \sin B,$$
$$\text{aire}.\, MA_1B_1 = XY \sin C;$$

or, si k^2 est la valeur constante de la surface, on a

$$\text{aire } MB_1C_1 + \text{aire } MA_1C_1 + \text{aire } MA_1B_1 = \text{aire } A_1B_1C_1 = k^2;$$

donc

$$(11) \qquad YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C = k^2.$$

Or cette équation représente un cercle concentrique au cercle (5).

En effet, d'après la relation (3) N.º (93), l'équation (11) peut s'écrire

$$(12) \qquad YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C = \frac{k^2 R^2}{S^2} \left[X \sin A + Y \sin B + Z \sin C \right]^2.$$

Mais l'équation de la droite de l'infini est (8) N.º (96)

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

On voit alors que les deux cercles (5) et (12) sont doublement tangents et que leurs points de contact sont à l'infini, puisque les points communs à ces deux cercles doivent vérifier l'équation

$$\left[X \sin A + Y \sin B + Z \sin C \right]^2 = 0;$$

donc ces deux cercles sont concentriques N.º (224).

On peut encore constater cette propriété en remarquant que, après avoir remplacé X, Y, Z, par les valeurs (1) du N.º (259), les équations (5) et (11) ne différeront que par le terme indépendant; donc...

II.º Équation des cercles tangents à deux droites.

263 Nous verrons plus loin que

$$(13) \qquad YZ = \lambda X^2,$$

est l'équation la plus générale des courbes du second degré tangentes à deux droites AC et AB aux points où elles sont rencontrées par la droite BC. Nous pouvons toutefois vérifier que les courbes représentées par l'équation précédente satisfont à ces conditions; car, si l'on cherche l'intersection de cette courbe avec la droite AB ou $Z = 0$, on trouve $X^2 = 0$, ce qui donne deux points confondus; la courbe est donc tangente en B à la droite AB. On voit de même qu'elle est tangente en C à la droite AC.



Cherchons maintenant les conditions pour que l'équation

$$YZ = \lambda X^2$$

représente un cercle.

En exprimant que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux et que le coefficient de xy est nul, on arrive aux relations

$$(14) \qquad \begin{cases} \cos(\beta + \gamma) = \lambda \cos 2\alpha, \\ \sin(\beta + \gamma) = \lambda \sin 2\alpha. \end{cases}$$

On conclut de là, en ajoutant la somme des carrés,

$$\lambda^2 = 1, \quad \text{d'où } \lambda = \pm 1.$$

Les distances Y et Z étant ici toujours positives, d'après nos conventions et la position du cercle par rapport aux deux droites, on doit prendre la valeur $\lambda = 1$; et l'équation du cercle est

$$(15) \qquad YZ = X^2.$$

La constante λ étant égale à $+1$, les relations (14) donnent

$$(16) \qquad \beta + \gamma = 2\alpha + 2k\pi.$$

Il y a donc une relation entre les quantités α, β, γ qui figurent dans les équations (1) N.º (259), lorsque l'équation (15) représente un cercle; c'est qu'en effet, le cercle étant tangent en B et C, la droite BC est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A. C'est précisément ce qu'exprime la relation (16); car on peut l'écrire

$$\alpha-\beta+2k\pi=\gamma-\alpha;$$

d'où

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\gamma-\alpha);$$

et d'après les relations (4) N.º [94] :

$$\sin B=\sin C, \text{ ou } B=C.$$

La valeur $\lambda=+1$ correspond au cas où l'origine des coordonnées cartésiennes est dans l'angle BAC ou dans son opposé au sommet; $\lambda=-1$ correspond au cas où l'origine des coordonnées se trouve dans les autres angles. Cette conséquence résulte de la règle établie pour les signes des fonctions de la forme $(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)$ N.º [76].

Lorsqu'on considère X, Y, Z comme des coordonnées trilatères et qu'on adopte la convention énoncée au N.º [90], la valeur $\lambda=+1$ convient seule à la question.

264. Signification géométrique de l'équation

$$YZ=X^2.$$

Si d'un point quelconque M, pris sur le cercle, on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, MR sur la corde de contact et sur les tangentes, on a

$$MQ=Y,\ MR=Z,\ MP=X;$$

d'où

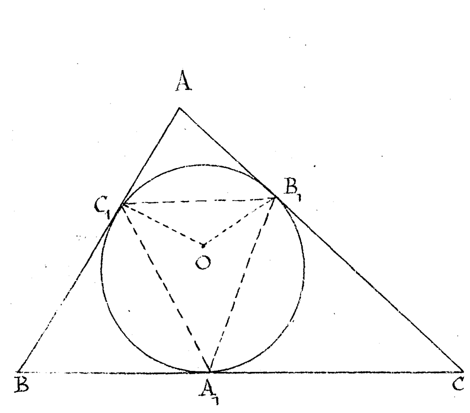
$$\overline{MP}^2=\overline{MQ}.\overline{MR}. \qquad (17)$$

La distance d'un point quelconque du cercle à une corde est moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux tangentes menées aux extrémités de cette corde.

III.º Équation du cercle inscrit à un triangle.

265. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle formé par les trois points de contact; supposons que les équations des côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, mises sous la forme

$$(18)\quad \begin{cases} X_1=p_1-x\cos\alpha_1-y\sin\alpha_1=0, & (B_1C_1)\\ Y_1=q_1-x\cos\beta_1-y\sin\beta_1=0, & (C_1A_1)\\ Z_1=r_1-x\cos\gamma_1-y\sin\gamma_1=0. & (A_1B_1)\end{cases}$$



L'équation du cercle sera alors

$$(19)\quad Y_1Z_1\sin A_1+Z_1X_1\sin B_1+X_1Y_1\sin C_1=0.$$

On peut aussi considérer le cercle comme tangent aux côtés AB et AC, la corde de contact est B_1C_1 etc...; on peut, par conséquent, mettre son équation sous les formes suivantes

$$(20)\quad \begin{cases} YZ=X_1^2,\\ ZX=Y_1^2,\\ XY=Z_1^2.\end{cases}$$

Si, entre les quatre équations (19) et (20), on élimine X_1, Y_1, Z_1, on aura une relation entre les coordonnées X, Y, Z, d'un point quelconque du cercle, c. à. d. l'équation du cercle rapporté au triangle ABC. (Ce genre de démonstration est emprunté au traité des sections Coniques de M. Salmon).

Or on déduit des équations (20)

$$Y_1Z_1=\sqrt{X}\sqrt{XYZ},\ Z_1X_1=\sqrt{Y}\sqrt{XYZ},\ X_1Y_1=\sqrt{Z}\sqrt{XYZ};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (19), on trouve

$$(21)\quad \sqrt{X}\sin A_1+\sqrt{Y}\sin B_1+\sqrt{Z}\sin C_1=0.$$

L'évaluation des angles A_1, B_1, C_1, dépendra de la position du cercle relativement au triangle.

Supposons d'abord le cercle inscrit proprement dit, c.à.d. intérieur au triangle; alors en joignant le centre du cercle inscrit aux points de contact A_1, B_1, C_1, on voit immédiatement que

$$A + 2A_1 = \pi,\ B + 2B_1 = \pi,\ C + 2C_1 = \pi;$$

ou bien

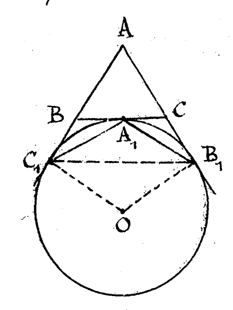
$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},\ B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2};\ C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

L'équation du cercle inscrit au triangle ABC sera donc

$$(22)\quad \sqrt{X}\cos\frac{A}{2} + \sqrt{Y}\cos\frac{B}{2} + \sqrt{Z}\cos\frac{C}{2} = 0;$$

équation qu'on devra rendre rationnelle.

2°. Le cercle est exinscrit au triangle; supposons le tangent au côté BC et aux prolongements des deux autres côtés AB et AC.



On trouvera à l'aide de considérations semblables aux précédentes

$$2A_1 - A = \pi,\ B + 2B_1 = \pi,\ C + 2C_1 = \pi;$$

d'où

$$A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2},\ B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},\ C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Mais la différence essentielle de ce cas avec le précédent consiste dans la forme des relations (20).

Lorsqu'on rapporte le cercle au triangle AB_1C_1, les distances Y et Z, qui sont les coordonnées relatives au triangle ABC, sont positives, on a encore

$$YZ = X_1^2;$$

lorsqu'on rapporte le cercle au triangle BA_1C_1, les distances X et Z, qui doivent toujours être rapportées au triangle ABC, sont la 1ère négative, et la 2ème positive; on a donc

$$(-X)Z = Y_1^2;$$

et, d'après les mêmes considérations,

$$(-X)Y = Z_1^2$$

On déduit de là

$$Y_1Z_1 = \sqrt{-X}\sqrt{-XYZ},\ X_1Z_1\sqrt{Y}\sqrt{-XYZ},\ X_1Y_1 = \sqrt{Z}\sqrt{-XYZ}.$$

L'équation du cercle exinscrit touchant le côté BC sera donc

$$(23)\qquad \sqrt{-X}.\cos\frac{A}{2} + \sqrt{Y}\cos\frac{B}{2} + \sqrt{Z}\cos\frac{C}{2} = 0.$$

IV°. Équation d'un cercle circonscrit à un quadrilatère.

206 Soient les équations des côtés du quadrilatère

$$24\quad \begin{cases} M = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, & (AB)\\ N = x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0, & (BC)\\ P = x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = 0, & (CD).\\ Q = x\cos\delta + y\sin\delta - s = 0. & (DA)\end{cases}$$

L'équation

$$MP = \lambda NQ,$$

représente une courbe du second degré passant par les points A(M=0, N=0), B(N=0, P=0), C(P=0, Q=0), D(Q=0, M=0)

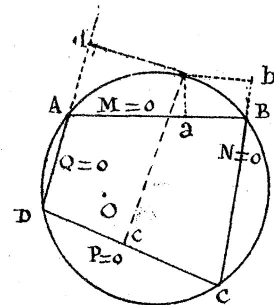
nous verrons plus loin que c'est l'équation la plus générale des courbes satisfaisant à ces conditions.

En exprimant que cette équation représente un cercle, on trouve les relations

$$(25)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\gamma) = \lambda \cos(\beta+\delta), \\ \sin(\alpha+\gamma) = \lambda \sin(\beta+\delta). \end{cases}$$

On en déduit, en ajoutant la somme des carrés :

$$\lambda^2 = 1, \text{ d'où } \lambda = \pm 1.$$



Or si l'on suppose l'origine des coordonnées dans l'intérieur du quadrilatère, trois des fonctions (24), (M, N, P, Q, représenteront moins les distances d'un point du cercle aux côtés du quadrilatère, et une donnera la valeur absolue de cette distance ; on devra alors prendre $\lambda = -1$.

Ainsi, lorsque l'origine des coordonnées est dans l'intérieur du quadrilatère, l'équation du cercle circonscrit est

$$(26)\qquad MP + NQ = 0 ;$$

lorsque l'origine des coordonnées est extérieure au quadrilatère, l'équation du cercle circonscrit est

$$(27)\qquad MP - NQ = 0.$$

Les relations (25) donnent alors :

Dans le 1er cas : $\alpha + \gamma = \pi + \beta + \delta + 2k\pi$;

Dans le 2ème cas : $\alpha + \gamma = \beta + \delta + 2k\pi$.

Ces relations expriment que les angles opposés du quadrilatère convexe sont supplémentaires.

267. Signification géométrique des équations (26) et (27).

Si d'un point quelconque m du cercle circonscrit on abaisse, sur les côtés du quadrilatère, les perpendiculaires ma, mb, mc, md, on a, au signe près :

$$M = \overline{ma},\ N = \overline{mb},\ P = \overline{mc},\ Q = \overline{md} ;$$

les équations (26) ou (27) donnent alors

$$(28)\qquad \frac{\overline{ma}.\overline{mc}}{\overline{mb}.\overline{md}} = 1 ;$$

c. à. d. que :

Si un cercle est circonscrit à un quadrilatère, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du cercle sur deux côtés opposés est égal au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés.

V°. Points circulaires de l'infini. Equation d'un cercle quelconque.

268. Les points circulaires de l'infini sont les intersections d'un cercle quelconque par la droite de l'infini.

Nous pourrons prendre, par conséquent, le cercle circonscrit au triangle de référence, et, dans le cas des coordonnées trilatères correspondant à des paramètres de référence égaux à l'unité, les points circulaires à l'infini seront déterminés par les deux équations

$$(29)\qquad \begin{cases} YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C = 0, \\ X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0. \end{cases} \quad (\omega, \omega').$$

269. Ceci nous permet d'écrire, dans ce même système de coordonnées, l'équation d'un cercle quelconque.

L'équation générale d'un cercle quelconque sera

(30) $\quad k\,(YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C) + (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C)\,(mX + nY + pZ) = o;$

$\frac{m}{k}, \frac{n}{k}, \frac{p}{k}$ étant des constantes arbitraires.

L'équation (30) représente, en effet, une courbe du second degré passant par les points circulaires à l'infini N.° [268]; donc cette courbe est un cercle N.° [211]; on pourra enfin disposer des trois constantes arbitraires de manière à faire passer la courbe par trois points arbitrairement choisis; c'est donc l'équation générale d'un cercle.

On peut donner à l'équation (30) des formes variées; il nous suffira d'avoir signalé la méthode qui permet d'écrire de suite cette équation.

§II Polaires. Cercle des neuf points.

1.° Polaire. Tangente.

270. Si P est un point fixe, et que A et B soient les intersections, avec le cercle, d'une sécante quelconque, la polaire du point P sera le lieu du point M défini par la relation

$$(1) \qquad \frac{2}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{MA}{PA} + \frac{MB}{PB}\ \ o;$$

voir N.° [231].

Soit l'équation du cercle donné

$$(3) \qquad f(X, Y, Z) = o;$$

et X_o, Y_o, Z_o, les coordonnées du P; X, Y, Z, les coordonnées du point M.

Si nous représentons par $\frac{m_2}{m_1}$ le rapport $\frac{MA}{AP}$, dans lequel le cercle divise le segment PM, les coordonnées du point A seront N.° [90]

$$\frac{m_1 X + m_2 X_o}{m_1 + m_2}, \quad \frac{m_1 Y + m_2 Y_o}{m_1 + m_2}, \quad \frac{m_1 Z + m_2 Z_o}{m_1 + m_2}.$$

Les coordonnées de ce point devant vérifier l'équation (3) du cercle, on aura

$$f(m_1 X + m_2 X_o,\ m_1 Y + m_2 Y_o,\ m_1 Z + m_2 Z_o) = o;$$

ou, développant d'après la formule de Taylor

$$(4) \qquad m_1^2 f(X,Y,Z) + m_1 m_2 \left[X_o f'_X + Y_o f'_Y + Z_o f'_Z\right] + m_2^2 f(X_o, Y_o, Z_o) = o.$$

Cette équation détermine les valeurs, en grandeur et signe, des deux rapports $\frac{MA}{AP}$ et $\frac{MB}{BP}$; or, d'après la relation (2), la somme de ces rapports doit être nulle, donc on a

$$(5) \qquad X_o f'_X + Y_o f'_Y + Z_o f'_Z = o;$$

équation qui peut s'écrire, puisque la fonction $f(X, Y, Z)$ est du second degré,

$$(5\,bis) \qquad X f'_{X_o} + Y f'_{Y_o} + Z f'_{Z_o} = o.$$

Les équations (5) ou (5 bis) définissent une relation entre les coordonnées d'un point quelconque M du lieu; elles représentent donc la polaire du point P (X_o, Y_o, Z_o).

271. Si le point P est sur le cercle, la polaire de ce point est la tangente au cercle N.° [232] remarque II; par conséquent, l'équation de la tangente en un point (X_o, Y_o, Z_o) du cercle

$$f(X, Y, Z) = o,$$

sera

$$(6)\qquad X f'_{X_0} + Y f'_{Y_0} + Z f'_{Z_0} = 0,$$

avec la condition

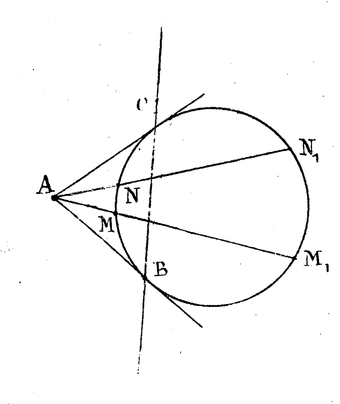
$$(6\ bis)\qquad f(X_0, Y_0, Z_0) = 0.$$

272. Il sera encore facile de déterminer les coordonnées du centre d'un cercle, en remarquant que N° (235)
le centre est le pôle de la droite de l'infini.
Ainsi les coordonnées du centre du cercle (15) N° (263) seront déterminées par les relations

$$-\frac{2X}{\sin A} = \frac{Y}{\sin B} = \frac{Z}{\sin C}.$$

273. On peut encore démontrer comme il suit la propriété de la polaire, énoncée au N° (237).
Prenons, pour triangle de référence, le triangle formé par les tangentes menées du point P et leur corde de contact; l'équation du cercle sera

$$YZ = X^2;$$



la droite BC est la polaire du point A N° (232) remarque I.
Menons par le point A deux sécantes quelconques

$$(MM_1)\quad Y = \lambda Z;\quad Y = \mu Z\quad (NN_1).$$

Les coordonnées de leurs points d'intersection avec le cercle seront

$$M \begin{cases} Y = \lambda Z, \\ X = Z\sqrt{\lambda}; \end{cases} \qquad N \begin{cases} Y = \mu Z, \\ X = Z\sqrt{\mu}; \end{cases}$$

$$M_1 \begin{cases} Y = \lambda Z, \\ X = -Z\sqrt{\lambda}. \end{cases} \qquad N_1 \begin{cases} Y = \mu Z, \\ X = -Z\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Une droite, passant par le point M, aura pour équation

$$Y - \lambda Z + k(X - Z\sqrt{\lambda}) = 0;$$

exprimons qu'elle passe par le point N_1, on trouve

$$k = \sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda};$$

on a donc pour l'équation de la droite MN_1

$$(MN_1)\qquad X(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda}) + Y - Z\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} = 0;$$

on trouvera de même en changeant $\sqrt{\lambda}$ en $-\sqrt{\lambda}$, et $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$:

$$(M_1N)\qquad X(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\lambda}) + Y - Z\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} = 0;$$

d'où l'on conclut, en retranchant membre à membre

$$X = 0;$$

c. à. d. que les sécantes MN_1 et M_1N se coupent sur la polaire BC.
On fera la même vérification pour les droites MN et M_1N_1.

274. Appliquons le principe du N° (243) à la recherche de la condition d'orthogonalité des deux droites

$$(1)\qquad \begin{cases} M_1 X + N_1 Y + P_1 Z = 0, \\ M_2 X + N_2 Y + P_2 Z = 0. \end{cases}$$

Il faut exprimer que leurs traces sur la droite de l'infini forment, avec les points circulaires à l'infini, un système harmonique.
Les points circulaires à l'infini sont N° (268)

$$(2)\qquad \begin{cases} YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C = 0, \\ X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0. \end{cases}$$

Déterminons un faisceau de droites, ayant par exemple son sommet au sommet C du triangle de

référence, et passant par les points considérés.

L'équation d'une droite parallèle à la 1ère des droites (1), sera

$$M_1 X + N_1 Y + P_1 Z + k\,(X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = 0;$$

exprimons qu'elle passe par le sommet C, on a

$$k \sin C = -P_1\,.$$

Ainsi, les équations de deux droites parallèles aux droites (1) et passant par le sommet C seront

$$(3)\quad \begin{cases} (M_1 \sin C - P_1 \sin A)\,X + (N_1 \sin C - P_1 \sin B)\,Y = 0, \\ (M_2 \sin C - P_2 \sin A)\,X + (N_2 \sin C - P_2 \sin B)\,Y = 0. \end{cases}$$

En éliminant Z entre les équations (2), on aura les équations de deux droites passant par le sommet (C) et les points circulaires à l'infini, savoir

$$(4)\qquad X^2 \sin A \sin B + XY\,(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) + Y^2 \sin^2 A \sin^2 B = 0.$$

Appliquons à ces deux équations (3) et (4) la formule (31) du No. [177] savoir

$$(5)\qquad BB_1 = 2\,(A_1 C + A C_1)\;;$$

on a ici

$$\begin{cases} A_1 = \sin A \sin B, \quad B_1 = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C, \quad C_1 = \sin A \sin B\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = (M_1 \sin C - P_1 \sin A)(M_2 \sin C - P_2 \sin A), \\ C = (N_1 \sin C - P_1 \sin B)(N_2 \sin C - P_2 \sin B), \\ B = (N_1 \sin C - P_1 \sin B)(M_2 \sin C - P_2 \sin A) + N_2 \sin C - P_2 \sin B)(M_1 \sin C - P_1 \sin A). \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans la relation (1), on trouve, toutes réductions faites, pour la condition d'orthogonalité des deux droites (1).

$$(6)\qquad M_1 M_2 + N_1 N_2 + P_1 P_2 - (N_1 P_2 + N_2 P_1)\cos A - (P_1 M_2 + P_2 M_1)\cos B - (M_1 N_2 + M_2 N_1)\cos C = 0.$$

II°. Cercle conjugué par rapport à un triangle.

275. Nous appellerons cercle conjugué par rapport à un triangle un cercle tel, qu'un sommet quelconque du triangle est, par rapport au cercle, le pôle du côté opposé.

Si l'on prend, le triangle donné pour triangle de référence, l'équation

$$(1)\qquad \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0,$$

sera l'équation générale des courbes du second degré conjuguées par rapport au triangle de référence.

En effet, la polaire du sommet A ($Y_0 = 0, Z_0 = 0$) est No. [270] $X = 0$; et ainsi des autres; nous verrons plus loin que c'est l'équation générale.

Identifiant alors cette équation (1) avec l'équation générale (30) d'un cercle No. [269], on a en supposant $k = 1$,

$$p \sin B + n \sin C = \sin A\,,$$
$$m \sin C + p \sin A = \sin B\,,$$
$$n \sin A + m \sin B = \sin C\,,$$
$$\frac{\lambda}{m \sin A} = \frac{\mu}{n \sin B} = \frac{\nu}{p \sin C}$$

Delà on déduit facilement, en se rappelant les relations

$$(2)\quad \begin{cases} \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C.\cos A, \\ \sin^2 B = \sin^2 C + \sin^2 A - 2 \sin C \sin A.\cos B, \\ \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B.\cos C, \end{cases}$$

$$m = \cos A, \quad n = \cos B, \quad p = \cos C.$$

D'où

$$\frac{\lambda}{\sin 2A} = \frac{\mu}{\sin 2B} = \frac{\nu}{\sin 2C}\,.$$

L'équation du cercle conjugué par rapport au triangle de référence est donc

$$(3) \qquad X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C = 0.$$

Le centre du cercle conjugué est le point de rencontre des hauteurs; car, chaque sommet étant le pôle du côté opposé, les perpendiculaires abaissées d'un sommet sur le côté opposé doivent passer par le centre. On le voit encore d'après le N.° (272), car on aura pour déterminer le centre les équations

$$\frac{X \sin 2A}{\sin A} = \frac{Y \sin 2B}{\sin B} = \frac{Z \sin 2C}{\sin C}, \text{ ou } X \cos A = Y \cos B = Z \cos C;$$

ce qui est le point de rencontre des hauteurs N.° (102).

En ayant égard à cette propriété et à celle qui a été énoncée au N.° (235), on construira aisément le cercle conjugué à un triangle donné.

III.° Cercle des neuf points d'un triangle.

276. On appelle ainsi le cercle qui passe en même temps:

1.° par les trois pieds des hauteurs d'un triangle;

2.° par les milieux de ses côtés;

3.° par les milieux des droites qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs.

L'équation d'un cercle quelconque est (30) N.° (269)

$$YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C + (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C)(mX + nY + pZ) = 0.$$

Soient A_1, B_1, C_1, les milieux des côtés du triangle que nous choisirons pour triangle de référence; ces points se trouvant sur les médianes, leurs coordonnées respectives seront N.° (102)

$$(1) \qquad A_1 \begin{cases} X = 0, \\ Y \sin B = Z \sin C; \end{cases} \quad B_1 \begin{cases} Y = 0, \\ Z \sin C = X \sin A; \end{cases} \quad C_1 \begin{cases} Z = 0, \\ X \sin A = Y \sin B. \end{cases}$$

Exprimons que le cercle ci-dessus passe par ces trois points, on trouve

$$\begin{cases} n \sin C + p \sin B + \frac{\sin A}{2} = 0, \\ p \sin A + m \sin C + \frac{\sin B}{2} = 0, \\ m \sin B + n \sin A + \frac{\sin C}{2} = 0; \end{cases}$$

on déduit de là:

$$m = -\frac{1}{2} \cos A, \; n = -\frac{1}{2} \cos B, \; p = -\frac{1}{2} \cos C.$$

L'équation du cercle des neuf points pour le triangle de référence est donc

$$(2) \qquad (X \sin A + Y \sin B + Z \sin C)(X \cos A + Y \cos B + Z \cos C) - 2(YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C) = 0,$$

ou, en développant

$$(2 \text{ bis}) \qquad X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C - 2(YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C) = 0.$$

Sous cette dernière forme, nous voyons que le cercle des neuf points (2 bis), le cercle circonscrit (5) N.° (259), le cercle conjugué (3) N.° (275), ont même axe radical.

277. Démontrons maintenant les propriétés énoncées pour le cercle des neufs points.

1.° Rayon du cercle des neuf points

Soit R_1 le rayon du cercle, on a

$$\frac{B_1 C_1}{\sin A_1} = 2 R_1;$$

or

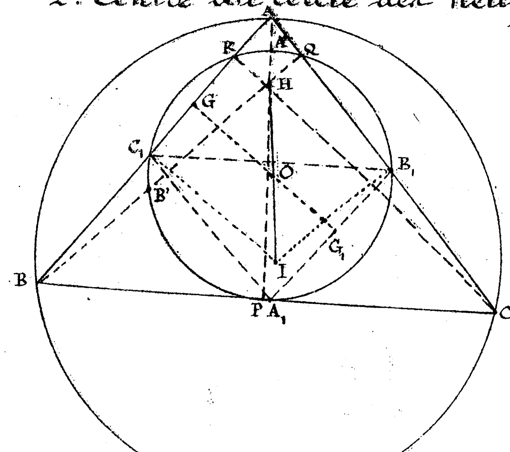
$$B_1 C_1 = \frac{a}{2}, \; \sin A_1 = \sin A, \; \frac{a}{\sin A} = 2R;$$

Donc

$$(3) \qquad R_1 = \frac{R}{2};$$

le rayon du cercle des neuf points est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

2° Centre du cercle des neuf points



D'après la remarque du N° (272) et l'équation (2 bis), les coordonnées du centre seront déterminées par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{X\sin 2A - Y\sin C - Z\sin B}{\sin A} = \dfrac{-X\sin C + Y\sin 2B - Z\sin A}{\sin B} = \dfrac{-X\sin B - Y\sin A + Z\sin 2C}{\sin C}, \\ X\sin A + Y\sin B + \sin C = \dfrac{S}{R} \quad \text{N° (93)} \end{cases}$$

On déduit de ces équations, en ayant aux relations (2) du N° (275) et à l'égalité $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$:

$$(4) \quad \begin{cases} X_o = \frac{R}{2}\cos(B-C), \\ Y_o = \frac{R}{2}\cos(C-A), \\ Z_o = \frac{R}{2}\cos(A-B). \end{cases}$$

On peut encore calculer, comme il suit les coordonnées du centre. On a

$$Z_o = OG = G_1G - OG_1.$$

Or GG_1 est égal au Z du point B_1, puisque A_1B_1 est parallèle à AB; mais le point B_1 est l'intersection de AC et de la médiane BB_1; le Z du point B_1 sera, par conséquent, donné par les équations

$$\begin{cases} Y = 0 \qquad Z\sin C = X\sin A, \\ X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R}. \end{cases}$$

On en conclut

$$Z = GG_1 = \frac{S}{2R\sin C}.$$

La quantité OG_1 est le Z du centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$; par suite

$$OG_1 = \frac{R}{2}\cos C.$$

Donc

$$Z_o = \frac{S}{2R\sin C} - \frac{R}{2}\cos C.$$

Mais on sait que

$$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C, \quad -\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B;$$

par conséquent

$$Z_o = \frac{R}{2}\left[2\sin A \sin B - \cos C\right] = \frac{R}{2}\cos(A-B).$$

C. Q. F. D.

3° Le centre du cercle des neuf points est le milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point d'intersection des trois hauteurs.

Les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du centre du cercle circonscrit sont N° (260)

$$(5) \qquad X_1 = R\cos A, \; Y_1 = R\cos B, \; Z_1 = R\cos C.$$

Les coordonnées X_2, Y_2, Z_2, du point de rencontre des hauteurs sont données par les équations N° (102)

$$X\cos A = Y\cos B = Z\cos C;$$

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R}.$$

Si l'on remarque que

$$(6)\quad \begin{cases} S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C, \\ \operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C, \end{cases}$$

on déduit des équations précédentes

$$(7)\quad \begin{cases} X_2 = 2R \cos B \cos C, \\ Y_2 = 2R \cos A \cos C, \\ Z_2 = 2R \cos A \cos B. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2},\quad Y_0 = \frac{Y_1 + Y_2}{2},\quad Z_0 = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

Or

$$X_1 + X_2 = 2R \cos B \cos C + R \cos A = R(2 \cos B \cos C + \cos A);$$

et comme

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C,$$

il en résulte

$$X_1 + X_2 = R \cos(B - C) = 2X_0.$$

C. Q. F. D.

4° Le cercle des neuf points passe par les pieds des hauteurs.

Le pied P de la hauteur correspondant au sommet A, par exemple, a pour coordonnées

$$X = 0,\quad Y \cos B = Z \cos C.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (2) du cercle des neuf points, on trouve

$$\sin A \cdot 2 \cos B \cos C - 2 \sin A \cos B \cos C;$$

quantité évidemment nulle.

5° Le cercle des neuf points passe par les milieux des droites qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs.

Les coordonnées du point de concours H des hauteurs sont données par les égalités (7); les coordonnées du sommet A sont

$$X = 2R \sin B \sin C,\ Y = 0,\ Z = 0;$$

les coordonnées du point A', milieu de AH, seront donc

$$(8)\qquad X_3 = 2R \cos(B - C),\quad Y_3 = R \cos A \cos C,\quad Z_3 = R \cos A \cos B.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (2bis) du cercle des neuf points, préalablement mise sous la forme

$$X \{X \sin 2A - 2Y \sin C - 2Z \sin B\} + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C - 2YZ \sin A = 0.$$

Or la quantité entre parenthèses s'annule quand on y remplace X, Y, Z par X_3, Y_3, Z_3; elle devient en effet

$$\cos(B - C) \sin A \cos A - \cos A \sin B \cos B - \cos A \sin C \cos C,$$

$$\text{ou}\quad \cos A \{\cos(B - C) \sin A - \sin B \cos B - \sin C \cos C\},$$

$$\text{ou}\quad \cos A \{\cos(B - C) \sin(B + C) - \sin B \cos B - \sin C \cos C\};$$

et, en effectuant le produit $\cos(B - C) \sin(B + C)$, on voit que la quantité entre parenthèse est nulle.

Quant aux trois derniers termes de l'équation précédente, ils deviennent par la substitution

$$2R^2 \cos^2 A \cos B \cos C \{\sin B \cos C + \sin C \cos B - \sin A\},$$

quantité évidemment nulle.

Ainsi

Le cercle des neuf points d'un triangle passe : 1° par les milieux des côtés; 2° par les

pieds des hauteurs; 3° par les milieux des droites joignant les sommets au point de concours des hauteurs.

Le rayon de ce cercle est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle; son centre est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs.

Les développements que nous venons de donner permettront de résoudre analytiquement un grand nombre de questions concernant le cercle des neuf points.

Chapitre III
Equation tangentielle du Cercle.

§I Coordonnées bilatères u et v.

1°. Equation tangentielle d'un Cercle.

L'équation tangentielle d'une courbe est une relation entre les coordonnées d'une quelconque de ses tangentes; la courbe est le lieu des intersections successives de ses tangentes, ou l'enveloppe de ses tangentes.

277. 1re Méthode

L'équation en coordonnées cartésiennes d'un cercle, ayant pour rayon R, a et b pour coordonnées du centre, est

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta = R^2.$$

Soit une tangente en un point x_0, y_0; son équation sera N° (212)

$$\left.\begin{array}{l} x\left[x_0-a+(y_0-b)\cos\theta\right]+y\left[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\right]-a(x_0-a)-b(y_0-b) \\ -b(x_0-a)\cos\theta-a(y_0-b)\cos\theta-R^2 \end{array}\right\}=0;$$

avec la condition

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+2(x_0-a)(y_0-b)\cos\theta-R^2=0.$$

Les coordonnées u_0, v_0 de la tangente seront donc N° (110) déterminées par les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x_0-a)+(y_0-b)\cos\theta}{u_0}=\dfrac{(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)}{v_0}=\dfrac{(x_0-a)(a+b\cos\theta)+(y_0-b)(a\cos\theta+b)+R^2}{1}; \\ (x_0-a)^2+(y_0-b)^2+2(x_0-a)(y_0-b)\cos\theta=R^2; \end{array}\right.$$

ou, en supprimant les indices, prenant les coordonnées homogènes dans l'un et l'autre système, et désignant par $-\lambda$ la valeur commune des rapports:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x+y\cos\theta-(a+b\cos\theta)z+\lambda u=0, \\ x\cos\theta+y-(a\cos\theta+b)z+\lambda v=0, \\ x(a+b\cos\theta)+y(a\cos\theta+b)-(a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2)z+\lambda w=0, \\ x^2+y^2+2xy\cos\theta-2xz(a+b\cos\theta)-2yz(a\cos\theta+b)+(a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2)z^2=0. \end{array}\right.$$

A la dernière de ces quatre équations nous substituerons la suivante, obtenue en ajoutant les trois premières respectivement multipliées par x, y, z:

$$(3\,bis)\qquad ux+vy-wz=0.$$

Nous aurons alors l'enveloppe des tangentes (u, v, w), en éliminant x, y, z, λ entre les trois premières équations (3) et l'équation (3 bis); on trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & \cos\theta & a+b\cos\theta & u \\ \cos\theta & 1 & a\cos\theta+b & v \\ a+b\cos\theta & b+\cos\theta+b & a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2 & w \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de là en développant

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{l} u^2(a^2\sin^2\theta-R^2)+v^2(b^2\sin^2\theta-R^2)+w^2\sin^2\theta+2uv(R^2\cos\theta+ab\sin^2\theta) \\ \quad -2a\sin^2\theta.\,uw-2b\sin\theta.\,vw \end{array}\right\} = 0;$$

ou, en faisant $w=1$,

$$(4\ bis)\qquad \left.\begin{array}{l} u^2(R^2-a^2\sin^2\theta)+v^2(R^2-b^2\sin^2\theta)-2uv(R^2\cos\theta+ab\sin^2\theta) \\ \quad +2a\sin\theta.\,u+2b\sin\theta.\,v-\sin^2\theta \end{array}\right\} = 0;$$

telle est **l'équation tangentielle d'un cercle** (axes obliques), a et b sont les coordonnées du centre, et R le rayon.

278. ## 2ème Méthode.

On arrive plus rapidement à l'équation du cercle, en prenant pour point de départ la formule N.º (129) qui donne la distance d'un point à une droite.

Si R est la distance du centre à une tangente quelconque, et si a et b sont les coordonnées du centre, ou, ce qui revient au même, si

$$au+bv-1=0$$

est l'équation du centre, on aura, d'après la formule mentionnée:

$$(4\ ter)\qquad R=\frac{(au+bv-1)\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}};$$

d'où résulte l'équation déjà trouvée

$$u^2(R^2-a^2\sin^2\theta)+v^2(R^2-b^2\sin^2\theta)-2uv(R^2\cos\theta+ab\sin^2\theta)+2a\sin^2\theta.\,u+2b\sin^2\theta.\,v-\sin^2\theta=0.$$

279. ## Formes particulières de l'équation tangentielle du cercle.

1.º Axes de coordonnées rectangulaires, ou $\theta=90°$:

l'équation d'un cercle quelconque prend alors la forme plus simple

$$(5)\qquad u^2(R^2-a^2)+v^2(R^2-b^2)-2abuv+2au+2bv-1=0.$$

2.º L'origine des coordonnées est le centre du cercle.

Alors a et b sont nuls, et l'équation d'un cercle a la forme

$$(6)\qquad u^2+v^2-2uv\cos\theta=\frac{\sin^2\theta}{R^2}\qquad \text{(axes obliques)}$$

$$(7)\qquad u^2+v^2=\frac{1}{R^2}\qquad \text{(axes rectangulaires)}.$$

3.º Le cercle est tangent aux deux axes de coordonnées.

On a alors $a=\frac{R}{\sin\theta}$, $b=\frac{R}{\sin\theta}$; ou encore, on peut exprimer que les coordonnées de l'axe Ox (c. à. d. $u=\infty$, $v=\infty$, et $\lim.\frac{u}{v}=0$) vérifient l'équation du cercle, ainsi que les coordonnées de l'axe Oy (c. à. d. $u=\infty$, $v=\infty$, $\lim.\frac{v}{u}=0$); on trouve ainsi

$$(8)\qquad uv-k(u+v)+k^2\cos^2\frac{\theta}{2}=0,\quad \text{où}\quad k=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{R}.$$

Remarque. Pour que l'équation générale du second degré

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0,$$

représente un cercle, il faut et il suffit que

$$D^2-AF=E^2-CF=\frac{BF-ED}{\cos\theta},$$

θ étant l'angle des axes.

II°. Point de contact d'une tangente.

280 Remarquons d'abord que par un point arbitrairement donné

$$(9) \qquad Au + Bv + C = 0,$$

on peut toujours mener deux tangentes à un cercle; car les coordonnées u et v de ces tangentes seront les solutions communes aux équations (9) et (4), nombre évidemment égal à deux; le cercle est donc une courbe de 2ème classe N.° [36].

281. Soient u_o, v_o les coordonnées d'une tangente au cercle

$$(10) \qquad f(u, v) = 0, \quad ou \quad f(u, v, w) = 0$$

en rendant homogène; c.à.d. que u_o, v_o, sont une solution de l'équation (10); il s'agit de trouver l'équation du point de contact de cette tangente.

1.ère Méthode. Le point de contact de la tangente (u_o, v_o) est la position limite du point d'intersection de cette tangente avec une tangente infiniment voisine $(u_o + \Delta u_o, v_o + \Delta v_o)$. Or l'équation du point d'intersection de ces deux droites est N.° [120]

$$v - v_o = \frac{\Delta v_o}{\Delta u_o}(u - u_o)$$

La limite du rapport $\frac{\Delta v_o}{\Delta u_o}$ est la dérivée de v par rapport à u, v étant une fonction de u définie par l'équation (10)

On a donc pour l'équation du point de contact

$$v - v_o = -\frac{f'_{u_o}}{f'_{v_o}}(u - u_o); \text{ avec } f(u_o, v_o) = 0,$$

ou

$$u f'_{u_o} + v f'_{v_o} - (v_o f'_{v_o} + u_o f'_{u_o}) = 0.$$

Si l'on suppose la fonction $f(u, v)$ rendue homogène, on a

$$u_o f'_{u_o} + v_o f'_{v_o} + w_o f'_{w_o} = 2 f(u_o, v_o, w_o) = 0.$$

Ainsi l'équation du point de contact de la tangente (u_o, v_o) au cercle

$$(10) \qquad f(u, v, w) = 0,$$

sera

$$(11) \qquad u f'_{u_o} + v f'_{v_o} + w f_{w_o} = 0,$$

avec la condition

$$(11 \text{ bis}) \qquad f(u_o, v_o, w_o) = 0$$

Pour le cercle

$$(12) \qquad u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2},$$

l'équation du point de contact de la tangente (u_o, v_o) sera

$$(13) \qquad \begin{cases} u u_o + v v_o = \frac{1}{R^2}, \\ u_o^2 + v_o^2 = \frac{1}{R^2}. \end{cases}$$

282. 2.ème Méthode.

L'équation du cercle, en coordonnées Cartésiennes homogènes, étant

$$(14) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

les coordonnées u, v, w, d'une tangente

$$\xi F'_x + \eta F'_y + F'_z = 0,$$

sont liées aux coordonnées x, y, z, de son point de contact par les relations

$$(15) \qquad \frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{-w}; \text{ d'où } ux + vy - wz = 0.$$

En éliminant x, y, z entre les équations (15), on obtiendra l'équation tangentielle du cercle, savoir

$$(16) \qquad f(u, v, w) = 0.$$

Or si l'on pose

$$(17) \qquad u = \frac{1}{2} F'_x, \quad v = \frac{1}{2} F'_y, \quad w = -\frac{1}{2} F'_z,$$

les fonctions f et F se changeront identiquement l'une dans l'autre; de sorte qu'on aura l'identité

$$(18) \qquad F(x, y, z) = f(u, v, w),$$

si l'on a égard aux relations (17).

En effet, si

$$F(x, y, z) = A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2D xz + 2E yz + F z^2,$$

le résultat de l'élimination de x, y, z, entre les équations (15) est

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or si l'on pose

$$(16 \text{ bis}) \qquad f(u, v, w) = -\frac{\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}};$$

on constate aisément l'identité (18), lorsqu'on a remplacé u, v, w par les valeurs (17). Il suffit, pour cela, de retrancher de la dernière colonne du déterminant (numérateur) la somme des trois premières respectivement multipliées par x, y, z.

Nous pourrons donc, lorsqu'il s'agira de transformer les équations d'un système dans un autre, regarder les coordonnées u, v, w, d'une tangente comme définies par les égalités (17) en fonction des coordonnées de son point de contact.

Nous allons en conclure les coordonnées du point de contact en fonction des coordonnées de la tangente.

Différentions les deux membres de l'identité (18) par rapport à u, en considérant x, y, z, comme des fonctions de u; il vient

$$f'_u = F'_x \cdot x'_u + F'_y \cdot y'_u + F'_z \cdot z'_u,$$

ou, d'après les relations (17),

$$f'_u = 2\{u x'_u + v y'_u - w z'_u\}.$$

Mais entre u, v, w, et x, y, z, on a la relation

$$u x + v y - w z = 0;$$

d'où en différentiant par rapport à u,

$$u x'_u + v y'_u - w z'_u + x = 0;$$

par conséquent

$$x = -\frac{1}{2} f'_u.$$

On arrivera donc ainsi aux relations suivantes

$$(19) \qquad x = -\frac{1}{2} f'_u, \quad y = -\frac{1}{2} f'_v, \quad z = +\frac{1}{2} f'_w,$$

qui ne sont autres que les équations (17) résolues par rapport à x, y, z.

Les relations (17), (18), et (19) établissent nettement la corrélation entre les équations du même cercle, prises dans le système des coordonnées-point et dans le système des coordonnées tangentielles.

D'après cela, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point de contact d'une tangente (u_0, v_0, w_0) au cercle

$$(16)\qquad f(u,v,w)=0,$$

l'équation de ce point de contact sera

$$u x_0 + v y_0 - w z_0 = 0;$$

ou, d'après les relations (19)

$$(20)\qquad u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0,$$

avec la condition

$$(20\ bis)\qquad f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

De même, si (u_0, v_0, w_0) sont les coordonnées d'une tangente au point (x_0, y_0, z_0) pour le cercle

$$(14)\qquad F(x,y,z) = 0,$$

l'équation de cette tangente sera

$$x u_0 + y v_0 - z w_0 = 0;$$

ou, d'après les relations (17)

$$(21)\qquad x F'_{x_0} + y F'_{y_0} + z F'_{z_0} = 0,$$

avec la condition

$$(21\ bis)\qquad F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

283. Condition pour qu'un point donné soit sur un cercle.

Soit l'équation du cercle

$$(22)\qquad f(u,v,w) = 0,$$

et

$$(23)\qquad Au + Bv + Cw = 0,$$

l'équation du point donné.

Désignons par (u_0, v_0, w_0) les coordonnées de la tangente au point (23) supposé sur le cercle; l'équation du point de contact sera N.º [281]

$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0, \text{ avec } f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Identifions cette dernière équation avec l'équation (23), nous aurons

$$(24)\qquad \frac{f'_{u_0}}{A} = \frac{f'_{v_0}}{B} = \frac{f'_{w_0}}{C}, \quad \text{et } f(u_0, v_0, w_0) = 0;$$

on pourra remplacer la dernière par $A u_0 + B v_0 + C w_0 = 0$.

L'élimination des rapports $\frac{u_0}{w_0}$, $\frac{v_0}{w_0}$, entre les trois équations (24) nous conduira à la condition cherchée.

III: Points circulaires à l'infini.

284. Prenons l'équation du cercle sous la forme N.º [279]

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{R^2},$$

ou, en rendant homogène

$$(25)\qquad u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{R^2} w^2.$$

L'équation d'un point à l'infini est de la forme N.º [115]

$$(26)\qquad Au + Bv = 0;$$

exprimons que ce point est sur le cercle (25), on aura d'après la méthode exposée au N.º [283].

$$\frac{u_0 - v_0 \cos\theta}{A} = \frac{v_0 - u_0 \cos\theta}{B} = \frac{-w_0 \frac{\sin^2\theta}{R^2}}{0}$$

$$A u_0 + B v_0 = 0.$$

Eliminons u_0, v_0, w_0 entre ces équations, on trouve $w_0 = 0$, puis

$$\frac{u_0 - v_0 \cos\theta}{A} = \frac{v_0 - u_0 \cos\theta}{B}, \quad A u_0 + B v_0 = 0;$$

d'où l'on conclut l'équation de condition

$$(27)\qquad A^2+B^2+2\,AB\cos\theta=o.$$

Si maintenant on élimine $\frac{A}{B}$ entre les équations (26) et (27), on aura l'équation des points à l'infini sur le cercle; on trouve ainsi

$$(28)\quad \begin{cases} u^2+v^2-2uv\cos\theta=o & (\text{axes obliques}),\\ u^2+v^2=o & (\text{axes rectangulaires});\end{cases}$$

c'est l'équation tangentielle des points circulaires à l'infini.

On voit que l'équation (28) se déduira de l'équation (25) en supposant $w=o$, c.à.d. en cherchant les tangentes dont les coordonnées $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, sont infinies, ou enfin, les tangentes qui passent par le centre.

Remarque I. L'équation (7) N.° [279] nous montre qu'on peut regarder l'équation tangentielle (28) des deux points circulaires à l'infini, comme celle d'un cercle de centre fixe et dont le rayon est infini.

Remarque II. Deux droites sont rectangulaires lorsque leurs points polaires, relatifs au système des deux points circulaires à l'infini, forment avec ces deux points un système harmonique; ou, ce qui revient au même, lorsque le point polaire de l'une se trouve sur l'autre.

Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2) les deux droites, le point polaire de la première par rapport aux deux points circulaires (28) est N.° [135]

$$\frac{u+v\sqrt{-1}}{u_1+v_1\sqrt{-1}}+\frac{u-v\sqrt{-1}}{u_1-v_1\sqrt{-1}}=o;$$

équation qui se réduit à

$$uu_1+vv_1=o;$$

c'est le point polaire N.° [285] de la droite (u_1, v_1) par rapport au cercle (28).

Or si l'on exprime que la droite (u_2, v_2) passe par ce point, on a

$$u_1u_2+v_1v_2=o;$$

ce qui est la condition pour que les deux droites soient rectangulaires N.° [131].

IV.° Point polaire d'une droite.

285 Si l'on considère une droite fixe D, que par un point quelconque I de cette droite on mène les deux tangentes IT_1 et IT_2 au cercle; une droite IL, passant par le point I et telle que

$$(1)\qquad \frac{2}{\operatorname{tang} DIL}=\frac{1}{\operatorname{tang} DIT_1}+\frac{1}{\operatorname{tang} DIT_2},$$

passera par un point fixe P, lorsque le point I se déplacera sur la droite D; nous dirons que le point P est le point polaire de la droite D.

Remarquons d'abord, comme au N.° [134] que la relation (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{DIT_1}}+\frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{DIT_2}}=o.$$

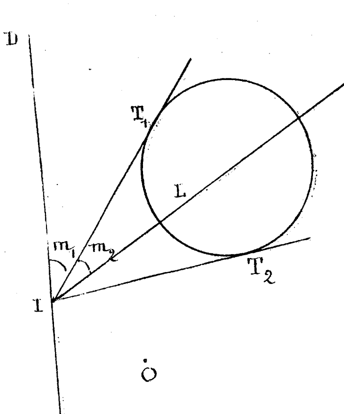
Si O est l'origine des coordonnées, et qu'on pose

$$(3)\qquad \frac{m_2}{m_1}=\frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{T_1ID}}\cdot\frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}},$$

les coordonnées de la droite IT_1 seront, d'après les formules (25) du N.° [122]

$$u_1=\frac{m_1u+m_2u_0}{m_1+m_2}\qquad v_1=\frac{m_1v+m_2v_0}{m_1+m_2},$$

en désignant par u_0 et v_0, les coordonnées de la droite D, et par (u, v) les coordonnées de la droite IL.



Or la droite IT_1 doit être tangente au cercle; soit

$$f(u, v) = 0, \quad \text{ou } f(u, v, w) = 0;$$

l'équation de ce cercle; on aura donc

$$f(m_1 u + m_2 u_0, m_1 v + m_2 v_0, m_1 + m_2) = 0.$$

En développant par la formule de Taylor, il vient (en écrivant $m_1 w + m_2 w_0$ au lieu de $m_1 + m_2$, ce qu'on peut toujours faire en supposant $w = 1$, $w_0 = 1$ à la fin du calcul).

$$m_1^2 f(u, v, w) + m_1 m_2 \left[u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0}\right] + m_2^2 f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Cette équation détermine les deux rapports $\frac{m_2}{m_1}$ correspondant aux deux tangentes menées par le point I; on aura d'après cette équation et la définition (3) de la valeur $\frac{m_2}{m_1}$:

$$\frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}} \left(\frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{T_1ID}} + \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{T_2ID}}\right) = -\frac{u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0}}{f(u_0, v_0, w_0)}.$$

Si alors on a égard à la relation (2), on conclut de là

$$(3) \qquad u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0,$$

équation qu'on peut écrire

$$(3 \text{ bis}) \qquad u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0.$$

L'équation (3) est une relation entre les coordonnées (u, v, w) de la droite mobile IL; on voit que cette droite passe par un point fixe; l'équation (3) est celle du **point polaire** de la droite $D(u_0, v_0)$.

Remarque. Lorsque la droite (u_0, v_0, w_0) est tangente au cercle, l'équation (3) donne évidemment le point de contact (11) N.° [281].

286. **Le point polaire d'une droite n'est autre, ici, que le pôle de la droite** N.° [231]

Soit, par exemple, l'équation tangentielle du cercle

$$(4) \qquad u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2};$$

son équation en **coordonnées-point**, sera N.° [277] ou [282]

$$(5) \qquad x^2 + y^2 = R^2;$$

on a entre les coordonnées du point (x, y) et celles de la droite (u, v) les relations

$$(6) \qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{v} = R^2, \quad ux + vy - 1 = 0.$$

L'équation du **point polaire** de la droite (u_0, v_0) est N.° [285]

$$(7) \qquad uu_0 + vv_0 - \frac{1}{R^2} = 0,$$

et les coordonnées (x_0, y_0) de ce point seront N.° [111]

$$(8) \qquad x_0 = R^2 u_0, \quad y_0 = R^2 v_0.$$

D'un autre côté, la **polaire** de ce point par rapport au cercle (5) est N.° [231]

$$x R^2 u_0 + y R^2 v_0 - R^2 = 0, \quad \text{ou } x u_0 + y v_0 - 1 = 0;$$

équation représentant une droite dont les coordonnées sont u_0 et v_0 N.° [110].

C. Q. F. D.

Nous verrons plus loin une propriété qui nous permettra de construire le point polaire d'une droite par rapport à un cercle.

287. **Le point polaire de la droite de l'infini est le centre du cercle.**

L'équation tangentielle du cercle rapporté à son centre est

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}; \text{ ou, en coordonnées homogènes, } u^2 + v^2 = \frac{w^2}{R^2};$$

le point polaire de la droite (u_0, v_0, w_0) est

$$uu_0 + vv_0 - \frac{w w_0}{R^2} = 0.$$

Les coordonnées de la droite de l'infini sont $u_0 = 0, v_0 = 0$, et l'équation précédente donne
$$w = 0;$$
c'est l'équation de l'origine ou centre du cercle.

V°. Équation du cercle tangent à trois droites, etc....

288. Supposons les axes rectangulaires, l'équation du cercle sera N° [279]
$$(1) \qquad u^2(R^2-a^2) + v^2(R^2-b^2) - 2abuv + 2au + 2bv - 1 = 0;$$
exprimons qu'il touche les trois droites (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), on a les équations de condition
$$(2) \quad \begin{cases} (R^2-a^2)u_1^2 + (R^2-b^2)v_1^2 - 2abu_1v_1 + 2au_1 + 2bv_1 - 1 = 0, \\ (R^2-a^2)u_2^2 + (R^2-b^2)v_2^2 - 2abu_2v_2 + 2au_2 + 2bv_2 - 1 = 0, \\ (R^2-a^2)u_3^2 + (R^2-b^2)v_3^2 - 2abu_3v_3 + 2au_3 + 2bv_3 - 1 = 0; \end{cases}$$
ces relations détermineront les quantités inconnues R (rayon du cercle), a, b (coordonnées du centre).

289. Détermination des points communs à deux cercles.

y

x

O

Soient les équations des deux cercles
$$(1) \qquad f(u, v, w) = 0, \quad \varphi_1(u, v, w) = 0;$$
et (u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1) les tangentes au premier et au second de ces cercles en un de leurs points communs; les équations des points de contact seront
$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0.$$
$$u \varphi'_{u_1} + v \varphi'_{v_1} + w f'_{w_1} = 0.$$

Ces deux points devant coïncider, on aura, pour déterminer les tangentes aux points communs aux deux cercles, les équations
$$(2) \qquad \frac{f'_{u_0}}{\varphi'_{u_1}} = \frac{f'_{v_0}}{\varphi'_{v_1}} = \frac{f'_{w_0}}{\varphi'_{w_1}},$$
$$f(u_0, v_0, w_0) = 0, \quad \varphi(u_1, v_1, w_1) = 0;$$
ces quatre équations permettront de calculer les quatre inconnues $\frac{u_0}{w_0}, \frac{v_0}{w_0}, \frac{u_1}{w_1}, \frac{v_1}{w_1}$.

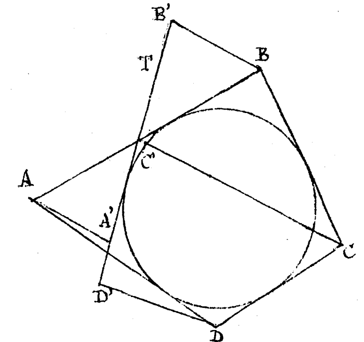
Appliquons aux deux cercles N.os [279] (figure ci-dessus)
$$(3) \quad \begin{cases} uv - k(u+v) + k^2 \cos^2\frac{\theta}{2} = 0, \\ uv - g(u+v) + g^2 \cos^2\frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$
On aura, dans le cas actuel
$$\frac{v_0 - k}{v_1 - g} = \frac{u_0 - k}{u_1 - g} = \frac{k(u_0+v_0) - 2k^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{g(u_1+v_1) - 2g^2\cos^2\frac{\theta}{2}};$$
$$u_0 v_0 - k(u_0+v_0) + k^2\cos^2\frac{\theta}{2} = 0,$$
$$u_1 v_1 - g(u_1+v_1) + g^2\cos^2\frac{\theta}{2} = 0.$$
La résolution de ces équations ne présente pas de difficultés, mais il n'y a aucun intérêt à l'effectuer.

VI°. Cercle inscrit dans un quadrilatère.

290. Pour montrer l'usage qu'on peut faire des équations tangentielles nous démontrerons la propriété suivante.

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si une tangente roule sur le cercle, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant.

Chasles. Géométrie Supérieure, page 468.



Soient

$$(1)\quad \begin{cases} A = au + a_1 v - 1 = 0, \\ B = bu + b_1 v - 1 = 0, \\ C = cu + c_1 v - 1 = 0, \\ D = du + d_1 v - 1 = 0; \end{cases}$$

les équations des sommets du quadrilatère ; l'équation

$$(2)\qquad AC - \lambda BD = 0$$

représentera une conique inscrite dans ce quadrilatère ; et si le quadrilatère satisfait aux conditions d'inscriptibilité, cette conique sera un cercle, pour une valeur convenable de λ.

Si u et v sont les coordonnées d'une tangente quelconque, la distance des points A, B, C, D, à cette tangente seront N.º (129) :

$$\overline{AA'} = \frac{au + a_1 v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{A}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \overline{BB'} = \frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

$$\overline{CC'} = \frac{cu + c_1 v - 1}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}};\quad \overline{DD'} = \frac{D}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

De là on conclut, eu égard à la relation (2)

$$(3)\qquad \frac{\overline{AA'}\cdot\overline{CC'}}{\overline{BB'}\cdot\overline{DD'}} = \frac{A\cdot C}{B\cdot D} = \lambda;$$

C. Q. F. D.

291\. On voit ainsi que l'introduction des coordonnées tangentielles permet à l'analyse d'aborder les propriétés relatives aux tangentes avec la même facilité que les propriétés relatives aux points.

C'est par l'emploi simultané de ces deux systèmes de coordonnées, coordonnées d'un point, coordonnées d'une droite, que l'analytique pourra lutter avec la Géométrie pure.

Ne pouvant pas donner plus d'étendue à l'étude du cercle, nous renverrons aux Exercices les énoncés des nombreuses propriétés qui concernent le cercle.

---

§II Coordonnées trilatères.

1.º Équation tangentielle d'un Cercle.

292\. L'équation tangentielle d'un cercle sera une relation entre les coordonnées U, V, W. d'une quelconque de ses tangentes.

1.ère Méthode.

Soit l'équation d'un cercle, en coordonnées trilatères,

$$(1)\qquad F(X, Y, Z) = 0.$$

La tangente en un point (X_0, Y_0, Z_0) aura pour équation N.º (271)

$$\begin{cases} X F'_{X_0} + Y F'_{Y_0} + Z F'_{Z_0} = 0, \\ \text{avec}\ \ F(X_0, Y_0, Z_0) = 0; \end{cases}$$

par suite, les coordonnées (U_0, V_0, W_0) de cette tangente seront données N.º (139) par les équations

$$\frac{F'_{X_0}}{U_0} = \frac{F'_{Y_0}}{V_0} = \frac{F'_{Z_0}}{W_0}.\quad F(X_0, Y_0, Z_0).$$

On aura l'équation tangentielle du cercle, en éliminant X_0, Y_0, Z_0, entre ces trois équations ; on pourra remplacer la dernière par

$$X_0 U_0 + Y_0 V_0 + Z_0 W_0 = 0,$$

obtenue en ajoutant les termes des fractions respectivement multipliées par X_0, Y_0, Z_0.

Ainsi, supprimant les indices, nous concluons de là que l'équation tangentielle du cercle s'obtient en éliminant X, Y, Z, entre les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{F'_X}{U} = \dfrac{F'_Y}{V} = \dfrac{F'_Z}{W}, \\ UX + VY + WZ = 0. \end{cases}$$

On pourra appliquer cette méthode à l'équation générale du N° (269).

2ème Méthode.

Soit ρ le rayon du cercle et

$$(3)\qquad MU + NV + PW = 0,$$

l'équation de son centre. Si U, V, W, sont les coordonnées d'une tangente quelconque à ce cercle, la distance du point (3) à cette tangente devra être constante et égale au rayon. On aura d'après la formule (37) du N° (156)

$$\frac{MU + NV + PW}{\lambda M + \mu N + \nu P} = \rho.$$

Cette équation n'est pas homogène; on la rendra homogène en élevant au carré, puis multipliant par $\frac{S^2}{R^2}$ et ayant égard à la relation (12 bis) du N° (140); l'équation du cercle sera donc

$$(MU+NV+PW)^2 = \frac{R^2}{S^2}\rho^2(\lambda M+\mu N+\nu P)^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{U^2 \sin^2 A}{\lambda^2} + \dfrac{V^2\sin^2 B}{\mu^2} + \dfrac{W^2 \sin^2 C}{\nu^2} - \dfrac{2VW}{\mu\nu}\sin B \sin C \cos A \\ -2\dfrac{WU}{\lambda\nu}\sin C \sin A \cos B - 2\dfrac{UV}{\lambda\mu}\sin A \sin B \cos C \end{array} \right\};$$

R, S, A, B, C, représentent: le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence, sa surface et ses angles; λ, μ, ν, sont les paramètres de référence N° (139).

Les quantités M, N, P, sont proportionnelles aux coordonnées du centre du cercle, N° (146), nous les représenterons par X_0, Y_0, Z_0; on a, en outre, la relation connue

$$(4)\qquad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Ainsi l'équation tangentielle d'un cercle, dont le centre est

$$(5)\qquad X_0 U + Y_0 V + Z_0 W = 0,$$

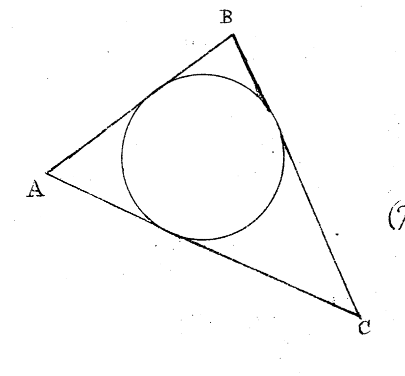
et le rayon ρ, sera

$$(6)\ \left\{ \begin{array}{l} U^2\dfrac{\sin^2 A}{\lambda^2} + V^2\dfrac{\sin^2 B}{\mu^2} + W^2\dfrac{\sin^2 C}{\nu^2} - 2VW\dfrac{\sin B \sin C}{\mu\nu}\cos A \\ -2WU\dfrac{\sin C \sin A}{\nu\lambda}\cos B - 2UV\dfrac{\sin A \sin B}{\lambda\mu}\cos C \end{array} \right\} = \frac{S^2}{R^2\rho^2}\cdot\frac{(UX_0+VY_0+WZ_0)^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2};$$

λ, μ, ν sont les paramètres de référence.

294. Cas particuliers de l'équation du cercle.

1° Cercle inscrit au triangle de référence.



Il faut exprimer que la droite AB $(U=0, V=0)$ est tangente, c.à.d. faire $U=0$ $V=0$, dans l'équation (6); on trouve ainsi

$$\frac{Z_0^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2} = \frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\sin^2 C}{\nu^2}.$$

(7) On aura de même, en écrivant que les côtés BC et CA touchent le cercle

$$\frac{X_0^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2} = \frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\sin^2 A}{\lambda^2},$$

$$\frac{Y_0^2}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2} = \frac{R^2\rho^2}{S^2}\cdot\frac{\sin^2 B}{\mu^2}.$$

Si l'on considère le cercle inscrit dans le triangle, les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 sont positives, et l'on aura

$$\frac{\lambda X_0}{\sin A} = \frac{\mu Y_0}{\sin B} = \frac{\nu Z_0}{\sin C} = \frac{R\rho}{S}(\lambda X_0 + \mu Y_0 + \nu Z_0).$$

Remplaçant, dans l'équation (6), X_0, Y_0, Z_0, par ces valeurs, il vient

$$VW \frac{\sin B \sin C}{\mu\nu}(1+\cos A) + UW \frac{\sin A \sin C}{\nu\lambda}(1+\cos B) + UV \frac{\sin A \sin B}{\lambda\mu}(1+\cos C) = 0;$$

équation qui peut s'écrire définitivement

$$(8) \qquad \frac{\lambda}{\tan g \frac{A}{2}} . VW + \frac{\mu}{\tan g \frac{B}{2}} . UW + \frac{\nu}{\tan g \frac{C}{2}} . UV = 0;$$

telle est l'équation tangentielle du cercle inscrit au triangle de référence.

Si l'on remarque que pour le cercle exinscrit et tangent au côté BC, Y_0, Z_0 sont positifs et X_0 négatif, les relations (7) donneront

$$-\frac{\lambda X_0}{\sin A} = \frac{\mu Y_0}{\sin B} = \frac{\nu Z_0}{\sin C} = \frac{R\rho}{S}(\lambda X_0 + \mu Y_0 + \nu Z_0);$$

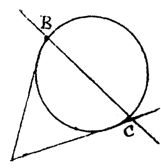
et en substituant dans l'équation (6), on trouvera pour l'équation tangentielle du cercle exinscrit et tangent au côté BC

$$(8 \text{ bis}) \qquad \frac{\lambda}{\tan g \frac{A}{2}} . VW - \mu \tan g \frac{B}{2} . UW - \nu \tan g \frac{C}{2} . UV = 0;$$

les paramètres de référence sont toujours λ, μ, ν.

2° Équation d'un cercle tangent à deux droites.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les deux tangentes et la corde de contact; l'équation du cercle sera



$$(9) \qquad VW = \frac{\mu\nu}{\lambda^2} \sin^2 \frac{A}{2} . U^2 .$$

On trouvera la démonstration au N° (296).

II° Point de contact d'une tangente.

295. Nous verrons plus tard, dans l'étude des tangentes, un mode de démonstration plus rapide et plus direct pour ce genre de questions.

Pour le moment, nous nous contenterons de la méthode suivie au N° (282). Le raisonnement se fera absolument de la même manière; on remarquera seulement que, dans le cas actuel, les coordonnées U, V, W, d'une tangente sont liées aux coordonnées X, Y, Z, du point de contact, par les relations N° (292)

$$\frac{F'_X}{U} = \frac{F'_Y}{V} = \frac{F'_Z}{W}, \quad UX + VY + WZ = 0.$$

De là on conclura que, pour une tangente U_0, V_0, W_0, au cercle

$$(10) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

l'équation du point de contact, sera

$$(11) \qquad Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0} = 0,$$

avec la condition

$$(11 \text{ bis}) \qquad f(U_0, V_0, W_0) = 0.$$

Remarque. Pour exprimer qu'un point

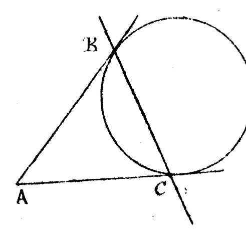
$$(12) \qquad MU + NV + PW = 0,$$

est sur le cercle, il faudra éliminer U_0, V_0, W_0 (v. N° (283)) entre les équations

$$(13)\qquad \frac{f'_{U_0}}{M}=\frac{f'_{V_0}}{N}=\frac{f'_{W_0}}{P},\quad f(U_0,V_0,W_0)=0.$$

296. ## Équation du cercle tangent à deux droites.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les deux tangentes et la corde de contact; écrivons que les droites AB et AC touchent le cercle en B et C respectivement.



La droite AB ($U=0, V=0$) doit être tangente et avoir le point B ($V=0$) pour point de contact, on aura donc N.° (295)

$$\frac{f'_{U_0}}{0}=\frac{f'_{V_0}}{1}=\frac{f'_{W_0}}{0},\quad 2f(U_0,V_0,W_0)=U_0 f'_{U_0}+V_0 f'_{V_0}+W_0 f'_{W_0}=0;$$

ou :

$$(1^\circ)\qquad f'_{U_0}=0,\ f'_{W_0}=0,\ f'_{V_0}\gtrless 0\ ;\ U_0=0,\ V_0=0.$$

En exprimant que la droite AC est tangente en C, on aura

$$(2^\circ)\qquad f'_{U_1}=0,\ f'_{V_1}=0,\ f'_{W_1}\gtrless 0\ ;\ U_1=0,\ W_1=0.$$

Si nous appliquons ces relations à l'équation générale (6), et si l'on remarque que les coordonnées Y_0, Z_0, sont positives, et que X_0 est négative, on trouve

$$(3^\circ)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{Y_0\cdot\dfrac{S}{R\rho}}{\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0}=\frac{\sin B}{\mu},\qquad \frac{Z_0\,\dfrac{S}{R\rho}}{\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0}=\frac{\sin C}{\nu};\\
&\frac{X_0 Y_0\cdot\dfrac{S^2}{R^2\rho^2}}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=-\frac{\sin A\sin B}{\lambda\mu}\cdot\cos C,\qquad \frac{X_0 Z_0\cdot\dfrac{S^2}{R^2\rho^2}}{(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0)^2}=-\frac{\sin A\sin C}{\lambda\nu}\cdot\cos B.
\end{aligned}\right.$$

En divisant membre à membre les deux premières, puis les deux dernières des égalités (3°), et en égalant les valeurs du rapport $\frac{Y_0}{Z_0}$, on a d'abord

$$B=C,$$

condition évidente à priori. Les relations (3°) donnent alors

$$-\frac{\lambda X_0}{\sin A\cos B}=\frac{\mu Y_0}{\sin B}=\frac{\nu Z_0}{\sin B}=\frac{R\rho}{S}\quad(\lambda X_0+\mu Y_0+\nu Z_0).$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (6), donne

$$\left.\begin{aligned}&U^2\frac{\sin^2 A}{\lambda^2}+V^2\frac{\sin^2 B}{\mu^2}+W^2\frac{\sin^2 C}{\nu^2}\ 2VW\frac{\sin^2 B}{\mu\nu}\cos A\\ &-2WU\frac{\sin A\sin B}{\lambda\nu}\cos B\ -2UV\frac{\sin A\sin B}{\lambda\mu}\cos B\end{aligned}\right\}=\left[-U\frac{\sin A\cos B}{\lambda}+V\frac{\sin B}{\mu}+W\frac{\sin B}{\nu}\right]^2;$$

ou, en développant et réduisant :

$$(14)\qquad VW=\frac{\mu\nu}{\lambda^2}\sin^2\frac{A}{2}\cdot U^2;$$

λ, μ, ν sont les paramètres de référence.

De cette équation nous concluons le théorème suivant :

Considérons deux tangentes fixes et une tangente variable; le quotient du produit des distances des points de contact des deux tangentes fixes à la tangente mobile par le carré de la distance, à cette même tangente, de leur point de concours, est égal au carré du sinus du demi-angle des deux tangentes fixes.

III°. Points circulaires à l'infini.

297. L'équation (6) du N° (293) nous conduit immédiatement à l'équation des points circulaires à l'infini; il suffit, en effet, d'après la remarque (I) du N° (284) d'y supposer le rayon ρ infini; on trouve ainsi

$$(15)\qquad U^2\frac{\sin^2 A}{\lambda^2}+V^2\frac{\sin^2 B}{\mu^2}+W^2\frac{\sin^2 C}{\nu^2}-2VW\frac{\sin B\sin C}{\mu\nu}\cos A-2WU\frac{\sin A\sin C}{\lambda\nu}\cos B-2UV\frac{\sin A\sin B}{\lambda\mu}\cos C=0;$$

ou, si l'on suppose les paramètres de référence égaux à l'unité:

$$(15\ bis)\quad U^2\sin^2 A+V^2\sin^2 B+W^2\sin^2 C-2VW\sin B\sin C\cos A-2WU\sin A\sin C\cos B-2UV\sin A\sin B\cos C=0.$$

On peut encore remarquer que les droites qui passant par les points (15), touchent le cercle (6), doivent également passer par le centre du cercle, savoir

$$UX_0+VY_0+WZ_0=0;$$

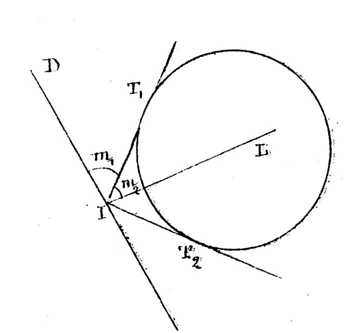
donc les points (15) sont les points circulaires à l'infini.

On peut d'ailleurs vérifier facilement que le premier membre de l'équation (15) est décomposable en deux facteurs du 1er degré.

IV°. Point polaire d'une droite.

298. Le point polaire d'une droite, (voir N° (285) est défini par la relation

$$(1^\circ)\qquad \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{DIT_1}}+\frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{DIT_2}}=0.$$



Si l'on désigne par U_0, V_0, W_0 les coordonnées de la droite D; par U, V, W, celles de la droite IL, et si l'on pose

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{T_1ID}};$$

les coordonnées U_1, V_1, W_1, de la droite ou tangente IT_1, seront données par les relations N° (142)

$$\frac{U_1}{m_1U+m_2U_0}=\frac{V_1}{m_1V+m_2V_0}=\frac{W_1}{m_1W+m_2W_0}.$$

Or les coordonnées U_1, V_1, W_1, doivent vérifier l'équation tangentielle

$$f(U,V,W)=0,$$

du cercle; on aura donc

$$f(m_1U+m_2U_0,\ m_1V+m_2V_0,\ m_1W+m_2W_0)=0;$$

ou, en développant par la formule de Taylor:

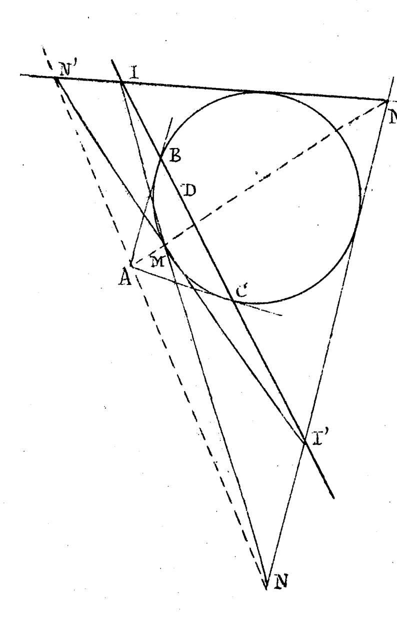
$$m_1^2\ f(U,V,W)+m_1m_2\left(Uf'_{U}+Vf'_{V_0}+Wf'_{W_0}\right)+m_2^2 f(U_0,V_0,W_0)=0.$$

Cette équation détermine les deux rapports $\frac{m_2}{m_1}$ correspondant aux deux tangentes menées par le point I; or d'après la relation (1°), la somme de ces valeurs est nulle, on a donc

$$(16)\qquad Uf'_{U_0}+Vf'_{V_0}+Wf'_{W_0}=0.$$

L'équation (16) est une relation entre les coordonnées U, V, W, de la droite mobile IL: on voit qu'elle passe par un point fixe; l'équation (16), est celle du point polaire de la droite (U_0, V_0, W_0).

299. Propriété du point polaire d'une droite.



« Par deux points quelconques I et I' pris sur la droite fixe D, on mène des tangentes au « cercle; on prend les intersections M et M', N et N', de ces deux couples de tangentes; les droites MM' et NN' passeront, quels que soient les points I et I' par le point polaire A de la « droite D.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par la droite D et par les tangentes aux points B et C où elle rencontre le cercle; l'équation du cercle sera alors N.º (294) (équat. (9))

$$(1) \qquad VW = kU^2.$$

Les équations de deux points quelconques I et I' situés sur la droite D seront de la forme

$$(I) \quad W = \rho . V; \quad (I') \quad W = \rho' . V$$

ρ et ρ' étant des constantes arbitraires.

Nous aurons alors pour les coordonnées des tangentes menées au cercle (1):

$$IM \begin{cases} V = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}}\ U, \\ W = \sqrt{\rho}\sqrt{k}\ U, \end{cases} \qquad I'M \begin{cases} V = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}}\ U, \\ W = \sqrt{\rho'}\sqrt{k}\ U, \end{cases}$$

$$IM' \begin{cases} V = -\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}}\ U, \\ W = -\sqrt{k}\sqrt{\rho}\ U, \end{cases} \qquad I'M' \begin{cases} V = -\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}}\ U, \\ W = -\sqrt{\rho'}\sqrt{k}\ U. \end{cases}$$

D'après cela les équations des points M et M' seront

$$(M) \quad \begin{vmatrix} U & V & W \\ 1 & \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}} & \sqrt{k}\sqrt{\rho} \\ 1 & +\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}} & \sqrt{k}\sqrt{\rho'} \end{vmatrix} = 0, \quad (M') \quad \begin{vmatrix} U & V & W \\ 1 & \dfrac{-\sqrt{k}}{\sqrt{\rho}} & -\sqrt{k}\sqrt{\rho} \\ 1 & \dfrac{-\sqrt{k}}{\sqrt{\rho'}} & -\sqrt{k}\sqrt{\rho'} \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant

$$(M) \quad -\sqrt{k}\,(\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho'})\ U + \sqrt{\rho}\sqrt{\rho'} . V + W = 0,$$
$$(M') \quad +\sqrt{k}\,(\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho'})\ U + \sqrt{\rho}\sqrt{\rho'} . V + W = 0.$$

Si l'on retranche ces deux équations, on aura l'équation d'un point situé sur la droite MN'; or, on trouve ainsi

$$U = 0;$$

donc la droite MM' passe par le point A, lequel est le point polaire de la droite BC.

On constatera de même que la droite NN' passe aussi par le point A.

Donc....

Exercices.

---

300. 1.º Le lieu d'un point tel que la somme des carrés des distances à n points donnés, respectivement multipliées par des constantes données $m_1, m_2 \ldots, m_n$, soit constante, est un cercle.

2.º Étant donnés n points fixes, si une droite est telle que la somme des produits, par des nombres constants $m_1, m_2, \ldots, m_n$, des perpendiculaires abaissées des points donnés sur cette droite, est constante,

cette droite enveloppe un cercle.

Le centre est le centre des distances proportionnelles des n points donnés.

3° On donne deux points A[*] et B, et leurs polaires par rapport à un cercle de centre O; AP et BQ étant les perpendiculaires abaissées respectivement du point A sur la polaire de B, et du point B sur la polaire de A; on a

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

4° Si, dans un cercle, on mène deux cordes rectangulaires quelconques passant par un point fixe, les tangentes aux extrémités de ces cordes forment un quadrilatère qui est toujours inscrit dans un autre cercle fixe.

5° Les bases de tous les triangles isopérimètres, qui ont le même angle au sommet opposé et fixe, enveloppent un même cercle.

6° Si par un point d'une circonférence on mène trois cordes et que sur chacune d'elles comme diamètre on décrive un cercle, les intersections deux à deux de ces trois cercles, différentes du point commun, sont en ligne droite.

7° Étant donnés un cercle et un point fixe P; autour du point P on fait pivoter un angle droit; on joint les points A et B où les côtés de cet angle rencontrent le cercle; le lieu des projections du point P sur la droite AB est un cercle.

8° Les circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont même axe radical.

9° Étant donnés deux cercles fixes, on imagine deux cercles variables tangents entre eux et aux précédents; le lieu du point de contact des cercles variables est un cercle.

10° Étant donnés divers cercles qui ont le même axe radical; si un cercle variable coupe deux de ces cercles sous un angle constant, il coupera chacun des autres cercles sous un angle constant.

11° Étant pris sur une première droite deux points A et B et sur une seconde droite deux points a et b, et étant menées les droites Aa, Bb qui se rencontrent en un point S; si l'on fait tourner la seconde droite ab autour de son point de rencontre γ avec la première, le point S change de position; et alors il arrive: 1° que la droite menée par le point S parallèlement à la droite ab, dans chacune de ses positions, rencontre la droite AB toujours en un même point I; 2° que le point S décrit un cercle qui a pour centre ce point I.

12° Si, étant pris quatre points fixes a, b, c, d, sur un cercle, on joint un point quelconque M du cercle à ces quatre points, le rapport anharmonique du faisceau (M, abcd) est constant.

13° Quatre tangentes fixes à un cercle sont rencontrées par une tangente mobile en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

14° Quand un quadrilatère est un inscrit dans un cercle, une transversale quelconque rencontre ses deux couples de côtés opposés et la circonférence, en trois couples de points qui sont en involution.

15° Le rapport anharmonique de quatre tangentes à un cercle est égal à celui des quatre points de contact.

16° Deux tangentes à un cercle étant fixes, si l'on mène plusieurs autres tangentes, leurs parties comprises entre les deux premières seront vues, du centre du cercle, sous des angles égaux ou suppléments l'un de l'autre.

17° Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les deux couples de droites menées d'un même point à ses sommets opposés, et les tangentes menées du même point à la circonférence du cercle, forment un faisceau en involution.

18° Si, sur le diamètre d'un cercle on prend deux points qui divisent harmoniquement ce diamètre, les distances de chaque point de la circonférence à ces deux points fixes ont leur rapport constant.

19° Les polaires des différents points d'une droite passent toutes par le pôle de la droite.

20° Les pôles des droites passant par un point fixe décrivent la polaire de ce point.

21° Si, autour d'un point fixe, on fait tourner une corde d'un cercle, les distances de ses extrémités à un axe fixe quelconque, divisées respectivement par les distances des deux mêmes points à la polaire du point fixe, ont une somme constante.

22° Si de chaque point d'une droite on mène deux tangentes à un cercle, la somme des distances de ces deux tangentes à un point fixe quelconque, divisées par leurs distances au pôle de la droite, est constante.

23° Si de chaque point d'une droite fixe on mène deux tangentes à un cercle, le produit des sinus des angles qu'elles font avec cette droite est au carré du sinus de l'angle que le rayon mené du même point au centre du cercle fait avec cette même droite, dans une raison constante.

24° Quatre points en ligne droite ont leur rapport anharmonique égal à celui de leurs polaires prises par rapport à un cercle.

25° Quand un quadrilatère est circonscrit au cercle, ses deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent toutes quatre par le même point.

26° Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, le point de rencontre des deux diagonales est le pôle de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés. = Les deux diagonales et la droite qui joint les points de concours des côtés opposés forment un triangle dont chaque sommet a pour polaire le côté opposé.

27° Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les milieux de ses deux diagonales et le centre du cercle sont sur une même droite.

28° Si par les sommets d'un quadrilatère inscrit ABCD, on mène les tangentes EF, FG, GH, HE; les quatre diagonales des deux quadrilatères se coupent en un même point. = Les points de concours L, M, N, P, des côtés opposés de chaque quadrilatère sont en ligne droite. = Les diagonales FH, EG du quadrilatère circonscrit passent par les points L et N où se coupent les côtés opposés du quadrilatère inscrit.

29° Lorsqu'un quadrilatère circonscrit à un cercle est en même temps inscriptible, les cordes qui joignent les poin[ts] de contact des côtés opposés sont les bissectrices des angles formés par les diagonales. — Le produit des deux tangentes menées par les extrémités d'une même diagonale est égal au carré du rayon du cercle inscrit. = Le centre du cercle circonscrit, celui du cercle inscrit et le point de concours des diagonales sont en ligne droite.

30° Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, le point de concours des deux diagonales est le pôle de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés. Ces trois points sont tels que chacun d'eux a pour polaire la droite qui joint les deux autres.

31° Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les polaires d'un point quelconque, relatives au cercle et aux angles formés par les deux couples de côtés opposés passent par un même point.

32° Quand une corde d'un cercle tourne autour d'un point fixe, les rayons menés du centre à ses extrémités font, avec le rayon qui passe par ce point, deux angles tels, que le produit des tangentes des demi-angles reste constant.

33° Si de chaque point d'une droite on mène deux tangentes à un cercle, le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles qu'elles font avec la droite est constant.

34° Les centres de similitude de deux cercles sont deux points conjugués harmoniques par rapport aux deux centres de figure. — Les deux centres de similitude de deux cercles forment une involution avec les deux couples de points des deux circonférences situés sur la ligne des centres.

35° L'axe radical des deux cercles est à égale distance des deux polaires de chaque centre de similitude.

36° Les polaires, par rapport aux deux cercles, d'un point quelconque de l'axe radical, se coupent sur l'axe radical.

37° Les pôles de l'axe radical de deux cercles sont conjugués harmoniques par rapport aux deux centres de similitude.

38° Si de chaque point de l'axe radical de deux cercles, on leur mène deux tangentes, le rapport des tangentes trigonométriques des angles que ces deux droites font avec l'axe radical est constant.

39° Les diagonales du quadrilatère circonscrit à deux cercles rencontrent la ligne des centres en deux points dont chacun a la même polaire dans les deux cercles. = La circonférence, décrite sur la droite qui joint les centres des deux cercles, passe par les quatre sommets de ce quadrilatère.

40° Étant pris un point fixe dans le plan d'un cercle, il existe toujours une certaine droite fixe telle, que le carré de la distance d'un point quelconque du cercle à ce point fixe, est à la simple distance du même point à la droite fixe, dans une raison constante.

41° Quand trois cercles ont même axe radical, toute transversale les rencontre en six points formant une involution.

42° Quand trois cercles ont le même axe radical, si par un point quelconque m de l'un on mène, dans une direction quelconque, une transversale qui rencontre les deux autres en deux couples de points a, a' et b, b', le rapport $\frac{ma.\,ma'}{mb.\,mb'}$, a une valeur constante.

43° Quand trois cercles ont le même axe radical, les tangentes menées de chaque point de l'un aux deux autres ont leurs longueurs dans une raison constante.

44° Quand trois cercles ont le même axe radical, de chaque point de l'un on voit les deux autres sous des angles dont les moitiés ont leurs tangentes trigonométriques dans un rapport constant.

45° Si sur la droite qui joint les centres de similitude de deux cercles comme diamètre, on en décrit un troisième; de chacun des points de ce troisième on verra les deux premiers sous des angles égaux.

46° Quand trois cercles ont même axe radical, si d'un point on leur mène des tangentes, les trois cordes de contact passeront par un même point.

47° Quand les côtés d'un angle rencontrent deux cercles C et C', chacun en quatre points savoir a, b, c, d sur l'un, et a', b', c', d', sur l'autre, deux cordes ad et bc, sous-entendues par cet angle dans le 1er cercle, rencontrent les deux cordes a'd', b'c', sous entendues dans le second cercle, en quatre points m, n, p, q, qui sont situés sur un même cercle, ce cercle a même axe radical que les deux C et C'.

48° Quand trois cercles ont le même axe radical, si d'un point quelconque de l'un on mène une tangente à chacun des deux autres, et qu'on unisse les points de contact par une droite, les cordes interceptées par les deux cercles sur cette droite sont entre elles dans un rapport constant.

49° Étant donnés trois cercles ayant le même axe radical, si un angle de grandeur variable inscrit dans l'un et dont les côtés sont tangents aux deux autres, respectivement, se meut, de manière que son sommet et ses deux côtés glissent sur les trois circonférences, la corde que cet angle intercepte dans le premier cercle roule sur un quatrième cercle ayant le même axe radical avec les trois premiers.

50° Étant donnés trois cercles, si par un même point on en mène trois autres passant, respectivement, par les points d'intersection des trois premiers, pris deux à deux, ces trois cercles se couperont en un même point.

51° Étant donnés deux cercles O et O' auxquels on mène deux cercles tangents C et C', le 1er en M et m_1, et le second en N et n_1, de manière que les deux droites Mm_1, Nn_1 passent par un même centre de similitude des deux cercles O et O' : 1° l'axe radical des deux cercles C et C' passera par ce même point; 2° un centre de similitude de ces deux cercles se trouvera sur l'axe radical des deux O et O', à l'intersection des deux cordes MN, m_1n_1.

52° Une droite L menée par le centre de similitude de deux cercles O et O' est l'axe radical d'une

infinité de systèmes de deux cercles C et C' tangents aux deux O et O'.

Observation. A partir du N° (13), les énoncés de ces propositions ont été pris textuellement dans la Géométrie Supérieure de M. Chasles. La démonstration analytique de ces théorèmes sera un excellent exercice, et fournira en même temps les éléments d'une théorie du cercle, théorie que les limites du cours ne nous permettent pas d'aborder.

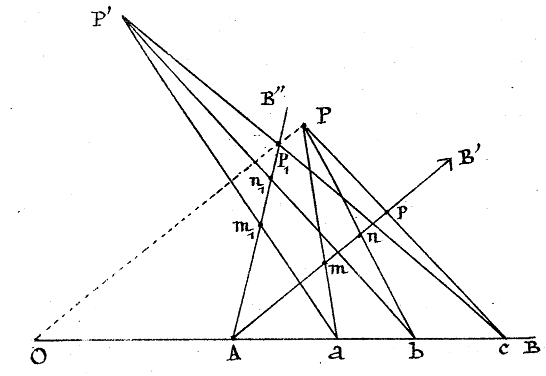
53°. Si d'un point A, pris dans le plan d'une série de cercles ayant même axe radical, on mène deux tangentes à chaque cercle de cette série, tous les points milieux des cordes de contact correspondantes seront sur une nouvelle circonférence coupant orthogonalement les premières.

54°. Soit une série de cercles ayant même axe radical; on a démontré que les polaires d'un point fixe A, par rapport aux cercles de la série, vont concourir en un point fixe A'. Si le point A se meut sur une droite donnée, le point A' décrit une conique passant par les points-limites. Cette conique est aussi le lieu des pôles de la droite donnée par rapport aux cercles de la série.

55°. Tous les cercles ayant leurs centres sur une même droite et coupant orthogonalement un cercle donné ont même axe radical.

56°. Si un triangle T est homothétique aux trois triangles T_1, T_2, T_3, qui ont chacun avec T un sommet commun: 1° La circonférence O, circonscrite au triangle T, touche les circonférences O_1, O_2, O_3, circonscrites aux trois autres triangles; 2° les points de contact sont les sommets des triangles T_1, T_2, T_3, qui appartiennent aussi au triangle T. 3° Les côtés du triangle T passent par les centres de similitude en ligne droite, soit des triangles T_1, T_2, T_3, soit des cercles O_1, O_2, O_3.

57°. On donne deux droites AB et AB'; d'un point P, on mène trois sécantes fixes Pa, Pb, Pc, qui rencontrent AB' en m, n, p; puis on donne à la droite AB' une autre position AB'', et l'on rabat sur cette ligne les longueurs Am, An, Ap, en Am_1, An_1, Ap_1; on joint am_1, bn_1, cp_1; démontrer que ces trois lignes am_1, bn_1, cp_1, se coupent en un même point P'; démontrer que le point P' décrit un cercle, lorsque la droite AB'' prend toutes les positions possibles autour du point A; le centre de ce cercle est sur la droite AB, à l'intersection de cette droite avec la parallèle à AB' menée par le point P.



LIVRE TROISIÈME

Discussion et Réduction de l'équation générale du second degré.

Chapitre I

Classification des courbes du second ordre.

§I Construction et classification des courbes du 2ème ordre.

301. L'équation générale des courbes du second ordre est

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Pour construire et classer les courbes qu'elle représente, nous aurons à examiner deux hypothèses:

I° 1ère Hypothèse: Les coefficients des carrés ne sont pas nuls à la fois.

302. Nous allons résoudre l'équation (1) par rapport à une des variables, y par exemple, et nous supposerons qu'on a ramené à être positif le coefficient C de y^2. On a ainsi

$$(2) \qquad y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+(E^2-CF)};$$

en posant

$$(2\,\text{bis}) \qquad Y=+\frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+(E^2-CF)};$$

il vient

$$(3) \qquad y=-\frac{Bx+E}{C}\pm Y.$$

On construira d'abord la droite

$$(4) \qquad y=-\frac{Bx+E}{C};$$

on voit alors, par l'équation (3), qu'on obtiendra les différents points de la courbe, en portant, à partir du point correspondant de la droite (4), au dessus et au dessous, parallèlement à l'axe des y, une longueur égale à Y.

La droite (4) divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à Oy; cette droite est appelée le diamètre conjugué des cordes parallèles à Oy.

Il faut maintenant étudier les variations de la quantité Y, variations qui dépendent du signe de l'expression (B^2-AC); on a donc à examiner les trois cas principaux:

$$B^2-AC>0;\quad B^2-AC<0;\quad B^2-AC=0.$$

L'examen de chacun de ces cas dépend, en outre, de la forme que prend le trinôme du second degré placé sous le radical Y, c.à.d. du signe de l'expression

$$(BE-CD)^2-(B^2-AC)(E^2-CF).$$

Or si l'on pose

$$(5)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix},$$

on a

$$(5\,bis)\qquad \Delta=-AE^2-CD^2-FB^2+ACF+2BDE;$$

et, par suite:

$$(6)\qquad (BE-CD)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)=-C\Delta.$$

Remarquons que les lignes du déterminant Δ sont les coefficients des demi-dérivées par rapport à x, y, z, de l'équation (1) rendue homogène.

303. **1er Cas:** $\qquad B^2-AC<0.$

L'examen de ce cas renferme les trois hypothèses suivantes:

1° La quantité placée sous le radical Y se décompose en facteurs réels, c. à. d. $-C\Delta>0$;

2° La quantité placée sous le radical Y se réduit à un carré parfait, c. à. d. $-C\Delta=0$;

3° La quantité placée sous le radical Y est la somme de deux carrés, c. à. d. $-C\Delta<0$.

La quantité (B^2-AC) étant négative, les coefficients A et C ne peuvent pas être nuls, et ils doivent, en outre, être de même signe; nous supposerons que l'équation (1) ait été amenée à avoir les coefficients des carrés des variables positifs; le signe de $(-C\Delta)$ sera donc le même que celui de $(-\Delta)$.

1° La quantité placée sous le radical Y est décomposable en facteurs réels, c.à.d. $\Delta<0$.

La valeur (2 bis) de Y sera alors

$$(7)\qquad Y=+\frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)(x-\alpha)(x-\beta)};$$

supposons $\alpha<\beta$.

Soit DD_1 la droite représentée par l'équation (4); $OA=\alpha$, $OB=\beta$, A' et B' les points correspondants sur la droite D_1.

Lorsque x varie de $-\infty$ à α, Y est imaginaire, car les trois facteurs sous le radical sont négatifs; pour $x=\alpha=OA$, on a $Y=0$; c.à.d. que le point A' est un point de la courbe.

Pour toute valeur de x, telle que OP, comprise entre α et β, on aura pour Y (7) des valeurs réelles, lesquelles donneront les points N et N_1, par exemple; pour $x=\beta=OP$, la valeur de Y redeviendra nulle, le point B' sera un point de la courbe.

Enfin, lorsque x varie de β à $+\infty$, la valeur (7) de Y est imaginaire.

La courbe ainsi obtenue est une courbe fermée, puisqu'à une valeur finie de x correspond toujours une valeur finie de Y; on donne à cette courbe le nom d'Ellipse.

Remarques. Les deux droites AA', BB', sont tangentes à la courbe. Donnons par exemple,

à x une valeur un peu supérieure à α, $(\alpha+h)$, nous obtiendrons deux points tels que N et N_1 sur une parallèle à Oy; ces deux points viendront se confondre avec A', lorsque h tendra vers zéro, et la parallèle PNN_1 se confondra avec AA'. On raisonnera de même pour BB'. Nous concluons de là la quantité, placée sous le radical de l'expression (2), représente, lorsqu'on l'égale à zéro, les tangentes aux points où la courbe est rencontrée par la droite (4).

Soit I le milieu de AB; une parallèle à Oy, menée par le point I, rencontre la droite DD_1 en un point C, et la courbe aux points G et H. Les valeurs de Y, correspondant à l'abscisse $OI=\frac{\alpha+\beta}{2}$, sont les valeurs maximums et minimums de Y. En effet, la valeur absolue de la quantité placée sous le radical Y ou (7) est

$$(AC-B^2)(x-\alpha)(\beta-x),$$

pour les valeurs de x comprises entre α et β; or la somme des deux facteurs variables est constante; le produit sera donc maximum lorsque les facteurs seront égaux; ce qui donne

$$x-\alpha=\beta-x, \quad ou \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Il résulte de là que les tangentes, aux points correspondants G et H sur la courbe, seront parallèles à la droite DD_1.

On voit aussi que si l'on considère deux points P et P' équidistants de OI, c.à.d. si l'on donne à x deux valeurs telles que

$$x'=\frac{\alpha+\beta}{2}-k, \quad x''=\frac{\alpha+\beta}{2}+k,$$

les valeurs correspondantes de Y sont égales; ainsi $MN=M'N'$. De là on conclut, que toute corde passant par le point C y est divisée en deux parties égales; le point C est centre de la courbe. On conclut encore que la droite GH divise en deux parties égales les cordes NN' parallèles à la droite DD_1. Les deux droites $A'B'$ et GH sont appelées **diamètres conjugués.**

Dans l'examen des autres cas, il y aura à faire des remarques analogues; nous ne les répéterons plus.

304\. 2° **La quantité placée sous le radical Y est un carré parfait,** c.à.d. $\Delta=0$.

La valeur de Y est alors

$$(8) \quad Y=\frac{1}{C}(x-\alpha)\sqrt{B^2-AC}\ ;$$

et l'équation (2) de la courbe pourra s'écrire

$$(8\,bis) \quad y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{x-\alpha}{C}\sqrt{B^2-AC}\ .$$

En prenant successivement les signes + et −, on obtient les équations de deux droites; mais ces droites sont imaginaires, puisque la quantité (B^2-AC) est négative. Cependant la courbe possède un point réel correspondant à $x=\alpha$, c'est le point d'intersection des deux droites imaginaires (8 bis). On peut dire, dans ce cas, que la courbe se réduit à un **point**, ou mieux, à une **ellipse évanouissante**, ellipse infiniment petite; on peut dire aussi que la courbe est le **système de deux droites imaginaires**.

305\. 3° **La quantite placée sous le radical Y est la somme de deux carrés,** c.à.d. $\Delta>0$.

La valeur de Y se présente sous la forme

$$(9) \qquad Y=\frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)\left[(x-a)^2+b^2\right]}\ .$$

Pour toutes les valeurs de x, Y est imaginaire; car le 1er facteur est négatif, et le 2ème facteur est constamment positif et jamais nul. L'équation (1) ne représente plus alors de courbe réelle; dans ce cas, nous dirons que l'équation (1) représente une **ellipse imaginaire**.

306\. **2ème Cas:** $\qquad B^2-AC>0.$

L'examen de ce cas renferme les deux hypothèses suivantes.

La quantité sous le radical Y est la somme ou la différence de 2 carrés, c.à.d. $\Delta\gtrless 0$;

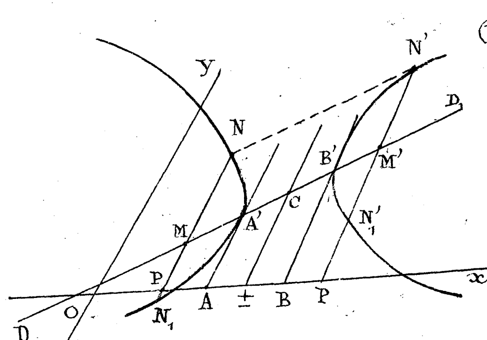
La quantité sous le radical Y est un carré parfait, c.à.d. $\Delta = 0$.

1° La quantité sous le radical n'est pas un carré parfait, c.à.d. $\Delta \gtrless 0$.

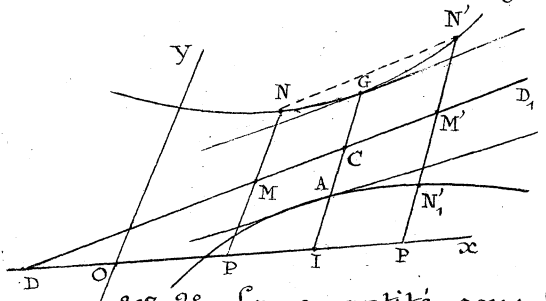
La quantité Y prend l'une ou l'autre des formes :

$$(10) \qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)(x-\alpha)(x-\beta)}\ ;$$

$$(10 bis) \qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)\left[(x-a)^2 + b^2\right]}\ .$$



Si Y a la forme (10), on voit que la quantité Y est réelle lorsque x varie de $-\infty$ à α ; elle devient imaginaire pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β ; et enfin, elle redevient réelle, lorsque x varie de β à $+\infty$. Nous renverrons au N.° [303] pour la marche à suivre dans la discussion complète. La courbe représentée par l'équation (1) rencontre la droite DD_1 aux deux points A' et B' ; elle possède deux branches infinies ; on lui donne le nom d'hyperbole ; elle a la forme indiquée dans la figure ci-contre.



Lorsque Y a la forme (10 bis), on voit que le radical Y est toujours réel pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$; comme Y n'est jamais nul, la courbe ne rencontre pas la droite DD_1. La valeur minimum de Y a lieu pour $x = a = OI$. La courbe représentée par l'équation (1) possède deux branches infinies ; sa forme ne diffère pas essentiellement de la précédente ; c'est encore une hyperbole.

307. 2° La quantité sous le radical est un carré parfait, c.à.d. $\Delta = 0$.

La valeur de Y est alors

$$(11) \qquad Y = \frac{1}{C}(x-\alpha)\sqrt{B^2 - AC}\ ,$$

et l'équation (2) de la courbe pourra s'écrire

$$(11 bis) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{x-\alpha}{C}\sqrt{B^2 - AC}\ .$$

En prenant successivement les signes + et −, on a les équations de deux droites réelles. L'équation (1) représente donc alors un système de deux droites réelles ; on peut aussi considérer ces deux droites comme formant une hyperbole dont les axes seraient nuls, c.à.d. une hyperbole réduite à son centre, ou encore une hyperbole évanouissante.

308. 3ème Cas : $B^2 - AC = 0$.

Dans ce cas, la valeur (2 bis) de Y a la forme plus simple

$$(12) \qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{2(BE - CD)x + E^2 - CF}\ .$$

Remarquons d'abord que la relation (6) devient alors

$$(13) \qquad (BE - CD)^2 = -C\Delta.$$

Nous aurons donc à examiner les deux hypothèses suivantes :

$$\Delta \gtrless 0\ ; \text{ et } \Delta = 0.$$

1° Le coefficient de x, sous le radical, est différent de zéro, c.à.d. $\Delta \gtrless 0$.

La quantité Y sera de la forme

$$(14) \qquad Y = \frac{1}{C}\sqrt{m(x-\alpha)}\ .$$

Si m est positif Y, sera imaginaire lorsque x variera de $-\infty$ à α ; pour $x = \alpha$, on aura $Y = 0$, ce qui donne le point A' situé sur la droite DD_1. Pour toutes les valeurs de x supérieures à α, le radical Y sera toujours réel. La droite AA' touche la courbe en A'. On a donc une courbe, toute entière à droite de la parallèle AA', et possédant une double branche infinie ; on lui donne

le nom de parabole.

Si m était négatif, on trouverait une courbe de même forme, mais elle serait tournée en sens inverse de la précédente.

309. 2° Le coefficient de x, sous le radical, est nul, c. à. d. $\Delta = 0$.

L'équation (2 bis), d'après (13) et (12) se réduit alors à

$$(15) \qquad y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - CF}\,;$$

en prenant successivement le signe + et − on aura les équations de deux droites parallèles. Ainsi l'équation (1) représentera, dans ce cas:

deux droites parallèles réelles, si $(E^2 - CF) > 0$;

deux droites coïncidentes, si $(E^2 - CF) = 0$;

deux droites parallèles imaginaires, si $(E^2 - CF) < 0$.

II° 2ème Hypothèse: Les coefficients des carrés peuvent être nuls à la fois.

310. Lorsque le coefficient d'un des carrés est nul, celui de y^2 par exemple, on peut résoudre par rapport à l'autre variable x, si le coefficient de x^2 n'est pas nul; on reproduira alors la discussion et une partie des conclusions qui précèdent. Mais, au point de vue de la construction de la courbe, il est préférable de résoudre l'équation par rapport à la variable dont le carré manque, puis d'effectuer la division; en opérant ainsi on met en évidence les deux asymptotes de la courbe; c'est là l'avantage de cette manière d'opérer. Dans l'examen que nous allons faire, se trouvera compris le cas où les coefficients des carrés sont nuls tous deux.

Supposons donc $C = 0$; l'équation (1) donnera alors

$$(16) \qquad y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx + E)}\,.$$

Nous aurons à examiner les deux cas suivants:

Le coefficient du produit xy est différent de zéro, c. à. d. $B \gtrless 0$;

le coefficient du produit xy est nul, c. à. d. $B = 0$.

311. 1er Cas: $B \gtrless 0$.

Comme le numérateur de y (16) est du second degré et que le dénominateur est du premier degré, on effectuera la division; on trouvera ainsi

$$(17) \qquad y = -\frac{Ax + k}{2B} + \frac{R}{2(Bx + E)}\,,$$

en posant

$$\begin{cases} k = \dfrac{2BD - AE}{B}\,, \\[2ex] R = \dfrac{2BDE - AE^2 - FB^2}{B^2}\,. \end{cases}$$

Or, d'après la valeur (5 bis) de Δ, N° [302], on voit, en introduisant l'hypothèse $C = 0$, que

$$(18) \qquad R = \frac{\Delta}{B^2}\,.$$

Delà, les deux hypothèses à examiner :

Le reste de la division est différent de zéro, c. à. d. $\Delta \gtrless 0$,

le reste de la division est nul, c. à. d. $\Delta = 0$.

1° Le reste de la division est différent de zéro, c. à. d. $\Delta \gtrless 0$.

Pour construire la courbe, on construira d'abord la droite

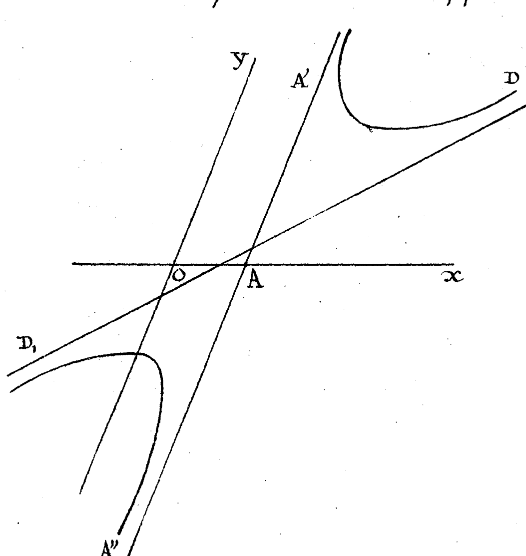
$$(19) \qquad y = -\frac{Ax+k}{2B},$$

soit DD_1 cette droite ; puis, à partir du point de la droite correspondant à une certaine abscisse x, on portera, parallèlement à Oy, une longueur égale à

$$(20) \qquad Y = \frac{R}{2(Bx+E)} = \frac{R_1}{x-\alpha},$$

au dessus et au dessous de la droite DD_1, suivant que la quantité Y est positive ou négative.

Pour fixer les idées, supposons R_1 positif ; puis faisons varier x de $-\infty$ à $+\infty$.



Pour des valeurs de x négatives, très-grandes en valeur absolue, la quantité Y est négative, et très-petite en valeur absolue ; nous aurons donc, au dessous de la droite DD_1, et à gauche de l'axe Oy, des points qui se rapprocheront indéfiniment de la droite DD_1, lorsque la valeur absolue de x croîtra indéfiniment ; la droite DD_1 est dite **asymptote** à la courbe.

Lorsqu'on fait croître x algébriquement, à partir de $-\infty$, en le laissant inférieur à α, la valeur de Y reste négative et croît indéfiniment, en valeur absolue, lorsque x se rapporte de α ; la courbe se rapproche indéfiniment de la droite AA', menée parallèlement à l'axe Oy, par le point A tel que $OA = \alpha$; la droite $A'A''$ est encore une **asymptote** de la courbe.

Donnons maintenant à x une valeur un peu supérieure à α, Y devient alors positive et très-grande ; nous aurons donc des points, au dessus de la droite DD_1 et très éloignés de DD_1, à droite de la ligne AA' et très rapprochés de AA', la courbe aura la droite AA' pour asymptote. Enfin, si l'on fait croître x à partir de α jusqu'à $+\infty$, la quantité Y diminue de plus en plus en restant toujours positive ; et la courbe se rapproche de nouveau indéfiniment de la droite DD_1, en restant au dessus.

Nous avons, dans ce cas, une courbe possédant deux branches infinies, ou une **Hyperbole**.

312. 2° Le reste de la division est nul, c. à. d. $\Delta = 0$.

Mettons d'abord l'équation (17) sous la forme suivante :

$$(2By + Ax + k)(2Bx + E) = \frac{R}{2};$$

si nous introduisons alors l'hypothèse admise, on trouve

$$(21) \qquad (2By + Ax + k)(2Bx + E) = 0.$$

Cette équation représente **un système de deux droites** ; l'une d'elles est parallèle à l'axe Oy.

Remarque. Si A étant nul en même temps que C, la deuxième droite, DD_1, serait parallèle à l'axe Ox.

313. **2ème Cas :** $\qquad B = 0$.

Comme, dans le cas actuel, B et C sont nuls, on a d'abord

$$B^2 - AC = 0;$$

la valeur de Δ est *N°* [302]

$$(22) \qquad \Delta = -AE^2;$$

et l'équation de la courbe a la forme simple

$$(23) \qquad y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2E}.$$

La discussion de ce cas renferme les deux hypothèses suivantes :

$$\Delta \gtrless 0\,; \qquad \Delta = 0.$$

1° *La quantité Δ est différente de zéro.*

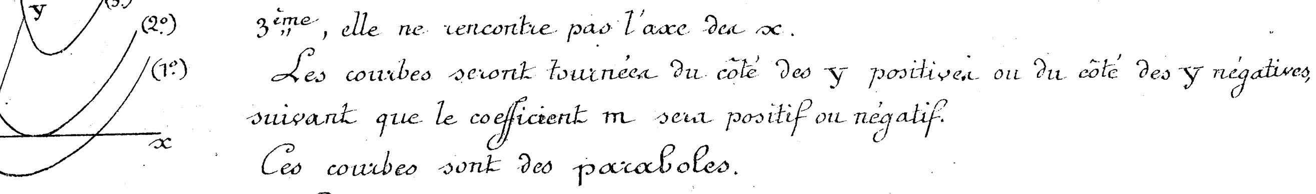
L'équation (23) pourra se présenter sous l'une ou l'autre des trois formes qui suivent :

$$(24, 1°) \qquad y = m(x-\alpha)(x-\beta);$$

$$(24, 2°) \qquad y = m(x-\alpha)^2;$$

$$(24, 3°) \qquad y = m\left[(x-a)^2 + b^2\right].$$

Dans les trois cas, on a une courbe ayant une double branche infinie ; dans le 1er Cas, cette courbe coupe l'axe des x en deux points ; dans le 2ème, elle touche cet axe ; dans le 3ème, elle ne rencontre pas l'axe des x.



Les courbes seront tournées du côté des y positives ou du côté des y négatives, suivant que le coefficient m sera positif ou négatif.

Ces courbes sont des *paraboles*.



314. 2° *La quantité Δ est nulle.*

La quantité Δ peut devenir nulle soit par l'annulation de E, soit par l'annulation de A.

Si E est nul, l'équation (23) de la courbe se réduit à

$$(25) \qquad Ax^2 + 2Dx + F = 0, \quad \text{ou } (x-\alpha)(x-\beta) = 0, \text{ etc...};$$

équation qui représente deux droites parallèles, réelles, coïncidentes ou imaginaires, suivant que $(D^2 - AF)$ est supérieur, égal, ou inférieur à zéro ; ces droites sont parallèles à l'axe des y.

Si A est nul, l'équation (23) devient, en la rendant homogène

$$(26) \qquad z(2Ey + 2Dx + Fz) = 0;$$

on peut encore regarder cette équation comme représentant deux droites parallèles, dont l'une est à l'infini.

III. Résumé.

315. Nous résumerons, comme il suit toute la discussion précédente :

Posons

$$(\text{I}) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

ce déterminant dont la formation a été indiquée au No (302) est appelé le *discriminant* de la fonction du second degré qui forme le premier membre de l'équation de la courbe, savoir

$$(\text{II}) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

le déterminant partiel

$$(\text{III}) \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

est un *invariant* de la fonction formée par les termes du second degré en x et y.

Le genre et les variétés des courbes du second degré sont caractérisés par les signes et les valeurs des deux fonctions Δ et δ.

I° $B^2 - AC < 0$ — **Genre Ellipse**
- $\Delta < 0$, Ellipse réelle,
- $\Delta = 0$, Un point, ou ellipse évanouissante, ou 2 droites imaginaires qui se coupent;
- $\Delta > 0$, Ellipse imaginaire.

II° $B^2 - AC > 0$ — **Genre Hyperbole**
- $\Delta \gtrless 0$, Hyperbole,
- $\Delta = 0$, Deux droites réelles qui se coupent, ou hyperbole évanouissante.

III° $B^2 - AC = 0$ — **Genre Parabole**
- $\Delta \gtrless 0$ Parabole;
- $\Delta = 0$
  - deux droites parallèles réelles .... si $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} < 0$; ou $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} < 0$;
  - deux droites parallèles coïncidentes ... si $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0$; ou (lorsque C et E sont nuls) $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} = 0$;
  - deux droites parallèles imaginaires ... si $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} > 0$; ou $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} > 0$;
  - deux droites parallèles dont une à l'infini, si $(A=0, B=0, C=0)$.

Remarque I. Il ne faut pas oublier que, pour énoncer les conclusions renfermées dans ce tableau, on a supposé que l'on avait préalablement modifié les signes du premier membre de l'équation (II) de la courbe de manière à ce que les coefficients des carrés ne soient pas tous deux négatifs.

Remarque II. On voit, par ce résumé, que le genre et la variété des courbes du second degré ne dépendent que des signes des fonctions suivantes des coefficients de l'équation de la courbe.

$$\text{(IV)} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Or, lorsqu'on effectue une transformation de coordonnées, la nature et la variété de la courbe ne sont évidemment pas changées; donc les fonctions δ' et Δ' formées comme les fonctions (IV), avec les coefficients de la nouvelle équation, devront conserver le même signe que les premières.
(Voir au N.° (331) la démonstration algébrique).

---

§II Réduction de l'équation générale du second degré par la transformation des coordonnées.

I.° On suppose $(B^2 - AC)$ différent de zéro. (Genre Ellipse ou hyperbole.)

316. Cette première analyse comprendra les questions suivantes

1.° Faire disparaître les termes du premier degré;
2.° Faire disparaître le produit xy des variables;
ou 3.° Faire disparaître les carrés x^2 et y^2 des variables.

1.° Faire disparaître les termes du premier degré.

L'équation générale des courbes du second ordre a la forme

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Supposons qu'on prenne de nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, parallèles aux anciens Ox, Oy; si x_0 et y_0 sont les coordonnées de la nouvelle origine, les formules de transformation seront

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

En remplaçant x et y par ces valeurs, l'équation (I) de la courbe deviendra

$$(2) \quad Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Ax_0+By_0+D)x'+2(Bx_0+Cy_0+E)y'+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0.$$

On remarque, dans cette nouvelle équation, que : 1° les coefficients des termes du second degré n'ont pas changé; 2° les coefficients de x' et y' sont respectivement les dérivées, par rapport à x et y, du premier membre de l'équation primitive, dans lesquelles on a remplacé x et y par x_0 et y_0; 3° le terme indépendant est le premier membre de l'équation primitive où x et y ont été remplacées par x_0 et y_0.

Si l'on veut faire disparaître, dans l'équation (2), les termes du premier degré, il faudra poser

$$(3) \quad \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations détermineront les coordonnées x_0 et y_0 de la nouvelle origine; pour que cette réduction soit possible, il faut que les valeurs de x_0 et y_0 soient finies; or ceci aura toujours lieu si (B^2-AC) est différent de zéro, c.à.d. si la courbe appartient au genre ellipse ou hyperbole. Cette réduction n'est plus possible lorsque la quantité (B^2-AC) est nulle, car les valeurs de x_0 et y_0 sont infinies; la courbe est alors une parabole.

Nous supposerons $B^2-AC \gtrless 0$, et alors l'équation (I) pourra être amenée à la forme suivante (en supprimant les accents)

$$(II) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2 = H.$$

Les nouveaux axes sont parallèles aux anciens, et les coordonnées de la nouvelle origine sont déterminées par les équations (3).

Les coefficients des termes du second degré n'ont pas changé.

Enfin le terme indépendant H peut se présenter sous une forme plus simple.

En effet, on a

$$-H = Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F.$$

Or si l'on ajoute les équations (3) respectivement multipliées par x_0 et y_0, il vient

$$0 = Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0;$$

d'où il résulte, en retranchant

$$(4) \qquad -H = Dx_0+Ey_0+F.$$

C.à.d. que la valeur de H est égale et de signe contraire à la demi-dérivée, par rapport à z, du premier membre de l'équation (I) rendue homogène, dérivée dans laquelle on remplacera x, y, z, respectivement par $x_0, y_0, 1$.

7. 2° Faire disparaître le produit xy des variables.

Pour résoudre cette question, nous supposerons qu'on ait déjà fait la première réduction indiquée dans le N° précédent, et nous opérerons sur l'équation réduite

$$(II) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2 = H.$$

Nous rapporterons la courbe à deux nouveaux axes ayant pour origine l'origine actuelle. La discussion de la question exige l'examen des deux cas suivants :

1er Cas: Les axes primitifs sont rectangulaires ainsi que les nouveaux axes;

2ème Cas: Les axes primitifs sont obliques ainsi que les nouveaux axes.

Axes rectangulaires.

Nous supposerons donc les axes primitifs Ox et Oy rectangulaires, ainsi que les axes nouveaux Ox' et Oy'. Si nous désignons par α l'angle de la partie positive du nouvel Ox' avec

la partie positive de l'ancien axe Ox, les formules de transformation de coordonnées sont N.° [30]

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Remplaçons x et y par ces valeurs dans l'équation (II), elle deviendra

$$(1) \qquad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H;$$

le terme indépendant n'a pas changé, puisque les formules de transformation sont homogènes en x' et y'; les valeurs des nouveaux coefficients A', B', C', seront

$$(2) \qquad A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$

$$(3) \qquad C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

$$(4) \qquad 2B' = (C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha.$$

Nous pourrons profiter de l'indétermination de l'angle α pour annuler le coefficient B' du terme en $x'y'$, ce qui donnera

$$(5) \qquad \tang 2\alpha = \frac{2B}{A-C};$$

et l'équation de la courbe prendra la forme simple

$$(IV) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 = H.$$

Calculons les valeurs de A' et C' en fonction de A, B, C.

On a d'abord, en ajoutant et retranchant les équations (2) et (3):

$$(6) \qquad \begin{cases} A' + C' = A + C, \\ A' - C' = (A-C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha \end{cases}$$

Maintenant on déduit de la relation (5)

$$(7) \qquad \begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2B}{\pm\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}, \\[2ex] \cos 2\alpha = \dfrac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}; \end{cases}$$

les signes inférieurs et supérieurs devront être pris ensemble dans ces dernières formules, car en divisant ces valeurs membre à membre on doit retrouver la relation (5).

En remplaçant $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ par ces valeurs, les relations (6) deviennent

$$(8) \qquad \begin{cases} A' + C' = A + C, \\ A' - C = \pm\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}; \end{cases}$$

d'où l'on conclut définitivement

$$(9) \qquad \begin{cases} 2A' = A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \\ 2C' = A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}. \end{cases}$$

Dans les relations (7), (8) et (9) les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble, de sorte que lorsqu'on aura choisi, à l'aide de l'équation (5), une valeur pour α, les valeurs des constantes A' et C' seront parfaitement déterminées.

Remarquons que le radical des formules (9) peut s'écrire

$$\sqrt{(A+C)^2 + 4(B^2 - AC)};$$

d'ou l'on conclut que:

Pour l'ellipse, où $B^2 - AC < 0$, la valeur absolue du radical est moindre que la valeur absolue de $(A+C)$; par suite, les coefficients A' et C' sont de même signe.

Pour l'hyperbole, où $B^2 - AC > 0$, la valeur absolue du radical est plus grande que la valeur absolue de $(A+C)$; par suite, les coefficients A' et C' sont de signes contraires.

319. **Nombre des solutions.**

L'angle 2α est donné par sa tangente N.° [318], (5); si φ est le plus petit des ~~axes~~ positifs ayant pour tangente, $\frac{2B}{A-C}$, la valeur générale de α sera

$$(10) \qquad 2\alpha = \varphi + k\pi, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\varphi}{2} + k.\frac{\pi}{2}.$$

Remarquons que $\frac{\varphi}{2}$ est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$, ~~car~~ d'après le choix que nous avons fait, l'angle φ est toujours compris entre 0 et π.

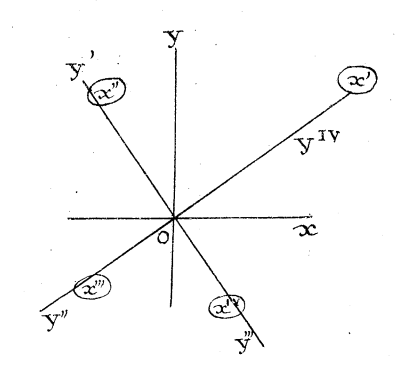
Si l'on donne à k les valeurs $0, 1, 2, 3$, on aura pour α les quatre valeurs.

$$(11) \qquad \alpha' = \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha''' = \frac{2\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha^{IV} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2};$$

et il est inutile de considérer les autres valeurs positives ou négatives de k, car on retrouverait, pour l'axe Ox', une des quatre positions définies par les égalités (11).

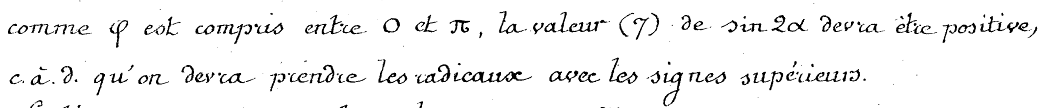
Les valeurs (11) donnent évidemment un système unique de deux droites rectangulaires; mais, parmi ces quatre solutions, le choix reste arbitraire; c.à.d. qu'on peut fixer de quatre manières différentes la position de l'axe positif Ox'. Or nous allons démontrer que, quelle que soit la solution adoptée, les valeurs des constantes A' et C', correspondant à cette solution, sont uniques.

Soit d'abord $B > 0$.



Si l'on choisit pour α les valeurs α' ou α''', on aura

$$2\alpha' = \varphi, \quad \text{ou} \quad 2\alpha''' = 2\pi + \varphi;$$


comme φ est compris entre 0 et π, la valeur (7) de $\sin 2\alpha$ devra être positive, c.à.d. qu'on devra prendre les radicaux avec les signes supérieurs.

Si l'on choisit pour α les valeurs α'' ou α^{IV}, on aura

$$2\alpha'' = \pi + \varphi, \quad 2\alpha^{IV} = 3\pi + \varphi;$$

la valeur (7) de $\sin 2\alpha$ devra être négative, c.à.d. qu'on devra prendre les radicaux avec les signes inférieurs.

Les conclusions seront en sens inverse, si $B < 0$.

Les valeurs de A' et C', correspondant aux différentes valeurs choisies pour α seront donc:

$$\text{Pour } \alpha = \frac{\varphi}{2} \text{ ou } \left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \begin{cases} 2A' = A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \\ 2C' = A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \end{cases}$$

les signes supérieurs correspondent à $B > 0$; les signes inférieurs, à $B < 0$.

$$\text{Pour } \alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \text{ ou } \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \begin{cases} 2A' = A + C \mp \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}, \\ 2C' = A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}; \end{cases}$$

les signes supérieurs correspondent à $B > 0$; les signes inférieurs, à $B < 0$.

320. **Discussion des valeurs de tang 2α.**

La valeur de tang 2α est donnée par l'équation

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

Lorsque $B = 0$, la valeur de tang 2α est nulle; donc $2\alpha = k\pi$; le nouveau système d'axes se confond avec l'ancien.

Lorsque $A = C$, on a

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};$$

les nouveaux axes de coordonnées sont les bissectrices des angles des anciens axes.

Lorsqu'on a en même temps $B = 0$, $A = C$, l'angle 2α est indéterminé.

Ce qui doit avoir lieu en effet; car, dans ce cas, l'équation (II) représente un cercle rapporté à son centre; or, quelle que soit la position de deux axes rectangulaires passant par le centre, la forme de l'équation ne change pas.

Remarque. Au lieu d'annuler le coefficient B', on pourrait, dans le cas de l'hyperbole, annuler l'un des coefficients A' ou C' N.° (318); mais la forme réduite qu'on obtiendrait ainsi ne présente aucun intérêt.

Axes obliques.

321. Nous supposerons maintenant les axes primitifs Ox et Oy obliques et faisant un angle θ, ainsi que les nouveaux axes Ox' et Oy', et nous désignerons par θ' l'angle de ces derniers.

Les formules de transformation des coordonnées sont alors N.° (29)

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}; \end{aligned}\right.$$

α et β sont respectivement les angles des nouveaux axes positifs Ox' et Oy' avec l'ancien axe positif Ox; de sorte que (en supposant que, pour aller de Ox' vers Oy', on tourne dans le même sens que pour aller de Ox vers Oy):

$$(1) \qquad \theta' = \beta - \alpha.$$

Nous supposerons encore l'équation de la courbe ramenée à la forme

$$(\text{II}) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H.$$

Si l'on substitue à x et y les valeurs ci-dessus, cette équation deviendra

$$(2) \qquad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = H,$$

après avoir posé:

$$\left\{\begin{aligned} &(3) \quad A'\sin^2\theta = A\sin^2(\theta-\alpha) + 2B\sin\alpha\sin(\theta-\alpha) + C\sin^2\alpha, \\ &(4) \quad C'\sin^2\theta = A\sin^2(\theta-\beta) + 2B\sin\beta\sin(\theta-\beta) + C\sin^2\beta, \\ &(5) \quad B'\sin^2\theta = A\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta) + C\sin\alpha\sin\beta + B\left[\sin\alpha\sin(\theta-\beta)+\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\right]. \end{aligned}\right.$$

322. Nous allons d'abord combiner ces égalités et en déduire deux relations fort importantes entre les anciens coefficients A, B, C, et les nouveaux, A', B', C'.

Du carré de l'égalité (5) retranchons le produit des égalités (3) et (4), il vient

$$\sin^4\theta.(B'^2 - A'C') = \left\{\begin{aligned} &B^2\left[\{\sin\alpha\sin(\theta-\beta)+\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\}^2 - 4\sin\alpha\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\right] \\ &-AC\left[\sin^2\alpha\sin^2(\theta-\beta)+\sin^2\beta\sin^2(\theta-\alpha) - 2\sin\alpha\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\right] \end{aligned}\right\};$$

ou encore

$$\sin^4\theta\left[B'^2 - A'C'\right] = (B^2 - AC)\left[\sin\alpha\sin(\theta-\beta) - \sin\beta\sin(\theta-\alpha)\right]^2.$$

Or, d'après la définition (1) de θ':

$$\sin\alpha\sin(\theta-\beta) - \sin\beta\sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\left[\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha\right] = \sin\theta\sin(\alpha-\beta) = -\sin\theta.\sin\theta';$$

on a donc définitivement

$$(6) \qquad \frac{B'^2 - A'C'}{\sin^2\theta'} = \frac{B^2 - AC}{\sin^2\theta}.$$

Nous obtiendrons une seconde relation en calculant la quantité

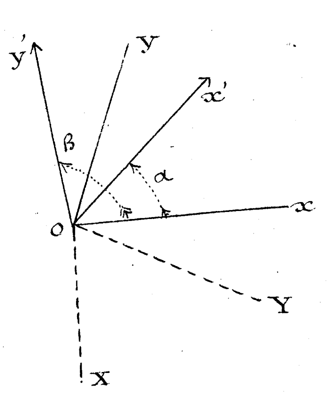
$$A' + C' - 2B'\cos\theta'.$$

On a ainsi

$$(7)\ \sin^2\theta\left[A'+C'-2B'\cos\theta\right] = \left\{\begin{aligned} &A\left[\sin^2(\theta-\alpha)+\sin^2(\theta-\beta) - 2\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\cos(\beta-\alpha)\right] \\ &+C\left[\sin^2\alpha+\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\beta-\alpha)\right] \\ &+2B\left[\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)+\sin\beta\sin(\theta-\beta) - \cos(\beta-\alpha)\{\sin\alpha\sin(\theta-\beta)+\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\}\right] \end{aligned}\right\}.$$

La réduction des coefficients de A, C, et B se fera sans difficulté en ayant égard aux relations (6) N.° [69] et (1 bis) N.° [71].

Pour cela, élevons en O les perpendiculaires OX et OY à Ox et Oy, en sens contraire de la rotation des angles positifs. Remarquons alors que



la droite OX fait les angles $\alpha_1 = \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\beta_1 = \left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ avec les axes Ox' et Oy' dont l'angle est $\theta' = \beta - \alpha$; la droite OY fait les angles $\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$, $\beta_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta\right)$ avec les mêmes axes.

On aura donc d'après la relation (6) du N.° [69]:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\beta-\alpha) = \sin^2\theta',$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right)\cos(\beta-\alpha) = \sin^2\theta';$$

ou

$$(1^\circ) \qquad \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\beta-\alpha) = \sin^2\theta';$$

$$(2^\circ) \qquad \sin^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\beta) - 2\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha)\cos(\beta-\alpha) = \sin^2\theta'.$$

De même, en remarquant que l'angle V des droites OX et OY est égal à θ, on trouve en appliquant la relation (1 bis) du N.° [71]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right) - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta\right)\right]\cos(\beta-\alpha) = \cos\theta\sin^2\theta';$$

ou bien

$$(3^\circ) \quad \sin\alpha\sin(\theta-\alpha) + \sin\beta\sin(\theta-\alpha) - \left[\sin\alpha\sin(\theta-\beta) + \sin\beta\sin(\theta-\alpha)\right]\cos(\beta-\alpha) = -\cos\theta\cdot\sin^2\theta'.$$

En ayant égard aux valeurs 1°, 2°, 3°, l'égalité (7) conduit à la seconde relation

$$(8) \qquad \frac{A'+C'-2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

323. Nous remplacerons donc les équations (3), (4), et (5) par le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} (9) & \dfrac{B'^2-A'C'}{\sin^2\theta'} = \dfrac{B^2-AC}{\sin^2\theta}; \\ (10) & \dfrac{A'+C'-2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \dfrac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}; \\ (11) & B'\sin^2\theta = A\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta) + C\sin\alpha\sin\beta + B\left\{\sin\alpha\sin(\theta-\beta)+\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\right\}. \end{array}\right.$$

Nous verrons plus tard la signification géométrique des relations (9) et (10).

Remarquons que la fonction $(B'^2-A'C')$ formée avec les nouveaux coefficients, conserve la même valeur, à un coefficient numérique près, que la fonction semblable (B^2-AC), formée avec les anciens coefficients. A cause de cette invariabilité, la quantité (B^2-AC) porte le nom d'invariant de la fonction homogène $(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$.

324. Revenons à la question primitive, c. à d. à la réduction de l'équation (2) N.° [321].

Nous pouvons profiter de l'indétermination des quantités α et β pour annuler le coefficient B'; on a alors d'après l'équation (11):

$$(12) \qquad A\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta) + C\sin\alpha\sin\beta + B\left[\sin\alpha\sin(\theta-\beta)+\sin\beta\sin(\theta-\alpha)\right] = 0.$$

Si on laisse arbitraire l'angle θ' des nouveaux axes Ox' et Oy' nous aurons une infinité de manières de ramener l'équation (II) à la forme réduite

$$(IV) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 = H.$$

Pour donner aux calculs plus de symétrie, nous introduirons l'angle θ' des nouveaux axes; de sorte que

$$(13) \qquad \theta' = \beta - \alpha;$$

et les relations (12) et (13) vont nous permettre de déterminer α et β en fonction de l'angle θ'.

Posons

$$(14) \qquad m = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}, \quad m' = \frac{\sin B}{\sin(\theta-\beta)},$$

m et m' sont les coefficients angulaires des nouveaux axes Ox' et Oy' par rapport aux anciens axes; la relation (12) devient alors, après avoir divisé par $\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)$:

$$(15) \qquad A + B(m+m') + C m m' = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\theta' = \frac{(m'-m)\sin\theta}{1+(m+m')\cos\theta + m m'}.$$

Ainsi, étant donné l'angle θ', les équations (15) et (16) détermineront m et m'; puis les relations (14) feront connaître α et β, c. à. d. la position des nouveaux axes pour lesquels l'équation de la courbe se réduit à la forme simple

$$(IV) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 = H.$$

Pour calculer les coefficients A' et C', nous nous servirons des relations (9) et (10), N.° [323]; elles nous donneront, après avoir introduit l'hypothèse $B'=0$:

$$(17) \qquad \begin{cases} A'C' = (AC-B^2)\dfrac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}. \\[2ex] A'+C' = \left[A+C-2B\cos\theta\right]\dfrac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}. \end{cases}$$

L'angle θ' étant donné, les coefficients A' et C' sont déterminés; leurs valeurs seront les racines de l'équation du second degré

$$(17\,bis) \qquad Z^2 - \left[A+C-2B\cos\theta\right]\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}\cdot Z + (AC-B^2)\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta} = 0.$$

325. Discussion des racines de l'équation (17 bis).

Lorsque la courbe est une ellipse, on a $AC-B^2>0$; on voit alors que les valeurs de A' et C' sont de même signe, si elles sont réelles.

Lorsque la courbe est une hyperbole, on a $AC-B^2<0$; les valeurs de A' et C' sont alors réelles et de signes contraires.

L'angle θ' est une quantité arbitraire; cependant il doit, dans certains cas, rester compris entre certaines limites, si l'on veut que les quantités A' et C' soient réelles. En effet, la condition de réalité des racines de l'équation (17 bis) est

$$(A+C-2B\cos\theta)^2\frac{\sin^4\theta'}{\sin^4\theta} - 4(AC-B^2)\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta} > 0;$$

d'où l'on déduit

$$(18) \qquad \sin^2\theta' > \frac{4\sin^2\theta(AC-B^2)}{(A+C-2B\cos\theta)^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, cette inégalité est évidemment vérifiée, puisque $(AC-B^2)$ est une quantité négative. Reste donc le cas de l'ellipse, pour lequel $(AC-B^2)>0$. Remarquons d'abord que

$$\frac{4\sin^2\theta\,(AC-B^2)}{(A+C-2B\cos\theta)^2} < 1;$$

car cette inégalité revient à la suivante

$$4AC\cos^2\theta - 4B(A+C)\cos\theta + 4B^2 + (A-C)^2 > 0;$$

ou, en ordonnant par rapport à B et décomposant en carrés

$$[2B-(A+C)\cos\theta]^2\ (A+C)^2\sin^2\theta>0;$$

inégalité évidemment vraie.

Nous pouvons donc poser

$$(19)\qquad \frac{4\sin^2\theta\,(AC-B^2)}{(A+C-2B\cos\theta)^2}=\sin^2 V;$$

et si l'on désigne par V le plus petit des angles positifs définis par l'égalité (19), on conclura de l'inégalité (18)

$$(20)\qquad V<\theta'<\pi-V;$$

car θ' est un angle compris en o et π.

326. 3°. Faire disparaître les carrés x^2 et y^2 des variables.

Nous supposerons encore l'équation de la courbe ramenée à la forme

$$(II)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=H;$$

et si l'on rapporte la courbe à de nouveaux axes obliques, l'équation prendra la forme

$$(21)\qquad A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2=H;$$

les calculs de cette transformation sont ceux des N.os [321], [322], et [323].

Or on peut, en général, disposer des indéterminées α et β de manière à annuler les deux coefficients A' et C'; les relations (3) et (4) du N.o [321] conduiront alors aux deux équations

$$(22)\qquad \begin{cases} A\sin^2(\theta-\alpha)+2B\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)+C\sin^2\alpha=0,\\ A\sin^2(\theta-\beta)+2B\sin\beta\sin(\theta-\beta)+C\sin^2\beta=0.\end{cases}$$

Divisant la 1.ère par $\sin^2(\theta-\alpha)$; la 2.ème par $\sin^2(\theta-\beta)$; et posant

$$(23)\qquad m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\quad m'=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)},$$

les deux équations (22) deviennent

$$(24)\qquad \begin{cases} A+2Bm+Cm^2=0,\\ A+2Bm'+Cm'^2=0.\end{cases}$$

Les deux équations (24) ont les mêmes racines; mais, comme m et m' doivent avoir des valeurs différentes, car autrement les axes Ox' et Oy' coïncideraient, on pourra regarder m et m' comme les deux racines de l'équation

$$(25).\qquad Cm^2+2Bm+A=0.$$

On voit d'abord que les valeurs de m et m' ne seront réelles, que si l'on a $(B^2-AC)>0$; c'est-à-dire que cette réduction ne sera possible, en quantités réelles, que dans le cas de l'hyperbole.

L'équation de la courbe prend alors la forme simple

$$(V)\qquad 2B'x'y'=H.$$

La relation (10) du N.o [323] donne immédiatement, en y faisant $A'=C'=0$,

$$-2B'\cos\theta'=(A+C-2B\cos\theta)\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}.$$

D'un autre côté, on a, d'après l'équation (23):

$$\tan\theta'=\tan(\beta-\alpha)=\frac{(m'-m)\sin\theta}{1+(m+m')\cos\theta+mm'};$$

mais l'équation (25) donne

$$m+m'=-\frac{2B}{C},\quad mm'=\frac{A}{C},\quad m'-m=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{C};$$

par conséquent

$$(26)\qquad \tang\theta' = \pm\ \frac{2\sqrt{B^2-AC}.\sin\theta}{A+C-2B\cos\theta};$$

d'où l'on conclut les valeurs de $\sin\theta'$ et $\cos\theta'$, puis la valeur de B'.

On trouve alors que l'équation de l'hyperbole peut toujours être amenée à avoir la forme très-simple:

$$x'y'\cos\theta' = -\frac{H}{4}\cdot\frac{A+C-2B\cos\theta}{B^2-AC};$$

ou, en remplaçant $\cos\theta'$ par sa valeur

$$(VI)\qquad x'y' = \pm\ \frac{H}{4(B^2-AC)}\sqrt{(A+C-2B\cos\theta)^2+4(B^2-AC)\sin^2\theta}.$$

327. ## Remarque.

On pourrait se demander si l'on peut annuler à la fois le coefficient du produit xy et le coefficient d'un des carrés, x^2 par exemple. A priori, il est visible que la chose n'est pas possible, en général, puisque l'équation ainsi obtenue représenterait deux droites parallèles.

On le voit aussi par le calcul; car les relations (3) et (5) N.° (321) donneraient alors, en adoptant les notations (23) du N.° (326)

$$(27)\qquad \begin{cases} Cm^2+2Bm+A=0, \\ Cmm'+B(m+m')+A=0. \end{cases}$$

Or en retranchant ces équations membre à membre, il vient

$$Cm(m-m')+B(m-m')=0,\ \text{d'où}\ m=-\frac{B}{C},$$

car α et β, c.à.d. m et m', doivent être des quantités différentes. Cette valeur substituée dans la 1.ère des relations (27), conduit à

$$B^2-AC=0;$$

or ceci correspond précisément au cas que nous avons exclu de la transformation actuelle.

Ainsi les deux équations (27), qui déterminent m et m', sont incompatibles; c.à.d. que l'on ne peut pas annuler simultanément, dans le cas actuel, le coefficient du rectangle xy et celui de l'un des carrés.

II.° On suppose (B^2-AC) nul, (genre parabole).

328. Soit donnée l'équation générale du second degré

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0;$$

nous allons aborder d'une autre manière la réduction par la transformation des coordonnées; cette méthode sera applicable, en particulier, au cas où (B^2-AC) est nul.

Dans la transformation précédente, nous avons d'abord transporté les axes parallèlement à eux mêmes, puis nous les avons fait tourner autour de la nouvelle origine. Nous suivrons ici une marche inverse, c.à.d. que nous rapporterons d'abord la courbe à un nouveau système d'axes ayant même origine que les premiers, puis, nous la rapporterons à un troisième système d'axes parallèles aux seconds.

Désignons par θ l'angle des anciens axes Ox et Oy, et soient α et β les angles qui déterminent la position des nouveaux axes Ox' et Oy', ayant même origine que les premiers; les formules de transformation sont

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (I) de la courbe, cette équation prendra la forme

$$(1)\qquad A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0;$$

le terme indépendant est évidemment resté le même; les coefficients A', B', C' des termes du second degré seront encore déterminés par les relations (3), (4), (5) du N.° [321], ou par les relations (9), (10), (11) du N.° [323].

Les coefficients D', E', des termes du 1.er degré sont définis par les égalités suivantes:

$$\begin{cases}(2)\qquad D'\sin\theta = D\sin(\theta-\alpha)+E\sin\alpha,\\ (3)\qquad E'\sin\theta = D\sin(\theta-\beta)+E\sin\beta.\end{cases}$$

Nous pouvons d'abord profiter de l'indétermination des quantités α et β pour annuler le coefficient B'; et les coefficients A' et C' se calculeront, soit comme au N.° [318], si les anciens et les nouveaux axes sont rectangulaires; soit, comme au N.° [324], si les anciens et les nouveaux axes sont obliques.

Si l'on se donne l'angle des nouveaux axes, et, en particulier, si cet angle est droit, on ne pourra faire disparaître que d'une seule manière le rectangle xy; il y aura une infinité de manières de le faire disparaître, si on laisse arbitraire l'angle des nouveaux axes.

Par ce premier changement d'axes, l'équation (I) de la courbe se trouve donc ramenée à la forme

$$(II)\qquad A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0.$$

Les valeurs des coefficients D' et E' se déduiront des équations précédentes (2) et (3), puisque α et β sont déterminés, par les calculs auxquels nous avons renvoyé, en fonction de l'angle des nouveaux axes.

Remarque. Lorsque $B^2-AC=0$ ces calculs sont toujours praticables; mais il importe de remarquer qu'un des coefficients A' ou C' est nul, comme on le voit, soit par les formules (9) du N.° [318], soit par la 1.ère des formules (17) du N.° [324].

Comme les angles α et β sont déterminés par leur tangente, il y aura plusieurs angles satisfaisant à la question; et, selon le choix qu'on aura fait, l'une ou l'autre des quantités A' et C' sera nulle; nous supposerons, pour fixer les idées, $A'=0$; de sorte que, dans le cas de la parabole, cette première transformation permet de ramener l'équation de la courbe à la forme

$$(\text{II bis})\qquad C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0.$$

329. Cette première transformation étant effectuée, nous allons maintenant rapporter la courbe à un nouveau système d'axes, O'x'' et O'y'', parallèles aux précédents Ox' et Oy'. Si x'_0 et y'_0 sont les coordonnées de la nouvelle origine, par rapport aux axes Ox' et Oy', les formules de transformation seront

$$\begin{cases}x'=x'_0+x'',\\ y'=y'_0+y''.\end{cases}$$

L'équation (II) deviendra alors

$$(4)\qquad A'x''^2+C'y''^2+2(A'x'_0+D')x''+2(C'y'_0+E')y''+A'x_0'^2+C'y_0'^2+2D'x'_0+2E'y'_0+F=0;$$

les coefficients A' et C' des termes du second degré n'ont pas changé par cette deuxième transformation.

Or on pourra disposer des deux indéterminées x'_0 et y'_0 de manière à faire disparaître deux des trois derniers termes dans l'équation (4). Si aucun des coefficients A' et C' n'est nul, on pourra faire disparaître les deux termes du premier degré; nous retrouverons ainsi les résultats obtenus précédemment.

Dans tous les cas, comme nous supposons que A' et C' ne sont pas nuls à la fois (car alors la transformation devient inutile), on pourra faire disparaître le terme indépendant et un des termes du premier degré.

Dans le cas de la parabole, un des coefficients A' ou C' étant nul, il y a un des termes du premier degré qu'on ne pourra pas faire disparaître; ainsi, lorsqu'on suppose, comme nous l'avons fait, $A'=0$, on ne peut pas faire disparaître le terme en x.

Egalant à zéro, le coefficient du terme en y'' et le terme indépendant, puis désignant par D''

le coefficient de x'', nous aurons

$$\begin{cases} (5) & D'' = A'x'_0 + D', \\ (6) & 0 = C'y'_0 + E', \\ (7) & 0 = A'x'^2_0 + C'y'^2_0 + 2D'x'_0 + 2E'y'_0 + F. \end{cases}$$

De là nous conclurons que l'équation générale des courbes du second degré peut, dans tous les cas, se ramener à la forme

$$\text{(III)} \qquad A'x''^2 + C'y''^2 + 2D''x'' = 0.$$

Dans le cas de la parabole, où $A' = 0$, on a la forme réduite

$$\text{(III bis)} \qquad C'y''^2 + 2D''x'' = 0.$$

330. Revenons maintenant aux détails du calcul des quantités x'_0, y'_0, D''.

Multipliant les équations (5) et (6) par x'_0, y'_0, ajoutant et retranchant de l'équation (7) il vient

$$-D''x'_0 = D'x'_0 + E'y'_0 + F;$$

nous substituerons donc au système des équations (5), (6), (7) le suivant

$$(8) \quad \begin{cases} D'' = A'x'_0 + D', \\ 0 = C'y'_0 + E', \\ -D''x'_0 = D'x'_0 + E'y'_0 + F; \end{cases}$$

les trois équations (8) nous permettent de déterminer plus facilement les trois inconnues x'_0, y'_0, et D''.

Dans le cas de la parabole, où A' est nul, on a immédiatement

$$\begin{cases} D'' = D', \\ y'_0 = -\dfrac{E'}{C'}, \\ x'_0 = \dfrac{E'^2 - FC'}{2D'}. \end{cases}$$

Le coefficient D'' a une valeur unique, la valeur de y'_0 est finie, puisque C' est différent de zéro; celle de x'_0 est également finie, lorsque la courbe est une parabole proprement dite. Si l'on supposait, en effet, $D' = 0$, nous voyons, par l'équation (II bis) du N.° (328), que la courbe se réduirait à deux droites parallèles.

Lorsque la courbe n'est pas une parabole, la coordonnée y'_0 a encore une valeur finie et déterminée, savoir

$$y'_0 = -\frac{E'}{C'}.$$

Pour déterminer D'' et x'_0, nous substituerons la valeur de D'' (1.ère des équations (8)), dans la 3.ème, et nous remplacerons y'_0 par la valeur précédente, on trouve ainsi

$$A'x'^2_0 + 2D'x'_0 + \frac{FC - E'^2}{C'} = 0.$$

Cette équation déterminera deux valeurs pour x'_0, et il en résultera deux valeurs correspondantes pour D''. Il est facile de vérifier que ces valeurs sont toujours réelles dans le cas de l'ellipse réelle.

On peut se rendre compte de la présence de cette double solution; les axes de coordonnées $O'x''$ et $O'y''$ sont ici, comme on le verra plus loin, un diamètre et une tangente à l'extrémité de ce diamètre; or on peut prendre pour origine l'une ou l'autre des extrémités de ce diamètre, c.à.d. qu'on peut, en conservant la même direction d'axes, choisir deux origines différentes.

Si l'on résout l'équation précédente, on trouve que les valeurs correspondantes de D'' sont égales et de signes contraires.

III.e Résumé.

331\. 1.° Dans le cas de l'Ellipse et de l'hyperbole, l'équation générale des courbes du second degré peut se ramener à la forme

$$\text{(I)}\qquad Mx^2+Ny^2=H;$$

et, dans le cas de la Parabole, à la forme

$$\text{(II)}\qquad Ny^2+2Px=0.$$

Cette réduction peut se faire d'une seule manière, si les axes définitifs, auxquels la courbe est rapportée, sont assujettis à être rectangulaires; et d'une infinité de manières, si l'angle des axes définitifs est différent d'un droit et arbitraire; c. à. d. qu'il y aura une infinité de systèmes d'axes obliques pour lesquels cette forme réduite aura lieu

2.° Dans le cas de l'hyperbole, l'équation peut être ramenée à la forme

$$\text{(III)}\qquad xy=k;$$

l'angle des axes définitifs est alors déterminé, et, en général, n'est pas droit.

3.° L'équation des courbes du second degré peut, dans tous les cas, être ramenée à la forme

$$\text{(IV)}\qquad Mx^2+Ny^2+2Px=0.$$

Cette réduction peut se faire d'une seule manière, si les axes définitifs sont assujettis à être rectangulaires; et d'une infinité de manières, si l'angle des axes définitifs est différent d'un droit et arbitraire; c. à. d. qu'il y aura une infinité de systèmes d'axes obliques pour lesquels l'équation aura cette forme réduite.

Remarque I. Rendons homogènes les équations (I) et (II), elles deviennent

$$\text{(I bis)}\qquad Mx^2+Ny^2=H.z^2,$$

$$\text{(II bis)}\qquad My^2+2Pxz=0$$

La droite de l'infini $z=0$ rencontre la courbe en deux points distincts réels ou imaginaires, suivant que la courbe est une hyperbole ou une ellipse.

La droite de l'infini rencontre la parabole en deux points coïncidents, c. à. d. que la parabole est tangente à la droite de l'infini.

Remarque II. Nous terminerons cette application de la transformation des coordonnées à la réduction des équations du second degré en constatant l'invariabilité des fonctions δ et Δ.

Soit l'équation primitive rendue homogène

$$\text{(1)}\qquad F(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0.$$

Effectuons, dans le premier membre, la substitution

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} x=\alpha x'+\alpha_1 y'+\alpha_2 z', \\ y=\beta x'+\beta_1 y'+\beta_2 z', \\ z=\gamma x'+\gamma_1 y'+\gamma_2 z', \end{cases}$$

on passera de là aux formules habituelles de la transformation des coordonnées en supposant

$$\text{(3)}\qquad z=1,\quad z'=1;\quad \gamma=0,\ \gamma_1=0,\ \gamma_2=1.$$

La substitution (2) transformera l'équation (1) en

$$\text{(4)}\qquad \varphi(x',y',z')=A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'z'+2E'y'z'+F'z'^2=0;$$

de sorte qu'on aura, eu égard aux relations (2), l'identité

$$\text{(5)}\qquad F(x,y,z)=\varphi(x',y',z').$$

Prenons les dérivées de l'identité (5) par rapport à x', y', z', en regardant x, y, z, comme des fonctions de x', y', z', définies par les relations (2), on a

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi'_{x'} = \alpha\, F'_x + \beta\, F'_y + \gamma\, F'_z\,; \\ \varphi'_{y'} = \alpha_1\, F'_x + \beta_1\, F'_y + \gamma_1\, F'_z\,; \\ \varphi'_{z'} = \alpha_2\, F'_x + \beta_2\, F'_y + \gamma_2\, F'_z\,. \end{cases}$$

Si l'on remplace les dérivées par leurs valeurs et qu'on pose

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \alpha A + \beta B + \gamma B, & \mathcal{A}_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 D, & \mathcal{A}_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 D, \\ \mathcal{B} = \alpha B + \beta C + \gamma E, & \mathcal{B}_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 E, & \mathcal{B}_2 = \alpha_2 B + \beta_2 C + \gamma_2 E, \\ \mathcal{C} = \alpha D + \beta E + \gamma F; & \mathcal{C}_1 = \alpha_1 D + \beta_1 E + \gamma_1 F; & \mathcal{C}_2 = \alpha_2 D + \beta_2 E + \gamma_2 F; \end{cases}$$

les identités (6) deviennent

$$(8)\quad \begin{cases} A'x' + B'y' + D'z' = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z, \\ B'x' + C'y' + E'z' = \mathcal{A}_1 x + \mathcal{B}_1 y + \mathcal{C}_1 z, \\ D'x' + E'y' + F'z' = \mathcal{A}_2 x + \mathcal{B}_2 y + \mathcal{C}_2 z. \end{cases}$$

Différentions de nouveau les identités (8) en ayant égard aux relations (2), on arrive aux valeurs définitives.

$$(9)\quad \begin{cases} A' = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B} + \gamma\mathcal{C}, & B' = \alpha\mathcal{A}_1 + \beta\mathcal{B}_1 + \gamma\mathcal{C}_1, & D' = \alpha\mathcal{A}_2 + \beta\mathcal{B}_2 + \gamma\mathcal{C}_2, \\ B' = \alpha_1\mathcal{A} + \beta_1\mathcal{B} + \gamma_1\mathcal{C}, & C' = \alpha_1\mathcal{A}_1 + \beta_1\mathcal{B}_1 + \gamma_1\mathcal{C}_1, & E' = \alpha_1\mathcal{A}_2 + \beta_1\mathcal{B}_2 + \gamma_1\mathcal{C}_2, \\ D' = \alpha_2\mathcal{A} + \beta_2\mathcal{B} + \gamma_2\mathcal{C}; & E' = \alpha_2\mathcal{A}_1 + \beta_2\mathcal{B}_1 + \gamma_2\mathcal{C}_1; & F' = \alpha_2\mathcal{A}_2 + \beta_2\mathcal{B}_2 + \gamma_2\mathcal{C}_2. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de calculer les fonctions

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}, \qquad \delta' = \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix};$$

en fonction des coefficients A, B, ... de l'équation primitive.

Les relations (9) nous donnent d'abord, en appliquant le principe de la multiplication des déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 \end{vmatrix}.$$

Or l'application du même principe aux relations (7) conduit à

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

On a donc la relation suivante entre les fonctions Δ' et Δ :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

ou

$$(\mathrm{I}\ bis)\qquad \Delta' = m^2 . \Delta.$$

En second lieu, si l'on pose

$$(10)\qquad a = \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma,\quad b = \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha,\quad c = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

on constate, sans difficulté, à l'aide des relations (9) et (7) :

$$\begin{cases} A'C' - B'^2 = a\,(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{B}_1\mathcal{C}) + b\,(\mathcal{C}\mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_1\mathcal{A}) + c\,(\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{B}); \\ \mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{B}_1\mathcal{C} = a\,(CF - E^2) + b\,(DE - BF) + c\,(BE - CD), \\ \mathcal{C}\mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_1\mathcal{A} = a\,(DE - BF) + b\,(AF - D^2) + c\,(BD - AE), \\ \mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{B} = a\,(BE - CD) + b\,(BD - AE) + c\,(AC - B^2). \end{cases}$$

D'où l'on conclut cette seconde relation

$$\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix}$$

Si maintenant on se place dans le cas de la transformation des coordonnées, c.à.d. si l'on suppose

$$\gamma = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,$$

les relations (I) et (II) conduisent aux propriétés d'invariabilité qu'il s'agissait d'établir pour les fonctions Δ' et δ', savoir

$$\text{(III)}\quad \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};\ \text{et}\ \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

On voit par la relation (II) que δ n'est pas un invariant de la fonction à trois variables.

§ III Discussion des formes réduites. Constructions.

1° Discussion des formes réduites; formes définitives.

332. Nous avons trouvé, pour les courbes du second ordre proprement dites, les formes réduites

$$\text{(I)}\qquad Mx^2 + Ny^2 = H,$$

$$\text{(II)}\qquad Ny^2 + 2Px = 0.$$

Nous allons d'abord constater que ces formes réduites donnent aussi les variétés des courbes du second ordre.

Considérons la première équation:

$$\text{(I)}\qquad Mx^2 + Ny^2 = H.$$

Supposons M et N de même signe et rendons-les positifs;

- si $H > 0$, on aura Une Ellipse réelle;
- si $H = 0$, ... Un point ou Ellipse évanouissante,
- si $H < 0$, ... Une Ellipse imaginaire.

Supposons M et N de signes contraires, et mettons les signes en évidence:

$$Mx^2 - Ny^2 = H;$$

- si $H \gtrless 0$, on aura Une hyperbole,
- si $H = 0$, ... Deux droites qui se coupent.

Si une des constantes M ou N est nulle, l'équation deviendra (M étant rendu positif)

$$Mx^2 = H;$$

- si $H > 0$, on aura Deux droites parallèles réelles,
- si $H = 0$, ... Deux droites qui se confondent,
- si $H < 0$, ... Deux droites parallèles imaginaires.

Enfin si les deux constantes M et N sont nulles, l'équation rendue homogène deviendra

$$z^2 = 0;$$

elle représente deux droites coïncidentes à l'infini.

Considérons, en second lieu, la deuxième équation

$$\text{(II)} \qquad Ny^2 + 2Px = 0.$$

Si N et P sont différents de zéro, on aura une parabole.

Si $P=0$, on a deux droites coïncidentes;

Si $N=0$, on a $xz=0$; c.à.d. une droite à distance finie et une à l'infini.

Nous retrouvons donc, dans les deux formes réduites, toutes les variétés des courbes du second ordre.

333. Si l'on fait abstraction des variétés, il reste trois courbes proprement dites du second ordre, dont les équations réduites seront

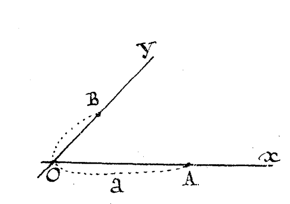
$$Mx^2 + Ny^2 = H, \text{ Ellipse};$$
$$Mx^2 - Ny^2 = H, \text{ Hyperbole};$$
$$Ny^2 - 2Px = 0, \text{ Parabole};$$

M, N, P, H, désignant des constantes positives.

Nous donnerons de suite à ces équations une forme définitive plus symétrique

1° Ellipse. $\qquad Mx^2 + Ny^2 = H.$

Les deux axes auxquels est rapportée l'ellipse, jouissent de la propriété suivante: l'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y, et l'axe des y divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des x. En effet, à une valeur quelconque de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires; et à une valeur quelconque de y correspondent deux valeurs de x égales et de signes contraires. Si les axes sont obliques, ils forment ce qu'on appelle un système de deux diamètres conjugués; si les axes de coordonnées sont rectangulaires, ce sont les axes de la courbe.



Cherchons les intersections de la courbe avec les axes de coordonnées.

Soient A et B les intersections de la courbe avec Ox et Oy, et posons $OA = a$, $OB =$ en faisant $y=0$, puis $x=0$, on aura successivement

$$y=0,\ Ma^2 = H; \quad x=0,\ Nb^2 = H;$$

$$\text{d'où} \quad M = \frac{H}{a^2}, \quad N = \frac{H}{b^2};$$

a et b sont des quantités réelles, puisque M, N, et H sont positives.

En introduisant les constantes a et b dans l'équation de la courbe, c.à.d. en remplaçant M et N par les valeurs ci-dessus, l'équation de l'Ellipse aura la forme suivante

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les constantes a et b représentent les longueurs de deux diamètres conjugués, si les axes Ox et Oy sont obliques; elles représentent les longueurs des axes de la courbe, si les axes Ox et Oy son rectangulaires.

2° Hyperbole. $\qquad Mx^2 - Ny^2 = H.$

Les axes de coordonnées jouissent encore de la propriété signalée dans le cas de l'Ellipse.

L'axe des x rencontre la courbe en un point réel A, soit $OA = a$, on a

$$a^2 = \frac{H}{M}, \quad \text{d'où } M = \frac{H}{a^2}.$$

Pour avoir l'intersection avec l'axe des y, faisons $x=0$, il vient

$$y^2 = -\frac{H}{N}, \quad \text{ou } y = \sqrt{\frac{H}{N}} \cdot \sqrt{-1};$$

nous désignerons par b le coefficient de $\sqrt{-1}$; la quantité b est dite la longueur du diamètre imaginai on aura donc

$$b^2 = \frac{H}{N}, \quad \text{d'où } N = \frac{H}{b^2}.$$

En remplaçant M et N par les valeurs ci-dessus, l'équation de l'hyperbole prendra la forme

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les constantes a et b sont les longueurs de deux diamètres conjugués, (le 1er réel, le 2ème imaginaire) si les axes Ox et Oy sont obliques; a et b représenteront les longueurs des axes de la courbe, si Ox et Oy sont rectangulaires.

3° Parabole. $\qquad Ny^2 - 2Px = 0.$

L'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y; la courbe passe par l'origine, puisque l'équation est vérifiée pour $x = 0$, $y = 0$; enfin l'axe des y rencontre la courbe en deux points confondus à l'origine; car, si l'on fait $x = 0$, on a $y^2 = 0$. Ainsi, l'axe Ox est un diamètre, l'axe Oy est la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

L'équation de la parabole peut évidemment s'écrire

$$\text{(III)} \qquad y^2 = 2px;$$

la constante 2p est dite le paramètre de la parabole relatif au diamètre Ox, ou simplement paramètre, lorsque Ox est l'axe de la courbe.

Nous allons entrer dans quelques détails sur la construction et les propriétés immédiates de ces trois courbes.

II. Ellipse. Construction.

334. L'équation de l'ellipse est

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Cette équation donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad \text{ou } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x);$$

de sorte que si A et A sont les extrémités d'un diamètre, si MP est l'ordonnée d'un point M, on a

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PA'}.$$

On aura de même pour un autre point M_1:

$$\overline{M_1P_1}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{P_1A} \cdot \overline{P_1A'}.$$

D'où l'on conclut

$$\text{(1)} \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{PA} \cdot \overline{PA'}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{P_1A} \cdot \overline{P_1A'}}.$$

Donc, dans une ellipse, le quotient du carré d'une corde par le produit des distances du milieu de cette corde aux extrémités du diamètre conjugué est constant.

Réciproquement: une courbe telle, que le quotient du carré de l'ordonnée par le produit des segments déterminés par le pied de l'ordonnée sur une droite fixe est constant, est une ellipse.

Soient les deux points fixes A et A'; prenons cette droite pour axe des x; pour origine, le milieu O du segment AA'; et pour axe des y, une parallèle aux ordonnées. Si M est un point du lieu, et MP son ordonnée, on a, par hypothèse

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{PA} \cdot \overline{PA'}} = \frac{b^2}{a^2},$$

en désignant par $\frac{b^2}{a^2}$ la valeur constante du rapport. Cette relation devient, en introduisant les coordonnées du point M, et en représentant par $2a$ la longueur AA' :

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0;$$

ce qui est bien l'équation d'une ellipse.

335. **Emploi d'un angle auxiliaire.**

Il est souvent commode d'exprimer les deux coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse en fonction d'une variable arbitraire; nous signalerons le choix suivant

Nous poserons

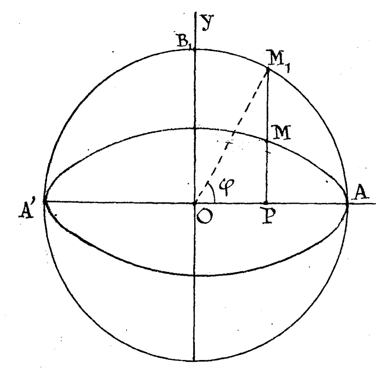
$$(2) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi; \end{cases}$$

et il est visible que l'équation de l'ellipse est vérifiée, quel que soit φ, par les valeurs (2); on peut donc représenter par $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ les coordonnées x et y d'un point quelconque de l'ellipse; nous donnerons à la variable φ le nom de **paramètre angulaire** du point (x, y).

Signification géométrique de l'angle φ.

1° Axes rectangulaires.

Supposons d'abord que les deux axes Ox et Oy auxquels l'ellipse est rapportée soient rectangulaires. Sur $AA' = 2a$ décrivons un cercle, lequel coupe l'axe Oy en B_1.



Si M est un point quelconque de l'ellipse, prolongeons l'ordonnée MP jusqu'à sa rencontre en M_1 avec le cercle, puis joignons M_1 au centre O; on aura

$$(3) \qquad \varphi = \widehat{M_1OA}.$$

En effet, d'après les égalités (2)

$$x = OP = OM_1 . \cos \varphi;$$

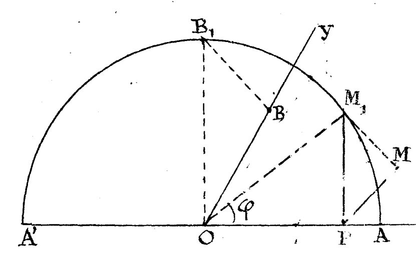
d'un autre côté le triangle M_1OP donne

$$OP = OM_1 \cos \widehat{M_1OP};$$

donc……

2° Axes obliques.

Les deux axes Ox et Oy sont obliques; décrivons toujours un cercle sur $AA' = 2a$ comme diamètre; au point O élevons une perpendiculaire à AA', soit B_1 son intersection avec la circonférence. Si M est un point quelconque de l'ellipse, et MP son ordonnée, par le pied P de l'ordonnée, nous mènerons une perpendiculaire à AA' et nous la prolongerons jusqu'à sa rencontre en M_1 avec le cercle; le point M_1 est le **point correspondant** du point M; et, si l'on joint M_1O, on aura encore



$$(4) \qquad \varphi = \widehat{M_1OA}.$$

La démonstration est la même que dans le cas précédent.

336. **Construction de l'ellipse.**

1° Construction à l'aide de l'équation.

L'équation de l'ellipse, résolue par rapport à y, donne

$$(5) \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Axes obliques.

L'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y, et l'axe des y divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des x; il suffit donc de construire par points la portion de la courbe située dans l'angle xOy, par exemple. L'abcisse x ne pouvant pas varier

au delà de a, nous ferons croître x de 0 à a; on voit alors que l'ordonnée y décroît depuis b jusqu'à 0; b est la valeur maximum de l'ordonnée y; la tangente en B sera parallèle à l'axe Ox; la tangente en A est parallèle à Oy. L'arc BMA étant constant, on en déduira, d'après les remarques faites, les autres parties de la courbe.

Axes rectangulaires.

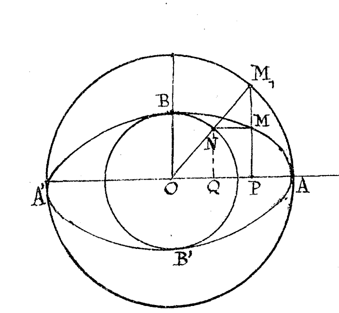
La construction se fera de la même manière que dans le cas précédent.

La courbe sera alors symétrique par rapport à Ox et Oy; AA' et BB' seront les deux axes de la courbe. Les tangentes en A et A' seront perpendiculaires à l'axe AA'; les tangentes en B et B' seront perpendiculaires à l'axe BB'.

2°. Construction à l'aide du paramètre φ.

Axes rectangulaires.

Sur les deux axes rectangulaires prenons $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$; puis décrivons un premier cercle sur AA' comme diamètre, et un second sur BB' comme diamètre.



Soit $a > b$; prenons un point quelconque M_1 sur le cercle du rayon a, et abaissons M_1P perpendiculaire sur OA; joignons ensuite M_1O, puis par le point N, où M_1O rencontre le cercle de rayon b, menons NM parallèle à OA; le point d'intersection, M, de M_1P et NM, sera un point de l'ellipse.

En effet, on a, en désignant par φ l'angle M_1OP:

$$x = OP = a\cos\varphi, \quad y = MP = NQ = b\sin\varphi;$$

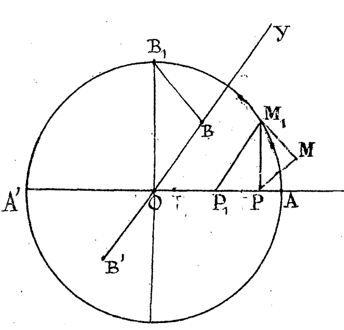
d'où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les points tels que M et M_1 sont dits points correspondants.

Axes obliques.

Supposons que a et b soient les longueurs de deux diamètres conjugués; prenons sur les deux axes $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$; puis sur AA', par exemple décrivons un cercle; en O élevons une perpendiculaire sur AA', soit B_1 son intersection avec le cercle; joignons enfin B_1B.



Soit maintenant M_1 un point quelconque du cercle; de ce point abaissons la perpendiculaire M_1P sur AA'; puis, par le point P, menons une parallèle à OB; et par M_1, une parallèle à B_1B; le point d'intersection M de ces deux lignes est un point de l'ellipse ayant pour diamètres conjugués OA et OB.

En effet, on a, d'après la propriété du cercle et la similitude des triangles

$$\overline{M_1P}^2 = PA \cdot PA'; \qquad \frac{M_1P}{OB_1} = \frac{MP}{OB};$$

ou, si x et y sont les coordonnées du point M par rapport à Ox et Oy

$$\overline{M_1P}^2 = (a+x)(a-x), \quad M_1P = \frac{a}{b}y;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les points tels que M et M_1 sont dits points correspondants.

Remarque. Cette seconde construction peut être appelée une construction homographique de l'ellipse.

Les conditions imposées par la définition de l'homographie N.° (190) sont en effet remplies dans le cas actuel. Cherchons d'ailleurs les relations entre les coordonnées des points correspondants M et M_1.

Si, par rapport aux axes Ox et Oy, x_1 et y_1 sont les coordonnées du point M_1, et x, y, les coordonnées du point M, on a (figure ci-dessus)

$$\begin{cases} x_1 = OP_1, & x = OP, \\ y_1 = M_1P_1, & y = MP. \end{cases}$$

Or, θ étant l'angle des axes, on a

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{OB}{OB_1}, \quad M_1P = M_1P_1 \sin\theta, \quad P_1P = M_1P_1 . \cos\theta;$$

d'où l'on conclut

$$(6) \begin{cases} x_1 = x - \dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}y \\ y_1 = \dfrac{a}{b\sin\theta}y \end{cases}, \text{ ou } (6 \text{ bis}) \begin{cases} x = x_1 + y_1\cos\theta, \\ y = \dfrac{b\sin\theta}{a}y_1 . \end{cases}$$

On voit que ces relations sont un cas très-particulier des formules générales (3) No. [190] de la transformation homographique; la droite de l'infini de l'une des figures reste à l'infini dans la transformation.

On constate aisément, à l'aide des formules (6) et (6 bis), que le cercle

$$(C) \qquad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta = a^2,$$

se transforme homographiquement en l'ellipse

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

et réciproquement.

Nous pouvons donner à ce cercle, le nom de cercle homographique de l'ellipse.

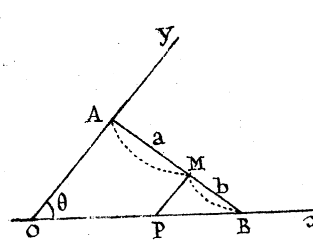
337. Génération de l'Ellipse.

L'Ellipse peut être engendrée par un point d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes.

Prenons les deux droites fixes pour axes, et supposons d'abord le point décrivant, M, situé entre les deux extrémités A et B; soient MA = a, MB = b.

On a d'abord

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2OA.OB.\cos\theta.$$



Si l'on construit les coordonnées du point M, on a par les triangles semblables

$$\frac{OA}{MP} = \frac{AB}{MB}, \quad \text{d'où } OA = \frac{y}{b} . AB,$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{AB}{MA}, \quad \text{d'où } OB = \frac{x}{a} . AB$$

La substitution de ces valeurs dans la relation ci-dessus donne immédiatement

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\theta - 1 = 0;$$

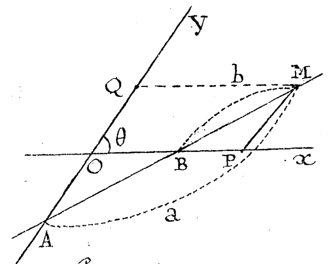
équation d'une ellipse, car on a $B^2 - AC = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{a^2b^2} = -\dfrac{\sin^2\theta}{a^2b^2} < 0.$

Lorsque les droites fixes sont rectangulaires ($\theta = 90°$), elles deviennent les axes de la courbe.

Supposons maintenant le point décrivant extérieur au segment AB.

Conservant les notations précédentes, on a la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OA}.\overline{OB}\cos\theta.$$



Les triangles semblables nous donnent encore

$$\frac{OA}{MP} = \frac{AB}{MB}, \text{ d'où } OA = \frac{y}{b}\, AB;$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{AB}{MA}, \text{ d'où } OB = \frac{x}{a}\, AB.$$

La substitution de ces valeurs dans la relation ci-dessus conduit à l'équation suivante

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2\,\frac{xy}{ab}\,\cos\theta - 1 = 0;$$

c'est encore l'équation d'une ellipse.

III.° Hyperbole. Construction.

338. L'équation de l'hyperbole est

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Cette équation donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \text{ ou } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x+a)(x-a);$$

de sorte que, si A et A' sont les extrémités du diamètre réel, et si MP est l'ordonnée d'un point M, on a

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\overline{AP}.\overline{A'P};$$

pour un autre point M_1 on aura de même

$$\overline{M_1P_1}^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\overline{AP_1}.\overline{A'P_1}$$

D'où l'on conclut

$$(7) \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{AP}.\overline{A'P}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{AP_1}.\overline{A'P_1}}.$$

Donc, dans une hyperbole, le quotient du carré d'une corde par le produit des distances du milieu de cette corde aux extrémités du diamètre conjugué est constant.

Théorème analogue à celui de l'ellipse, N.° (334); dans l'ellipse, le milieu P de la corde, ou le pied P de l'ordonnée, se trouve entre les extrémités A et A' du diamètre; dans l'hyperbole, le point P se trouve toujours extérieur au segment AA'.

Réciproquement: une courbe telle, que le quotient du carré de l'ordonnée par le produit des segments déterminés par le pied de l'ordonnée sur une droite fixe est constant, est une hyperbole; le pied de l'ordonnée étant en dehors des extrémités de la droite fixe.

On a, en effet

$$\frac{\overline{MP}^2}{PA.\,PA'} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ ou } \frac{y^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{ou } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

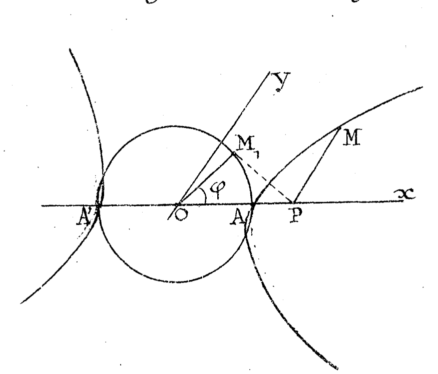
339. Emploi d'un angle auxiliaire.

1° L'équation (II) de l'hyperbole sera vérifiée, quel que soit φ, si l'on pose

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi}, \\ y = b \operatorname{tang}\varphi; \end{cases}$$

l'angle φ est le paramètre angulaire du point (x, y).

Signification géométrique de l'angle φ.



Soit M un point de l'hyperbole et P le pied de l'ordonnée; décrivons un cercle sur le diamètre AA'; et du point P menons une tangente PM_1 à ce cercle, puis joignons M_1 O.

On aura

$$OP = x = \frac{a}{\cos \widehat{M_1 OP}}, \quad \text{d'où } \cos\widehat{M_1OP} = \cos\varphi;$$

par conséquent

$$(3)\qquad \varphi = \widehat{M_1OA}.$$

2° On pourrait encore introduire un paramètre angulaire de la manière suivante.

L'équation de l'hyperbole rendue homogène sera

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

et nous pourrons évidemment poser

$$(4)\qquad \begin{cases} z = \dfrac{x}{a}\cos\psi, \\ y = \dfrac{bx}{a}\sin\psi. \end{cases}$$

Ces formules sont une conséquence des premières, et l'angle ψ n'est autre que l'angle φ; seulement, dans certains cas, cette manière d'introduire un paramètre angulaire, après avoir rendu l'équation homogène, peut être beaucoup plus avantageuse. Car, en opérant ainsi, on peut amener les calculs relatifs à l'hyperbole à se présenter sous la même forme que les calculs de la question correspondante pour l'ellipse.

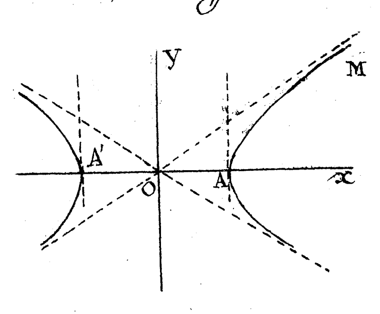
340. Construction de l'hyperbole.

1° Construction à l'aide de l'équation.

En résolvant l'équation (II) de l'hyperbole, on a

$$(5)\qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

l'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y, et de même pour l'axe des y; il suffit donc de construire la portion de la courbe correspondant à des valeurs positives de x.



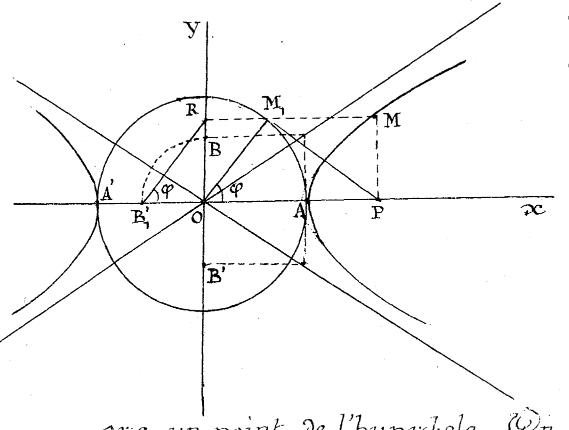
Lorsque x est inférieur à a, y est imaginaire; pour $x = a$, on a $y = 0$; il n'y a pas de points de la courbe entre les parallèles à l'axe des y menées par les points A et A'. Pour des valeurs de x supérieures à a, y est réel et croît indéfiniment avec x; on a ainsi l'arc indéfini AM; les autres parties de la courbe se construisent par symétrie.

La construction de la courbe se fera de la même manière si l'on suppose les axes obliques.

2° Construction de la courbe à l'aide de l'angle φ.

Axes rectangulaires.

Rappelons-nous la signification du paramètre φ donnée au N° (339).

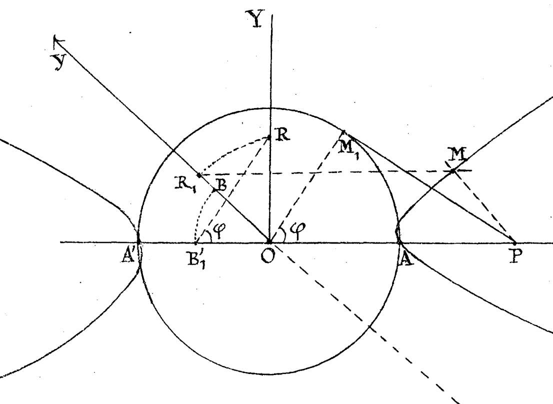


Soient a et b les axes de la courbe; $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$. Sur l'axe réel AA', comme diamètre, décrivons un cercle; prenons un point quelconque M_1 sur ce cercle et menons la tangente M_1P que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en P avec Ox. Si le point M_1 est à droite de Oy, nous prendrons sur Ox, à gauche de O, un point B'_1 tel que $OB'_1 = b$, (b longueur de l'axe imaginaire); par le point B'_1 menons une parallèle à OM_1 jusqu'à sa rencontre en R avec Oy; par le point R on construit une parallèle à AA', et par le point P une perpendiculaire à AA'; l'intersection M de ces deux droites sera un point de l'hyperbole. On a, en effet, si l'on pose $M_1OA = \varphi$;

$$OP = x = \frac{OM_1}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi}\ ; \quad y = MP = OR = b\ \text{tang}\ \varphi.$$

Axes obliques.

Soient a et b deux diamètres conjugués; $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$. Sur le diamètre réel AA',



comme diamètre, décrivons un cercle; prenons un point quelconque M_1 sur ce cercle et menons la tangente M_1P que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en P avec l'axe Ox. Si le point M_1 est à droite de Oy, nous prendrons sur Ox, à gauche de O, un point B'_1 tel que $OB'_1 = b$ (b longueur du diamètre imaginaire); par le point B'_1 menons une parallèle à OM_1 jusqu'à sa rencontre en R avec OY perpendiculaire à AA', puis rabattons OR sur Oy, en OR_1. Ceci fait, par le point R_1 construisons une parallèle à Ox, et par P une parallèle à Oy; l'intersection M de ces parallèles sera un point de l'hyperbole. En effet, si l'on désigne par φ l'angle M_1OA, on a

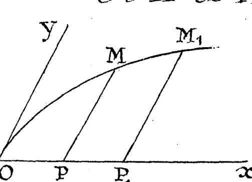
$$x = OP = \frac{a}{\cos\varphi}\ , \quad y = MP = OR_1 = OR = b\ \text{tang}\ \varphi.$$

IV° Parabole. Construction.

341. L'équation de la parabole est

$$\text{(III)} \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Si M et M_1 sont deux points de la courbe, MP et M_1P_1 les ordonnées de ces points, on a



$$\overline{MP}^2 = 2p.\,OP, \quad \overline{M_1P_1}^2 = 2p.\,OP_1\ ;$$

d'où l'on conclut

$$(1) \qquad \frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}} = \frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{OP_1}}.$$

Dans une parabole, le quotient du carré d'une corde par la distance du milieu de cette corde à l'extrémité du diamètre correspondant est constant.

Réciproquement: Une courbe telle, que le quotient du carré de l'ordonnée par la distance du pied de l'ordonnée à un point fixe est constant, est une parabole.

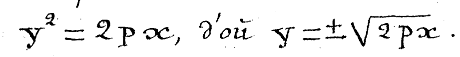
Prenons, en effet, le point fixe pour origine; la direction des ordonnées, pour axe des y; le lieu des pieds des ordonnées, pour axe des x; on a, d'après l'hypothèse

$$\frac{\overline{MP}^2}{OP} = \text{Constante} = 2p, \text{ d'où } y^2 = 2px;$$

ce qui est l'équation de la parabole.

342. Construction de la parabole.

1ère Construction à l'aide de l'équation.

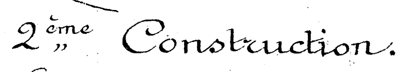


$$y^2 = 2px, \text{ d'où } y = \pm\sqrt{2px}.$$

Pour que y soit réel, il faudra que x soit positif; x devra donc varier de 0 à $+\infty$. L'axe Ox divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y.

Pour $x = 0$, on a $y = 0$; la courbe est tangente à l'axe Oy.

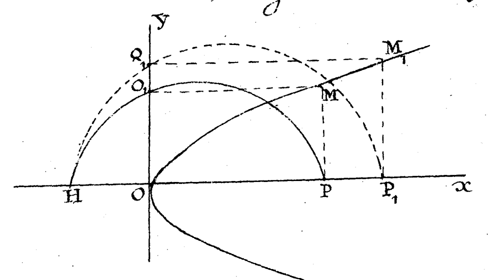
Lorsque x croît, y croît, et y croît indéfiniment avec x.



2ème Construction.

Axes rectangulaires.

Prenons, à gauche de Oy, un point H tel que $OH = 2p$. Choisissant alors un point arbitraire P sur Ox, on décrit un cercle sur HP comme diamètre; par le point Q, où la circonférence coupe l'axe Oy, on mène une parallèle à Ox; et par le point P, une perpendiculaire à Ox; le point M, intersection de ces deux droites, est un point de la parabole.

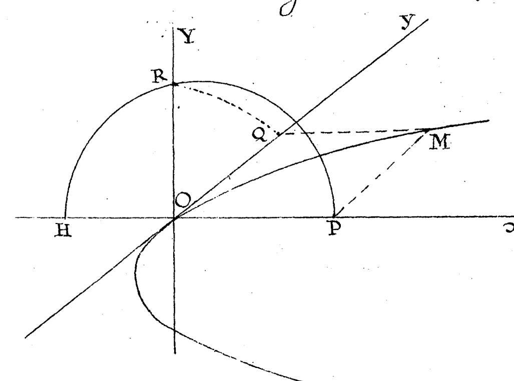


En effet, soient x et y les coordonnées du point M, on a

$$\overline{MP}^2 \text{ ou } \overline{OQ}^2 = OH.OP, \text{ d'où } y^2 = 2p.x.$$

Axes obliques.

Prenons, à gauche de Oy, un point H tel que $OH = 2p$. Choisissant alors un point arbitraire P sur Ox, on décrit un cercle sur HP comme diamètre; soit R le point où la circonférence rencontre la droite OY menée perpendiculairement à Ox; on rabat le point R en Q sur Oy; par le point Q, on mène une parallèle à Ox, et par le point P, une parallèle à Oy; le point M, intersection de ces deux droites, sera un point de la parabole.



En effet, x et y étant les coordonnées du point M, on a

$$\overline{MP}^2 = \overline{OQ}^2 = \overline{OR}^2 = OH.OP; \text{ d'où } y^2 = 2px.$$

§ IV Discussion de l'équation du second degré par la décomposition en carrés.

343. Nous avons déjà, par plusieurs méthodes, établi une classification des courbes du second ordre. Dans le § I, nous avons classé ces courbes en les construisant, en étudiant leur forme. Dans le § II, nous les avons classées en cherchant les formes réduites et distinctes auxquelles on peut ramener l'équation générale du second degré. Nous allons maintenant les classer en cherchant les formes que peut prendre l'équation générale par la **décomposition** en carrés. Cette troisième méthode participe à la fois des deux premières. Elle tient à la première par le mode de calcul, puisque la décomposition en carrés précède la résolution; elle tient à la seconde, car la décomposition en carrés donne

immédiatement les formes réduites.

La méthode que nous allons exposer est souvent très-commode pour reconnaître le genre et la variété d'une courbe du second ordre; la méthode du SI est principalement utile pour la construction de ces courbes.

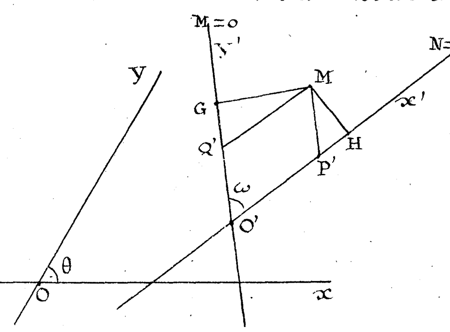
I.° Lemme.

344. Trouver les formules de transformation de coordonnées, lorsqu'on se donne les équations des nouveaux axes.

Soient les équations, par rapport aux deux axes Ox et Oy,

$$(1)\quad \begin{cases} N = Ax + By + C = 0, & O'x', \\ M = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, & O'y'; \end{cases}$$

de deux droites concourantes O'x' et O'y'. Supposons qu'on prenne ces deux droites pour axes, et cherchons les nouvelles coordonnées (x', y') d'un point M en fonction de ses anciennes coordonnées (x, y).



Par le point M menons MQ' et MP' respectivement parallèles à O'x' et O'y'; puis abaissons MG perpendiculaire sur la droite M=0 ou O'y', et MH perpendiculaire sur la droite N=0 ou O'x'.

Désignons par ω l'angle des nouveaux axes O'x' et O'y', on a N.° (70)

$$(2)\quad \tan\omega = \frac{(AB_1 - A_1B)\sin\theta}{AA_1 + BB_1 - (AB_1 + A_1B)\cos\theta},$$

θ étant l'angle des anciens axes.

Maintenant les triangles rectangles MGQ' et MP'H nous donnent

$$(1^\circ)\quad \overline{MG} = \overline{MQ'}.\sin\omega,\quad \overline{MH} = \overline{MP'}.\sin\omega;$$

or on a N.° (76)

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} \overline{MG} = \dfrac{(A_1x + B_1y + C_1)\sin\theta}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\cos\theta}} = \dfrac{M\sin\theta}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\cos\theta}}, \\ \overline{MH} = \dfrac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} = \dfrac{N\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}. \end{cases}$$

Les signes des radicaux dans les formules (2°) se détermineront d'après la règle du N.° (76), une fois qu'on aura fixé les parties positives des nouveaux axes O'x', O'y'; ce choix fixera en même temps la valeur qu'il faut adopter pour l'angle ω des deux droites, savoir l'angle aigu ou l'angle obtus.

Si nous posons alors

$$(3)\quad \begin{cases} h = \pm\dfrac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1\cos\theta}.\sin\omega}{\sin\theta}, \\ g = \pm\dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}.\sin\omega}{\sin\theta}, \end{cases}$$

les relations (1°) nous donneront

$$(4)\quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = hx', \\ Ax + By + C = gy'; \end{cases}$$

ou

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} M = hx', \\ N = gy'. \end{cases}$$

c. à. d. que les nouvelles coordonnées x' et y' d'un point quelconque M (x, y) sont proportionnelles aux fonctions linéaires M et N.

Les relations (4) ou (4 bis) sont les formules pour la transformation actuelle des coordonnées.

345. Ce lemme étant établi, prenons l'équation générale des courbes du second ordre

$$\text{(I)} \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Nous aurons à examiner les deux hypothèses suivantes:

1° Les coefficients des carrés ne sont pas nuls à la fois;

2° Les coefficients des carrés sont nuls à la fois.

II° 1ère Hypothèse: Les coefficients des carrés ne sont pas nuls à la fois.

346. Supposons le coefficient A, par exemple, différent de zéro; on peut admettre qu'on ait rendu positif un des coefficients A ou C, le coefficient A, par exemple, qui est supposé différent de zéro.

Multiplions par A les deux membres de l'équation (I), et ordonnons par rapport à x, on a

$$A^2x^2+2Ax(By+D)+ACy^2+2EAy+AF=0;$$

or les deux premiers termes font partie du carré de l'expression

$$(1) \qquad M=Ax+By+D;$$

de sorte que l'équation précédente pourra s'écrire, en retranchant le carré de $(By+D)$:

$$\text{(II)} \qquad M^2+(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2=0.$$

347. Cette première transformation étant effectuée, nous avons maintenant deux cas à examiner: le coefficient de y^2 est différent de zéro; le coefficient de y^2 est nul.

1er Cas. $\qquad AC-B^2 \gtrless 0.$

Multiplions les deux membres de l'équation (II) par $(AC-B^2)$ et formons le carré par rapport à y; après avoir posé

$$(2) \qquad N=(AC-B^2)y+(AE-BD),$$

l'équation (II) se présentera sous la forme:

$$\text{(III)} \qquad (AC-B^2)M^2+N^2+(AF-B^2)(AC-B^2)-(AE-BD)^2=0.$$

Or si l'on développe le terme indépendant et que l'on pose

$$(3) \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

on constate aisément que

$$(4) \qquad (AF-B^2)(AC-B^2)-(AE-BD)^2=A.\Delta$$

L'équation (III) pourra dès-lors s'écrire

$$\text{(III bis)} \qquad (AC-B^2).M^2+N^2+A\Delta=0.$$

Or les fonctions M et N égalées à zéro représentent deux droites qui se coupent; car la droite $N=0$ est parallèle à l'axe Ox, et $M=0$ représente une droite qui ne peut être parallèle à Ox, puisque A, par hypothèse, est différent de zéro. Par conséquent nous pouvons prendre ces deux droites pour axes de coordonnées; et l'équation (III bis) deviendra, d'après le lemme établi

$$h^2(AC-B^2).x^2+g^2.y^2+A\Delta=0.$$

Mais la discussion de cette dernière équation est évidemment la même que celle de l'équation (III bis), dans laquelle on considérerait M et N comme les coordonnées d'un point quelconque de la courbe par rapport aux nouveaux axes. Nous conserverons donc l'équation (III bis), et nous allons examiner les diverses formes que peut prendre cette équation.

1° $B^2-AC<0.$

Alors A et C sont nécessairement de même signe; comme l'un d'eux a été rendu positif, A est donc une quantité positive. D'après cela

Si $\Delta < 0$, l'équation (III bis) pourra se ramener à la forme

$$M^2 + N^2 = 1,$$

équation qui représente une ellipse réelle.

Si $\Delta = 0$, l'équation (III bis) se réduira à la forme

$$M^2 + N^2 = 0,$$

ce qui represente un point ou deux droites imaginaires.

Si $\Delta > 0$, l'équation (III bis) pourra se ramener à la forme

$$M^2 + N^2 + 1 = 0,$$

équation qui représente une ellipse imaginaire.

2° $B^2 - AC > 0$.

Si $\Delta \gtrless 0$, l'équation (III bis) prend l'une ou l'autre des formes

$$M^2 - N^2 = \pm 1;$$

ce qui représente, dans les deux cas, une hyperbole.

Si $\Delta = 0$, l'équation (III bis) se réduira à la forme

$$M^2 - N^2 = 0;$$

équation qui représente deux droites concourantes.

348. 2ème Cas. $AC - B^2 = 0$.

Pour arriver à l'équation (III), nous avons supposé $(B^2 - AC)$ différent de zéro, on ne peut donc plus se servir de cette équation dans le cas actuel.

Reprenons alors l'équation (II), et introduisons l'hypothèse présente, elle devient

$$\text{(IV)} \qquad M^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0.$$

L'égalité (4) du N.° (347) donne ici

$$\text{(5)} \qquad (AE - BD)^2 = -A.\Delta.$$

1° Si $\Delta \gtrless 0$, l'équation (IV) se mettra sous la forme

$$M^2 + N = 0;$$

c'est l'équation d'une parabole.

2° Si $\Delta = 0$, l'équation (IV) devient

$$M^2 + (AF - D^2) = 0;$$

cette équation représente

deux droites parallèles réelles, ... si $AF - D^2 < 0$,

deux droites confondues, ... si $AF - D^2 = 0$,

deux droites parallèles imaginaires, si $AF - D^2 > 0$.

Les formes correspondant à ces trois cas sont

$$M^2 = 1, \quad M^2 = 0, \quad M^2 = -1$$

III.° 2ème Hypothèse: Les coefficients des carrés sont nuls à la fois.

349. Dans l'hypothèse actuelle, on a

$$\text{(6)} \qquad A = 0, \; C = 0;$$

l'équation (I) de la courbe se réduit donc à

$$\text{(V)} \qquad Bxy + Dx + Ey + \frac{F}{2} = 0.$$

1er Cas. $B \gtrless 0$.

Mettant une des variables en facteur; x par exemple, on voit facilement que l'équation (V) peut s'écrire

$$(By+D)\left(x+\frac{E}{B}\right)+\frac{FB-2DE}{2B}=0.$$

Or, dans le cas actuel, on a

$$(7) \qquad \Delta=-B(FB-2DE);$$

l'équation précédente deviendra donc

$$(\text{VI}) \qquad MN=\frac{\Delta}{2B^2},$$

en posant

$$\begin{cases} M=By+D, \\ N=x+\dfrac{E}{B}; \end{cases}$$

on peut encore l'écrire

$$(\text{VI bis}) \qquad \left(\frac{M+N}{2}\right)^2-\left(\frac{M-N}{2}\right)^2=\frac{\Delta}{2B^2}.$$

Les deux droites $\frac{M+N}{2}=0$ et $\frac{M-N}{2}=0$ ne sont pas parallèles; l'équation (VI bis) se ramène donc à l'une des formes du N° (348), 2°.

Si $\Delta \gtrless 0$, on a une hyperbole.

Si $\Delta=0$, on a deux droites réelles qui se coupent.

350. 2ème Cas. $B=0$.

L'équation (V) rendue homogène devient

$$(\text{VII}) \qquad z\left(Dx+Ey+\frac{F}{2}\right)=0,$$

en introduisant l'hypothèse $B=0$ après avoir rendu homogène.

Dans le cas présent, on a évidemment $\Delta=0$ et $B^2-AC=0$; d'ailleurs l'équation (VII) représente deux droites dont l'une est à l'infini; on peut la considérer comme représentant un système de deux droites parallèles.

IV°. Tableau des diverses formes que peut prendre l'équation générale du second degré.

351. Les lettres M et N représentent des fonctions linéaires de x et y;

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

est l'équation générale de la courbe.

1° $B^2-AC<0$
- $M^2+N^2=1$, Ellipse réelle . . . . alors: $\Delta<0$,
- $M^2+N^2=0$, Ellipse évanouissante ou point: alors: $\Delta=0$,
- $M^2+N^2=-1$, Ellipse imaginaire . . . . alors: $\Delta>0$.

2° $B^2-AC>0$
- $M^2-N^2=1$, ou $MN=1$, Hyperbole . . . . alors: $\Delta \gtrless 0$,
- $M^2-N^2=0$, ou $MN=0$, Droites réelles concourantes . . alors: $\Delta=0$.

3° $B^2-AC=0$
- $M^2+N=0$, Parabole . . . . alors: $\Delta \gtrless 0$.
- $M^2=1$, Droites réelles parallèles . . . . } alors $\Delta=0$.
- $M^2=0$; Droites confondues . . . . } alors $\Delta=0$.
- $M^2=-1$, Droites parallèles imaginaires . . . } alors $\Delta=0$.

On a désigné par Δ l'expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

§V Equation des courbes du 2ème ordre en Coordonnées Trilatères.

1° Forme de l'équation en coordonnées trilatères.

352. Nous allons déduire l'équation, en coordonnées trilatères, des courbes du second ordre de l'équation en coordonnées Cartésiennes

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Les formules générales de transformation sont N° (91)

$$(2) \quad \begin{cases} X = ax + a_1 y + a_2, \\ Y = bx + b_1 y + b_2, \\ Z = cx + c_1 y + c_2; \end{cases}$$

les droites $X=0, Y=0, Z=0$, sont trois droites non concourantes et forment le triangle de référence.

Il faut démontrer que l'équation (1) peut toujours se mettre sous la forme

$$(3) \qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0,$$

ou mieux que l'équation (3) peut représenter toutes les courbes du second ordre.

Pour cela, remplaçons X, Y, Z, par les valeurs (2) dans l'équation (3), et identifions l'équation obtenue avec l'équation (1), c.à.d. écrivons que les mêmes coefficients des mêmes puissances des variables sont proportionnels.

En désignant par λ la valeur commune des rapports, on trouve:

$$(4) \quad \begin{cases} 1° & A_{11}a^2 + A_{22}b^2 + A_{33}c^2 + 2A_{12}ab + 2A_{13}ac + 2A_{23}bc = \lambda A, \\ 2° & A_{11}a_1^2 + A_{22}b_1^2 + A_{33}c_1^2 + 2A_{12}a_1b_1 + 2A_{13}a_1c_1 + 2A_{23}b_1c_1 = \lambda C, \\ 3° & A_{11}a_2^2 + A_{22}b_2^2 + A_{33}c_2^2 + 2A_{12}a_2b_2 + 2A_{13}a_2c_2 + 2A_{23}b_2c_2 = \lambda F; \\ 4° & A_{11}aa_1 + A_{22}bb_1 + A_{33}cc_1 + A_{12}(ab_1 + a_1b) + A_{13}(ac_1 + a_1c) + A_{23}(bc_1 + b_1c) = \lambda B, \\ 5° & A_{11}aa_2 + A_{22}bb_2 + A_{33}cc_2 + A_{12}(ab_2 + a_2b) + A_{13}(ac_2 + a_2c) + A_{23}(bc_2 + b_2c) = \lambda D, \\ 6° & A_{11}a_1a_2 + A_{22}b_1b_2 + A_{33}c_1c_2 + A_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + A_{13}(a_1c_2 + a_2c_1) + A_{23}(b_1c_2 + b_2c_2) = \lambda E. \end{cases}$$

Il s'agit de déduire de ces équations les coefficients inconnus A_{rs}, et de constater que leurs valeurs sont finies.

Pour cela, nous poserons

$$(5) \begin{cases} A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c = M_{11}, \\ A_{21}a + A_{22}b + A_{23}c = M_{12}, \\ A_{31}a + A_{32}b + A_{33}c = M_{13}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{11}a_1 + A_{12}b_1 + A_{13}c_1 = M_{21}, \\ A_{21}a_1 + A_{22}b_1 + A_{23}c_1 = M_{22}, \\ A_{31}a_1 + A_{32}b_1 + A_{33}c_1 = M_{23}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_{11}a_2 + A_{12}b_2 + A_{13}c_2 = M_{31}, \\ A_{21}a_2 + A_{22}b_2 + A_{23}c_2 = M_{32}, \\ A_{31}a_2 + A_{32}b_2 + A_{33}c_2 = M_{33}. \end{cases}$$

Les équations (4) s'écriront alors

$$(6) \quad \begin{cases} 1° & aM_{11} + bM_{12} + cM_{13} = \lambda A, \\ 2° & a_1M_{21} + b_1M_{22} + c_1M_{23} = \lambda C, \\ 3° & a_2M_{31} + b_2M_{32} + c_2M_{33} = \lambda F; \\ 4° & a_1M_{11} + b_1M_{12} + c_1M_{13} = aM_{21} + bM_{22} + cM_{23} = \lambda B, \\ 5° & a_2M_{11} + b_2M_{12} + c_2M_{13} = aM_{31} + bM_{32} + cM_{33} = \lambda D, \\ 6° & a_1M_{31} + b_1M_{32} + c_1M_{34} = a_2M_{21} + b_2M_{22} + c_2M_{23} = \lambda E. \end{cases}$$

Nous allons d'abord calculer les quantités M_{rs}.

Nous désignerons par P le déterminant de la substitution (2), savoir

$$(7) \qquad P = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

et nous représenterons par α, β, γ ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, etc... les déterminants partiels en valeur et en signe; de sorte que

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, & \alpha_1 = -\begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix}, & \alpha_2 = +\begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}, \\ \beta = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, & \beta_1 = +\begin{vmatrix} a & a_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix}, & \text{etc.....} \\ \text{etc ....} & \text{etc ....} & \end{cases}$$

Si maintenant nous considérons les équations (1°), (4°), (5°) du groupe (6), savoir:

$$\begin{cases} a\, M_{11} + b\, M_{12} + c\, M_{13} = \lambda A, \\ a_1 M_{11} + b_1 M_{12} + c_1 M_{13} = \lambda B, \\ a_2 M_{11} + b_2 M_{12} + c_2 M_{13} = \lambda D; \end{cases}$$

on en déduit, en résolvant par rapport à M_{11}, M_{12}, M_{13}

$$(9, 1°) \quad \begin{cases} P\, M_{11} = \lambda(\alpha A + \alpha_1 B + \alpha_2 D), \\ P\, M_{12} = \lambda(\beta A + \beta_1 B + \beta_2 D), \\ P\, M_{13} = \lambda(\gamma A + \gamma_1 B + \gamma_2 D). \end{cases}$$

On aura de même en prenant successivement les groupes 2°, 4°, 6°; 3°, 5°, 6°:

$$(9, 2°) \quad \begin{cases} P\, M_{21} = \lambda(\alpha B + \alpha_1 C + \alpha_2 E), \\ P\, M_{22} = \lambda(\beta B + \beta_1 C + \beta_2 E), \\ P\, M_{23} = \lambda(\gamma B + \gamma_1 C + \gamma_2 E); \end{cases}$$

$$(9, 3°) \quad \begin{cases} P\, M_{31} = \lambda(\alpha D + \alpha_1 E + \alpha_2 F), \\ P\, M_{32} = \lambda(\beta D + \beta_1 E + \beta_2 F), \\ P\, M_{33} = \lambda(\gamma D + \gamma_1 E + \gamma_2 F). \end{cases}$$

Ces valeurs étant déterminées, prenons les premières équations des groupes (9, 1°), (9, 2°), (9, 3°) et remplaçons y les M_{rs} par leurs valeurs (5), on a les trois équations

$$\begin{cases} P\,(A_{11} a + A_{12} b + A_{13} c) = \lambda(\alpha A + \alpha_1 B + \alpha_2 D), \\ P\,(A_{11} a_1 + A_{12} b_1 + A_{13} c_1) = \lambda(\alpha B + \alpha_1 C + \alpha_2 E), \\ P\,(A_{11} a_2 + A_{12} b_2 + A_{13} c_2) = \lambda(\alpha D + \alpha_1 E + \alpha_2 F). \end{cases}$$

Si on les multiplie respectivement par $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$; puis par β, β_1, β_2, et enfin par $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$, et qu'on ajoute; on trouvera

$$(10) \quad \begin{cases} P^2 A_{11} = \lambda\left[A\alpha^2 + C\alpha_1^2 + F\alpha_2^2 + 2B\,\alpha\alpha_1 + 2D\,\alpha\alpha_2 + 2E\,\alpha_1\alpha_2\right]; \\ P^2 A_{12} = \lambda\left[A\alpha\beta + C\alpha_1\beta_1 + F\alpha_2\beta_2 + B(\alpha_1\beta + \alpha\beta_1) + D(\alpha_2\beta + \alpha\beta_2) + E(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)\right]; \\ \text{etc. ....} \end{cases}$$

On obtiendra les autres valeurs par un calcul semblable.

Ainsi, étant donnée l'équation, en coordonnées Cartésiennes, d'une courbe du second ordre,

$$(I) \qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0;$$

si on rapporte cette courbe à un triangle de référence défini par les droites

$$\begin{cases} X = ax + a_1 y + a_2 z = 0, \\ Y = bx + b_1 y + b_2 z = 0, \\ Z = cx + c_1 y + c_2 z = 0; \end{cases}$$

l'équation de la courbe sera

$$\text{(II)} \qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;$$

et les coefficients de cette équation auront les valeurs suivantes

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} P^2 A_{11} = \lambda f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2),\ P^2 A_{22} = \lambda f(\beta, \beta_1, \beta_2),\ P^2 A_{33} = \lambda f(\gamma, \gamma_1, \gamma_2), \\ P^2 A_{12} = \lambda\{A\alpha\beta + C\alpha_1\beta_1 + F\alpha_2\beta_2 + B(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) + D(\alpha_2\beta + \alpha\beta_2) + E(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)\}, \\ P^2 A_{13} = \lambda\{A\alpha\gamma + C\alpha_1\gamma_1 + F\alpha_2\gamma_2 + B(\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma) + D(\alpha_2\gamma + \alpha\gamma_2) + E(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)\}, \\ P^2 A_{23} = \lambda\{A\beta\gamma + C\beta_1\gamma_1 + F\beta_2\gamma_2 + B(\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) + D(\beta_2\gamma + \beta\gamma_2) + E(\beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2)\}. \end{cases}$$

Les quantités $P, \alpha, \beta, \ldots$ ont les valeurs définies par les égalités (7) et (8).

Les trois droites $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ n'étant pas concourantes, le déterminant P est différent de zéro; les valeurs des A_{rs} sont donc finies.

Ainsi l'équation générale des courbes du second ordre, en coordonnées trilatères, est

$$\text{(IV)} \qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

Nous présentons cette démonstration principalement comme exercice de calcul; nous allons cependant en déduire quelques conséquences.

Remarque. Le calcul eût été beaucoup plus facile si nous avions voulu nous contenter de démontrer que l'équation (1) des courbes du second ordre prend la forme (3) lorsqu'on la rapporte à un triangle défini par les droites (2) non concourantes.

Il eût suffi, pour cela, de résoudre les équations (2) par rapport à x et y, ce qui donne en ayant égard aux relations (8):

$$x = \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma Z}{\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z}, \qquad y = \frac{\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z}{\alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z};$$

et de substituer ces valeurs dans l'équation (1).

Mais le calcul que nous avons développé met en évidence ce fait important, savoir: que les coefficients A_{rs} de l'équation n'ont entre eux aucune dépendance, si l'équation (1) est supposée générale. Il résulte, en effet, des valeurs (III), que le déterminant du système des équations (4), lesquelles déterminent les six inconnues A_{rs}, est égal à P^2; or, d'après l'hypothèse admise, ce déterminant n'est pas nul; donc les A_{rs} ne peuvent pas se présenter sous une forme indéterminée; en d'autres termes, ils ne sont pas liés par aucune relation, dans le cas général.

353. Nous venons de voir que l'équation générale, en coordonnées trilatères, des courbes du second ordre est

$$\text{(1)} \qquad F(X,Y,Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

Plus tard nous exposerons des méthodes simples qui nous permettront de reconnaître le genre et la variété des courbes représentées par l'équation (1); pour l'instant, nous nous contenterons de chercher à l'aide des calculs précédents, la condition pour que l'équation (1) représente un système de deux droites; cette condition ne dépend que des coefficients de l'équation et nullement des éléments du triangle auquel la courbe est rapportée.

Pour résoudre la question, rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) N.° [352] représente un système de deux droites est N.° [315] ou [351]

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

exprimons ce déterminant Δ en fonction des coefficients A_{rs} de l'équation (3)

Les relations (5) du N.° [352] donnent, d'après le théorème connu sur la multiplication des déterminants:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$

D'un autre côté les relations (6) du N.° (352) forment trois groupes semblables aux groupes (5) et donnent, par l'application du même théorème,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

De là on déduit en multipliant membre à membre les deux dernières égalités

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = \lambda^3 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

on pourrait évidemment supposer, dans cette égalité, $\lambda = 1$.

De la relation (2) nous concluons que:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) représente un système de deux droites est

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux droites seront **imaginaires**, si la courbe représentée par l'équation (1) appartient au genre ellipse; **réelles**, si elle appartient au genre hyperbole; **parallèles**, si elle appartient au genre parabole.

II.° Décomposition en carrés.

354. Étant donnée l'équation d'une courbe du second ordre, en coordonnées trilatères,

$$(1)\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0,$$

on peut appliquer à cette équation le mode de décomposition exposé au § IV, N.° (343) et suivants.

Représentons par Δ le discriminant du premier membre, de sorte que

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

En dirigeant le calcul comme il a été fait au § IV N.° (343), etc,... on démontrera les propositions suivantes que nous ne ferons qu'énoncer:

1.° Si $\Delta \gtrless 0$, l'équation pourra se ramener à l'une des formes

$$(3)\qquad M^2 \pm N^2 \pm P^2 = 0,$$

M, N, P étant des fonctions linéaires et homogènes de X, Y, Z. L'équation (3) représentera alors une des courbes proprement dites du second ordre: ellipse, hyperbole, ou parabole. La courbe sera, comme nous le verrons plus loin, **conjuguée** par rapport au triangle $M=0, N=0, P=0$; ou, si l'on veut, ce triangle sera **conjugué** par rapport à la courbe.

2.° Si $\Delta = 0$, l'équation pourra se ramener à l'une des formes

$$(4)\qquad M^2 \pm N^2 = 0;$$

la courbe se composera d'un système de droites réelles ou imaginaires; ces droites pourront être parallèles.

3° Si les déterminants partiels de Δ sont nuls l'équation pourra se ramener à la forme

$$(5) \qquad M^2 = 0;$$

la courbe se compose de deux droites confondues.

Les réciproques de ces propositions sont vraies; elles sont une conséquence nécessaire de l'analyse qui conduit aux théorèmes énoncés.

Les équations (3), (4), et (5) donnent les seules formes réduites possibles auxquelles peut se ramener l'équation générale, en coordonnées trilatères, des courbes du second ordre.

Chapitre II.

Classification des courbes de 2ème classe.

§I Coordonnées (bilatères) u, v.

355. L'équation générale des courbes de 2ème Classe est

$$(1) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0;$$

en effet, une courbe de 2ème classe est telle que, par un point quelconque du plan on ne peut mener que deux tangentes à cette courbe; or l'équation d'un point est du 1er degré en u et v; l'équation d'une courbe de 2ème classe est donc du second degré par rapport aux variables u et v.

Nous verrons, dans l'étude des tangentes, que les courbes de 2ème classe sont en même temps des courbes du second ordre; l'étude des points à l'infini, comme nous le verrons un peu plus loin, nous permettra de distinguer le genre de ces courbes.

I°. Transformation des coordonnées.

356. On peut aussi, comme dans le chapitre précédent, opérer la réduction de l'équation (1) par la transformation des coordonnées; nous n'entrerons pas dans tous les détails de ce calcul; cependant nous allons faire connaître les formules de transformation dans le cas des coordonnées tangentielles.

Soit l'équation de la nouvelle origine O'

$$(1) \qquad u x_0 + v y_0 - 1 = 0;$$

ses coordonnées seront x_0 et y_0 N° [111]. Désignons par α et β les angles des nouveaux axes O'x' et O'y avec l'ancien axe Ox.

Rappelons d'abord les formules de transformation N° [29] pour les coordonnées Cartésiennes; x et y étant les coordonnées d'un point dans l'ancien système, x' et y' étant celles du même point dans le nouveau système, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{x' \sin(\theta-\alpha) + y' \sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y &= y_0 + \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}; \end{aligned} \right.$$

et, pour les formules inverses

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{(x-x_0)\sin\beta - (y-y_0)\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta'}, \\ y' &= \frac{-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta'}, \end{aligned} \right. \qquad \text{où } \theta' = \beta - \alpha;$$

θ est l'angle des axes primitifs; θ' est l'angle des nouveaux axes.

Ceci posé, soient u et v les coordonnées d'une droite dans le système primitif, et u', v', les coordonnées de la même droite dans le nouveau; l'équation de cette droite sera:

$$(4)\qquad \text{dans le 1}^{\text{er}}\text{ système}: \quad ux + vy - 1 = 0,$$

$$(5)\qquad \text{dans le 2}^{\text{ème}}\text{ système}: \quad u'x' + v'y' - 1 = 0.$$

Substituons les valeurs (2) dans l'équation (4), et identifions l'équation ainsi obtenue avec l'équation (5), on trouve:

$$(\text{I})\quad \left\{ \begin{aligned} u' &= -\frac{u\sin(\theta-\alpha) + v\sin\alpha}{(ux_0 + vy_0 - 1)\sin\theta}, \\ v' &= -\frac{u\sin(\theta-\beta) + v\sin\beta}{(ux_0 + vy_0 - 1)\sin\theta}. \end{aligned} \right.$$

Substituons de même les valeurs (3) dans l'équation (5) et identifions l'équation ainsi obtenue avec l'équation (4); puis remarquons, qu'en désignant par x'_0, y'_0 les coordonnées de l'origine ancienne par rapport aux nouveaux axes, on a d'après les formules (3)

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x'_0 \sin\theta' &= -x_0\sin\beta + y_0\sin(\theta-\beta), \\ y'_0 \sin\theta' &= +x_0\sin\alpha - y_0\sin(\theta-\alpha, \end{aligned} \right. \qquad \text{où } \theta' = \beta - \alpha;$$

nous trouverons alors

$$(\text{II})\quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{-u'\sin\beta + v'\sin\alpha}{(u'x'_0 + v'y'_0 - 1)\sin\theta'}, \\ v &= \frac{u'\sin(\theta-\beta) - v'\sin(\theta-\alpha)}{(u'x'_0 + v'y'_0 - 1)\sin\theta'}. \end{aligned} \right.$$

Les relations (I) et (II) sont les formules de transformation dans le système des coordonnées tangentielles.

357. Telles sont les formules à l'aide desquelles on peut opérer la réduction de l'équation générale des courbes de 2ème classe:

$$(1)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Par les formules (II), cette équation sera transformée en la suivante:

$$(2)\quad \left. \begin{aligned} &A\left[-u'\sin\beta + v'\sin\alpha\right]^2 + 2B\left[-u'\sin\beta + v'\sin\alpha\right]\left[u'\sin(\theta-\beta) - v'\sin(\theta-\alpha)\right] + C\left[u'\sin(\theta-\beta) - v'\sin(\theta-\alpha)\right]^2 \\ &+ 2D\left[-u'\sin\beta + v'\sin\alpha\right]\left[u'x'_0 + v'y'_0 - 1\right]\sin\theta' + 2E\left[u'\sin(\theta-\beta) - v'\sin(\theta-\alpha)\right]\left[u'x'_0 + v'y'_0 - 1\right]\sin\theta' \\ &+ F(u'x'_0 + v'y'_0 - 1)^2\sin^2\theta' \end{aligned} \right\} = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que le nouveau terme constant F' est égal à l'ancien multiplié par $\sin^2\theta'$, on a ainsi

$$(3)\qquad F' = F\sin^2\theta'.$$

De sorte que pour diriger cette discussion il faudra distinguer deux cas: le terme indépendant est différent de zéro, le terme indépendant est nul.

Lorsque le terme indépendant n'est pas nul, on peut faire disparaître les termes du 1er degré et le produit uv des variables; et l'équation (1) se réduira à l'une des formes suivantes

$$(1°)\qquad A'u'^2 + C'v'^2 = 1,$$

$$(2°)\qquad A'u'^2 = 1.$$

Lorsque le terme indépendant est nul, on ne peut, en général, faire disparaître les termes du 1er degré, et l'équation (1) pourra se réduire à l'une des formes suivantes

$$(3°)\qquad A'u'^2 + 2D'v' = 0,$$

$$(4°)\qquad A'u'^2 = 0,$$

$$(5°)\qquad u'v' = 0.$$

Il n'y a qu'un seul cas où ces dernières réductions ne pourront pas s'opérer, c'est celui où l'on aura à la fois $F = 0$, $D = 0$, $E = 0$; l'équation aura alors la forme

$$(6°)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0.$$

358. Indiquons les différentes courbes représentées par ces formes réduites.

L'équation (1°) représente une ellipse ou une hyperbole; la courbe, en effet, n'est pas tangente à la droite de l'infini ($u'=0$, $v'=0$), N.° [331], remarque.

L'équation (2°) représente deux points situés sur l'axe $O'x'$.

L'équation (3°) représente une parabole, car cette courbe est tangente à la droite de l'infini ($u'=0$, $v'=0$).

L'équation (4°) représente deux points coïncidents à l'infini sur l'axe $O'x'$.

L'équation (5°) représente deux points, l'un est l'origine des coordonnées, l'autre est à l'infini sur l'axe $O'x'$.

L'équation (6°) représente deux points à l'infini N.° [115].

359. En général, l'équation (1) N.° [357] représentera deux points, si l'on a

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

cette condition est nécessaire et suffisante; c'est, en effet, la condition nécessaire et suffisante N.° [351] pour que le premier membre de l'équation (1) soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, c.à.d. pour que l'équation se ramène à la forme

$$(au+bv+c)(a_1u+b_1v+c_1)=0.$$

II°. Décomposition en carrés.

360. On peut aussi appliquer à l'équation

$$(1) \qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0,$$

la méthode de la décomposition en carrés § IV N.° [343].

Mais pour déduire de là la classification des courbes de 2ème classe, il faut opérer avec certaines précautions, et introduire les remarques faites au N.° [331].

Classification des courbes de 2ème classe.

361. Pour faire cette classification, nous nous appuierons donc sur les propriétés caractéristiques énoncées au N.° [331] (remarque), savoir:

La droite de l'infini rencontre l'ellipse en deux points imaginaires; l'hyperbole, en deux points réels et distincts; elle touche la parabole; les réciproques sont vraies.

Soit alors l'équation générale des courbes de 2ème classe:

$$(1) \qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0,$$

et représentons par Δ le discriminant du premier membre, de sorte que

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées de la droite de l'infini sont $u=0$, $v=0$; et l'équation d'un point à l'infini est de la forme N.° [115]

$$(3) \qquad v=\lambda u.$$

Nous allons d'abord chercher la condition pour que le point (3) soit sur la courbe (1); pour cela, il faut et il suffit que les deux tangentes qu'on peut mener de ce point à la courbe se confondent, c.à.d. que, si l'on remplace v par λu dans l'équation (1), l'équation ainsi obtenue ait deux racines égales.

En remplaçant v par λu dans l'équation (1), on trouve

$$(3\,bis) \qquad (C\lambda^2+2B\lambda+A)u^2+2(\lambda E+D)u+F=0;$$

pour que les deux racines de cette équation soient égales, il faut que

$$(\lambda E+D)^2-F(C\lambda^2+2B\lambda+A)=0,$$

ou

$$(4) \qquad \lambda^2(E^2-CF)+2(DE-BF)\lambda+D^2-AF=0.$$

Les deux valeurs de λ déduites de l'équation (4) feront connaître, à l'aide de l'équation (3), les deux points à l'infini situés sur la courbe (1).

La condition de réalité des racines de l'équation (4) est

$$(5) \qquad (DE-BF)^2-(E^2-CF)(D^2-AF)>0.$$

Or, on a l'identité

$$(6) \qquad (DE-BF)^2-(E^2-CF)(D^2-AF)=-F.\Delta.$$

362. Ceci posé, nous distinguerons pour la discussion, les deux cas suivants:

1° Le terme indépendant F est différent de zéro,

2° Le terme indépendant F est nul.

Nous supposerons toujours qu'on ait modifié les signes du premier membre de l'équation (1) de manière à rendre positif le terme indépendant F.

1er Cas. $F>0$.

La droite de l'infini ne touche évidemment pas la courbe, puisque l'équation (1) n'est pas vérifiée lorsqu'on y fait $u=0$ et $v=0$; la courbe est donc une ellipse ou une hyperbole.

Si $\Delta>0$, on voit par la relation (6) et l'inégalité (5) que les racines de l'équation (4) sont imaginaires; la courbe est une **ellipse**.

Si $\Delta<0$, on voit que les racines de l'équation (4) sont réelles; la courbe est une hyperbole; les équations (3) et (3 bis) déterminent les coordonnées de la tangente en chacun de ces points à l'infini.

Si $\Delta=0$, les deux racines de l'équation (4) sont égales, les deux points à l'infini se confondent, ainsi que les deux tangentes en ces points; et comme la droite de l'infini n'est pas tangente, la courbe se réduit donc à deux points.

On peut encore se rendre compte de ce resultat en décomposant en carrés le premier membre de l'équation (1), et on constate alors que, si $\Delta=0$, elle se ramène à la forme

$$(au+bv+c)(a_1u+b_1v+c_1)=0.$$

Pour reconnaître les variétés de la courbe, nous décomposerons en carrés; et comme le terme F est différent de zéro, nous rendrons d'abord l'équation homogène, ce qui donne

$$(7) \qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Du\omega+2Ev\omega+F\omega^2=0,$$

puis nous formerons le carré par rapport à ω. On a ainsi

$$(8) \qquad [F\omega+Ev+Du]^2+(CF-E^2)v^2+2(BF-ED)vu+(AF-D^2)u^2=0.$$

1° Soit d'abord $(CF-E^2)\gtrless 0$; on aura, en continuant la décomposition et en ayant égard à la relation (6):

$$(9) \qquad (CF-E^2)[F\omega+Ev+Du]^2+[(CF-E^2)v+(BF-ED)u]^2+F.\Delta.u^2=0.$$

Le coefficient F est, par hypothèse positif; soit d'abord $\Delta>0$.

Si $(CF-E^2)<0$, l'équation (9) admet des solutions réelles en u et v; la courbe est une **ellipse réelle**;

Si $(CF-E^2)>0$, l'équation (9) n'admet aucune solution réelle; la courbe est une **ellipse imaginaire**.

Supposons $\Delta<0$, alors, quel que soit le signe de $(CF-E^2)$ l'équation (9) aura toujours des solutions réelles; la courbe est une **hyperbole**.

Supposons enfin $\Delta=0$; l'équation (9) représentera évidemment deux points réels ou imaginaires suivant que $(CF-E^2)$ sera positif ou négatif.

2° Soit, en second lieu, $(CF-E^2)=0$; la relation (6) devient, dans ce cas,

$$(BF-ED)^2=-F.\Delta.$$

Par suite Δ est négatif ou nul; si $\Delta<0$, on a une hyperbole.

Si $\Delta=0$, il en résulte, $(BF-ED)=0$, et l'on voit par l'équation (8), que la courbe se réduit à deux points réels, coïncidents, ou imaginaires suivant que $(AF-D^2)$ est **négatif, nul ou positif.**

2ème Cas. $F = o.$

La droite de l'infini ($u = o,\ v = o$) touche évidemment la courbe; l'équation

$$(10)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev = o,$$

représente alors une **parabole**.

Dans ce cas, la quantité Δ se réduit à

$$(11)\qquad \Delta = 2BDE - CD^2 - AE^2.$$

Pour reconnaître les variétés de la courbe, décomposons en carrés l'équation (10) après l'avoir rendue homogène, ce qui donne

$$(12)\qquad 2Evw + 2Duw + Cv^2 + 2Buv + Au^2 = o.$$

1°. Supposons qu'un, au moins, des coefficients des carrés u^2 et v^2 ne soit pas nul, soit, par exemple, $A \gtrless o$.

Formons le carré par rapport à u, il vient

$$(Au + Bv + Dw)^2 + (AC - B^2)v^2 + 2(AE - BD)vw - D^2w^2 = o;$$

puis, si l'on suppose $D \gtrless o$, on aura, en formant le carré par rapport à w:

$$(Au + Bv + Dw)^2 - \left[Dw - \frac{AE - BD}{D}v\right]^2 + \left[AC - B^2 + \frac{(AE - BD)^2}{D^2}\right]v^2 = o;$$

équation qui, eu égard à la valeur (11) de Δ, se mettra sous la forme définitive:

$$(13)\qquad (Du + Ev)\left(ADu + (2BD - AE)v + 2D^2w\right) = \Delta . v^2.$$

Cette équation représente une **parabole**, si $\Delta \gtrless o$; lorsque $\Delta = o$, on a **deux points**, dont un est à l'infini.

Lorsque, A étant différent de zéro, on a $D = o$, l'équation (12) devient

$$(14)\qquad v\left[2Bu + Cv + 2Ew\right] + Au^2 = o.$$

Si les constantes A et E ne sont pas nulles, c.à.d. si Δ est différent de zéro, on a une **parabole**; si $A = o$, alors $\Delta = o$, on a deux points, dont un à l'infini; si $E = o$, alors $\Delta = o$, on a deux points à l'infini.

2°. Supposons A et C nuls à la fois.

L'équation (12) se réduit à

$$(15)\qquad w(Ev + Du) + Buv = o,$$

et l'on a, dans ce cas,

$$(16)\qquad \Delta = 2BDE.$$

Si aucune des constantes B, D, E, n'est nulle, on a une **parabole**; on le voit en remarquant que l'équation peut s'écrire

$$(Bv + Dw)\left(u + \frac{E}{B}w\right) = -\frac{ED}{B}w^2.$$

Lorsque $B = o$, on a deux points, dont l'un est à l'infini, l'autre est l'origine;

lorsque $D = o$ ou $E = o$, on a deux points, dont l'un est à l'infini;

lorsqu'on a à la fois $D = o$, $E = o$, les deux points sont à l'infini.

363. ## Résumé.

L'équation tangentielle de la courbe étant:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = o;$$

nous désignerons par Δ le discriminant du premier membre

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

nous supposerons, en outre, qu'on a rendu positif le terme indépendant lorsque ce terme n'est pas nul.

I° $F > 0$ **Genre Ellipse et Hyperbole**

- $\Delta > 0$ **Ellipse**
  - Ellipse réelle, ... si $(E^2 - CF) > 0$,
  - Ellipse imaginaire, ... si $(E^2 - CF) < 0$.
- $\Delta < 0$ **Hyperbole**
  - Quel que soit le signe de $(E^2 - CF)$.
- $\Delta = 0$ **Deux points**
  - si $E^2 - CF > 0$, deux points réels
  - si $E^2 - CF < 0$, deux points imaginaires;
  - si $E^2 - CF = 0$
    - deux points réels .... si $D^2 - AF > 0$,
    - deux points confondus .... si $D^2 - AF = 0$,
    - deux points imaginaires . . si $D^2 - AF < 0$.

N. B. Dans le cas de l'ellipse $(E^2 - CF)$ ne peut être nul, car alors Δ serait négatif.

II° $F = 0$ **Genre Parabole**

- $\Delta \gtrless 0$ Parabole proprement dite.
- $\Delta = 0$
  - deux points, dont un à l'infini, si E et D ne sont pas nuls à la fois;
  - deux points à l'infini, si $D = 0$, et $E = 0$.

---

§ II Coordonnées trilatères (U, V, W).

364. A l'aide des formules (18 bis) du N.° (145) on pourra démontrer, par une analyse semblable à celle qui a été développée au N.° (352), que l'équation tangentielle, en coordonnées trilatères, des courbes de 2ème classe, est de la forme

$$(1) \qquad A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{33} W^2 + 2A_{12} UV + 2A_{13} UW + 2A_{23} VW = 0.$$

On peut aussi appliquer à cette équation le mode de décomposition en carrés exposé au N.° (343), etc.... Représentons par Δ le discriminant du premier membre, de sorte que

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

et dirigeons le calcul comme il a été fait au N.° (343) etc.., on arrivera aux conclusions suivantes:

1.° Si $\Delta \gtrless 0$, l'équation pourra se ramener à l'une des formes

$$(3) \qquad M^2 \pm N^2 \pm P^2 = 0,$$

M, N, P, étant des fonctions linéaires homogènes de U, V, W; l'équation (3) représentera alors une des courbes proprement dites de 2ème classe: Ellipse, hyperbole, ou parabole. Le triangle, dont les sommets sont $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, est conjugué par rapport à la courbe, comme on le verra plus loin.

2.° Si $\Delta = 0$, l'équation pourra se ramener à l'une des formes

$$(4) \qquad M^2 \pm N^2 = 0,$$

la courbe se composera d'un système de deux points réels ou imaginaires; un de ces points peut être à l'infini.

3.° Si les déterminants partiels de Δ sont nuls, l'équation pourra se ramener à la forme

$$(5) \qquad M^2 = 0;$$

la courbe se compose de deux points coïncidents.

Les réciproques de ces propositions sont une conséquence de l'analyse qui conduit aux propositions énoncées.

L'étude des tangentes nous conduira à des méthodes simples pour reconnaître le genre des courbes proprement dites de 2ème classe. voir N.° (535).

LIVRE QUATRIÈME.

Notions générales sur les Courbes.

Chapitre I.

Tangentes

§ I Coordonnées Cartésiennes.

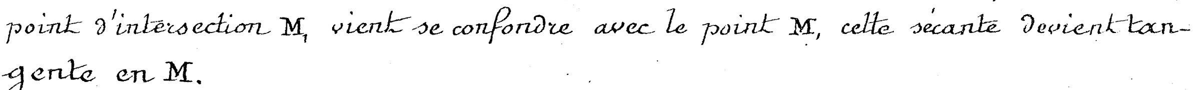
1° Définition; coefficient angulaire.

365. Coefficient angulaire de la tangente et de la normale.

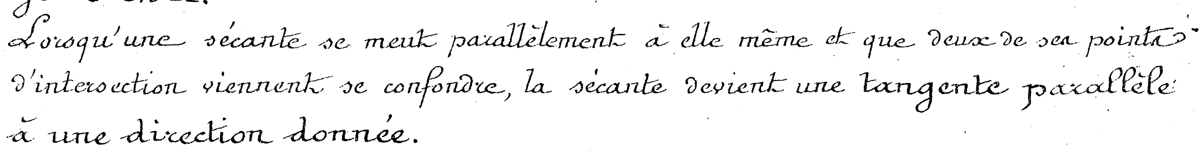
Une droite, se mouvant suivant une loi continue, devient tangente à une courbe, lorsque deux de ses points d'intersection avec la courbe viennent se confondre.

Ainsi, lorsqu'une sécante tourne autour d'un point fixe, M, situé sur la courbe, et qu'un deuxième point d'intersection M_1 vient se confondre avec le point M, cette sécante devient tangente en M.

Lorsqu'une sécante se meut parallèlement à elle même et que deux de ses points d'intersection viennent se confondre, la sécante devient une tangente parallèle à une direction donnée.



Lorsqu'une sécante tourne autour d'un point fixe T, non situé sur la courbe, et que deux de ses points d'intersection viennent se confondre, la sécante devient une des tangentes menées par le point T.



On appelle normale à une courbe en un point, une perpendiculaire à la tangente en ce point. Ainsi, MT étant la tangente en M, la droite MN, perpendiculaire à MT, sera la normale en M.

366. Soit un point M (x, y) de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0;$$

les coordonnées d'un point voisin seront $x + \Delta x$, et $y + \Delta y$; Δy est l'accroissement de la fonction y définie par l'équation (1) de la courbe, cet accroissement correspondant à l'accroissement arbitraire Δx donné à la variable x.

Construisons les coordonnées des points M et M_1, puis menons, par le point M, MH parallèle à Ox; si A est le coefficient angulaire de la sécante MM_1, on a

$$A = \frac{MP}{SP} = \frac{M_1H}{MH} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M, c. à. d. si la sécante devient tangente, alors Δx et Δy tendent vers zéro; de sorte qu'en désignant par a

le coefficient de la tangente on a

$$(2) \qquad a = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x \,;$$

y est une fonction de x définie par la relation (1) ou l'équation de la courbe.
D'après le théorème des fonctions composées, on aura

$$a = y'_x = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

ou, en adoptant une notation plus abrégée,

$$(3) \qquad a = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

De là nous concluons que l'équation de la tangente, en un point (x_1, y_1) de la courbe, sera

$$(4) \qquad y - y_1 = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}(x - x_1),$$

avec la condition

$$(4\,bis) \qquad f(x_1, y_1) = 0.$$

367. Le coefficient angulaire a' de la normale sera donné par la relation

$$(5) \qquad 1 + (a + a')\cos\theta + aa' = 0,$$

a ayant la valeur (3). Dans le cas particulier où les axes sont rectangulaires, on a

$$(6) \qquad a' = -\frac{1}{y'_x} = \frac{f'_y}{f'_x}.$$

L'équation de la normale en un point (x_1, y_1) sera, pour le cas des axes rectangulaires :

$$(7) \qquad y - y_1 = \frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x - x_1),$$

avec la condition

$$(7\,bis) \qquad f(x_1, y_1) = 0.$$

368. Il arrive souvent qu'on définit une courbe à l'aide de deux équations, en regardant les coordonnées x et y d'un quelconque de ses points comme des fonctions d'une variable arbitraire. Soit, par exemple,

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t); \end{cases}$$

en faisant varier t, on déterminera successivement les points (x, y) de cette courbe; et on obtiendra son équation en x et y par l'élimination de la variable auxiliaire t.

Il est important de savoir déterminer, dans ce cas, le coefficient angulaire de la tangente. Soient Δx et Δy les accroissements de x et y correspondant à l'accroissement arbitraire Δt de la variable t ; on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}, \quad \text{d'où } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Ou encore, y est une fonction de t, et t est une fonction de x ; d'après le théorème des fonctions de fonctions, on aura

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \,;$$

or, d'après le théorème des fonctions inverses

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \,;$$

donc

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Ainsi le coefficient angulaire a de la tangente, au point (x, y) correspondant à la valeur t de la variable auxiliaire, sera donné par la formule

$$(9) \qquad a = \frac{y'_t}{x'_t};$$

par conséquent, le coefficient angulaire a′ de la normale sera, dans le cas des axes rectangulaires

$$(10) \qquad a' = -\frac{x'_t}{y'_t}.$$

369. Sous-tangente.

Si T est l'intersection avec Ox de la tangente en M, et P le pied de l'ordonnée du point M, la longueur TP est appelée sous-tangente.

L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) est

$$y - y_1 = y'_{x_1}(x - x_1);$$

en faisant $y = 0$ dans cette équation, il viendra

$$x - x_1 = -\frac{y_1}{y'_{x_1}};$$

or, dans cette relation

$$x_1 = OP, \quad x = OT;$$

donc, en désignant par S_t la longueur de la sous-tangente, on aura, après avoir supprimé les indices:

$$(11) \qquad S_t = \frac{y}{y'_x}.$$

« Si l'on convient de regarder la sous-tangente comme positive ou négative, suivant qu'à partir du pied « de la tangente elle est dirigée dans le sens des x positifs ou des x négatifs, la sous-tangente sera représen- « tée en grandeur et en signe par l'expression $\frac{y}{y'_x}$.

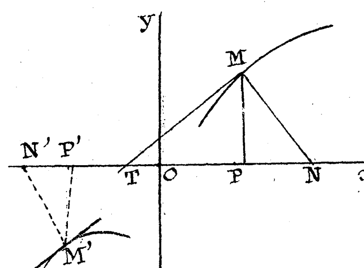
En effet, si l'ordonnée croît avec l'abscisse, c. à. d. si la dérivée y'_x est positive, le pied T de la tangente est à gauche du pied P de l'ordonnée, lorsque l'ordonnée MP est positive; et à droite, lorsque l'ordonnée M′P′ est négative. Dans le premier cas, la sous-tangente est positive ainsi que l'expression $\frac{y}{y'_x}$; dans le second cas, elles sont toutes deux négatives.

On constatera que la sous-tangente et l'expression $\frac{y}{y'_x}$ conservent encore le même signe, si l'ordonnée décroît lorsque l'abscisse croît.

370. Sous-normale.

Si N est l'intersection de Ox avec la normale en M, et P le pied de l'ordonnée du point M, la longueur NP est appelée sous-normale.

Supposons les axes rectangulaires, l'équation de la normale au point (x_1, y_1) est



$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_{x_1}}(x - x_1);$$

en faisant $y = 0$ dans cette équation, il vient

$$x - x_1 = y_1 y'_{x_1}.$$

Or, dans cette relation

$$x = ON, \quad x_1 = OP;$$

donc, en désignant par S_n la longueur de la sous-normale, on aura, après avoir supprimé les indices:

$$(12) \qquad S_n = +y\, y'_x$$

« Si l'on convient de regarder la sous-normale comme positive ou négative, suivant qu'à partir du pied « de l'ordonnée elle est dirigée dans le sens des x positifs ou des x négatifs, la sous-normale sera représen- « tée en grandeur et en signe par l'expression yy'_x.

La discussion se fera comme dans le cas précédent.

II°. Équation de la tangente en un point.

371. Soit l'équation d'une courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0;$$

l'équation de la tangente en un point (x_1, y_1) sera N° [366] : (4)

$$(2) \qquad x f'_{x_1} + y f'_{y_1} - (x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1}) = 0,$$

avec la condition

$$(2\,bis) \qquad f(x_1, y_1) = 0.$$

Rendons homogène l'équation (1), c.à.d. remplaçons x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, puis multiplions par z^m, m étant le degré de l'équation, cette équation deviendra

$$(3) \qquad f(x, y, z) = 0;$$

x, y, z sont les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la courbe ; on retrouvera l'équation primitive (1) en faisant $z = 1$.

Or d'après le théorème des fonctions homogènes N° [17], on a l'identité

$$(4) \qquad x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x, y, z).$$

Cette égalité aura encore lieu lorsqu'on y fera

$$x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1 = 1;$$

on en conclut alors d'après la relation (2 bis)

$$(4\,bis) \qquad x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 0.$$

L'équation (2) de la tangente devient donc

$$(5) \qquad x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + f'_{z_1} = 0,$$

avec la condition

$$(5\,bis) \qquad f(x_1, y_1) = 0.$$

Les équations (5) et (5 bis) définissent, en coordonnées cartésiennes, la tangente en un point (x_1, y_1) de la courbe $f(x, y) = 0$. La notation f'_{z_1} indique, qu'après avoir rendu homogène le premier membre de l'équation de la courbe, on a pris la dérivée par rapport à z, et que, dans cette dérivée, on a fait

$$x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1 = 1.$$

Au lieu de donner à z_1 la valeur (1), on peut laisser z_1 arbitraire ; on peut aussi, dans l'équation (5) remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; alors x, y, z, seront les coordonnées homogènes N° (3) d'un point du plan. De là nous concluons que :

Étant donnée, en coordonnées homogènes, l'équation d'une courbe

$$(6) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la tangente en un point (x_1, y_1, z_1) sera

$$(7) \qquad x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0,$$

avec la condition

$$(7\,bis) \qquad f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Cette formule symétrique donnée à l'équation de la tangente est très-importante.

Remarque Dans le calcul que nous venons faire, genre de calcul que nous reproduirons souvent, la lettre z désigne tantôt une variable, tantôt une constante ; il n'y a là aucun inconvénient, aucune ambiguité

D'abord, lorsqu'il y a des différentiations à effectuer, nous opérons sur des identités, et ce n'est qu'après les différentiations que nous attribuons à z une valeur constante.

En second lieu, nous désignons par la même caractéristique f la fonction primitive $f(x,y)$ et la fonction rendue homogène $f(x,y,z)$; c'est qu'en effet, la composition de ces deux fonctions en x et y est identiquement la même; et lorsqu'on fait $z=1$ dans la fonction $f(x,y,z)$ et dans ses dérivées de divers ordres par rapport à x et y, on reproduit identiquement la fonction $f(x,y)$ et ses dérivées correspondantes de même ordre.

Ainsi l'égalité (4) nous montre que, si l'on rend la fonction $f(x,y)$ homogène, et qu'on prenne la dérivée par rapport à z, puis que dans cette dérivée on fasse $z=1$, la quantité f'_z est une fonction de x et y identiquement égale à la fonction $[mf(x,y)-xf'_x-yf'_y]$.

III. Tangente et normale parallèle à une direction donnée.

372. ## Tangente parallèle à une droite donnée.

Soit a le coefficient angulaire de la droite donnée, l'équation d'une droite parallèle sera

$$(1)\qquad y=ax+b;$$

nous allons déterminer la constante b par la condition que cette droite est tangente. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point de contact; l'équation de la tangente à la courbe en ce point est

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+f'_{z_1}=0,$$

$$\text{avec}\quad f(x_1,y_1)=0.$$

Identifiant cette équation avec celle de la droite (1), on a les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{f'_{x_1}}{a}=\dfrac{f'_{y_1}}{-1}=\dfrac{f'_{z_1}}{b}, \\ f(x_1,y_1)=0. \end{cases}$$

En éliminant x_1 et y_1 entre les trois équations (2), on aura une relation de la forme

$$(3)\qquad \varphi(a,b)=0,$$

laquelle déterminera b en fonction de a.

Nous pouvons conclure des équations (2) le nombre des tangentes parallèles à une droite donnée. En effet, ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} f(x_1,y_1)=0, \\ af'_{y_1}+f'_{x_1}=0, \\ bf'_{y_1}+f'_{z_1}=0. \end{cases}$$

Les deux premières de ces équations déterminent les coordonnées x_1 et y_1 des points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée; or si l'équation de la courbe est du degré m, la seconde équation sera du degré $(m-1)$; et le nombre de leurs solutions communes sera $m(m-1)$. La troisième équation donnera une seule valeur de b pour chacune de ces solutions.

Une courbe du degré m admet donc en général $m(m-1)$ tangentes parallèles à une direction donnée.

373. On peut encore résoudre cette question de la manière suivante.

Soit l'équation de la courbe

$$(1)\qquad f(x,y)=0,$$

et

$$(2)\qquad y=ax+b;$$

l'équation d'une droite parallèle à une direction donnée, a est une constante donnée et b une indéterminée.
Pour que cette droite soit tangente, il faut exprimer que deux de ses points d'intersection avec la courbe viennent se confondre; or si l'on remplace, dans l'équation de la courbe, y par $(ax+b)$, il vient

$$(3) \qquad f(x, ax+b)=0.$$

On exprimera donc que cette dernière équation a une racine double; et, comme la valeur correspondante (2) de y est donnée par une équation du premier degré, il en résultera que deux des points d'intersection de la droite avec la courbe viennent se confondre. On sera ainsi conduit à une relation de la forme

$$(3 bis) \qquad \varphi(a,b)=0;$$

laquelle déterminera les valeurs de la constante b. Il résulte du théorème démontré au N°. (372) que cette équation sera, en général, du degré $m(m-1)$ par rapport à b.

374. Équation d'une normale parallèle à une droite donnée.

Nous supposerons les axes rectangulaires. Soit a le coefficient angulaire de la droite donnée, l'équation d'une droite parallèle sera

$$(1) \qquad y=ax+b.$$

D'un autre côté, si x_1 et y_1 sont les coordonnées du pied d'une normale parallèle à la direction donnée, l'équation de cette normale sera

$$y-y_1=\frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x-x_1),$$

avec la condition

$$f(x_1,y_1)=0.$$

Identifiant cette équation avec celle de la droite (1), on a les relations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} f(x_1,y_1)=0, \\ a f'_{x_1}=f'_{y_1}, \\ b=y_1-x_1\dfrac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}. \end{array}\right.$$

En éliminant x_1 et y_1 entre ces trois équations, on aura une relation de la forme

$$(3) \qquad \varphi(a,b)=0,$$

laquelle déterminera les valeurs de la constante b.

Les deux premières des équations (2) sont, l'une du degré m, l'autre du degré $(m-1)$ elles admettent donc $m(m-1)$ solutions en (x_1,y_1); la troisième équation donnera une seule valeur de b pour chacune de ces solutions.

Donc, une courbe du degré m admet, en général, $m(m-1)$ normales parallèles à une direction donnée.

IV°. Tangentes et normales menées par un point donné.

375. Tangentes menées par un point donné.

Soient α, β, les coordonnées du point donné, et

$$(1) \qquad f(x,y)=0, \text{ ou } f(x,y,z)=0,$$

l'équation de la courbe; si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact de l'une des tangentes, l'équation de cette tangente sera

$$x f'_{x_1}+y f'_{y_1}+f'_{z_1}=0, \text{ avec } f(x_1,y_1)=0.$$

Exprimons que cette droite passe par le point fixe (α, β), on aura les relations

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha f'_{x_1} + \beta f'_{y_1} + f'_{z_1} = 0, \\ f(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Ces équations détermineront les coordonnées des points de contact de toutes les tangentes qu'on peut mener par le point donné. Le nombre des solutions communes à ces deux équations est évidemment $m(m-1)$, si m est l'ordre de la courbe. Donc

Par un point quelconque, donné dans le plan d'une courbe du $m^{ème}$ ordre, on peut, en général, mener $m(m-1)$ tangentes.

La classe d'une courbe est égale au nombre des tangentes que l'on peut mener à la courbe d'un point quelconque pris dans son plan. Donc

Une courbe d'ordre m est, en général, de la classe $m(m-1)$.

En particulier, les courbes du second ordre sont de 2ème classe.

Nous pouvons, dans les équations (2), supprimer les indices, ce qui donne

$$(3) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \alpha f'_x + \beta f'_y + f'_z = 0; \end{cases}$$

et regarder x et y comme les coordonnées **courantes** d'un point; ces deux équations représenteront alors deux courbes dont les intersections seront les points de contact des tangentes cherchées. La première équation représente la courbe donnée; la seconde représente une courbe d'ordre $(m-1)$ que nous appellerons **la courbe des contacts**. En remplaçant α, β, par $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$, la courbe des contacts s'écrira sous la forme plus symétrique

$$(4) \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Remarque. Lorsque le point donné est sur la courbe elle-même, les courbes (3) se touchent en ce point; par suite, elle ne se rencontrent plus qu'en $[m(m-1)-2]$ autres points; donc

Par un point pris sur une courbe, on ne peut mener que $[m(m-1)-2]$ tangentes distinctes de la tangente en ce point; cette dernière compte donc pour deux tangentes issues du point donné.

Démontrons que, dans le cas actuel, les deux courbes (3) se touchent au point considéré. Prenons, en effet, ce point pour origine, et la tangente à la courbe pour axe des x; l'équation de la courbe sera alors de la forme

$$(5) \qquad f(x, y, z) = \varphi_m(x, y) + z\,\varphi_{m-1}(x, y) + \cdots + z^{m-2}\varphi_2(x, y) + z^{m-1}y = 0$$

la droite $y = 0$ rencontre, en effet, la courbe $f(x, y) = 0$ en deux points coïncidant avec le point O; les fonctions $\varphi_i(x, y)$ sont homogènes et du degré i en x et y.

Dans le cas actuel, on a $\alpha = 0, \beta = 0$; l'équation de la **courbe des contacts** sera donc

$$(6) \quad f'_z = \varphi_{m-1}(x, y) + 2z\,\varphi_{m-2}(x, y) + \quad + (m-2)z^{m-3}\varphi_2(x, y) + (m-1)z^{m-2}y = 0;$$

cette 2ème courbe passe aussi par le point O; et la droite $y = 0$ est tangente en O; donc...

376. **Normales menées par un point donné.**

Soient α et β les coordonnées du point donné, et

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

l'équation de la courbe; si x_1, y_1, sont les coordonnées du pied d'une des normales menées par le point (α, β), l'équation de cette normale sera

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}(x - x_1), \\ f(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Exprimons que cette droite passe par le point fixe (α, β), on aura les relations

$$(2) \begin{cases} (\alpha - x_1) f'_{y_1} = (\beta - y_1) f'_{x_1}, \\ f(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Ces équations détermineront les pieds de toutes les normales qu'on peut mener par le point donné. Ces deux équations sont toutes deux du degré m, si m est le degré de la courbe; le nombre de leurs solutions communes est donc égal à m^2. Par conséquent:

Par un point quelconque, pris dans le plan d'une courbe du $m^{ème}$ ordre, on peut, en général, mener m^2 normales à cette courbe.

En particulier, par un point, pris dans le plan d'une courbe du second ordre, on peut mener quatre normales à la courbe.

Remarque. Rapprochons ce résultat de celui qui a été obtenu au N.° (374), et rendons-nous compte de cette différence.

Les coordonnées x, y, des pieds des normales sont déterminées par les deux équations (2). Introduisons les coordonnées homogènes et supprimons les indices, on a

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \gamma (x f'_y - y f'_x) + z (\beta f'_x - \alpha f'_y) = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose le point (α, β, γ) à l'infini, c. à. d. si l'on suppose $\gamma = 0$, la seconde équation se décompose en deux:

$$(1.°) \quad \beta f'_x - \alpha f'_y = 0,$$
$$(2.°) \quad z = 0;$$

l'intersection de la courbe proposée avec la courbe (1.°) donne les pieds des $m(m-1)$ normales parallèles à une direction donnée; l'intersection de la courbe avec la droite (2.°) donne les points à l'infini sur la courbe; les normales en ces points sont perpendiculaires aux asymptotes et à l'infini; on a donc m normales à l'infini passant par le point considéré; ce qui fait en tout

$$m(m-1) + m \quad \text{ou } m^2,$$

normales; l'accord du cas particulier avec le cas général est manifeste.

V.° Applications aux courbes du second ordre.

377. Condition pour qu'une droite soit tangente à une courbe du second ordre.

L'équation, rendue homogène, des courbes du second ordre est

$$(1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0;$$

exprimons que la droite

$$(2) \quad ax + by + cz = 0,$$

est tangente. Si x_1, y_1, z_1, sont les coordonnées homogènes du point de contact, l'équation d'une tangente sera

$$\begin{cases} x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0, \\ f(x_1, y_1, z_1) = 0; \end{cases}$$

en identifiant cette équation avec celle de la droite, on obtiendra les relations

$$(3) \begin{cases} \dfrac{f'_{x_1}}{a} = \dfrac{f'_{y_1}}{b} = \dfrac{f'_{z_1}}{c} = 2\lambda, \\ f(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations peut se remplacer par une plus simple; pour cela, remarquons que, eu égard aux premières des relations (3), on a

$$o = 2f(x_1, y_1, z_1) = x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 2\lambda(ax_1 + by_1 + cz_1);$$

relation d'ailleurs évidente, puisque le point (x_1, y_1, z_1) doit se trouver sur la droite (2). Ainsi au système des équations (3) nous substituerons le suivant, en rendant les calculs explicites :

$$(4)\quad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Dz_1 - \lambda a = o, \\ Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 - \lambda b = o, \\ Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 - \lambda c = o, \\ ax_1 + by_1 + cz_1 \quad = o. \end{cases}$$

En éliminant $x_1, y_1, z_1; \lambda$, entre ces quatre équations, linéaires et homogènes par rapport à ces inconnues, on trouve

$$(5)\quad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = o;$$

c'est l'équation de condition cherchée.

378. Équation des tangentes menées à une courbe du second ordre par un point pris dans son plan.

Première méthode.

La condition, pour que la droite

$$(1°)\qquad ax + by + cz = o,$$

soit tangente, est

$$(5)\quad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = o;$$

a, b, c, sont des constantes indéterminées. Soient α, β, γ, les coordonnées homogènes du point donné ; la droite devant passer par ce point, on a la relation

$$(2°)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = o.$$

Les équations (1°) et (2°) résolues par rapport à a, b, c, donnent

$$(6)\qquad \frac{a}{\beta z - \gamma y} = \frac{b}{\gamma x - \alpha z} = \frac{c}{\alpha y - \beta x} = k,$$

remplaçant a, b, c, par ces valeurs, dans l'équation (5), on trouve

$$(7)\quad \begin{vmatrix} A & B & D & \beta z - \gamma y \\ B & C & E & \gamma x - \alpha z \\ D & E & F & \alpha y - \beta x \\ \beta z - \gamma y & \gamma x - \alpha z & \alpha y - \beta x & o \end{vmatrix} = o;$$

l'équation (7) est une relation entre les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes menées par le point (α, β, γ) ; c'est **l'équation de ces tangentes.**

Remarque. La méthode que nous venons d'exposer est applicable à une courbe d'ordre quelconque, lorsqu'on connaît la relation

$$\varphi(a, b, c) = o,$$

qui exprime que la droite

$$ax + by + cz = o,$$

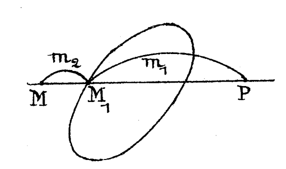
est tangente à cette courbe.

2ème Méthode.

Nous allons résoudre cette même question par une autre méthode déjà appliquée dans l'étude du cercle.

Soient α, β, les coordonnées d'un point fixe; x, y, celles d'un point M quelconque pris sur cette sécante; x_1, y_1, celles d'un des points où cette sécante rencontre la courbe du second ordre

(8) $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$



Si l'on désigne par $\frac{m_1}{m_2}$ le rapport dans lequel le point M_1 partage le segment MP, les coordonnées de ce point seront N.° (52)

$$x_1 = \frac{m_1 x + m_2 \alpha}{m_1 + m_2}, \quad y_1 = \frac{m_1 y + m_2 \beta}{m_1 + m_2};$$

or, il est visible qu'on peut remplacer ces expressions par les suivantes

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{m_1 x + m_2 \alpha}{m_1 z + m_2 \gamma}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{m_1 y + m_2 \beta}{m_1 z + m_2 \gamma},$$

à la condition de faire, à la fin du calcul, $z = 1, z_1 = 1, \gamma = 1.$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, du point M_1 doivent vérifier l'équation (8), on doit donc avoir

$$f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

ou enfin

$$f(m_1 x + m_2 \alpha,\ m_1 y + m_2 \beta,\ m_1 z + m_2 \gamma) = 0.$$

Cette relation développée, directement ou par la formule de Taylor, devient

(9) $$m_1^2 f(x,y,z) + m_1 m_2 \left[\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z\right] + m_2^2 f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cette équation détermine les rapports

(9 bis) $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{PM_1}{M_1 M},$$

dans lesquels la courbe du second ordre divise le segment MP.

Il faudra dans l'équation (9) supposer $z = 1, \gamma = 1.$

Lorsque la droite MP est tangente, les deux rapports déterminés par l'équation (9) sont égaux, et réciproquement. On exprimera donc que la droite MP est tangente en écrivant que l'équation (9) a deux racines égales, ce qui donne

(10) $$4 f(\alpha, \beta, \gamma) \cdot f(x,y,z) = \left[\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z\right]^2;$$

dans cette équation, il faut faire $z = 1, \gamma = 1$; mais après avoir introduit cette hypothèse, on pourra remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, α et β par $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$; l'équation conservera la même forme, puisqu'elle est homogène à la fois par rapport aux quantités x, y, z, et α, β, γ.

L'équation (10) est donc une relation entre les coordonnées (x,y,z) d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes passant par le point (α, β, γ); c'est l'équation de ces tangentes.

Lorsque la fonction f est du second degré, on a l'identité, facile à vérifier,

(11) $$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma;$$

l'équation (10) peut donc encore s'écrire

(10 bis) $$4 f(\alpha, \beta, \gamma) \cdot f(x,y,z) = \left(x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma\right)^2.$$

379. **Équation des tangentes dont on donne la corde des contacts.**

Soit l'équation de la corde des contacts

(12) $$mx + ny + pz = 0;$$

si (α, β, γ) est le pôle de cette droite, ou si l'on identifie cette équation avec celle de la corde des contacts des tangentes menées du point (α, β, γ), on aura

(13) $$\frac{f'_\alpha}{m} = \frac{f'_\beta}{n} = \frac{f'_\gamma}{p} = \lambda;$$

l'équation (10 bis) sera alors l'équation des tangentes. Or, on déduit d'abord des relations (13)

$$(1°)\qquad f'_\alpha = \lambda m,\ f'_\beta = \lambda n,\ f'_\gamma = \lambda p.$$

On a ensuite

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta + D\gamma = \frac{\lambda}{2} m, \\ B\alpha + C\beta + E\gamma = \frac{\lambda}{2} n, \\ D\alpha + E\beta + F\gamma = \frac{\lambda}{2} p, \end{cases}$$

d'où l'on conclut, en multipliant par α, β, γ, et en ajoutant

$$(2°)\qquad f(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\lambda}{2}(m\alpha + n\beta + p\gamma).$$

On a d'ailleurs, en résolvant ces mêmes équations:

$$\Delta\,\alpha = \frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} B & D & m \\ C & E & n \\ E & F & p \end{vmatrix},\ \Delta\beta = -\frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} A & D & m \\ B & E & n \\ D & F & p \end{vmatrix},\ \Delta\gamma = \frac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} A & B & m \\ B & C & n \\ D & E & p \end{vmatrix};$$

d'où il suit, eu égard à la relation (2°):

$$(3°)\qquad \Delta . f(\alpha,\beta,\gamma) = -\frac{\lambda^2}{4}\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & o \end{vmatrix}$$

Substituant les valeurs (1°) et (3°) dans l'équation (10 bis), on a pour l'équation des tangentes dont la corde des contacts est donnée

$$(14)\qquad f(x,y,z)\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & o \end{vmatrix} + (mx + ny + pz)^2 . \Delta = o$$

380. Condition pour qu'un point soit extérieur à une courbe du second ordre.

Nous dirons qu'un point est extérieur à une courbe du second ordre, lorsqu'on peut mener de ce point deux tangentes réelles à la courbe.

Pour obtenir la condition cherchée, il suffit d'exprimer que l'équation, qui donne les tangentes, représente une courbe du genre hyperbole.

Nous prendrons l'équation des tangentes sous la forme (10 bis); pour que cette équation représente deux droites réelles, il faut et il suffit que

$$(15)\qquad \left(4Bf_o - f'_\alpha f'_\beta\right)^2 - \left(4Af_o - f'^2_\alpha\right)\left(4Cf_o - f'^2_\beta\right) > o,$$

en posant, pour un instant

$$(15 \text{ bis})\qquad f_o = f(\alpha,\beta,\gamma).$$

En développant l'inégalité (15), il vient

$$f_o\left\{4(B^2 - AC) f_o + Af'^2_\beta + Cf'^2_\alpha - 2Bf'_\alpha f'_\beta\right\} > o;$$

ce qui peut encore s'écrire comme il suit

$$(16)\qquad f_o\begin{vmatrix} A & B & f'_\alpha \\ B & C & f'_\beta \\ f'_\alpha & f'_\beta & 4f_o \end{vmatrix} < o.$$

En retranchant de la dernière colonne, les deux premières colonnes respectivement multipliées par 2α et 2β, il vient

$$f_o\begin{vmatrix} A & B & 2D\gamma \\ B & C & 2E\gamma \\ f'_\alpha & f'_\beta & 2f'_\gamma . \gamma \end{vmatrix},\ \text{ou } 2f_o\gamma\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ f'_\alpha & f'_\beta & f'_\gamma \end{vmatrix};$$

si, dans le dernier déterminant, on retranche de la 3ème ligne les deux premières respectivement multipliées par 2α et 2β, on a enfin

$$2f_0\gamma\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ 2D\gamma & 2E\gamma & 2F\gamma \end{vmatrix}, \text{ ou } 4f_0\gamma^2\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Donc, en supprimant le facteur positif et non nul, $4\gamma^2$, l'inégalité (16) devient définitivement

$$(17) \qquad f(\alpha,\beta,\gamma)\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} < 0;$$

telle est la condition pour que le point (α,β,γ) soit extérieur à la courbe du second ordre.

Remarques.

1°. Lorsque le point (α,β,γ) est sur la courbe, le 1er membre de l'inégalité (17) est nul, c.à.d. que la courbe représentée par l'équation (10) appartient au genre parabole; cette courbe se compose donc de deux droites parallèles; et, de plus, ces parallèles coïncident, puisqu'elles passent par le point (α,β,γ) à distance finie; ainsi les deux tangentes se confondent [No. (375), remarque].

2°. Lorsque $\Delta = 0$, le premier membre de l'inégalité (17) est nul; donc l'équation (10) représente deux droites coïncidentes; les deux tangentes se confondent encore. C'est qu'en effet, la courbe du second ordre se réduit ici à un système de deux droites No. (351); les tangentes à la courbe sont alors des droites quelconques menées par le point d'intersection de ces deux droites. On se rend encore compte de ce résultat en regardant la courbe comme une ellipse evanouissante.

VI°. Tangentes d'inflexion.

381. Une tangente multiple est une tangente touchant une courbe en plusieurs points; ainsi une droite AB, qui touche la courbe aux deux points A et B est une tangente double.

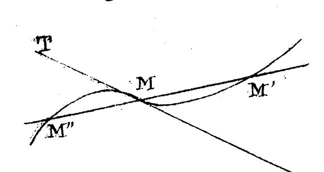
Nous définirons une tangente multiple d'une manière plus précise, en disant:

Si n est la classe de la courbe considérée, une tangente T sera multiple d'ordre p, lorsque, d'un point quelconque de cette ligne, on ne peut mener à la courbe que $(n-p)$ tangentes distinctes de la tangente T.

Ainsi d'un point quelconque d'une tangente double à une courbe de classe n, on ne peut mener que $(n-2)$ tangentes distinctes de la tangente considérée.

382. Tangentes d'inflexion.

Une sécante mobile devient une tangente d'inflexion lorsque trois de ses points d'intersection avec la courbe viennent se confondre en un seul; le point de contact est dit point d'inflexion.



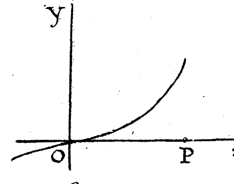
Si, par exemple, une sécante MM' rencontre la courbe en trois points M, M', M'', et que, lorsqu'elle tourne autour de M, les points M' et M'' se rapprochent indéfiniment et viennent se confondre avec le point M, la position limite MT, de cette sécante, est une tangente d'inflexion; le point de contact, M, est un point d'inflexio

Les tangentes d'inflexion rencontrent la courbe en trois points coïncidents; nous verrons plus loin, que cett propriété appartient également aux tangentes en un point double. Mais il y a entre ces tangente une différence essentielle.

Une tangente en un point d'inflexion est une tangente double; une tangente en un point double est une tangente simple.

Nous ne démontrerons maintenant que la 1ère partie de cette proposition.

Prenons le point d'inflexion pour origine, et la tangente d'inflexion pour axe des x, l'équation de la courbe sera de la forme



$$(1)\qquad f(x,y,z) = \varphi_m(x,y) + z\,\varphi_{m-1}(x,y) + \dots + z^{m-2}(Ay^2+Bxy) + z^{m-1}y = 0;$$

car la droite $y=0$ rencontre cette courbe en trois points coïncidant avec l'origine O.

Cherchons le nombre des tangentes qu'on peut mener à la courbe d'un point quelconque P pris sur la tangente d'inflexion Ox.

Les points de contact de ces tangentes seront les points d'intersection de la courbe (1) avec la courbe N.º (375)

$$\alpha f'_x + f'_z = 0, \quad \alpha \text{ étant l'abscisse du point } P;$$

ou, en développant les calculs

$$(2)\qquad [\alpha\varphi'_{x_m} + \varphi_{m-1}] + \dots + z^{m-3}[\alpha\varphi'_{x_3}(x,y) + (Ay^2+Bxy)] + z^{m-2}[\alpha B + (m-1)]\,y = 0.$$

Les deux courbes (1) et (2) sont évidemment tangentes en O; c.à.d. que, parmi leurs points d'intersection, il y en a deux coïncidant avec le point O; ou encore, parmi les tangentes qu'on peut mener du point P à la courbe proposée, il y en a toujours deux qui coïncident, quel que soit P sur Ox, avec la tangente d'inflexion.

Donc si n est le nombre des tangentes qu'on peut mener à la courbe d'un point arbitrairement choisi, on ne pourra, d'un point quelconque de la droite Ox, mener que $(n-2)$ tangentes distinctes de Ox. Par conséquent la tangente d'inflexion est une tangente double.

383. Détermination des points d'inflexion.

Nous supposerons d'abord que l'équation de la courbe se présente sous la forme simple

$$(1)\qquad y = \varphi(x).$$

Soit alors

$$(2)\qquad y = ax + b,$$

l'équation d'une droite quelconque; les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe seront données par l'équation

$$(3)\qquad \varphi(x) - ax - b = 0$$

Or, si la droite proposée est une tangente d'inflexion, elle devra rencontrer la courbe en trois points coïncidents, c.à.d. que l'équation (3) devra avoir trois racines égales. Cette racine triple doit annuler les dérivées première et seconde; on doit donc avoir

$$(4)\qquad \varphi'(x) - a = 0,$$
$$(5)\qquad \varphi''(x) = 0.$$

En éliminant a et b entre les équations (3), (4) et (5), on obtiendra la relation que doivent vérifier les abscisses des points d'inflexion de la courbe proposée.

Mais l'équation (5) ne renferme aucune des constantes a et b; les points d'inflexion de la courbe (1) seront donc déterminés par les deux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} y = \varphi(x), \\ \varphi''(x) = 0. \end{cases}$$

384. Supposons maintenant l'équation de la courbe sous la forme générale

$$(1)\qquad f(x,y) = 0, \quad \text{ou } f(x,y,z) = 0.$$

Les intersections de cette courbe avec une droite telle que

$$(2)\qquad y = ax + b,$$

seront données par l'équation

$$(3)\qquad f(x, ax+b) = 0.$$

Nous exprimerons que la droite (2) est une tangente d'inflexion, en écrivant que l'équation (3) a une racine triple, c.à.d. en égalant à zéro les dérivées première et seconde. Pour obtenir ces dérivées, nous

appliquerons à la fonction $f(x,y)$ le théorème des fonctions composées en y regardant y comme une fonction de x définie par la relation (2); nous trouverons ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} f'_x + a f'_y = 0; \\ f''_{xx} + 2a f''_{xy} + a^2 f''_{yy} = 0. \end{cases}$$

Il faut maintenant éliminer a et b entre les équations (2) et (4); et, comme les équations (4) ne renferment pas explicitement la constante b, il suffira d'éliminer a entre les deux équations (4). L'élimination est facile, et nous concluons de là que **les coordonnées des points d'inflexion de la courbe proposée sont déterminées par les deux équations**

$$(5)\quad \begin{cases} f(x,y) = 0, \\ (f'_y)^2 f''_x - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy} = 0. \end{cases}$$

Remarque. Les deux équations (5) sont vérifiées, non seulement par les coordonnées des points d'inflexion, mais encore par les coordonnées des points multiples que peut posséder la courbe en question; nous verrons, en effet, plus loin que les tangentes en un point double rencontrent la courbe en trois points coïncidents.

385. **Une courbe de l'ordre m possède, en général, $3m(m-2)$ points d'inflexion.**

Pour démontrer cette proposition nous allons d'abord donner à la seconde des équations (5) une forme remarquable et importante.

La seconde des équations (5) peut, en effet, s'écrire

$$(6)\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

on le vérifie facilement en développant le déterminant. Ceci posé, l'équation de la courbe étant rendue homogène, on a, d'après le théorème des fonctions homogènes, les identités

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x,y,z),$$

$$(7)\quad \begin{cases} x f''_{xx} + y f''_{xy} + z f''_{xz} = (m-1) f'_x, \\ x f''_{yx} + y f''_{yy} + z f''_{yz} = (m-1) f'_y, \\ x f''_{zx} + y f''_{zy} + z f''_{zz} = (m-1) f'_z. \end{cases}$$

Multiplions la dernière colonne du déterminant (6) par $(m-1)$, et retranchons-en la somme des deux premières respectivement multipliées par x, et y; il vient, en tenant compte des identités (7) et en supprimant le facteur z qui n'est pas nul,

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Maintenant multiplions la dernière ligne de ce déterminant par $(m-1)$ et retranchons les deux premières respectivement multipliées par x et y; on a définitivement, **pour déterminer les points d'inflexion, les deux équations**

$$(8)\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(8\ bis)\quad f(x,y,z) = 0.$$

Le déterminant (8) qu'on appelle le **déterminant fonctionnel** des dérivées de la fonction $f(x,y,z)$ ou le **Hessien** de cette fonction, représente, lorsqu'on l'égale à zéro, une courbe dont les points d'intersection avec la courbe proposée sont précisément les points d'inflexion de cette courbe. Or ce déterminant est homogène

et chacun de ses éléments est du degré $(m-2)$; donc la courbe qu'il représente est de l'ordre $3(m-2)$, si la fonction $f(x,y,z)$ est du degré m.
Ainsi, une courbe d'ordre m a, en général, $3m(m-2)$ points d'inflexion, réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini.
Dans les courbes du second ordre, $m=2$; il n'y a pas de points d'inflexion.
Une courbe du 3ème ordre a, en général, neuf points d'inflexion; on démontre que, parmi ces neuf points, trois seulement sont réels. Voir N° (630).
Remarque La classe d'une courbe et le nombre de ses points d'inflexion sont diminués par la présence des points multiples et ne le sont que dans ce cas.

VII. Concavité et convexité des courbes.

386. Définition.
Un arc de courbe, aux environs d'un point M, tourne sa concavité vers les ordonnées ou y positives, lorsqu'aux environs de ce point, la valeur algébrique de l'ordonnée de la courbe est plus grande que la valeur algébrique de l'ordonnée de la tangente en ce point; dans le cas contraire, la concavité est tournée vers les y négatives.
Ainsi, dans le premier cas, si M_1 et M_2 sont des points voisins de M, on devra avoir, si l'arc est au-dessus de l'axe des x

$$M_1P_1 > N_1P_1, \quad M_2P_2 > N_2P_2 ;$$

si l'arc est au dessous de l'axe des x, en M' par exemple; et si M'_1 est un point voisin, on aura, en valeur absolue,

$$M'_1P'_1 < N'_1P'_1 ;$$

mais ces quantités étant négatives, on voit que la valeur algébrique de l'ordonnée de la courbe est plus grande que la valeur algébrique de l'ordonnée de la tangente.
Ceci posé, soit l'équation de la branche de courbe

$$(1) \qquad y = \varphi(x);$$

et soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M de cette courbe; cherchons à quelles condition doit satisfaire l'abscisse x_1, pour qu'aux environs de ce point la branche de courbe tourne sa concavité vers les y positives.
Pour cela, déterminons l'ordonnée de la courbe correspondant à un point voisin de M, c.à.d. à une valeur (x_1+h) de l'abscisse; en désignant par Y la valeur algébrique de cette ordonnée, on aura d'après la formule de Taylor

$$(2) \qquad Y = \varphi(x_1+h) = \varphi(x_1) + h\varphi'(x_1) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_1) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_1) + \text{etc}\ldots$$

L'équation de la tangente au point M est

$$y - y_1 = \varphi'(x_1)(x - x_1);$$

la valeur algébrique Y_1 de l'ordonnée de cette tangente et correspondant à l'abscisse (x_1+h) sera

$$(3) \qquad Y_1 = \varphi(x_1) + h\varphi'(x_1).$$

De là nous concluons

$$(4) \qquad Y - Y_1 = \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_1) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x_1) + \text{etc}\ldots$$

Or le second membre de cette égalité est un polynome ordonné par rapport aux puissances croissantes

de h; on sait que l'on peut donner à la variable h des valeurs assez petites pour que le signe du polynôme soit le même que celui de son premier terme. Mais la quantité $\frac{h^2}{1.2}$ est toujours positive quel que soit le signe de h; donc

Si $Y-Y_1>0$, c. à. d. si l'ordonnée de la courbe est plus grande, en valeur algébrique, que l'ordonnée de la tangente, on doit avoir $f''(x_1)>0$, et réciproquement;

Si $Y-Y_1<0$, c. à. d. si la valeur algébrique de l'ordonnée de la courbe est moindre que la valeur algébrique de l'ordonnée de la tangente, on doit avoir $\varphi''(x_1)<0$, et réciproquement.

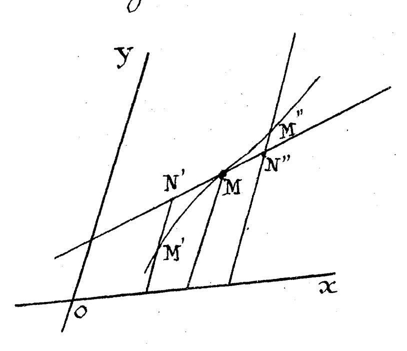
Par conséquent, si, aux environs d'un point, la concavité est tournée vers les y positives, la dérivée seconde est positive; et inversement, si la dérivée seconde est positive, la courbe tourne sa concavité vers les y positives. La concavité sera, au contraire, tournée vers les y négatives, si la dérivée seconde est négative, et réciproquement.

387. **Remarque I**

Si l'on avait

$$\varphi''(x_1)=0, \text{ et } \varphi'''(x_1) \gtrless 0,$$

l'égalité (4) deviendrait alors



$$(5) \qquad Y-Y_1=\frac{h^3}{1.2.3}\cdot\varphi'''(x_1)+\frac{h^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x_1)+\text{etc}\ldots;$$

on voit dans ce cas que le signe du second membre, pour des valeurs suffisamment petites de h, change avec le signe de h; c. à. d. que pour les points qui précèdent le point M on aura, par exemple, $Y-Y_1<0$; et, pour les points qui viennent après, $Y-Y_1>0$; ou inversement.

D'un autre côté, lorsque l'abscisse d'un point vérifie la relation $\varphi''(x_1)=0$, ce point est un point d'inflexion. N.° (383).

Donc, lorsqu'une courbe possède un point d'inflexion, la concavité change de sens en passant par ce point. Une tangente d'inflexion traverse la courbe en son point de contact.

Si l'on avait à la fois $\varphi''(x_1)=0$, $\varphi'''(x_1)=0$, la discussion se ferait comme dans le N.° précédent; et on en conclurait que la concavité est tournée vers les y positives ou négatives suivant que $f^{IV}(x_1)$ est positive ou négative.

En général, lorsque les dérivées sont nulles (à partir de la dérivée seconde) jusqu'à une dérivée d'ordre p inclusivement, de sorte que

$$(6) \qquad \varphi''(x_1)=0,\ \varphi'''(x_1)=0,\ \cdots\ \varphi^{p}(x_1)=0\ ;$$

la tangente au point considéré (x_1, y_1) rencontre la courbe en $(p+1)$ points coïncidents; on dit alors que la tangente a avec la courbe un contact du p.ème ordre, si le point (x_1, y_1) est un point simple de la courbe.

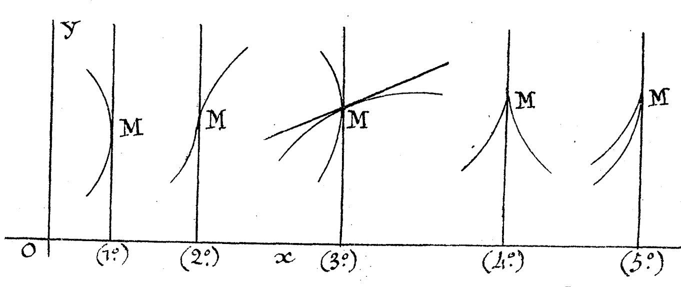
Si p est un nombre pair, la tangente traverse la courbe en ce point, et la concavité change de sens; si p est un nombre impair, la tangente laisse la courbe d'un même côté, et la concavité est tournée vers les y positives ou négatives suivant que la dérivée $\varphi^{p+1}(x_1)$ est positive ou négative.

Nous supposons, dans toute cette discussion, que le point considéré n'est pas un point multiple de la courbe; nous ferons plus loin l'étude des points multiples.

388. **Remarque II.**

Les conclusions des N.os précédents supposent que l'on peut développer la fonction $\varphi(x)$ d'après la formule de Taylor, c. à. d. que les dérivées qu'on conserve dans le développement ne sont pas infinies. Dans les cas où cette circonstance se présente, les conclusions énoncées ne subsistent pas toujours, et la courbe doit être étudiée directement en se servant d'autres méthodes ou en effectuant un changement d'axes.

Si, par exemple, on avait $\varphi'(x_1) = \infty$, la tangente au point (x_1, y_1) serait parallèle à l'axe des y; la courbe pourrait alors présenter ou un maximum ou un minimum par rapport à l'axe des y, ou une inflexion, ou un point double ordinaire, ou un rebroussement.



L'étude directe des affections de la courbe en de tels points n'offrira pas de difficultés, lorsque nous aurons vu la théorie des points doubles. Mais nous constaterons ici que les conclusions précédentes ne sont plus applicables.

Ainsi, dans le premier cas (1°) et le deuxième cas (2°), la concavité change de sens en M; dans les cas (4°) et (5°) la concavité ne change pas de sens. Dans ces circonstances, la dérivée seconde $\varphi''(x_1)$ est, en général, infinie.

VIII°. Maximums et Minimums.

389. On dit qu'une courbe présente, en un certain point, un maximum ou un minimum par rapport à une droite donnée, lorsque la tangente en ce point est parallèle à la droite; on donne à de tels points le nom de points maximums ou minimums par rapport à la droite considérée; c'est, dans le sens de la définition que nous venons d'exposer, qu'on doit entendre cette expression. Nous l'emploierons quelquefois pour abréger le discours.

Remarquons d'ailleurs que les maximums ou minimums d'une courbe ne constituent pas des particularités essentielles de la courbe, puisque leur position dépend de la droite à laquelle on les rapporte.

C'est donc simplement, pour obtenir une construction plus précise de la courbe, qu'on effectue la recherche des maximums et des minimums; et dans ce cas, on cherche les maximums et minimums par rapport aux axes de coordonnées.

Une courbe présente un maximum ou un minimum par rapport à l'axe des x, lorsque la tangente est parallèle à l'axe des x; c.à.d. lorsque le coefficient angulaire de la tangente est nul.

Une courbe présente un maximum ou un minimum par rapport à l'axe des y, lorsque la tangente est parallèle à l'axe des y; c.à.d. lorsque le coefficient angulaire de la tangente est infini.

Si l'équation de la courbe est

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

le coefficient angulaire de la tangente est

$$(2) \qquad y'_x = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Il résulte de ce que nous venons de dire que :

1° Les coordonnées des points maximums ou minimums par rapport à l'axe des x doivent vérifier les deux équations

$$(3) \qquad f(x, y) = 0, \; f'_x(x, y) = 0;$$

2° Les coordonnées des points maximums ou minimums par rapport à l'axe des y doivent vérifier les deux équations

$$(4) \qquad f(x, y) = 0, \; f'_y(x, y) = 0.$$

Mais il faut remarquer que les points dont les coordonnées vérifient ces équations ne sont pas nécessairement des points maximums ou minimums; car la courbe peut présenter des points d'inflexion dont la tangente serait parallèle à l'un ou à l'autre des axes coordonnées.

Les équations (3) et (4) sont satisfaites simultanément (on le verra plus loin) par les coordonnées des points

multiples; d'ailleurs, dans ce cas, la recherche des points maximums ou minimums est chose inutile.

IX°. Tangente double. Tangente commune à deux courbes.

390. Nous étudierons plus tard les propriétés des tangentes doubles; nous n'en parlerons maintenant que pour dire quelques mots de la manière dont on peut essayer de les déterminer dans le cas des coordonnées Cartésiennes.

Soit l'équation d'une courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

et

$$(2) \qquad y = ax + b,$$

l'équation d'une droite. Les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe seront données par l'équation

$$(3) \qquad f(x, ax+b) = 0.$$

Pour que la droite considérée soit une tangente double, il faut que cette équation admette deux couples de racines doubles c.à.d. que son premier membre soit divisible par une expression de la forme $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$. Or, on sait que pour qu'il en soit ainsi, on devra satisfaire à deux équations de condition, telles que

$$(4) \qquad \varphi(a, b) = 0, \ \psi(a, b) = 0;$$

ces deux relations détermineront les inconnues a et b. On peut conclure de là que:

Une courbe possède, en général, des tangentes doubles; mais elle ne possède pas, en général, des tangentes multiples d'ordre supérieur.

Le nombre des tangentes doubles est diminué par la présence des points multiples. La détermination du nombre des tangentes doubles est une question assez délicate que nous ne traiterons pas ici.

391. Tangente commune à deux courbes.

Soient les équations de deux courbes

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \ F(x, y) = 0.$$

Prenons l'équation d'une droite quelconque

$$(2) \qquad y = ax + b;$$

cherchons les intersections de cette droite avec la 1ère courbe, on a l'équation

$$f(x, ax+b) = 0;$$

exprimons que cette équation a deux racines égales, on arrivera à une relation de la forme

$$(3) \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

Cherchons de même les intersections de la droite avec la seconde courbe, on a

$$F(x, ax+b) = 0;$$

et exprimons que cette équation a deux racines égales; on obtiendra une relation telle que

$$(4) \qquad \Phi(a, b) = 0.$$

Les deux équations (3) et (4) détermineront les inconnues a et b; d'où l'on conclura, à l'aide de (2), les équations des tangentes communes.

X°. Courbes tangentes. Courbes orthogonales.

392. Condition pour que deux courbes soient tangentes.

Soient les équations de deux courbes

$$f(x, y) = 0, \ F(x, y) = 0.$$

Supposons ces deux courbes tangentes entre elles et soient x_1, y_1 les coordonnées du point de contact. Les coordonnées x_1 et y_1 devront d'abord vérifier les équations des deux courbes, ce qui donne

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) = 0, \; F(x_1, y_1) = 0;$$

de plus les tangentes respectives aux deux courbes en ce point doivent coïncider; pour cela, il suffit évidemment que les coefficients angulaires de ces tangentes soient égaux, c.à.d. qu'on ait

$$-\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_{y_1}},$$

ou

$$(3) \qquad f'_{x_1} F'_{y_1} - f'_{y_1} F'_{x_1} = 0.$$

Pour que les courbes (1) soient tangentes en un certain point (x_1, y_1), les coordonnées de ce point doivent vérifier les trois équations (2) et (3); il y a donc à satisfaire à une équation de condition qu'on obtiendra en éliminant x_1 et y_1 entre les équations (2) et (3).

Si l'on applique cette méthode aux deux cercles

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ (x-d)^2 + y^2 - r^2 = 0, \end{cases}$$

on trouvera que les constantes d, R, r, doivent satisfaire à l'une ou à l'autre des relations (si $R > r$)

$$d = R + r, \quad d = R - r.$$

393. Condition pour que deux courbes soient orthogonales.

Deux courbes sont dites orthogonales en un point où elles se coupent, lorsque les tangentes en ce point sont perpendiculaires entre elles.

Soient les équations de deux courbes

$$(1) \qquad f(x, y) = 0, \; F(x, y) = 0;$$

et (x_1, y_1) les coordonnées d'un de leurs points d'intersection; on aura d'abord

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) = 0, \; F(x_1, y_1) = 0$$

Pour que les tangentes en ce point soient orthogonales, il faut et il suffit que les produits de leurs coefficients angulaires soit égal à -1, en nous plaçant dans le cas des axes rectangulaires; on doit donc avoir

$$(3) \qquad f'_{x_1} \cdot F'_{x_1} + f'_{y_1} \cdot F'_{y_1} = 0.$$

On obtiendra la condition pour que les deux courbes soient orthogonales en éliminant x_1 et y_1 entre les trois équations (2) et (3).

394. 1° Si l'on applique cette méthode aux deux cercles

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ (x-d)^2 + y^2 - r^2 = 0, \end{cases}$$

on trouve pour équation de condition

$$(2) \qquad d^2 = R^2 + r^2;$$

c.à.d. que le carré de la distance des centres doit être égal à la somme des carrés des rayons.

2° Considérons encore les deux courbes

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Si l'on suppose $\lambda > c$ et $\mu < c$, c étant une constante fixe, l'équation (1) représentera une série d'ellipses ayant pour axes les axes de coordonnées; l'équation (2) représentera une série d'hyperboles ayant aussi pour axes les axes de coordonnées. Ces courbes du second ordre, comme on le verra plus tard, ont les mêmes foyers, on les appelle coniques homofocales.

Nous allons démontrer maintenant que, quelles que soient les valeurs des constantes λ et μ, ces courbes sont orthogonales.

Les coordonnées x et y des points communs à ces deux courbes ont pour valeurs

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\lambda^2\mu^2}{c^2}, \\ y^2 = -\dfrac{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{c^2}. \end{cases}$$

Ces courbes sont orthogonales, si les coordonnées du point d'intersection vérifient la relation

$$f'_x \cdot F'_x + f'_y \cdot F_y = 0;$$

laquelle est, d'après la forme des équations (1) et (2) :

$$(4)\quad \frac{x^2}{\lambda^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)}.$$

Or, en remplaçant x et y par leurs valeurs (3), cette relation se réduit évidemment à une identité, quels que soient λ et μ. Donc....

3° Soit encore les deux courbes

$$(1)\qquad y^2 = 2\lambda x + \lambda^2,$$

$$(2)\qquad y^2 = 2\mu x + \mu^2;$$

$\lambda \gtrless \mu$; ces deux équations représentent des paraboles ayant pour foyer commun l'origine et pour axe l'axe des x.

Les coordonnées des points communs à ces deux courbes ont pour valeurs

$$(3)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda+\mu}{2}, \\ y^2 = -\lambda\mu. \end{cases}$$

Or, quels que soient λ et μ, ces courbes se coupent orthogonalement, car la relation

$$f'_x F'_x + f'_y F'_y = 0, \text{ ou } \lambda\mu + y^2 = 0;$$

se réduit à une identité pour les valeurs (3).

XI°. Courbes enveloppes.

395. **Définition. Équation**

Supposons que l'équation d'une courbe

$$(1)\qquad C = f(x, y, a) = 0,$$

renferme une constante arbitraire a; si l'on fait varier le paramètre a, on aura une série continue de courbes.

Le lieu des intersections successives de ces courbes forme une courbe qu'on appelle la courbe enveloppe des courbes C.

Ainsi une courbe peut toujours être regardée comme le lieu des intersections successives de ses tangentes ou l'enveloppe de ses tangentes.

Pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe, supposons qu'on donne au paramètre une certaine valeur a, on aura alors une courbe C.

$$(1)\qquad C = f(x, y, a) = 0;$$

donnons ensuite au paramètre la valeur $(a + \Delta a)$, on aura une autre courbe C' de la même série, son équation sera

$$(2)\qquad C' = f(x, y, a + \Delta a) = 0;$$

les coordonnées des points d'intersection des courbes C et C' vérifieront à la fois les équations (1) et (2).

Or, on peut remplacer l'une des deux équations par la combinaison suivante des équations (1) et (2)

$$\frac{f(x,y,a+\Delta a)-f(x,y,a)}{\Delta a}=0;$$

de sorte que les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec la courbe infiniment voisine C' (si Δa est infiniment petit) seront données par les deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} f(x,y,a)=0, \\ \dfrac{f(x,y,a+\Delta a)-f(x,y,a)}{\Delta a}=0. \end{cases}$$

Lorsque Δa tend vers zéro, la courbe C' tend à se confondre avec la courbe C; et, pour $\Delta a=0$, les deux courbes auront en commun tous les points de la courbe C. Mais, avant que Δa soit nul, les courbes C et C' ont un nombre fini de points d'intersection tels que M; ces points d'intersection ont une position limite parfaitement déterminée, lorsqu'on fait tendre Δa vers zéro; et ces points seront donnés par les équations (3) en y introduisant l'hypothèse $\Delta a=0$. Or la seconde des équations (3) devient alors

$$(4)\qquad f'_a(x,y,a)=0.$$

Donc, a étant donné, l'équation (4) et la 1ère des équations (3) déterminent la position limite des points d'intersection de la courbe C avec la courbe infiniment voisine. On a fait disparaître l'indétermination en combinant les équations (1) et (2) comme il a été indiqué et en divisant par Δa.

Par conséquent, le lieu des intersections successives des courbes C ou l'enveloppe des courbes C s'obtiendra en éliminant le paramètre arbitraire a entre les deux équations

$$\begin{cases} (5)\qquad f(x,y,a)=0, \\ (6)\qquad f'_a(x,y,a)=0; \end{cases}$$

le premier membre de l'équation (6) est la dérivée, par rapport à la constante arbitraire a, du premier membre de l'équation proposée.

396. La courbe enveloppe est touchée par les courbes variables aux points où deux courbes consécutives viennent la rencontrer.

Soient x et y les coordonnées du point d'intersection de deux courbes consécutives C et C'; ces coordonnées seront données par les équations

$$(5)\quad f(x,y,a)=0,\quad (6)\quad f'_a(x,y,a)=0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C

$$(7)\qquad C=f(x,y,a)=0,$$

au point (x, y) a pour valeur

$$(1^\circ)\qquad -\frac{f'_x(x,y,a)}{f'_y(x,y,a)}.$$

Or si l'on regarde a comme une fonction de x et y déterminée par la relation (6), nous pourrons représenter aussi la courbe enveloppe par l'équation (5) ou (7); le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe a alors pour valeur

$$-\frac{f'_x(x,y,a)+a'_x\cdot f'_a(x,y,a)}{f'_y(x,y,a)+a'_y\cdot f'_a(x,y,a)};$$

expression qui, d'après la relation (6), se réduit à

$$(2^\circ)\qquad -\frac{f'_x(x,y,a)}{f'_y(x,y,a)}.$$

Nous allons démontrer maintenant que les expressions (1°) et (2°) sont numériquement égales. La forme algébrique est la même; seulement, dans l'équation (1°), a est une constante; et, dans l'expression (2°), a est une fonction de x et y. Mais les coordonnées x et y doivent vérifier les équations (5) et (6) ou la

constante a a la même valeur; donc la valeur de a (fonction de x et y), déduite de l'équation (6), a numériquement la même valeur que dans les équations (5) ou (7).

Ainsi les expressions (1°) et (2°) sont numériquement égales, c.à.d. que les tangentes à l'enveloppe et à la courbe variable C, au point où cette dernière est rencontrée par la courbe infiniment voisine, se confondent; donc.....

397. Il peut arriver que l'équation de la courbe variable dépende de deux paramètres arbitraires a et b liés entre eux par une relation. Soit, par exemple,

$$(1) \qquad f(x, y, a, b) = 0,$$

l'équation de la courbe, et

$$(2) \qquad \varphi(a, b) = 0,$$

la relation qui existe entre les constantes arbitraires a et b.

Pour obtenir l'enveloppe, nous pouvons regarder, dans l'équation (1), b comme une fonction de a déterminée par la relation (2); nous aurons, en prenant la dérivée par rapport a du 1er membre de l'équation (1) et en égalant à zéro:

$$f'_a(x, y, a, b) + f'_b(x, y, a, b).\, b'_a = 0.$$

Mais la relation (2) nous donne identiquement

$$\varphi'_a(a, b) + \varphi'_b(a, b).\, b'_a = 0, \text{ d'où } b'_a = -\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}$$

et l'équation précédente devient

$$f'_a(x, y, a, b) - \frac{\varphi'_a}{\varphi'_b} \cdot f'_b(x, y, a, b) = 0.$$

Nous aurons donc l'équation de l'enveloppe en éliminant a et b entre les trois équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & f(x, y, a, b) = 0, \\ (2) & \varphi(a, b) = 0, \\ (3) & \dfrac{f'_a(x, y, a, b)}{\varphi'_a(a, b)} = \dfrac{f'_b(x, y, a, b)}{\varphi'_b(a, b)}. \end{array} \right.$$

398. Il peut encore arriver que l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y, a, b, c) = 0,$$

dépende de trois paramètres arbitraires a, b, c, et soit homogène par rapport à a, b, c; ces paramètres étant, en outre, liés entre eux par une relation homogène telle que

$$(2) \qquad \varphi(a, b, c) = 0.$$

En divisant ces deux équations par une puissance convenable de c, et en posant

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = \beta,$$

on peut les ramener à la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \alpha, \beta, 1) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta, 1) = 0. \end{array} \right.$$

D'après le théorème précédent, on obtiendra l'enveloppe en éliminant α et β entre les équations (3) et la suivante

$$(4) \qquad \frac{f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta, 1)}{\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)} = \frac{f'_\beta(x, y, \alpha, \beta, 1)}{\varphi'_\beta(\alpha, \beta, 1)}.$$

Or si l'on remplace α et β par $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, et qu'on chasse le dénominateur c, il est visible que $\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)$, par exemple, deviendra $\varphi'_a(a, b, c)$, puisque $\varphi'_\alpha(\alpha, \beta, 1)$ est composée en α et β comme $\varphi'_a(a, b, c)$ l'est en a et b; et de même pour les autres.

Ainsi, on aura l'équation de l'enveloppe en éliminant a, b, c, entre les trois équations homogènes

$$(5)\quad \begin{cases} f(x, y, a, b, c) = 0, \\ \varphi(a, b, c) = 0, \\ \dfrac{f'_a}{\varphi'_a} = \dfrac{f'_b}{\varphi'_b}. \end{cases}$$

Mais, de la dernière de ces équations, on tire

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{a f'_a + b f'_b}{a\varphi'_a + b\varphi'_b};$$

or on a, d'après le théorème des fonctions homogènes et les premières équations (5):

$$a f'_a + b f'_b + c f'_c = m . f(x, y, a, b, c) = 0;$$

$$a\varphi'_a + b\varphi'_b + c\varphi'_c = n . \varphi(a, b, c) = 0;$$

la relation précédente devient donc

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{-c f''_c}{-c\varphi'_c} = \frac{f'_c}{\varphi'_c}.$$

Ainsi l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a, b, c, entre trois des quatre équations suivantes:

$$\begin{cases} (1^\circ) & f(x, y, a, b, c) = 0, \\ (2^\circ) & \varphi(a, b, c) = 0, \\ (3^\circ) & \dfrac{f'_a}{\varphi'_a} = \dfrac{f''_b}{\varphi'_b} = \dfrac{f'_c}{\varphi'_c}. \end{cases}$$

XIIe Applications.

399. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \lambda^2 L - 2\lambda M + N = 0,$$

où L, M, N sont des fonctions de x et y, et λ un paramètre arbitraire.

Cherchons l'enveloppe des courbes (1); il faut, pour cela, éliminer λ entre l'équation (1) et la dérivée par rapport à λ, savoir

$$\lambda L - M = 0;$$

on est ainsi conduit à l'équation de l'enveloppe

$$(2)\qquad M^2 = LN.$$

N. B. Si L, M, N sont des fonctions linéaires de x et y, l'équation (1) représente une droite, et l'équation (3) représente une courbe du second ordre tangente aux droites $L = 0$, $N = 0$ aux points où elle sont rencontrées par la droite $M = 0$.

La courbe (2) étant alors l'enveloppe des droites (1), l'équation (1) est l'équation d'une tangente quelconque à la courbe (2)

400. **Développées.**

On appelle **développée** d'une courbe le lieu des intersections successives des normales à cette courbe; la développée est donc l'enveloppe des normales.

La courbe primitive porte le nom de développante.

1° **Développée de l'Ellipse.**

Nous prendrons l'équation de l'ellipse sous la forme N.° (334)

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et nous supposerons les axes rectangulaires. Les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe pourront

se représenter N° [335] par

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = a \cos\varphi, \\ y_1 = b \sin\varphi; \end{cases}$$

et l'équation de la normale en ce point sera N° [367]

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

ou, (en posant $c^2 = a^2 - b^2$) :

$$b^2 x_1 y - a^2 y_1 x + c^2 x_1 y_1 = 0;$$

ou enfin, d'après les valeurs (2) :

$$(3) \qquad \frac{by}{\sin\varphi} - \frac{ax}{\cos\varphi} + c^2 = 0. \quad \text{(normale au point } \varphi\text{)}$$

Il faut trouver l'enveloppe des droites (3), c.à.d. éliminer φ entre l'équation (3) et sa dérivée par rapport à φ. Pour donner au calcul plus de simplicité, nous prendrons quelques précautions. Avant de prendre la dérivée par rapport à φ, multiplions l'équation (3) par $\sin\varphi$, ce qui donne

$$by - ax \tan\varphi + c^2 \sin\varphi = 0.$$

Prenons la dérivée de cette dernière équation, on trouve de suite

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi;$$

portant cette valeur dans l'équation (3), ou différentiant l'équation (3) après avoir multiplié par $\cos\varphi$, on trouvera

$$y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

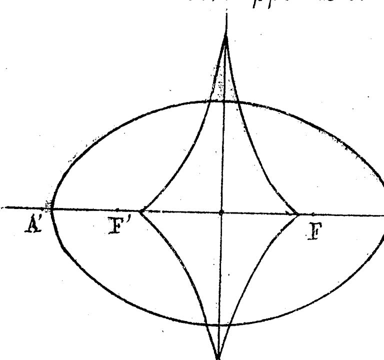
Ainsi les coordonnées du point d'intersection de deux normales consécutives de l'ellipse (1) seront

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \\[2mm] y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \end{cases}$$

Ce point est le centre du cercle osculateur au point dont le paramètre est φ.

La développée s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations (4). Or de ces équations, on tire

$$\cos\varphi = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sin\varphi = -\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{3}},$$



après avoir posé

$$(5) \qquad A = \frac{c^2}{a}, \quad B = \frac{c^2}{b}, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

On conclut de là

$$(6) \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

telle est l'équation de la développée de l'Ellipse.

Remarque. La développée de l'hyperbole se déduira des résultats qui précèdent en changeant b en $b\sqrt{-1}$.

2° Développée de la Parabole.

Nous prendrons l'équation de la parabole sous la forme N° [341]

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0,$$

et nous supposerons les axes rectangulaires. La normale au point (x_1, y_1) est

$$(2) \qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

avec la condition

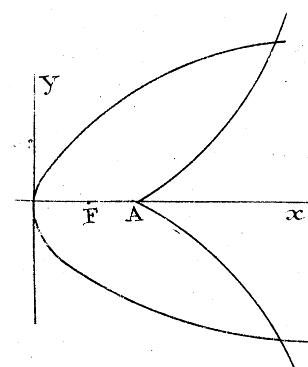
$$(3) \qquad y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

Il faut éliminer x_1 et y_1 entre les équations (2) et (3) et l'équation suivante N° [397]

$$(4)\qquad \frac{-p+x-x_1}{y_1}=\frac{y_1}{p}.$$

Les équations (2) et (4), résolues par rapport à x et y, donnent

$$(5)\quad \begin{cases} x = p+3x_1, \\ y=-\dfrac{2x_1y_1}{p}; \end{cases} \quad y_1^2 = 2px_1 ;$$



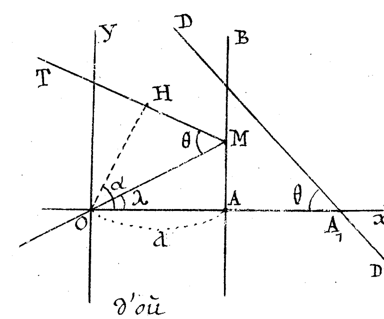
ces équations définissent les coordonnées de l'intersection de deux normales consécutives de la parabole (1).

La développée s'obtiendra en éliminant x_1 et y_1 entre les trois équations (5); on trouve ainsi

$$(6)\qquad y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3;$$

c'est l'équation de la développée de la parabole.

401. Le sommet d'un angle constant OMT se meut sur une droite fixe AB, tandis qu'un ~~côté~~ de ses côtés passe par un point fixe O; l'autre côté MT enveloppe une parabole.



Si p est la distance OH à l'origine de la droite MT, et si α est l'angle de cette droite OH avec Ox, l'équation de la droite MT est

$$(1)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Or, si l'on désigne par θ l'angle donné OMT; et par d, la distance fixe OA; par λ, l'angle variable MOA; on a

$$d = \mathrm{OM}\cos\lambda,\ \mathrm{OH}\ \text{ou}\ p = \mathrm{OM}\sin\theta;$$

d'où

$$(1^\circ)\qquad p=\frac{d\sin\theta}{\cos\lambda};$$

on a encore

$$(2^\circ)\qquad \alpha-\lambda=\frac{\pi}{2}-\theta;$$

l'équation de la droite MT sera donc

$$x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\lambda-\theta\right)+y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\lambda-\theta\right)-\frac{d\sin\theta}{\cos\lambda}=0,$$

ou

$$(2)\qquad x\sin(\theta-\lambda)+y\cos(\theta-\lambda)-\frac{d\sin\theta}{\cos\lambda}=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

Mais, si l'on pose

$$(3)\quad \begin{cases} X = x\sin\theta + y\cos\theta, \\ Y = x\cos\theta - y\sin\theta, \end{cases}$$

l'équation (2) s'écrira sous la forme plus simple

$$X\cos^2\lambda - Y\sin\lambda\cos\lambda = d\sin\theta,$$

ou encore

$$(4)\qquad X\cos 2\lambda - Y\sin 2\lambda + X - 2d\sin\theta = 0;$$

telle est la forme définitive de l'équation de la droite MT, λ étant un paramètre arbitraire. Pour obtenir l'enveloppe de cette droite il faudra éliminer λ entre cette équation et sa dérivée par rapport à λ, savoir

$$(5)\qquad X\sin 2\lambda + Y\cos 2\lambda = 0.$$

De l'équation (5) on tire

$$\tang 2\lambda = -\frac{Y}{X},\quad \sin 2\lambda = \frac{-Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \cos 2\lambda = \frac{+X}{\sqrt{X^2+Y^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (4), et rendant rationnel, il vient

$$X^2+Y^2=(X-2d\sin\theta)^2;$$

ou, en ayant égard aux valeurs (3)

$$(6)\qquad x^2+y^2=(x\sin\theta+y\cos\theta-2d\sin\theta)^2$$

Nous verrons plus loin que cette équation représente une parabole ayant pour foyer l'origine O, et pour directrice la droite

$$x\sin\theta+y\cos\theta-2d\sin\theta=0;$$

la distance de cette droite à l'origine est $2d\sin\theta$; et l'angle, avec Ox, de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite est $(\frac{\pi}{2}-\theta)$. Par suite, si l'on prend sur Ox un point A_1, tel que $OA_1=2d$; et si par A_1, on mène une droite DD_1 faisant avec A_1O l'angle θ, cette droite DD_1 sera la directrice de la parabole.

402 Trouver l'enveloppe de la droite

$$(1)\qquad ux+vy-wz=0,$$

les paramètres u, v, w, étant liés entre eux par la relation homogène du second degré

$$(2)\qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0.$$

Appliquant à ce cas la règle donnée au N.º (398), on voit qu'on aura l'enveloppe de cette droite, en éliminant u, v, w, entre l'équation (1) et les suivantes

$$(3)\qquad \frac{Au+Bv+Dw}{x}=\frac{Bu+Cv+Ew}{y}=\frac{Du+Ev+Fw}{-z}$$

Si l'on désigne par k la valeur commune de ces rapports, l'équation cherchée s'obtiendra en éliminant u, v, w, k, entre les quatre équations:

$$(4)\qquad \begin{cases} Au+Bv+Dw-kx=0, \\ Bu+Cv+Ew-ky=0, \\ Du+Ev+Fw+kz=0, \\ xu+yv-zw-0=0. \end{cases}$$

Le résultat de cette élimination est évidemment

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & -z \\ x & y & -z & 0 \end{vmatrix}=0;$$

l'enveloppe des droites (1) est donc une courbe du second ordre.

Mais nous pouvons regarder N.º (110) u, v, w, comme les coordonnées tangentielles de la droite (1), et l'équation (2) sera l'équation tangentielle de l'enveloppe de ces droites; mais cette équation (2) est N.º (355) l'équation générale des courbes de 2ème classe.

L'équation (5) est donc l'équation, en coordonnées Cartésiennes, des courbes de 2ème classe et nous voyons par là que

Une courbe de 2ème classe est une courbe du second ordre.

On pourrait, de l'équation (5), déduire la discussion des courbes de 2ème classe résumée au N.º (36 mais nous n'insisterons pas sur cette méthode indirecte.

---

§II Coordonnées trilatères.

I.º Équation de la tangente.

403. Soit l'équation d'une courbe, en coordonnées trilatères,

$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=0,$$

et X_1, Y_1, Z_1, les coordonnées d'un point de cette courbe.

L'équation de la tangente en ce point sera

$$(2) \qquad X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1} = 0,$$

avec la condition

$$(2\,bis) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1) = 0.$$

Pour le démontrer, rappelons-nous que les coordonnées d'un point quelconque M_2 d'une droite passant par les points $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $M(X, Y, Z)$ sont N° (90)

$$(3) \quad \begin{cases} X_2 = X_1 + kX \\ Y_2 = Y_1 + kY, \quad \text{où } k = \dfrac{M_2 M_1}{M M_2}; \\ Z_2 = Z_1 + kZ \end{cases}$$

supposons que le point M_2 appartienne à la courbe, on aura alors

$$f(X_1 + kX, Y_1 + kY, Z_1 + kZ) = 0,$$

ou, d'après le théorème de Taylor

$$(4) \qquad f(X_1, Y_1, Z_1) + k\left[X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1}\right] + \frac{k^2}{1.2}\left[X^2 f''_{X_1 X_1} + \dots\right] + \dots = 0.$$

Or le premier terme de cette équation est nul, si l'on suppose le point (X_1, Y_1, Z_1) sur la courbe; le premier membre de l'équation (4) est divisible par k; ce qui doit être, puisque l'équation (4) détermine les rapports suivant lesquels la courbe divise le segment M_1M; un de ces rapports est donc nul.

Si la droite M_1M est tangente en M_1, c.à.d. si l'un des points, tels que M_2, vient coïncider avec M_1, deux de ces rapports doivent être nuls, le premier membre de l'équation (4) doit être divisible par k^2. Donc la condition, pour que la droite M_1M soit tangente en M_1, est

$$X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1} = 0.$$

Or ceci est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque M de cette tangente, c'est, par conséquent, l'équation de la tangente.

404. On peut encore démontrer cette proposition comme il suit:

La droite (2) passe d'abord par le point (X_1, Y_1, Z_1); car la fonction $f(X, Y, Z)$ étant homogène, on a l'identité

$$X f'_X + Y f'_Y + Z f'_Z = m\, f(X, Y, Z);$$

et, par suite de la relation (2 bis), on conclut

$$(5) \qquad X_1 f'_{X_1} + Y_1 f'_{Y_1} + Z_1 f'_{Z_1} = 0;$$

ce qui exprime que la droite (2) passe par le point (X_1, Y_1, Z_1).

Nous allons démontrer maintenant que la droite (2) passe par le point infiniment voisin situé sur la courbe, c.à.d. que l'équation (2) est vérifiée lorsqu'on y remplace X, Y, Z, par $(X_1 + \delta X_1), (Y_1 + \delta Y_1), (Z_1 + \delta Z_1)$, si l'on suppose que $\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1$, tendent vers zéro.

En effet, lorsqu'on substitue à X, Y, Z, ces valeurs, le premier membre de l'équation (2) devient

$$(6) \qquad \left(X_1 f'_{X_1} + Y_1 f'_{Y_1} + Z_1 f'_{Z_1}\right) + \left(\delta X_1 f'_{X_1} + \delta Y_1 f'_{Y_1} + \delta Z_1 f'_{Z_1}\right);$$

d'après la relation (5), la première partie de cette expression est nulle.

Quant à la seconde partie, on peut l'écrire, en divisant par δX_1,

$$(7) \qquad f'_{X_1} + \frac{\delta Y_1}{\delta X_1} f'_{Y_1} + \frac{\delta Z_1}{\delta X_1} f'_{Z_1}.$$

Mais le point $(X_1 + \delta X_1, Y_1 + \delta Y_1, Z_1 + \delta Z_1)$ étant sur la courbe, on doit avoir,

$$f(X_1 + \delta X_1, Y_1 + \delta Y_1, Z_1 + \delta Z_1) = 0;$$

ou, en développant par la formule de Taylor, et en tenant compte de la relation (2 bis)

$$\delta X_1 f'_{X_1} + \delta Y_1 f'_{Y_1} + \delta Z_1 f'_{Z_1} + \frac{\overline{\delta X_1}^2}{1.2} f''_{X_1 X_1} + \cdots = 0.$$

Si l'on divise par δX_1 et si l'on fait tendre $\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1$ vers zéro, cette dernière égalité donne

$$(8) \qquad \lim \left(f'_{X_1} + \frac{\delta Y_1}{\delta X_1} f'_{Y_1} + \frac{\delta Z_1}{\delta X_1} f'_{Z_1} \right) = 0,$$

car les rapports $\frac{\delta Y_1}{\delta X_1}$, $\frac{\delta Z_1}{\delta X_1}$ ont, en général, une limite finie. L'expression (7), et par suite l'expression (6), est donc nulle à la limite; c. à. d. que la droite (2) passe par le point (X_1, Y_1, Z_1) et par le point infiniment voisin; cette droite est donc tangente au point (X_1, Y_1, Z_1).

II°. Tangentes par un point extérieur.

405. Soit l'équation d'une courbe, en coordonnées trilatères,

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

et X_0, Y_0, Z_0, les coordonnées d'un point donné; il s'agit de déterminer les tangentes qu'on peut mener à la courbe par ce point. Si X_1, Y_1, Z_1 sont les coordonnées du point de contact, d'une des tangentes l'équation de cette tangente sera

$$\begin{cases} X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1} = 0, \\ \text{avec } f(X_1, Y_1, Z_1) = 0. \end{cases}$$

Exprimons que cette droite passe par le point donné, les coordonnées des points de contact des tangentes seront déterminées par les deux équations suivantes (en supprimant les indices 1)

$$(2) \qquad \begin{cases} f(X, Y, Z) = 0, \\ X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z = 0. \end{cases}$$

Les points de contact seront donc les intersections des deux courbes représentées par les équations (2); la 1ère de ces équations donne la courbe proposée; la seconde sera la courbe des contacts.

On voit que la classe de la courbe (1) est $m(m-1)$, si m est l'ordre de cette courbe.

III°. Applications aux courbes du second ordre.

406. L'équation générale, en coordonnées trilatères, des courbes du second ordre est N.° [352]

$$(1) \qquad A_{11} X^2 + A_{22} Y^2 + A_{33} Z^2 + 2A_{12} XY + 2A_{13} XZ + 2A_{23} YZ = 0.$$

En reprenant mot pour mot les calculs du N.° [377], on trouvera que la condition, pour que la droite

$$(2) \qquad aX + bY + cZ = 0,$$

soit tangente à la courbe (1), est

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

407. Équation des tangentes menées à la courbe (1) par le point (α, β, γ).

Soit P le point considéré; si l'on désigne par $\frac{m_1}{m_2}$ le rapport dans lequel la courbe divise le segment PM, les coordonnées du point M_1 seront N.° [90]

$$(4)\quad\begin{cases} X_1 = \dfrac{m_1 X + m_2 \alpha}{m_1 + m_2} \\ Y_1 = \dfrac{m_1 Y + m_2 \beta}{m_1 + m_2} \\ Z_1 = \dfrac{m_1 Z + m_2 \gamma}{m_1 + m_2} \end{cases} , \text{ où } \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1 P}{M M_1}.$$

Les coordonnées X_1, Y_1, Z_1, devant vérifier l'équation (1) de la courbe, on a

$$f\,(m_1 X + m_2 \alpha,\, m_1 Y + m_2 \beta,\, m_1 Z + m_2 \gamma) = 0,$$

ou, en développant

$$(5)\qquad m_1^2\, f(X, Y, Z) + m_1 m_2 \left[\alpha f'_X + \beta f'_Y + \gamma f'_Z\right] + m_2^2\, f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cette équation détermine les deux rapports suivant lesquels la courbe (1) divise le segment MP.

Si la droite MP est tangente, ces deux rapports sont égaux, et réciproquement.

Donc exprimons que l'équation (5) a deux racines égales, ce qui donne

$$(6)\qquad 4\, f(\alpha, \beta, \gamma) . f(X, Y, Z) = (\alpha f'_X + \beta f'_Y + \gamma f'_Z)^2,$$

ou

$$(6\,bis)\qquad 4\, f(\alpha, \beta, \gamma) . f\,(X, Y, Z) = (X f'_\alpha + Y f'_\beta + Z f'_\gamma)^2;$$

et on aura ainsi une relation entre les coordonnées d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes menées par le point (α, β, γ), ou l'équation de ces tangentes.

L'analyse du N.° [374] s'applique à ce cas, on en conclut que :

L'équation des tangentes, ayant pour corde des contacts la droite

$$mX + nY + pZ = 0,$$

est

$$(7)\qquad f(X, Y, Z) . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} + (mX + nY + pZ)^2 . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

408 En reprenant les calculs du N.° [380], on démontre encore que la condition, pour qu'un point (α, β, γ) soit extérieur à la courbe du second ordre (1), est

$$(8)\qquad f(\alpha, \beta, \gamma) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Les calculs du N.° [380] sont applicables au cas actuel, parce que, si l'on décompose en carré le premier membre de l'équation (6 bis), ce premier membre se réduira à la somme de deux carrés; et l'un de ces carrés aura pour multiplicateur l'expression $-(B^2 - AC)$, si l'on adapte à l'équation (6 bis) la notation employée souvent pour l'équation du second degré à deux variables.

IV.° Points d'inflexion.

409 Une tangente d'inflexion rencontre la courbe en trois points coïncidant avec son point de contact N.° [381].

D'après cela, soit l'équation d'une courbe quelconque d'ordre m

$$(1)\qquad f\,(X, Y, Z) = 0,$$

et X_1, Y_1, Z_1, les coordonnées d'un point M_1 pris sur cette courbe.

Les expressions

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 + k\,X, \\ Y_1 + k\,Y, \\ Z_1 + k\,Z, \end{cases}$$

représentent, à un même facteur près N.º (90), les coordonnées d'un point M' partageant le segment M_1M dans le rapport

$$(2\ bis)\qquad k = \frac{M'M_1}{M\,M'}.$$

Si l'on remplace X, Y, Z, par les valeurs (2) dans l'équation (1) de la courbe, on aura l'équation

$$f(X_1 + kX,\ Y_1 + kY, Z_1 + kZ) = 0;$$

ou, en développant par la formule de Taylor:

$$(3)\qquad f(X_1, Y_1, Z_1) + k\left[X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1}\right] + \frac{k^2}{1.2}\left[X^2 f''_{X_1X_1} + Y^2 f''_{Y_1Y_1} + Z^2 f''_{Z_1Z_1} + 2XY f''_{X_1Y_1} + 2XZ f''_{X_1Z_1} + 2YZ f''_{Y_1Z_1}\right] + \frac{k^3}{1.2.3} \cdots = 0.$$

Cette équation détermine les valeurs des m rapports k suivant lesquels la courbe (1) partage le segment M_1M.

Or si le point M_1 est un point de la courbe, une de ces valeurs sera nulle; si la droite M_1M est tangente en M_1, deux de ces valeurs seront nulles; enfin, si la droite M_1M rencontre la courbe en trois points coïncidant avec M_1, trois de ces valeurs seront nulles. On exprimera donc que le point M_1 est un point d'inflexion, en écrivant que l'équation (3) a trois racines nulles, ce qui conduit aux trois équations de condition

$$(1°)\qquad f(X_1, Y_1, Z_1) = 0,$$

$$(2°)\qquad X f'_{X_1} + Y f'_{Y_1} + Z f'_{Z_1} = 0,$$

$$(3°)\qquad X^2 f''_{X_1X_1} + Y^2 f''_{Y_1Y_1} + Z^2 f''_{Z_1Z_1} + 2XY f''_{X_1Y_1} + 2XZ f''_{X_1Z_1} + 2YZ f''_{Y_1Z_1} = 0.$$

Le point M_1 est un point fixe de la tangente d'inflexion, mais le point M ou (X, Y, Z) est un point quelconque de cette tangente. Or l'équation (2°) représente une droite, qui est la tangente d'inflexion; et l'équation doit être vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de cette droite. En d'autres termes, l'équation (3°) doit représenter un système de deux droites, dont l'une est la droite (2°).

Pour que l'équation (3°) représente un système de deux droites, il faut et il suffit que N.º (354)

$$(4°)\qquad \begin{vmatrix} f''_{X_1X_1} & f''_{X_1Y_1} & f''_{X_1Z_1} \\ f''_{Y_1X_1} & f''_{Y_1Y_1} & f''_{Y_1Z_1} \\ f''_{Z_1X_1} & f''_{Z_1Y_1} & f''_{Z_1Z_1} \end{vmatrix} = 0;$$

les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 des points d'inflexion devront alors vérifier les équations (1°) & (2°).

Ces conditions sont nécessaires; nous ajouterons qu'elles sont suffisantes, car si les relations (1°) et (4°) sont vérifiées, le premier membre de l'équation (3°) sera décomposable en deux facteurs linéaires* dont l'un sera le premier membre de l'équation (2°). Pour démontrer cette seconde partie de la question, on peut transformer l'équation (3°) à l'aide des relations (1°) et (4°); ou bien encore, ce qui est plus facile, on peut prendre le point (X_1, Y_1, Z_1) pour un des sommets du triangle de référence, et pour un des côtés, la tangente en ce point; la vérification du fait énoncé s'effectue alors sans aucune difficulté.

Donc, les coordonnées des points d'inflexion de la courbe

$$(1)\qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

doivent en même temps vérifier l'equation

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} f''_{XX} & f''_{XY} & f''_{XZ} \\ f''_{YX} & f''_{YY} & f''_{YZ} \\ f''_{ZX} & f''_{ZY} & f''_{ZZ} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est aussi vérifiée par les coordonnées des points multiples.

On voit qu'une courbe d'ordre m possède, en général, $3m(m-2)$ points d'inflexion.

410. Nous démontrerons ici une propriété remarquable des points d'inflexion dans les courbes du $3^{\text{ème}}$ ordre:

Toute droite, passant par deux des points d'inflexion d'une courbe du $3^{\text{ème}}$ ordre, passe nécessairement par un troisième point d'inflexion.

Prenons, en effet, pour côtés du triangle de référence la droite passant par deux des points d'inflexion, A et B, et les tangentes d'inflexion AC et BC; ces trois droites forment un triangle; car si la tangente d'inflexion AC, par exemple, pouvait coïncider avec AB, elle rencontrerait la courbe du $3^{\text{ème}}$ ordre en quatre points (les trois points confondus en A sur AC, et le point B. Ceci posé, l'équation générale des courbes du $3^{\text{ème}}$ ordre, est

C

A B

$$(1)\qquad mX^3+n_1Y^3+p_2Z^3+m_1X^2Y+m_2X^2Z+nY^2X+n_2Y^2Z+pZ^2X+p_1Z^2Y+hXYZ=0.$$

Cette courbe devant passer par les deux points $A(Y=0, Z=0)$ et $B(X=0, Z=0)$, l'équation (1) se réduit à

$$(2)\qquad p_2Z^3+m_1X^2Y+m_2X^2Z+nY^2X+n_2Y^2Z+pZ^2X+p_1Z^2Y+hXYZ=0.$$

La droite BC est une tangente d'inflexion, donc le 1er membre de l'équation (2) doit se réduire à un cube parfait lorsqu'on y fait $X=0$; or, en introduisant cette hypothèse, il vient

$$p_2Z^3+n_2Y^2Z+p_1YZ^2;$$

expression qui ne peut se réduire à un cube parfait que si

$$n_2=0,\ p_1=0.$$

De même, en exprimant que la droite AC est une tangente d'inflexion, on trouvera

$$m_2=0,\ p=0.$$

L'équation (2) se réduit donc à

$$p_2Z^3+m_1X^2Y+nY^2X+hXYZ=0;$$

équation qu'on peut écrire

$$(3)\qquad Z^3=XYT,$$

en posant

$$(3\,bis)\qquad T=-\frac{1}{p_2}(m_1X+nY+hZ).$$

Sous cette forme, nous voyons que la droite $T=0$ est aussi une tangente d'inflexion, et que le point d'inflexion correspondant est sur la droite $Z=0$.

Donc une droite, passant par deux points d'inflexion d'une courbe du $3^{\text{ème}}$ ordre, passe nécessairement par un troisième point d'inflexion.

§ III. Équations tangentielles. Coordonnées u, v.

1° Point de contact d'une tangente.

411. Soit une équation du degré n entre les variables u et v

$$(1)\qquad f(u,v)=0;$$

u et v étant les coordonnées d'une droite, l'équation (1) représentera une courbe enveloppe de ces droites; et, une solution quelconque de l'équation (1) donnera les coordonnées d'une tangente à cette courbe.

La classe d'une courbe est égale au degré de son équation tangententielle.

En effet, la classe d'une courbe est égale au nombre des tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point quelconque; or, si

$$(2)\qquad Au+Bv+C=0,$$

est l'équation de ce point, les coordonnées des tangentes menées par le point (2) seront les solutions communes aux équations (1) et (2) ; le nombre de ces solutions est évidemment égal à n.

412. **Équation du point de contact d'une tangente.**

Le point de contact d'une tangente est l'intersection de cette tangente avec la tangente infiniment voisine. Soit une tangente (u_1, v_1), on aura d'abord

$$(3) \qquad f(u_1, v_1) = 0;$$

et si $u_1 + \Delta u_1$, $v_1 + \Delta v_1$, sont les coordonnées d'une tangente infiniment voisine, l'équation du point d'intersection de ces deux droites sera N.° [120]

$$v - v_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta u_1}(u - u_1);$$

et à la limite il viendra

$$(4) \qquad v - v_1 = -\frac{f'_{u_1}}{f'_{v_1}}(u - u_1);$$

telle est l'équation du point de contact.

En raisonnant et calculant comme au N.° [371], on conclura que:

L'équation du point de contact de la tangente (u_1, v_1) à la courbe

$$(5) \qquad f(u, v) = 0, \text{ ou } f(u, v, w) = 0,$$

est

$$(6) \qquad u f'_{u_1} + v f'_{v_1} + w f'_{w_1} = 0,$$

avec la condition

$$(6 \text{ bis}) \qquad f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

II.° Intersections d'une droite avec une courbe.

413 Si l'équation tangentielle d'une courbe est

$$(1) \qquad f(u, v) = 0, \quad \text{ou } f(u, v, w) = 0;$$

et que u_0, v_0, w_0 soient les coordonnées d'une droite donnée; appelons u_1, v_1, w_1 les coordonnées de la tangente en l'un des points où cette droite rencontre la courbe, l'équation de ce point sera

$$u f'_{u_1} + v f'_{v_1} + w f'_{w_1} = 0,$$

avec la condition

$$f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Exprimons que la droite (u_0, v_0, w_0) passe par ce point, nous aurons les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0, \\ f(u_1, v_1, w_1) = 0; \end{array} \right.$$

ou, en supprimant les indices 1:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} f(u, v, w) = 0, \\ u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0. \end{array} \right.$$

Les tangentes aux points où la droite (u_0, v_0, w_0) rencontre la courbe (1) seront donc les tangentes communes aux deux courbes (2).

La 1.ère équation est celle de la courbe proposée, nous la supposerons du degré n; la seconde équation est alors du degré (n−1); le nombre des solutions communes à ces deux équations est égal à n(n−1). Donc

Une courbe de n.ième classe est rencontrée, par une droite quelconque, en n(n−1) points; c.à.d. une courbe de n.ième classe est, en général, de l'ordre n(n−1).

L'ordre d'une courbe, donnée par son équation tangentielle, est diminué par la présence des tangentes multiples.

414. Nous exprimerons qu'un point

$$(1) \qquad Au + Bv + Cw = o,$$

est sur une courbe, en identifiant son équation avec celle du point de contact d'une tangente (u_1, v_1). Ainsi, nous aurons

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{f'_{u_1}}{A} = \dfrac{f'_{v_1}}{B} = \dfrac{f'_{w_1}}{C}, \\ f(u_1, v_1, w_1) = o\,; \text{ ou } Au_1 + Bv_1 + Cw_1 = o; \end{cases}$$

et, en éliminant u_1, v_1, w_1 entre les trois équations homogènes (2), nous obtiendrons la condition pour que le point (1) soit sur la courbe

$$(3) \qquad f(u, v, w) = o.$$

III°. Application aux courbes de 2ème classe.

415. Condition pour qu'un point soit sur une courbe de 2ème classe.

Soit l'équation générale des courbes de 2ème classe

$$(1) \qquad f(u, v, w) = Au + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = o,$$

et

$$(2) \qquad au + bv + cw = o,$$

l'équation d'un point donné.

D'après la remarque du N° [414] nous devrons avoir

$$\begin{cases} Au_1 + Bv_1 + Dw_1 - \lambda a = o, \\ Bu_1 + Cv_1 + Ew_1 - \lambda b = o, \\ Du_1 + Ev_1 + Fw_1 - \lambda c = o, \\ au_1 + bv_1 + cw_1 - \;o\; = o. \end{cases}$$

L'élimination de u_1, v_1, w_1 et λ entre ces dernières équations nous conduit à la condition cherchée, savoir

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = o.$$

416. Équation des points d'intersection d'une droite (α, β, γ) avec une courbe de 2ème classe.

Si l'équation d'un de ces points d'intersection est

$$(4) \qquad au + bv + cw = o,$$

les constantes a, b, c devront vérifier la relation (3); mais la droite donnée devant passer par ce point, on aura

$$(5) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = o.$$

On tire des équations (4) et (5)

$$\frac{a}{\beta w - \gamma v} = \frac{b}{\gamma u - \alpha w} = \frac{c}{\alpha v - \beta u}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (3), il viendra

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & \beta w - \gamma v \\ B & C & E & \gamma u - \alpha w \\ D & E & F & \alpha v - \beta u \\ \beta w - \gamma v & \gamma u - \alpha w & \alpha v - \beta u & o \end{vmatrix} = o;$$

c'est une relation entre les coordonnées u, v, w, d'une droite quelconque passant par un quelconque des points d'intersection de la droite (α, β, γ) avec la courbe; c'est donc l'équation des deux points d'intersection.

L'équation (6) peut se mettre sous la forme suivante N° [379]

$$(7) \qquad 4 f(\alpha, \beta, \gamma) . f(u, v, w) = \left[u f'_\alpha + v f'_\beta + w f'_\gamma\right]^2.$$

Nous verrons, dans le § suivant, une autre dedémonstration qui est applicable au cas actuel N.° [423].

417. Condition pour qu'une droite donnée rencontre la courbe (1) en deux points réels.

Pour obtenir cette condition il suffit d'exprimer que les deux points représentés par l'équation (7) sont réels, c.à.d. d'après le N.° [363]

$$E^2 - CF > 0, \quad \text{ou} \quad D^2 - AF > 0.$$

Mais on voit que les calculs développés dans le N.° [380] sont applicables ici, en remplaçant A, B, C, D, E, F par C, E, F, B, D, A, et x, y, z, par v, w, u; et on trouvera, en supprimant le facteur α^2 que nous supposerons différent de zéro

$$f(\alpha,\beta,\gamma)\begin{vmatrix} C & E & B \\ E & F & D \\ B & D & A \end{vmatrix} < 0;$$

inégalité qui peut évidemment s'écrire

$$(8) \qquad f(\alpha,\beta,\gamma)\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} < 0;$$

telle est la condition pour que les deux points d'intersection de la courbe (1) par la droite (α,β,γ) soient réels.

IV.° Points de rebroussement.

418. Si par un point de rebroussement d'une courbe on mène les tangentes à la courbe, il y en aura trois coïncidant avec la tangente de rebroussement. Nous admettons pour l'instant la notion des points de rebroussement, les détails seront donnés au chapitre III suivant.

Soit l'équation tangentielle d'une courbe

$$(1) \qquad f(u,v) = 0, \quad \text{ou} \quad f(u,v,w) = 0;$$

et un point

$$(2) \qquad v = au + b.$$

Les tangentes menées à la courbe par ce point seront déterminées à l'aide de l'équation (2) et de l'équation suivante

$$(3) \qquad f(u, au + b) = 0;$$

pour que le point (2) soit un point de rebroussement, il faut que cette équation admette trois racines égales. En continuant les calculs comme il a été fait aux N.° [384] et [385], on prouvera que

Les coordonnées des tangentes aux points de rebroussement de la courbe (1) doivent vérifier les équations

$$(1) \qquad f(u,v,w) = 0,$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{vv} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{ww} \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées des tangentes d'inflexion et généralement des tangentes multiples satisfont aussi à la relation (4); car, si par un point d'inflexion on mène les tangentes à une courbe, il y en aura également trois coïncidant avec la tangente d'inflexion. Mais il y a entre les tangentes de rebroussement et les tangentes d'inflexion cette différence essentielle: c'est que les premières sont des tangentes simples, et les secondes des tangentes doubles. Nous reviendrons, dans le chapitre III, sur ces propriétés.

---

§ IV Équations tangentielles. Coordonnées trilatères.

I° Point de contact d'une tangente.

419. L'équation du $n^{ème}$ degré, homogène,

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

représente une courbe de $n^{ème}$ classe, si U, V, W sont les coordonnées trilatères d'une droite; la courbe est l'enveloppe des droites dont les coordonnées vérifient l'équation (1).

Par un point quelconque

$$(2) \qquad AU + BV + CW = 0,$$

on peut mener n tangentes à la courbe (1), car le nombre des solutions réelles ou imaginaires des équations homogènes (1) et (2) est toujours égal à n; la courbe (1) est donc de $n^{ème}$ classe.

420. Soient maintenant U_1, V_1, W_1, les coordonnées d'une tangente à la courbe

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0;$$

l'équation du point de contact de cette tangente sera

$$(2) \qquad Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} + Wf'_{W_1} = 0,$$

avec la condition

$$(2bis) \qquad f(U_1, V_1, W_1) = 0.$$

Pour cela il suffit de démontrer que le point (2) est l'intersection de deux tangentes infiniment voisines, c.à.d. que l'équation (2) est vérifiée par les coordonnées de la tangente (U_1, V_1, W_1) et par les coordonnées $(U_1 + \delta U_1, V_1 + \delta V_1, W_1 + \delta W_1)$ de la tangente infiniment voisine. Le calcul est le même qu'au N° (404).

II° Intersection d'une droite avec la courbe.

421. L'équation tangentielle d'une courbe étant

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

soient U_0, V_0, W_0, les coordonnées d'une droite donnée. Si (U_1, V_1, W_1) est la tangente à la courbe en l'un des points d'intersection avec la droite (U_0, V_0, W_0), l'équation de ce point sera

$$(2) \qquad \begin{cases} Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} + Wf'_{W_1} = 0, \\ f(U_1, V_1, W_1) = 0. \end{cases}$$

Exprimons que le point (2) est sur la droite donnée, on aura les équations de condition

$$\begin{cases} U_0 f'_{U_1} + V_0 f_{V_1} + W_0 f'_{W_1} = 0, \\ f(U_1, V_1, W_1) = 0; \end{cases}$$

ou, en supprimant les indices 1:

$$(3) \qquad \begin{cases} U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W = 0, \\ f(U, V, W) = 0. \end{cases}$$

Les solutions communes aux deux équations (3), ou les tangentes communes aux courbes représentées par ces deux équations, seront les tangentes aux points où la droite (U_0, V_0, W_0) rencontre la courbe (1).

La seconde des équations (3) est celle de la courbe elle-même.

On voit encore que l'ordre de la courbe est, en général, $n(n-1)$, si n est la classe de cette courbe.

Remarque. On exprimera qu'un point est sur la courbe, en identifiant l'équation de ce point avec celle du point de contact de la tangente en ce point; voir N° (414).

III: Application aux courbes de 2ème classe.

422. L'équation générale des courbes de 2ème classe, en coordonnées trilatères, est

$$(1) \qquad f(U,V,W) = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{12}UV + 2A_{13}UW + 2A_{23}VW = 0.$$

On démontrera comme au N° (415) que

La condition pour que le point

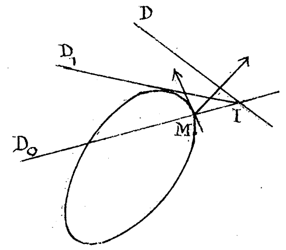
$$(2) \qquad aU + bV + cW = 0,$$

soit sur la courbe (1), est

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

423. Équation des points d'intersection d'une droite (U_0, V_0, W_0) avec la courbe de 2ème classe (1).

Soit I un point sur la droite $D_0(U_0, V_0, W_0)$ et une droite $D(U,V,W)$ passant par ce point; si l'on pose



$$(4) \qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{m_1 U + m_2 U_0}{\rho}, \\ V_1 = \dfrac{m_1 V + m_2 V_0}{\rho}, \\ W_1 = \dfrac{m_1 W + m_2 W_0}{\rho}, \end{cases}$$

U_1, V_1, W_1, seront les coordonnées d'une droite D_1, passant par l'intersection I des deux droites $D_0(U_0,V_0,W_0)$ et $D(U,V,W)$, et l'on aura N° (142)

$$(4\ bis) \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \widehat{DID_1}}{\sin \widehat{D_1ID_0}}$$

Supposons que la droite D_1 soit tangente à la courbe (1), on devra avoir alors

$$f(m_1U + m_2U_0,\ m_1V + m_2V_0,\ m_1W + m_2W_0) = 0,$$

ou, en développant

$$(5) \qquad m_1^2 f(U,V,W) + m_1 m_2 \left[U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W\right] + m_2^2 f(U_0, V_0, W_0) = 0.$$

Cette équation détermine les rapports des sinus des angles que font, avec les droites ID_0 et ID, les tangentes menées à la courbe (1) par le point I; il y a deux rapports, puisque par le point I on peut mener deux tangentes.

Or, si maintenant le point I est un des points d'intersection de la droite D_0 avec la courbe, M par exemple, les deux tangentes menées à la courbe par le point M coïncident N° (375) remarque; par suite, les deux rapports déterminés par l'équation (5) sont égaux; réciproquement, si ces deux rapports sont égaux, les deux tangentes coïncident; par conséquent le point d'où elles sont menées est sur la courbe.

Exprimons donc que les deux racines de l'équation (5) sont égales, on a

$$(6) \qquad 4f(U_0,V_0,W_0) \cdot f(U,V,W) = \left(U_0 f'_U + V_0 f'_V + W f'_W\right)^2,$$

ou

$$(6\ bis) \qquad 4f(U_0,V_0,W_0) \cdot f(U,V,W) = \left(U f'_{U_0} + V f'_{V_0} + W f'_{W_0}\right)^2.$$

Cette condition étant remplie, les deux droites D et D_0 se coupent sur la courbe; mais la droite $D(U,V,W)$ est arbitraire; l'équation (6) est donc une relation entre les coordonnées U, V, W, d'une droite quelconque passant par un quelconque des points d'intersection de la droite D_0 avec la courbe; l'équation (6) ou (6 bis) est, par suite, l'équation des deux points d'intersection de la droite (U_0, V_0, W_0) avec la courbe (1).

424. Si l'on décompose en carrés le premier membre de l'équation (6 bis), elle se réduira à la somme de deux carrés, et l'un de ces

carrés sera multiplié par une expression telle $(AC-B^2)$; pour que les deux points (6 bis) soient réels, il faudra que cette quantité soit négative; on sera alors ramené à un calcul identique à celui qui a été développé au N.° [380]. De là on conclura que:

La droite (U_0, V_0, W_0) rencontrera la courbe (1) en deux points réels, si l'on a

$$f(U_0, V_0, W_0)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

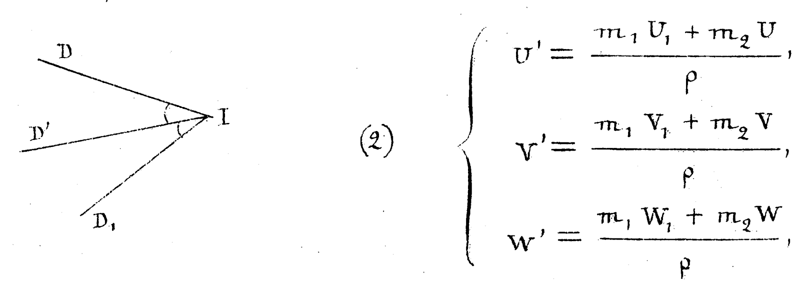
IV.° Points de rebroussement.

425. Lorsqu'un point d'une courbe est de rebroussement, parmi les tangentes menées de ce point à la courbe, il y en a trois coïncidant avec la tangente de rebroussement.

Soit U_1, V_1, W_1, une tangente à la courbe

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0;$$

si nous posons



$$(2) \quad \begin{cases} U' = \dfrac{m_1 U_1 + m_2 U}{\rho}, \\ V' = \dfrac{m_1 V_1 + m_2 V}{\rho}, \\ W' = \dfrac{m_1 W_1 + m_2 W}{\rho}, \end{cases}$$

ces expressions définiront une droite $D'(U', V', W')$ passant par le point d'intersection I des droites $D_1(U_1, V_1, W_1)$ et $D(U, V, W)$, et l'on a de plus N.° [142]

$$(2\text{ bis}) \qquad \frac{m_2}{m_1} = k = \frac{\sin \widehat{D_1 I D'}}{\sin \widehat{D' I D}}.$$

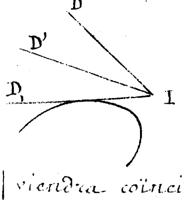
Supposons la droite D' tangente à la courbe (1), on aura dès-lors:

$$f(m_1 U_1 + m_2 U, m_1 V_1 + m_2 V, m_1 W_1 + m_2 W) = 0,$$

ou, en développant et divisant par m_1^n:

$$(3) \quad f(U_1, V_1, W_1) + k\overbrace{\left[U f'_{U_1} + V f'_{V_1} + W f'_{W_1}\right]}^{M} + \frac{k^2}{1.2}\overbrace{\left[U^2 f''_{U_1 U_1} + V^2 f''_{V_1 V_1} + W^2 f''_{W_1 W_1} + 2UV f''_{U_1 V_1} + 2UW f''_{U_1 W_1} + 2VW f''_{V_1 W_1}\right]}^{N} + \frac{k^3}{1.2.3} \cdots\cdots = 0.$$

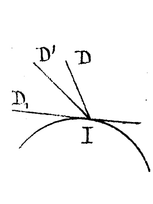
Cette équation détermine le rapport des sinus des angles que font, avec les deux droites ID_1 et ID, une tangente à la courbe menée par le point I; comme il y a n tangentes, si la courbe est de $n^{\text{ème}}$ classe, il y aura n rapports déterminés par l'équation (3).



1.° Supposons que la droite $D_1(U_1, V_1, W_1)$ soit une tangente; l'équation se réduit à

$$(3\text{ bis}) \qquad k M + \frac{k^2}{1.2} \cdot N + \frac{k^3}{1.2.3} P + \cdots\cdots = 0;$$

cette équation admet une racine nulle $k = \frac{m_2}{m_1} = 0$; il y a, en effet, une des tangentes D' qui viendra coïncider avec la droite D_1.



2.° Supposons le point I sur la courbe; il y aura alors deux tangentes D' qui devront coïncider avec la tangente D_1 N.° [375] remarque; par conséquent l'équation (3) devra admettre, d'après les formules (2), deux valeurs nulles pour k ou $\frac{m_2}{m_1}$, on devra donc avoir à la fois

$$(4) \quad \begin{cases} f(U_1, V_1, W_1) = 0, \\ U f'_{U_1} + V f'_{V_1} + W f'_{W_1} = 0; \end{cases}$$

mais la droite (U, V, W) étant arbitraire, la seconde des équations (4) est une relation entre les coordonnées d'une droite quelconque passant par le point I, point de contact de la droite D_1.

Les équations (4) définissent donc le point de contact de la tangente (U_1, V_1, W_1). Théorème démontré déjà au N.° [420].

3.° Supposons que le point I soit un point de rebroussement, et que D_1 soit la tangente de rebroussement; alors, parmi les tangentes D', il y en aura trois qui devront coïncider avec la tangente D_1; l'équation (3) devra donc admettre, d'après les formules (2), trois valeurs nulles pour k ou $\frac{m_2}{m_1}$; on aura donc les équations de conditions

$$(1.°)\ f(U_1, V_1, W_1)=0,\ \ (2.°)\ M=0,\ \ (3.°)\ N=0,$$

les lettres M et N représentent les coefficients de k et k^2 dans l'équation (2).

La droite D_1 est la tangente fixe au point de rebroussement I, mais la droite $D\,(U, V, W)$ est une droite quelconque passant par le point I.

Or l'équation (2.°) représente un point qui est le point de contact de la tangente D_1, ou le point de rebroussement; et l'équation (3.°) doit être vérifiée par les coordonnées U, V, W, de toutes les droites passant par le point (2.°).

En d'autres termes, l'équation (3.°) doit représenter deux points, dont un est le point (2.°).

Pour que l'équation (3.°) représente deux points, il faut et il suffit N.° [364] que

$$(4.°)\qquad \begin{vmatrix} f''_{U_1U_1} & f''_{U_1V_1} & f''_{U_1W_1} \\ f''_{V_1U_1} & f''_{V_1V_1} & f''_{V_1W_1} \\ f''_{W_1U_1} & f''_{W_1V_1} & f''_{W_1W_1} \end{vmatrix} = 0;$$

les tangentes (U_1, V_1, W_1) de rebroussement doivent donc vérifier les équations (1.°) et (4.°).

Ces conditions sont nécessaires; on démontrera qu'elles sont suffisantes, en constatant que, eu égard aux relations (1.°) et (4.°), le point (2.°) est un des points (3.°). Cette vérification pourra se faire facilement, en prenant le point I pour un des sommets du triangle de référence, et la droite ID_1 pour un des côtés du triangle.

Donc, les coordonnées des tangentes aux points de rebroussement de la courbe

$$(5)\qquad f(U, V, W)=0,$$

doivent en même temps vérifier l'équation

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} f''_{UU} & f''_{UV} & f''_{UW} \\ f''_{VU} & f''_{VV} & f''_{VW} \\ f''_{WU} & f''_{WV} & f''_{WW} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est aussi vérifiée par les coordonnées des tangentes multiples.

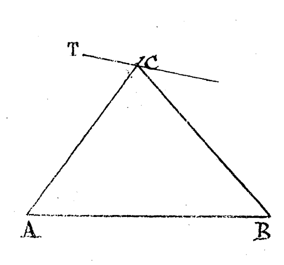
Si la courbe est de la classe n, c. à. d. si l'équation (5) est du degré n, l'équation (6) sera du degré $(n-2)$; les équations homogènes (5) et (6) auront donc $3n(n-2)$ solutions communes; donc

Une courbe de la classe n a, en général, $3n(n-2)$ points de rebroussement.

Le nombre des points de rebroussement d'une courbe, connue par son équation tangentielle, est diminué par la présence des tangentes multiples.

426. Nous démontrerons ici cette propriété remarquable des points de rebroussement dans les courbes de 3.ème classe:

Les tangentes en deux des points de rebroussement d'une courbe de 3.ème classe se coupent en un point par lequel passe une 3.ème tangente de rebroussement.



Prenons pour sommets du triangle de référence les deux points de rebroussement A et B, et les tangentes en A et B seront les deux autres côtés. Ces droites forment un triangle, car si AC, par exemple, pouvait coïncider avec AB, on pourrait mener du point B quatre tangentes à la courbe; trois touchant la courbe en B (point de rebroussement), et une touchant la courbe en A.

Ceci posé, l'équation générale des courbes de 3.ème classe est

$$(1)\qquad mU^3+n_1V^3+p_2W^3+m_1U^2V+m_2U^2W+nV^2U+n_2V^2W+pW^2U+p_1W^2V+hUVW=0.$$

Le point A est un point de rebroussement dont la tangente est AC; donc, les trois tangentes menées par le point A doivent coïncider avec AC; c. à. d. lorsqu'on fait $U=0$ dans l'équation (1), le premier membre doit être divisible par W^3; on obtient ainsi les conditions

$$n_1=0,\quad n_2=0,\quad p_1=0.$$

De même le point B est un point de rebroussement dont la tangente est BC, c. à. d. que lorsqu'on fait $V=0$ dans l'équation (1) le premier membre doit être divisible par W_3; on trouve alors

$$m=0,\ m_2=0,\ p=0.$$

De sorte que l'équation (1) se réduit à

$$p_2W^3++m_1U^2V+nV^2U+hUVW=0,$$

ou à

$$(2)\qquad W^3=UVT,$$

en posant

$$(2\,bis)\qquad T=-\frac{1}{p_2}(m_1U+nV+hW).$$

Sous la forme (2), nous voyons que le point $T=0$ est un point de rebroussement dont la tangente passe par le point $W=0$.

Donc ....

V° Passer de l'équation tangentielle à l'équation en coordonnées-point, et inversement.

427. Nous représenterons les coordonnées d'un point par x, y, z, et celles d'une droite par u, v, w; les règles et raisonnements que nous allons présenter s'appliqueront également soit aux coordonnées cartésiennes d'un point ou d'une droite, soit aux coordonnées trilatères d'un point ou d'une droite.

Étant donnée l'équation d'une courbe en coordonnées-point, trouver l'équation tangentielle de la courbe.

Soit l'équation d'une droite

$$ux+vy+wz=0,$$

$u, v, w,$ étant les paramètres de cette droite ou ses coordonnées; cherchons la condition pour qu'elle touche la courbe dont l'équation donnée est

$$f(x,y,z)=0.$$

Si x_0, y_0, z_0, sont les coordonnées du point de contact, on devra avoir, en identifiant l'équation de la droite ci-dessus avec celle de la tangente en ce point,

$$(1°)\qquad f(x_0,y_0,z_0)=0,$$

$$(2°)\qquad \frac{f'_{x_0}}{u}=\frac{f'_{y_0}}{v}=\frac{f'_{z_0}}{w}.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0, entre les trois équations homogènes (1°) et (2°), on arrivera à une relation de la forme

$$(3°)\qquad F(u,v,w)=0;$$

c'est la condition pour que la droite soit tangente. Mais l'équation (3°) est une relation entre les coordonnées u, v, w, d'une tangente quelconque à la courbe, c'est donc l'équation tangentielle de la courbe.

Les équations (1°) et (2°) entraînent comme conséquence

$$(4°)\qquad ux_0+vy_0+wz_0=0;$$

on peut, par suite, substituer au système des équations (1°) et (2°) le système suivant:

$$(1) \quad -\frac{w}{u} = \frac{x_0}{z_0} + \frac{v}{u}\cdot\frac{y_0}{z_0}$$

$$(2) \quad \frac{v}{u}\, f'_{x_0} - f'_{y_0} = 0,$$

$$(3) \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Supposons qu'on se donne le rapport $\frac{v}{u}$, et que m soit le degré de l'équation de la courbe; les équations (2) et (3) ont $m(m-1)$ solutions communes $\left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\right)$, et l'équation (1) donnera $m(m-1)$ valeurs correspondantes pour $\frac{w}{u}$. Or l'équation (3°) est une conséquence des trois équations (1), (2), (3); donc, à une valeur donnée pour $\frac{v}{u}$, correspondent, dans cette équation, $m(m-1)$ valeurs pour $\frac{w}{u}$. D'où

L'équation tangentielle (3°) est, en général, du degré $m(m-1)$.

N. B. Si l'on applique cette méthode à l'équation générale des courbes du second ordre

$$\text{(I)} \qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

on trouve, pour l'équation tangentielle

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas des coordonnées bilatères (u, v), l'équation d'une droite étant

$$u\,x + v\,y - w\,z = 0,$$

l'équation tangentielle sera

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & -w \\ u & v & -w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

428. Étant donnée l'équation tangentielle d'une courbe, trouver son équation en coordonnées-point.

Soit l'équation d'un point

$$xu + yv + zw = 0,$$

x, y, z, étant les paramètres du point, ou ses coordonnées; cherchons la condition pour que ce point soit sur la courbe dont l'équation tangentielle donnée est

$$F(u, v, w) = 0.$$

Si u_0, v_0, w_0, sont les coordonnées de la tangente en ce point, on devra avoir, en identifiant l'équation du point ci-dessus avec celle du point de contact de la tangente,

$$(1°) \qquad F(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

$$(2°) \qquad \frac{F'_{u_0}}{x} = \frac{F'_{v_0}}{y} = \frac{F'_{w_0}}{z}.$$

En éliminant u_0, v_0, w_0, entre les équations (1°) et (2°), on obtiendra une relation de la forme

$$(3°) \qquad f(x, y, z) = 0;$$

c'est la condition pour que le point soit sur la courbe. Mais l'équation (3°) est une relation entre les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque de la courbe; c'est donc l'équation en coordonnées-point de la courbe.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que

Si n est le degré de l'équation tangentielle, $n(n-1)$ sera, en général, le degré de l'équation en coordonnées-point.

N. B. L'application aux courbes de 2ème classe a été faite au N° [402].

Chapitre II
Polaires.

§ 1 Coordonnées Cartésiennes.

1°. Définition-Equations.

429. Définition.

« Soit une courbe d'ordre m, et un point fixe, P, dans son plan; par le point P menons une sécante quel-
« conque, et soient $A_1, A_2, \ldots A_m$ les m points d'intersection de la sécante avec la courbe; appelons $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$
« les distances PA_1, PA_2 ...., PA_m, et prenons sur la sécante un point M tel, que si $PM = \rho$, on ait la relation

$$\text{(I)} \qquad \frac{m_1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \cdots + \frac{1}{\rho_m}.$$

« Lorsque la sécante tourne autour du point P, le lieu des points M est une droite qu'on appelle la droite
« polaire du point P; le point P est dit le pôle de la droite.

Le point M, dont la distance ρ au point P satisfait à la relation (I), est appelé le centre harmonique, par rapport à P, du système des m points $A_1, A_2, \ldots A_m$; la polaire est donc le lieu des centres harmoniques, par rapport à P, des points d'intersection de la sécante avec la courbe.

Le théorème sur la polaire d'un point a été donné par Côtes en 1680 et reproduit par Maclaurin dans sa Geometrica Organica 1719. La distance MP ou ρ est appelée par Maclaurin moyenne harmonique; le point M a été désigné par M. Poncelet sous le nom de centre des moyennes harmoniques.

On a généralisé la notion des polaires:

« Si P est un point fixe dans le plan d'une courbe d'ordre m; si $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont les intersections avec la
« courbe d'une sécante quelconque passant par le point P; si l'on prend sur la sécante un point M, tel que

$$\text{(II)} \qquad \sum_p \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_p}\right) = 0;$$

« ρ désignant la distance PM et ρ_i la distance PA_i; le lieu des points M est appelé la polaire d'ordre p
« ou la $(m-p)^{\text{ème}}$ polaire du point P.

La somme Σ s'étend à tous les produits p à p des différences $\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_i}\right)$; de plus, les distances PA_i doivent être regardées comme positives ou négatives, suivant, qu'à partir du point P, elles sont portées dans un sens ou en sens contraire.

La relation (II) peut se mettre sous une autre forme qu'il est important d'établir dès maintenant. On a, en effet,

P A_i M

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{PM} - \frac{1}{PA_i} = \frac{PA_i - PM}{PM \cdot PA_i};$$

or, quelle que soit la position relative des trois points, on a N° [11]

$$PA_i + A_iM + MP = 0, \text{ d'où } PA_i - PM = MA_i,$$

en ayant égard aux conventions du N° [53]; d'où enfin

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_i} = \frac{MA_i}{PA_i} \cdot \frac{1}{PM}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la relation (II), le facteur $\frac{1}{PM}$ disparaît, et il reste

$$\text{(III)}\quad \sum_p \frac{MA_1}{PA_1}\cdot\frac{MA_2}{PA_2}\cdots\cdots\frac{MA_p}{PA_p}=0;$$

ou encore, en changeant les signes des facteurs :

$$\text{(III bis)}\quad \sum_p \frac{MA_1}{A_1P}\cdot\frac{MA_2}{A_2P}\cdots\cdots\frac{MA_p}{A_pP}=0.$$

La considération des polaires est très-importante dans l'étude des courbes.

130. Équation de la droite polaire.

Soit l'équation d'une courbe d'ordre m

$$(1)\qquad f(x,y)=0,\ \text{ou}\ f(x,y,z)=0,$$

et x_0, y_0, les coordonnées du point P ; les coordonnées d'un point quelconque situé sur une droite passant par le point P, seront N°. [40]

$$(2)\ \begin{cases} x = x_0+\lambda\rho, \\ y = y_0+\mu\rho, \end{cases}$$

x, y sont les coordonnées d'un point M de la droite, et ρ représente la distance PM ; les constantes λ et μ dépendent de l'orientation de la droite.

Remplaçons x et y par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$f(x_0+\lambda\rho,\ y_0+\mu\rho)=0,$$

ou, développant par la formule de Taylor :

$$(3)\qquad f(x_0,y_0)+\rho\left[\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}\right]+\rho^2[\cdots]+\cdots\cdots=0.$$

L'équation (3) détermine les distances $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ du point P aux points d'intersection de la sécante avec la courbe ; on aura, par suite,

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\cdots+\frac{1}{\rho_m}=-\frac{\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}}{f(x_0,y_0)}.$$

Il viendra, d'après la relation (I) :

$$(4)\qquad \frac{m}{\rho}+\frac{\lambda f'_{x_0}+\mu f'_{y_0}}{f(x_0,y_0)}=0.$$

Nous aurons alors l'équation du lieu en éliminant $\lambda\rho$ et $\mu\rho$ entre les équations (2) et (4), ce qui donne

$$(5)\qquad (x-x_0)\,f'_{x_0}+(y-y_0)\,f'_{y_0}+mf(x_0,y_0)=0.$$

On reconnait l'équation d'une ligne droite.

On peut donner à cette équation une forme plus symétrique en rendant homogène l'équation de la courbe ; on a alors l'identité

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=mf(x,y,z),$$

d'où

$$x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}=mf(x_0,y_0,z_0).$$

Faisons $z_0=1$, on a pour l'équation de la polaire

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+f'_{z_0}=0.$$

Nous pouvons maintenant remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, x_0 et y_0 par $\frac{x_0}{z_0}$ et $\frac{y_0}{z_0}$; donc l'équation de la droite polaire du point (x_0, y_0) est

$$(6)\qquad xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+f'_{z_0}=0;$$

on la nomme aussi la $(m-1)^{\text{ème}}$ polaire.

Remarque. On voit que cette équation a la même forme que celle de la tangente au point (x_0, y_0). Si seulement, dans le cas de la tangente, il faut joindre la relation $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

Il résulte d'ailleurs de la définition (I) de la droite polaire que si le point P est sur la courbe, la $(m-1)$ polaire ou la droite polaire de ce point est tangente à la courbe.

431. Équation des polaires de divers ordres.

Nous adopterons une autre méthode pour aborder le problème général.

Rendons homogène l'équation de la courbe, on a

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0;$$

soient x_0, y_0, les coordonnées Cartésiennes du point P; x_i, y_i, celles du point A_i intersection de la sécante avec la courbe; x, y, celles du point M pris sur la sécante, si l'on pose

$$(2) \qquad \lambda = \frac{MA_i}{A_i P},$$

les coordonnées du point A_i seront Nos (52), (53)

$$(3) \qquad x_i = \frac{\lambda x_0 + x}{\lambda + 1}, \quad y_i = \frac{\lambda y_0 + y}{\lambda + 1}.$$

Nous pouvons remplacer ces expressions par les suivantes

$$(3 bis) \qquad \frac{x_i}{z_i} = \frac{\lambda x_0 + x}{\lambda z_0 + z}, \quad \frac{y_i}{z_i} = \frac{\lambda y_0 + y}{\lambda z_0 + z},$$

à la condition de faire $z_i = 1$, $z_0 = 1$, $z = 1$, à la fin du calcul.

Le point A_i se trouvant sur la courbe, on doit avoir

$$f\left(\frac{x_i}{z_i}, \frac{y_i}{z_i}, 1\right) = 0,$$

ou

$$f(\lambda x_0 + x, \lambda y_0 + y, \lambda z_0 + z) = 0.$$

Développant cette équation par la formule de Taylor, il vient

$$(4) \qquad \lambda^m f(x_0, y_0, z_0) + \lambda^{m-1}(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0}) + \dots + \lambda\left[x_0 f'_x + y_0 f'_y + z f'_z\right] + f(x, y, z) = 0.$$

Les racines de l'équation (4) sont les valeurs des m rapports dans lesquels la courbe divise le segment MP.

Si l'on a égard à la signification géométrique de λ, équation (2), et à la définition (III bis) des polaires No (429), on voit que :

L'équation de la polaire d'ordre p ou de la $(m-p)^{\text{ème}}$ polaire s'obtiendra en égalant à zéro le coefficient de λ^{m-p} dans l'équation (4).

Comme nous ne voulons pas nous étendre sur les nombreuses propriétés des polaires, nous ne donnerons pas cette équation générale, nous nous contenterons de signaler les résultats principaux suivants.

432. 1° En égalant à zéro le coefficient de λ^{m-1}, on a

$$(5) \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0;$$

c'est l'équation correspondant à la relation

$$(5 bis) \qquad \begin{cases} \Sigma\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_i}\right) = 0, \text{ ou } \frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_m}, \\ \text{ou } \frac{MA_1}{A_1 P} + \frac{MA_2}{A_2 P} + \dots + \frac{MA_m}{A_m P} = 0; \end{cases}$$

ou l'équation de la droite polaire.

N.B. Il faudrait dans l'équation (5) faire $z_0 = 1$, $z = 1$; mais, si l'on veut revenir ensuite aux coordonnées homogènes, on retrouve précisément l'équation (5); c'est donc l'équation, en coordonnées homogènes, de la droite polaire.

Cette remarque sera applicable aux équations suivantes.

433. 2° En égalant à zéro le coefficient de λ^{m-2}, on a

$$(6) \qquad x^2 f''_{x_0 x_0} + y^2 f''_{y_0 y_0} + z^2 f''_{z_0 z_0} + 2xy f''_{x_0 y_0} + 2xz f''_{x_0 z_0} + 2yz f''_{y_0 z_0} = 0;$$

c'est la $(m-2)^{\text{ème}}$ polaire ou conique polaire; elle correspond à la relation

$$(6 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \sum_2 \left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_i}\right)=0, \quad i \gtrless k, \\ \text{ou} \\ \sum_2 \frac{MA_k}{A_k P}\cdot\frac{MA_i}{A_i P}=0, \quad i \gtrless k. \end{cases}$$

En égalant à zéro le coefficient de λ^{m-p}, on aura l'équation de la $(m-p)^{\text{ème}}$ polaire ou la polaire d'ordre p.

434. 3°. En égalant à zéro le coefficient de λ, on a

$$(7) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0;$$

c'est une courbe du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre, ou la première polaire.

Elle correspond à la relation

$$\sum_{m-1} \frac{MA_1}{A_1 P}\cdot\frac{MA_2}{A_2 P}\cdots\cdots\frac{MA_{m-1}}{A_{m-1} P}=0.$$

Cette courbe n'est autre que la courbe des contacts des tangentes menées par le P Nº (375). Ainsi

Les points de contact des tangentes menées par un point P, sont les intersections de la courbe avec la première polaire du point P.

435. 4°. Si l'on prend le produit des racines de l'équation (4), on a d'après la signification (2) de λ

$$(8) \qquad \frac{MA_1}{A_1 P}\cdot\frac{MA_2}{A_2 P}\cdots\cdots\frac{MA_m}{A_m P}=\pm\frac{f(x,y,z)}{f(x_0,y_0,z_0)},$$

+ ou − suivant que m est pair ou impair; et, par suite, on aura quel que soit m, en changeant les signes des dénominateurs:

$$(8 \text{ bis}) \qquad \frac{MA_1}{PA_1}\cdot\frac{MA_2}{PA_2}\cdots\cdots\frac{MA_m}{PA_m}=+\frac{f(x,y,z)}{f(x_0,y_0,z_0)}.$$

Remarque. Si (x,y,z) désigne un point quelconque M du plan, l'expression $f(x,y,z)$ est appelée la puissance du point (x,y,z) par rapport à la courbe

$$f(x,y,z)=0.$$

Si $P(x_0,y_0,z_0)$ est un point fixe, arbitrairement choisi, la puissance du point M aura la signification géométrique suivante (d'après la relation (8))

$$(9) \qquad f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)\cdot\frac{MA_1\cdot MA_2\cdots\cdots MA_m}{PA_1\cdot PA_2\cdots\cdots PA_m}.$$

c.à.d. que: si P est un point fixe, la puissance d'un point quelconque M sera proportionnelle au quotient du produit des distances de M aux points d'intersection de la sécante MP avec la courbe par le produit des distances du point fixe P aux mêmes points d'intersection.

II°. Courbes diamétrales.

436. On appelle Courbes diamétrales les polaires d'un point situé à l'infini sur une direction déterminée.

Nous allons déterminer la courbe diamétrale du premier ordre et celle du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Écrivons d'abord l'équation sous la forme

$$(1) \quad f(x,y,z)=\varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots\cdots+z^m\varphi_0=0.$$

Supposons que le point (x_0,y_0,z_0) s'éloigne à l'infini sur la droite

$$(2) \qquad y=ax+bz$$

ce qui entraîne les conditions

$$(3) \qquad y_0 = a x_0 ,\ z_0 = 0.$$

L'équation de la droite polaire du point (x_0, y_0, z_0) est

$$(4) \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0;$$

or

$$\begin{cases} f'_x = \varphi'_{x\,m}(x, y) + z\,\varphi'_{x\,m-1}(x, y) + \cdots\cdots; \\ f'_y = \varphi'_{y\,m}(x, y) + z\,\varphi'_{y\,m-1}(x, y) + \cdots\cdots; \\ f'_z = \varphi'_{z\,m-1}(x, y) + 2z\,\varphi_{m-2}(x, y) + \cdots\cdots \end{cases}$$

Introduisons les hypothèses (3) et remarquons que les fonctions φ_m, etc. sont homogènes; alors

$$f'_{x_0} = x_0^{m-1}\,\varphi'_{x\,m}(1, a),$$

$$f'_{y_0} = x_0^{m-1}\,\varphi'_{y\,m}(1, a),$$

$$f'_{z_0} = x_0^{m-1}\,\varphi'_{m-1}(1, a).$$

Par conséquent, d'après l'équation (4), nous aurons pour

L'équation du diamètre correspondant à la direction $y - ax = 0$:

$$(5) \qquad x\,\varphi'_{x\,m}(1, a) + y\,\varphi'_{y\,m}(1, a) + z\,\varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

437. En prenant l'équation de la première polaire, on trouve immédiatement, eu égard aux hypothèses (3) du N.° précédent:

$$(1) \qquad f'_x + a f'_y = 0.$$

c'est l'équation de la courbe diamétrale du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre correspondant à la direction $y - ax = 0$; ou, l'équation de la courbe des contacts des tangentes parallèles à cette direction.

438. Pôles d'une droite.

Soit une droite donnée

$$(1) \qquad Ax + By + Cz = 0;$$

et x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un de ses pôles. L'équation de la droite polaire de ce point sera

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0.$$

Identifions cette équation avec celle de la droite donnée, il vient

$$(2) \qquad \frac{f'_{x_0}}{A} = \frac{f'_{y_0}}{B} = \frac{f'_{z_0}}{C}.$$

Ces équations déterminent les pôles de la droite donnée; on voit que

Une droite a $(m-1)^2$ pôles.

En particulier, les pôles de la droite de l'infini, pour laquelle $A = 0, B = 0$, seront donnés par les deux équations

$$(3) \qquad f'_x = 0,\ f'_y = 0.$$

III.° Polaires dans les courbes du second ordre.

439. Équation de la polaire.

L'équation d'une courbe du second ordre étant

$$(1) \qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Dyz + Fz^2 = 0;$$

l'équation de la droite polaire d'un point (x_0, y_0, z_0) sera

$$(2) \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0;$$

et celle de la première polaire du même point sera

$$(2\ bis) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Ces deux courbes sont les mêmes, dans le cas actuel ; c'est un fait évident à priori, puisqu'on a ici $m = 2$; on le constate en développant la première équation. On trouve, en effet,

$$x(Ax_0 + By_0 + Dz_0) + y(Bx_0 + Cy_0 + Ez_0) + z(Dx_0 + Ey_0 + Fz_0) = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$x_0(Ax + By + Dz) + y_0(Bx + Cy + Ez) + z(Dx + Ey + Fz) = 0.$$

440. Trouver le pôle d'une droite donnée.

Si l'équation de la droite est

$$(3) \qquad Mx + Ny + Pz = 0,$$

et que x_0, y_0, z_0, soient les coordonnées de son pôle, l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0.$$

On conclut de là, en identifiant ces deux équations et en supprimant l'indice 0 :

$$(4) \qquad \frac{f'_x}{M} = \frac{f'_y}{N} \quad \frac{f'_z}{P}.$$

Ces équations déterminent le pôle de la droite (3) ; dans les courbes du second ordre, une droite n'a qu'un seul pôle.

Remarque I. Le pôle de la droite de l'infini est déterminé par les équations

$$(5) \qquad f'_x = 0, \quad f'_y = 0 \,;$$

nous verrons plus tard que ce point est le centre de la courbe.

Remarque II. La droite polaire d'un point à l'infini sur une direction $y - ax = 0$ est No. {437}

$$(6) \qquad f'_x + a f'_y = 0 \,;$$

c'est l'équation du diamètre conjugué de la direction donnée ; il passe par le point (5).

441. Construction de la polaire.

1° La polaire d'un point est la corde des contacts des tangentes issues de ce point. No. {434}
Cette propriété donne une construction de la polaire, lorsque le point est extérieur à la courbe.

2° Si par un point P on mène une sécante quelconque et qu'aux points d'intersection de cette sécante avec la courbe on mène les tangentes, le lieu des intersections de ces tangentes est la polaire du point P.

Soient, en effet, x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M du lieu, et x_0, y_0, celles du point fixe P. La sécante étant la corde des contacts des tangentes menées du point M, son équation sera

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0 \,;$$

or cette sécante devant passer par le point P, on aura

$$x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + z_0 f'_{z_1} = 0.$$

C'est une relation entre les coordonnées du point M, c'est donc l'équation du lieu. En supprimant les indices, on a

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0 \,;$$

ce qui est précisément l'équation de la polaire du point P.

Cette propriété permet de construire la polaire lorsque le point P est intérieur à la courbe.

3° Par un point fixe P, menons deux sécantes quelconques, et joignons diagonalement les points d'intersection de ces sécantes avec la courbe ; les points de rencontre de ces diagonales sont sur la polaire du point P.

Cette propriété peut se démontrer comme au No. {237} ; nous en verrons une seconde démonstration au No. {454}.

442. Propriétés fondamentales des polaires.

Ces propriétés, dues à de la Hire (sectiones conicae. an. 1685), résultent de la double forme (2) et (2 bis) N°. [439] qu'on peut donner à l'équation de la polaire d'un point.

1°. Lorsqu'une droite tourne autour d'un point fixe, son pôle décrit une droite fixe qui est la polaire du point.

Soit une droite mobile

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

passant par le point P (x_0, y_0, z_0), de sorte que

$$(1) \qquad \lambda x_0 + \mu y_0 + \nu z_0 = 0.$$

Le pôle de cette droite sera déterminé par les équations N°. [440]

$$(2) \qquad \frac{f'_x}{\lambda} = \frac{f'_y}{\mu} = \frac{f'_z}{\nu} .$$

On obtiendra le lieu de ces pôles en éliminant λ, μ, ν, entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0;$$

cette équation est celle de la polaire du point (x_0, y_0, z_0); donc ......

2°. Lorsqu'un point parcourt une droite fixe, sa polaire tourne autour d'un point fixe qui est le pôle de la droite.

Supposons que le point (x_1, y_1, z_1) se meuve sur la droite fixe

$$(1) \qquad Mx + Ny + Pz = 0,$$

on aura, par suite,

$$(2) \qquad Mx_1 + Ny_1 + Pz_1 = 0.$$

Or la polaire du point x_1, y_1, z_1 est

$$(3) \qquad x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0.$$

Les équations (2) et (3) déterminent la polaire d'un point quelconque satisfaisant à la condition imposée; à l'aide de la relation (2), éliminons z_1, par exemple, de l'équation (3); il vient

$$(4) \qquad x_1 \left[M f'_z - P f'_x \right] + y_1 \left[N f'_z - P f'_y \right] = 0;$$

telle est l'équation de la polaire d'un point quelconque situé sur la droite fixe (1).

On voit que, quels que soient x_1 et y_1, cette droite passe par le point fixe déterminé par les équations

$$M f'_z - P f'_x = 0, \quad N f'_z - P f'_y = 0,$$

ou

$$(5) \qquad \frac{f'_x}{M} = \frac{f'_y}{N} = \frac{f'_z}{P} ;$$

or ce sont les équations qui déterminent le pôle de la droite (1) N°. [440]; donc ....

443 Droites conjuguées.

En général, on appelle droites conjuguées deux droites telles que le pôle de l'une se trouve sur l'autre.

Soient les équations de deux droites

$$(1) \qquad mx + ny + pz = 0,$$

$$(2) \qquad m_1 x + n_1 y + p_1 z = 0.$$

Le pôle de la première sera déterminé par les équations

$$\frac{f'_x}{m} = \frac{f'_y}{n} = \frac{f'_z}{p} ;$$

équations qu'on pourra écrire, en rendant les dérivées explicites

$$Ax + By + Dz - \lambda m = 0,$$

$$Bx + Cy + Ez - \lambda n = 0,$$

$$Dx + Ey + Fz - \lambda p = 0;$$

on aura, en outre,

$$m_1 x + n_1 y + p_1 z + o = o,$$

puisque le point (x, y, z) doit se trouver sur la droite (2). Si l'on élimine x, y, z, λ, entre ces quatre dernières équations, ce qui donne

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m_1 & n_1 & p_1 & o \end{vmatrix} = o,$$

on aura ainsi la condition pour que le pôle de la droite (1) se trouve sur la droite (2).

Mais cette relation ne changeant pas lorsqu'on change m, n, p en m_1, n_1, p_1 elle exprime aussi que le pôle de la droite (2) se trouve sur la droite (1).

La relation (3) est donc la condition pour que les deux droites (1) et (2) soient conjuguées.

444. Cas particulier.

Prenons les équations des deux droites sous la forme

$$(1) \qquad y = ax + bz \; ,$$

$$(2) \qquad y = a_1 x + b_1 z \; ,$$

et supposons que l'une des droites, la 1ère par exemple, passe par le pôle de la droite de l'infini c.à.d. par le centre de la courbe No. [440].

L'équation de la première droite peut s'écrire

$$x_o f'_x + y_o f'_y + z_o f'_z = o,$$

x_o, y_o, z_o, seront les coordonnées de son pôle. Cette droite devant passer par le point

$$f'_x = o, \; f'_y = o,$$

on devra avoir $z_o = o$, et l'équation de la première droite pourra se ramener à la forme

$$(3) \qquad x_o f'_x + y_o f'_y = o,$$

son pôle ayant pour coordonnées $(x_o, y_o, z_o = o)$. Mais ce pôle doit se trouver sur la seconde droite (2), on aura donc

$$y_o = a_1 x_o \, ;$$

et, par suite, l'équation de la première droite prend la forme définitive

$$(4) \qquad f'_x + a_1 f'_y = o,$$

ou

$$(4 \text{ bis}) \qquad (Ax + By + Dz) + a_1 (Bx + Cy + Ez) = o.$$

Identifions cette équation (4 bis) avec l'équation (1) de la première droite; on aura d'abord la valeur de b en fonction de a_1 que nous n'écrirons pas; on aura, en outre, la relation suivante

$$(5) \qquad A + B\,(a + a_1) + C\,a a_1 = o.$$

Telle est la relation entre les coefficients angulaires de deux droites conjuguées, lorsqu'une de ces droites passe par le centre de la courbe.

N. B. Si dans la valeur de b en fonction de a_1, on remplace a_1 par sa valeur déduite de la relation (5), on a précisément la condition pour que la droite (1) passe par le centre de la courbe.

445. Remarque. Il est intéressant de voir comment cette relation particulière (5) se déduit de la relation générale (3) No. [443].

Les équations des deux droites étant d'abord mises sous la forme

$$(1) \qquad y = ax + bz \; ,$$

$$(2) \qquad y = a_1 x + b_1 z \; ,$$

la relation (3) est alors

$$\begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & -1 \\ D & E & F & b \\ a_1 & -1 & b_1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} aa_1(CF-E^2)+(a+a_1)(BF-ED)+(AF-D^2) \\ +(ab_1+a_1b)(BE-CD)+(b+b_1)(AE-BD)+bb_1(AC-B^2) \end{array}\right\}=0.$$

Exprimons maintenant que la droite (1) passe par le centre; pour cela identifions son équation avec une équation de la forme [N.º (440) remarque]

$$f'_x+\lambda f'_y=0,$$

et éliminons l'indéterminée λ, on obtient l'équation de condition

$$(7)\qquad a(BE-CD)+b(AC-B^2)+AE-BD=0.$$

Ceci posé, nous écrirons d'abord la relation (6) sous la forme suivante

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} aa_1(CF-E^2)+(a+a_1)(BF-ED)+AF-D^2+b\{a_1(BE-CD)+AE-BD\} \\ \qquad +b_1\{a(BE-CD)+b(AC-B^2)+AE-BD\} \end{array}\right\}=0;$$

eu égard à la relation (7), le coefficient de b_1 est nul; et, en remplaçant b par la valeur que fournit cette même relation (7), l'équation de condition (8) devient:

$$\left\{\begin{array}{l} (B^2-AC)[aa_1(CF-E^2)+(a+a_1)(BF-ED)+AF-D^2] \\ +[a_1(BE-CD)+(AE-BD)][a(BE-CD)+(AE-BD)] \end{array}\right\}=0,$$

ou enfin

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} aa_1[(B^2-AC)(CF-E^2)+(BE-CD)^2]+(a+a_1)[(B^2-AC)(BF-ED)+(AE-BD)(BE-CD)] \\ \qquad +(B^2-AC)(AF-D^2)+(AE-BD)^2 \end{array}\right\}=0.$$

Et si l'on développe chaque parenthèse, on trouve comme facteur commun le déterminant Δ, et il reste

$$(11)\qquad A+B(a+a_1)+Caa_1=0.$$

C. Q. F. D.

IV.º Polaires Réciproques.

446. « Soit une courbe directrice D et une certaine courbe C; on appelle courbe polaire de la courbe C, une « courbe C' telle, que la droite polaire d'un point quelconque M de C', prise par rapport à la courbe directrice « D, soit tangente à la courbe C.

Il ne faut pas confondre la dénomination de courbe polaire que nous employons ici avec celle qui a été employée déjà au commencement de ce paragraphe; dans le cas actuel, la courbe polaire C' est une transformation de la courbe primitive.

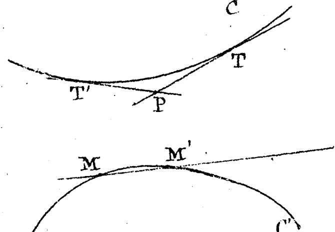
447. Nous prendrons comme courbe directrice D une courbe du second ordre.

On a alors cette propriété réciproque:

Si C' est la courbe polaire de la courbe C, la courbe C sera également la courbe polaire de C'; les courbes C et C' sont appelées polaires réciproques.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de constater que la polaire (par rapport à D) d'un point quelconque de la courbe C est tangente à la courbe C', ou que le pôle d'une tangente à la courbe C' se trouve sur C. Soit M un point de C', et M' un point voisin de M; par hypothèse, la polaire du point M est tangente à la courbe C, soit TP cette tangente; de même, la polaire du point M' est tangente à la courbe C, soit T'P cette tangente. Le point d'intersection, P, de ces deux tangentes sera le pôle de la droite MM', car les polaires des

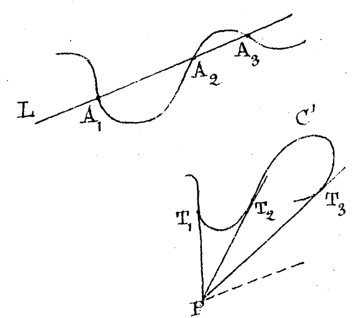
différents points d'une droite passent par le pôle de cette droite N.° [442]. Supposons maintenant que, le point M restant fixe, la droite MM' tourne autour de ce point de manière à ce que le point M' se rapproche indéfiniment de M; la sécante MM' deviendra, à la limite, la tangente en M à la courbe C. Cherchons alors la position limite du point P; le point M restant fixe, la polaire TP est également fixe; et, la droite MM' tournant autour de M, son pôle P décrit la polaire, TP, du point M. Le point P reste donc sur la ligne TP, et il se trouve, en même temps, sur la polaire T'P du point M'; or, lorsque le point M' tend à se confondre avec le point M, la tangente T'P tend à se confondre avec TP, et la position limite de leur point d'intersection, c. à d. le point P, est le point de contact de la tangente fixe TP. Donc: « la polaire d'un point quelconque, M, de la « courbe C' est tangente à la courbe C, et son point de contact est le pôle de la tangente en M à la courbe C'; ou, la « polaire d'un point quelconque, T, de la courbe C est tangente à la courbe C', et son point de contact est le pôle de « la tangente en T à la courbe C. »



Les propriétés réciproques N.° [442] des polaires dans les courbes du second ordre permettent de transformer un système en un autre de manière à ce qu'à des points du premier correspondent des droites dans le second, et inversement; le point correspondant à une droite est le pôle de la droite, et la droite correspondant à un point est la polaire du point.

448. Si m est l'ordre d'une courbe C, m sera la classe de sa polaire réciproque C'; et inversement.

En effet, m étant l'ordre de la courbe C, une droite quelconque L rencontrera cette courbe en m points $A_1, A_2, \ldots A_m$. Soit P le pôle (par rapport à la courbe D du second ordre) de la droite L; le point A_1 a pour polaire une tangente à la courbe C', et cette polaire passera par le point P.



Donc aux m points $A_1, A_2 \ldots A_m$, correspondront m tangentes à la courbe C' et passant par le point P, et m seulement; car s'il y avait plus de m tangentes à C' passant par le point P, il y aurait, sur la droite L, plus de m points appartenant à la courbe C, ce qui ne peut avoir lieu.

Mais la droite L étant arbitraire, le point P est un point quelconque du plan; donc, par un point quelconque P, on peut mener m tangentes à la courbe C' et m seulement; par conséquent, m est la classe de la courbe C'.

Réciproquement, si n est l'ordre de la courbe C', n sera la classe de la courbe C.

La démonstration est la même que celle qui précède.

449. Équation de la polaire réciproque d'une courbe du second ordre.

Soit

$$(1)\qquad (D)\qquad f(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

l'équation de la courbe directrice D; cherchons l'équation de la polaire réciproque de la courbe (C) dont l'équation est

$$(2)\qquad (C)\qquad Ax^2 + 2Bxy + 2Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point M de la polaire réciproque C', la polaire de ce point, prise par rapport à la courbe D, c. à d.

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0,$$

devra toucher la courbe (2); on aura donc N.° [377], après avoir supprimé les indices 0:

$$(3)\qquad (C')\qquad \begin{vmatrix} A & B & D & f'_x \\ B & C & E & f'_y \\ D & E & F & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe cherchée C', c'est donc l'équati

de la polaire réciproque.

On voit que la polaire réciproque d'une courbe du second ordre est aussi une courbe du second ordre; ce qui d'ailleurs résulte du théorème précédent, puisqu'une courbe du second ordre est de 2me classe et réciproquement.

450. Lorsqu'on prend pour courbe directrice le cercle

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

l'équation de la polaire réciproque a la forme simple

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & -z \\ x & y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on compare ce résultat avec celui qui a été obtenu au No. [427] équation (III), on voit que l'équation de la polaire réciproque d'une courbe du second ordre (la directrice étant un cercle de rayon un) a la même forme algébrique que l'équation tangentielle de la courbe proposée.

Cependant ces deux équations ne représentent pas la même courbe, car les variables représentent, dans le premier cas, les coordonnées d'un point; et, dans le second cas, les coordonnées d'une tangente.

L'équation (4) est l'équation en coordonnées-point de la polaire réciproque de la courbe du second ordre

$$(C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

en prenant pour courbe directrice le cercle de rayon un

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

451. Cherchons l'équation tangentielle de la polaire réciproque de la courbe (C), en supposant toujours que l'on prend pour courbe directrice le cercle réel

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 1^2 = 0.$$

Si x_0, y_0, z_0, sont les coordonnées d'un point de la courbe C, la polaire de ce point, par rapport au cercle réel (5) sera

$$xx_0 + yy_0 - 1 = 0;$$

et les coordonnées de cette droite seront No. [110] x_0 et y_0 $(u = x_0,\ v = y_0)$. La polaire réciproque est l'enveloppe de cette droite; et comme x_0 et y_0 doivent vérifier l'équation de la courbe (C), on aura donc

$$(6) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Cette démonstration est évidemment applicable à une courbe d'ordre quelconque; de là nous conclurons que:

Lorsqu'on prend pour courbe directrice le cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

l'équation tangentielle de la polaire réciproque de la courbe

$$(1°) \qquad f(x, y) = 0,$$

est

$$(2°) \qquad f(u, v) = 0;$$

c.à.d. qu'il suffit d'interpréter l'équation de la courbe dans le système des équations tangentielles, ou de regarder les variables x et y comme représentant les coordonnées d'une droite.

---

§II Coordonnées trilatères.

1° Équation des polaires.

452. Voir la définition des polaires No. [429].

Soit donnée l'équation d'une courbe quelconque en coordonnées trilatères

$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=0;$$

si X_0, Y_0, Z_0 sont les coordonnées d'un point fixe P; X, Y, Z, celles d'un point quelconque M pris sur la sécante; X_i, Y_i, Z_i, celles d'un point d'intersection A_i de la sécante PM avec la courbe; on aura N.° (90)

$$(2)\qquad \begin{cases} X_i = \dfrac{\lambda X_0 + X}{\lambda+1}, \\[2mm] Y_i = \dfrac{\lambda Y_0 + Y}{\lambda+1}, \quad \text{où } \lambda = \dfrac{\overline{MA_i}}{\overline{A_i P}}. \\[2mm] Z_i = \dfrac{\lambda Z_0 + Z}{\lambda+1}, \end{cases}$$

Les coordonnées X_i, Y_i, Z_i, devant vérifier l'équation de la courbe, on a

$$f(\lambda X_0+X,\ \lambda Y_0+Y,\ \lambda Z_0+Z)=0,$$

ou, en développant

$$(3)\qquad \lambda^m f(X_0,Y_0,Z_0)+\lambda^{m-1}\left[Xf'_{X_0}+Yf'_{Y_0}+Zf'_{Z_0}\right]+\cdots\cdots+\lambda\left[X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z\right]+f(X,Y,Z)=0;$$

cette équation détermine les valeurs des m rapports en lesquels la courbe, supposée d'ordre m, divise le segment MP.

D'après la relation (III bis) N.° (429) qui définit la polaire et la signification (2) de la constante λ,

On obtiendra l'équation de la $(m-p)^{\text{ème}}$ polaire ou de la polaire d'ordre p du point P, en égalant à zéro le coefficient de λ^{m-p} dans l'équation (3).

D'après cela, on aura:

1.° Pour l'équation de la droite polaire du point $P(X_0,Y_0,Z_0)$

$$(4)\qquad Xf'_{X_0}+Yf'_{Y_0}+Zf'_{Z_0}=0.$$

2.° Pour l'équation de la conique polaire du point $P(X_0,Y_0,Z_0)$

$$(5)\qquad X^2f''_{X_0X_0}+Y^2f''_{Y_0Y_0}+Z^2f''_{Z_0Z_0}+2XYf''_{X_0Y_0}+2XZf''_{X_0Z_0}+2YZf''_{Y_0Z_0}=0.$$

Et ainsi de suite.

3.° Pour l'équation de la 1.ère polaire ou de la courbe des contacts des tangentes menées par le point $P(X_0,Y_0,Z_0)$: N.° (405)

$$(6)\qquad X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z=0.$$

4.° On a enfin la relation remarquable:

$$(7)\qquad \frac{MA_1 \cdot MA_2 \cdots MA_m}{PA_1 \cdot PA_2 \cdots PA_m} = \frac{f(X,Y,Z)}{f(X_0,Y_0,Z_0)}$$

Remarque. La relation (5) N.° (409) que doivent vérifier les coordonnées des points d'inflexion et des points doubles exprime que la conique polaire de ce point se réduit à deux droites. Ainsi

La conique polaire d'un point d'inflexion ou d'un point double se réduit à un système de deux droites.

II.° Application aux courbes du second ordre.

453. L'équation de la droite polaire d'un point (X_0,Y_0,Z_0), relative à une courbe du second ordre,

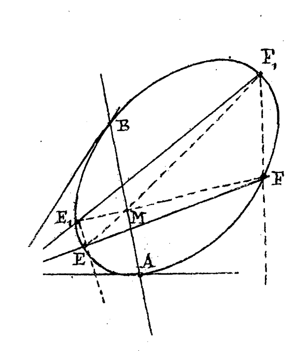
$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=0,$$

peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes

$$(2)\qquad Xf'_{X_0}+Yf'_{Y_0}+Zf'_{Z_0}=0,$$

$$(2\,bis)\qquad X_0f'_X+Y_0f'_Y+Z_0f'_Z=0.$$

454. Il est facile de démontrer, en se servant des coordonnées trilatères, la propriété (3°) énoncée au N° [441], savoir :
Si par un point fixe P on mène deux sécantes quelconques, et si l'on joint diagonalement les points d'intersection de ces sécantes avec la courbe, les points de rencontre des diagonales sont sur la polaire du point P.



Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les tangentes menées du point P et la corde de contact AB ; l'équation de la courbe du second ordre sera

$$(1) \qquad XY = Z^2;$$

résultat qu'on déduit de l'équation générale en exprimant que la courbe touche PA et PB en A et B respectivement.

Soient

$$(2) \quad Y = \lambda X, \quad (3)\ Y = \lambda_1 X,$$

les équations des deux sécantes PE et PE₁.

En résolvant les équations (1) et (2), on trouve pour les coordonnées des points E et F ;

$$E \begin{cases} Z = X\sqrt{\lambda}, \\ Y = \lambda X \end{cases}; \quad F \begin{cases} Z = -X\sqrt{\lambda}, \\ Y = \lambda X \end{cases}.$$

Pour les points E_1 et F_1, il suffira de changer λ en λ_1, ce qui donne

$$E_1 \begin{cases} Z = X\sqrt{\lambda_1}, \\ Y = \lambda_1 X \end{cases}; \quad F_1 \begin{cases} Z = -X\sqrt{\lambda_1}, \\ Y = \lambda_1 X \end{cases}.$$

L'équation de la droite EE_1 sera

$$(3) \quad (EE_1) \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & \lambda & \sqrt{\lambda} \\ 1 & \lambda_1 & \sqrt{\lambda_1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{où} \quad X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + Y - Z(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0;$$

pour la droite FF_1, il suffira de changer les signes des radicaux $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda_1}$; on a alors

$$(4) \quad (FF_1) \quad X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + Y + Z(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites EE_1 et FF_1 vérifient l'équation obtenue en retranchant membre à membre les équations (3) et (4), c. à. d.

$$2Z(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_1}) = 0, \quad \text{où} \quad Z = 0;$$

donc les deux droites EE_1, FE_1 se coupent sur la polaire $Z = 0$ du point P.

Le même résultat se constatera à l'égard des droites EF_1 et E_1F ; l'équation de la droite EF_1 se déduira de celle de la droite EE_1 en y changeant $\sqrt{\lambda_1}$ en $-\sqrt{\lambda_1}$; ce qui donne

$$(EF_1) \qquad -X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + Y - Z(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_1}) = 0,$$

$$(E_1F) \qquad -X\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + Y + Z(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

d'où l'on conclut encore, $Z = 0$, en retranchant membre à membre.

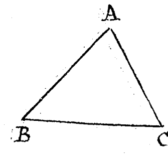
455. Triangles conjugués par rapport à une conique.

Un triangle est dit conjugué par rapport à une courbe du second ordre, lorsque, par rapport à cette courbe, un quelconque des sommets est le pôle du côté opposé.

Ces triangles présentent de nombreuses propriétés, nous en rencontrerons quelques unes.

456. Coniques conjuguées par rapport à un triangle.

Une courbe du second ordre est dite conjuguée par rapport à un triangle fixe, lorsque le triangle est conjugué par rapport à cette conique.



Cherchons l'équation générale des courbes du second ordre conjuguées par rapport à un triangle fixe, en choisissant ce triangle pour triangle de référence.

L'équation générale des courbes du second ordre rapportées au triangle ABC est

$$(1) \quad aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dYZ + 2eXZ + 2fXY = 0.$$

La polaire d'un point (X_0, Y_0, Z_0) a pour équation

$$X_0 f'_X + Y_0 f'_Y + Z_0 f'_Z = 0.$$

Le point A $(Y_0 = 0, Z_0 = 0)$ doit avoir pour polaire le côté BC, c.à.d. que l'équation

$$f'_X = 0, \quad \text{ou } aX + fY + eZ = 0,$$

doit représenter le côté BC ou $X = 0$; on aura donc

$$f = 0, \quad e = 0.$$

Le point B $(Z_0 = 0, X_0 = 0)$ doit avoir pour polaire le côté AC, c.à.d. que l'équation

$$f'_Y = 0, \quad \text{ou } fX + bY + dZ = 0,$$

doit représenter le côté AC ou $Y = 0$; on aura donc

$$f = 0, \, d = 0.$$

On voit que ces conditions étant remplies, le point C sera nécessairement le pôle du côté AC.

L'équation générale des courbes du second ordre conjuguées par rapport à un triangle fixe (pris pour triangle de référence) est donc

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0;$$

cette équation ne renferme que deux paramètres arbitraires.

457. ## Théorème sur les triangles conjugués.

Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, si l'on fait passer une conique par les trois sommets d'un des triangles et par deux des sommets de l'autre, la 2ème conique passera par le 3ème sommet de cet autre.

Prenons le premier des triangles pour triangle de référence, l'équation de la conique fixe sera

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0,$$

a, b, c étant des constantes données.

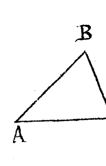
Soient $A_1 B_1 C_1$ le 2ème triangle, et (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) les coordonnées respectives de ses sommets A_1, B_1, C_1.

Cherchons d'abord les conditions pour que ce second triangle soit conjugué par rapport à la courbe (1).

La polaire du sommet A_1 est N° (453)

$$aX_1X + bY_1Y + cZ_1Z = 0;$$

il faut exprimer que les sommets B_1, C_1, sont sur cette polaire; il faudra de même exprimer que les sommets A_1 et C_1 sont sur la polaire du point B_1; ainsi que pour le sommet C_1. Toutes ces conditions seront remplies, si l'on a les trois relations



$$(2) \qquad aX_2X_3 + bY_2Y_3 + cZ_2Z_3 = 0,$$
$$(3) \qquad aX_3X_1 + bY_3Y_1 + cZ_3Z_1 = 0,$$
$$(4) \qquad aX_1X_2 + bY_1Y_2 + cZ_1Z_2 = 0.$$

Or, de l'équation générale des courbes du second ordre en coordonnées trilatères, on conclut que l'équation générale des coniques passant par les trois sommets du triangle de référence ABC est

$$\lambda YZ + \mu XZ + \nu XY = 0.$$

Écrivons que cette courbe passe par les deux sommets B_1 et C_1, on aura les conditions

$$\lambda Y_2Z_2 + \mu X_2Z_2 + \nu X_2Y_2 = 0,$$
$$\lambda Y_3Z_3 + \mu X_3Z_3 + \nu X_3Y_3 = 0.$$

En éliminant λ, μ, ν, entre ces trois dernières équations, on trouvera

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} YZ & ZX & XY \\ Y_2Z_2 & Z_2X_2 & X_2Y_2 \\ Y_3Z_3 & Z_3X_3 & X_3Y_3 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation d'une courbe du second ordre passant par les cinq points A, B, C; B_1, C_1.

Nous allons démontrer que cette courbe passe nécessairement par le sommet A_1.

Pour cela, tirons d'abord X_1, Y_1, Z_1, des équations (3) et (4), on a

$$(6)\qquad \frac{aX_1}{\underbrace{Y_2Z_3-Y_3Z_2}_{M_1}}=\frac{bY_1}{\underbrace{Z_2X_3-Z_3X_2}_{N_1}}=\frac{cZ_1}{\underbrace{X_2Y_3-X_3Y_2}_{P_1}}.$$

D'un autre côté, en développant l'équation (5), et en introduisant les lettres M_1, N_1, P_1 qui représentent les dénominateurs des fractions (6), il vient

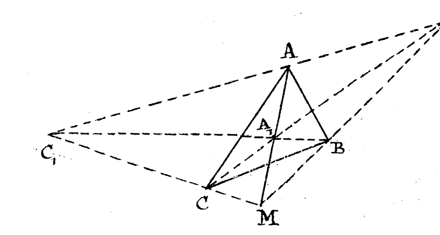
$$YZX_2X_3M_1+ZXY_2Y_3N_1+XYZ_2Z_3P_1=0.$$

Remplaçons-y maintenant X, Y, Z, par les valeurs X_1, Y_1, Z_1 que fournissent les relations (6), on a, en supprimant le facteur $M_1N_1P_1$:

$$\frac{X_2X_3}{bc}+\frac{Y_2Y_3}{ac}+\frac{Z_2Z_3}{ab}=0,\quad \text{ou}\quad aX_2X_3+bY_2Y_3+cZ_2Z_3=0;$$

ce qui est une identité d'après la relation (2). Donc .....

458. Théorème sur les coniques conjuguées.



Il y a une infinité de coniques conjuguées par rapport à un triangle et passant par un point $M(X_0, Y_0, Z_0)$ arbitrairement choisi; on n'aura, en effet, entre les indéterminées a, b, c, que la seule relation N.º [456]

$$(1)\qquad aX_0^2+bY_0^2+cZ_0^2=0.$$

Donc, eu égard à la relation (1), les coniques

$$(2)\qquad aX^2+bY^2+cZ^2=0,$$

passent toutes par les trois autres points fixes

$$A_1 \ :\quad -\frac{X}{X_0}=\frac{Y}{Y_0}=\frac{Z}{Z_0},$$

$$B_1 \ :\quad \frac{X}{X_0}=-\frac{Y}{Y_0}=\frac{Z}{Z_0},$$

$$C_1 \ :\quad \frac{X}{X_0}=\frac{Y}{Y_0}=-\frac{Z}{Z_0}.$$

Ces trois points sont faciles à construire et ont une position remarquable;

« Joignons MA, MB, MC; les conjuguées harmoniques des droites MB et MC, par rapport aux angles B et C, se coupent sur « MA, c'est le point A_1; les conjuguées harmoniques des droites MC et MA, par rapport aux angles C et A se coupent sur « MB, c'est le point B_1; de même, le point C_1 est l'intersection des conjuguées harmoniques de MA et MB, par rapport « aux angles A et B; le point C_1 se trouve sur MC.

Ces propriétés se constatent aisément:

Ainsi la droite MB a pour équation $\frac{X}{X_0}-\frac{Z}{Z_0}=0$;
sa conjuguée harmonique, par rapport à l'angle B, sera $\frac{X}{X_0}+\frac{Z}{Z_0}=0$, N.º [84].
La droite MC a pour équation $\frac{X}{X_0}-\frac{Y}{Y_0}=0$; sa conjuguée harmonique, par rapport à l'angle C, sera $\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}=0$. Or ces deux droites

$$\frac{X}{X_0}+\frac{Y}{Y_0}=0,\quad \frac{X}{X_0}+\frac{Z}{Z_0}=0,$$

se coupent sur la droite MA, dont l'équation est

$$\frac{Y}{Y_0}-\frac{Z}{Z_0}=0;$$

et les coordonnées du point d'intersection de ces trois droites sont celles du point A_1.

459. Triangles polaires réciproques.

Deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont dits polaires réciproques lorsque les sommets de l'un sont respectivement (par rapport à une conique donnée) les pôles des côtés de l'autre. Ainsi

A sera le pôle de $B_1 C_1$, — A_1 sera le pôle de BC,
B sera le pôle de $C_1 A_1$, et réciproq.t — B_1 sera le pôle de CA,
C sera le pôle de $A_1 B_1$; — C_1 sera le pôle de AB.

Nous énoncerons les deux propriétés suivantes :

« Les droites qui joignent les sommets correspondants, c.à.d. les droites AA_1, BB_1, CC_1, sont concourantes.

« Les intersections des côtés opposés, c. à. d. (BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1) sont trois points en ligne droite.

La démonstration de ces propositions se fera sans difficulté, en choisissant l'un des triangles, ABC par exemple, pour triangle de référence.

L'équation de la conique donnée sera alors de la forme

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2dYZ+2eXZ+2fXY=o.$$

Les équations des côtés BC, CA, AB, sont respectivement

$$X=o,\ Y=o,\ Z=o,$$

et celles des côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 seront :

$$B_1C_1 : \ \tfrac{1}{2} f'_X = aX+fY+eZ=o,$$
$$C_1A_1 : \ \tfrac{1}{2} f'_Y = fX+bY+dZ=o,$$
$$A_1B_1 : \ \tfrac{1}{2} f'_Z = eX+dY+cZ=o.$$

A l'aide de ces formules, on constatera immédiatement les propriétés énoncées.

§ III Équations tangentielles.

I° Définition des courbes polaires d'une droite.

460. Voici la définition que nous donnerons des courbes polaires d'une droite :

« Soit une courbe de classe n, et une droite D, fixe dans son plan ; par un point quelconque, I, de la droite D, menons « à la courbe des n tangentes IT_1, IT_2, ... IT_n ; puis, par le point I, imaginons une droite IL, telle que l'on ait

$$\text{(I)}\quad \sum_p \left(\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_1}}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_p}}\right)=o;$$

« l'enveloppe de la droite IL est la polaire de $p^{\text{ème}}$ classe ou la $(n-p)^{\text{ème}}$ polaire de la droite D.

« La somme $\sum_p$ s'étend à tous les produits p à p des différences $\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_i}}\right)$; de plus, « les angles $\widehat{DIT_i}$ doivent être regardés comme positifs ou négatifs, suivant, qu'à partir de la droite D, « ils sont parcourus dans un sens ou en sens contraire. »

D T1 T2 I L T3

On peut donner à la relation (I) une autre forme qu'il est important de considérer. On a

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_i}}=\frac{\cos\widehat{DIL}}{\sin\widehat{DIL}}-\frac{\cos\widehat{DIT_i}}{\sin\widehat{DIT_i}}=\frac{\sin\widehat{DIT_i}\cos\widehat{DIL}-\sin\widehat{DIL}\cos\widehat{DIT_i}}{\sin\widehat{DIL}\,.\,\sin\widehat{DIT_i}},$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_i}}=\frac{\sin(\widehat{DIT_i}-\widehat{DIL})}{\sin\widehat{DIL}\,.\,\sin\widehat{DIT_i}}.$$

La remarque du N.o (11) est applicable aux angles ; on a ainsi

$$\widehat{DIL}+\widehat{LIT_i}+\widehat{T_iID}=o,$$

d'où

$$\widehat{DIT_i}-\widehat{DIL}=\widehat{LIT_i};$$

d'où enfin

$$\text{(1°)}\quad \frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIL}}-\frac{1}{\operatorname{tang}\widehat{DIT_i}}=\frac{\sin\widehat{LIT_i}}{\sin\widehat{DIT_i}}\cdot\frac{1}{\sin\widehat{DIL}}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (I) le facteur $\frac{1}{\sin \widehat{DIL}}$ disparaît, et il reste

$$\text{(II)} \quad \sum_p \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{DIT_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{DIT_2}} \cdots\cdots \frac{\sin \widehat{LIT_p}}{\sin \widehat{DIT_p}} = 0;$$

ou, en changeant les signes de tous les facteurs :

$$\text{(II bis)} \quad \sum \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{T_1ID}} \cdot \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{T_2ID}} \cdots\cdots \frac{\sin \widehat{LIT_p}}{\sin \widehat{T_pID}} = 0.$$

En particulier, la polaire de 1ère classe ou le point polaire de la droite D, sera défini par la relation :

$$\text{(III)} \quad \frac{n}{\operatorname{tang} \widehat{DIL}} = \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIT_1}} + \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIT_2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{DIT_n}};$$

ou

$$\text{(III bis)} \quad \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{T_1ID}} + \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{T_2ID}} + \cdots\cdots + \frac{\sin \widehat{LIT_n}}{\sin \widehat{T_nID}} = 0.$$

II°. Coordonnées u, v.

461. Nous allons déterminer, dans le système des coordonnées u, v, les équations des polaires d'une droite.

Soit l'équation d'une courbe de $n^{\text{ème}}$ classe

$$(1) \quad f(u, v) = 0, \text{ ou } f(u, v, w) = 0.$$

Soient u_0, v_0, les coordonnées d'une droite donnée D ; u_i, v_i, celles d'une tangente menée à la courbe par un point quelconque, I, de la droite D ; u, v, celles d'une droite IL menée par le point I.

Si l'on pose (O étant l'origine des coordonnées)

$$(2) \quad \lambda = \frac{\sin \widehat{LIT_i}}{\sin \widehat{T_iID}} \cdot \frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}};$$

les coordonnées u_i, v_i, de la tangente IT_i seront N° [122]

$$(3) \quad u_i = \frac{\lambda u_0 + u}{\lambda + 1}, \quad v_i = \frac{\lambda v_0 + v}{\lambda + 1}.$$

Nous pouvons substituer à ces expressions les suivantes

$$\text{(3 bis)} \quad \frac{u_i}{w_i} = \frac{\lambda u_0 + u}{\lambda w_0 + w}, \quad \frac{v_i}{w_i} = \frac{\lambda v_0 + v}{\lambda w_0 + w},$$

à la condition de remplacer w_i, w_0, w, par 1, à la fin du calcul.

La droite IT_i touchant la courbe, on devra avoir

$$f\left(\frac{u_i}{w_i}, \frac{v_i}{w_i}, 1\right) = 0,$$

ou

$$f(\lambda u_0 + u, \lambda v_0 + v, \lambda w_0 + w) = 0;$$

ou enfin, en développant :

$$(4) \quad \lambda^n f(u_0, v_0, w_0) + \lambda^{n-1}\left(u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0}\right) + \cdots + \lambda\left(u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w\right) + f(u, v, w) = 0.$$

D'après la valeur (2) de λ, on voit que le coefficient de λ^{n-p} sera le premier membre de la relation (II), N° [460], multiplié par $\left[\frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}}\right]^p$; donc

L'équation de la polaire de $p^{\text{ème}}$ classe ou de la $(n-p)^{\text{ème}}$ polaire de la droite (u_0, v_0, w_0) s'obtiendra en égalant à zéro le coefficient de λ^{n-p} dans l'équation (4)

462. 1° En égalant à zéro le coefficient de λ^{n-1}, on a

$$(5) \quad u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0;$$

c'est l'équation du point polaire de la droite D (u_0, v_0, w_0) ; elle correspond aux relations (III) ou (III bis) N° [460].

Voir, pour le cas actuel la remarque du N° [423].

2° En égalant à zéro le coefficient de λ^{n-2}, on a

$$(6)\qquad u^2 f''_{u_0u_0} + v^2 f''_{v_0v_0} + w^2 f''_{w_0w_0} + 2uv f''_{u_0v_0} + 2uw f''_{u_0w_0} + 2vw f''_{v_0w_0} = o;$$

c'est l'équation de la polaire de 2ème classe de la droite (u_0, v_0, w_0)

Et ainsi de suite.

3° En égalant à zéro le coefficient de λ, on a

$$(7)\qquad u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = o;$$

c'est l'équation de la 1ère polaire, ou polaire de $(n-1)^{ème}$ classe ; les tangentes aux points où la droite D coupe la courbe touchent la 1ère polaire de cette droite N° [413].

4° Si l'on prend le produit des racines de l'équation (4), on a, eu égard à la signification (2) de λ :

$$(8)\qquad \frac{f(u,v,w)}{f(u_0,v_0,w_0)} = + \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{DIT_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{DIT_2}} \cdots\cdots \frac{\sin \widehat{LIT_n}}{\sin \widehat{DIT_n}} \cdot \left(\frac{\sin \widehat{OID}}{\sin \widehat{OIL}}\right)^n ;$$

I est le point de rencontre des deux droites L (u, v, w) et D (u_0, v_0, w_0) ; $T_1, T_2, \ldots T_n$, sont les tangentes menées à la courbe par le point I ; O est l'origine des coordonnées.

Cette relation (8) donne une signification géométrique de l'expression $f(u,v,w)$, et peut conduire à des théorèmes bien-variés.

463. Courbes de 2ème classe.

Si la courbe est de 2ème classe, soit son équation

$$(1)\qquad f(u,v,w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = o;$$

l'équation du point polaire de la droite (u_0, v_0, w_0) peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(2)\qquad u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = o,$$

$$(2\,bis)\qquad u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = o.$$

Les tangentes aux points où la droite (u_0, v_0, w_0) coupe la courbe (1), doivent passer par le point (2), N° [462, 3°] ; il résulte de là que le point polaire d'une droite n'est autre que le pôle de la droite, le mot pôle étant pris dans le sens défini au § I, N° [429]. Mais cette coïncidence n'a lieu que pour le cas des courbes de 2ème classe.

III° Coordonnées trilatères U, V, W.

464. Voir la définition des polaires d'une droite N° [460].

Soit donnée l'équation tangentielle d'une courbe, en coordonnées trilatères,

$$(1)\qquad f(U,V,W) = o.$$

Si U_0, V_0, W_0, sont les coordonnées d'une droite fixe (D) ; U_i, V_i, W_i, celles d'une tangente T_i menée à la courbe par un point quelconque I de la droite (D) ; U, V, W, celles d'une droite passant par le point I ; on aura N° [142]

$$(2)\qquad \begin{cases} U_i = \dfrac{\lambda U_0 + U}{\rho}, \\[2ex] V_i = \dfrac{\lambda V_0 + V}{\rho}, \qquad \text{où}\quad \lambda = \dfrac{\sin \widehat{LIT_i}}{\sin \widehat{T_iID}}. \\[2ex] W_i = \dfrac{\lambda W_0 + W}{\rho}, \end{cases}$$

Les coordonnées U_i, V_i, W_i devront vérifier l'équation de la courbe, on a, en substituant les valeurs (2) et développant :

$$(3)\qquad \lambda^n f(U_0, V_0, W_0) + \lambda^{n-1}\left(U f'_{U_0} + V f'_{V_0} + W f'_{W_0}\right) + \cdots + \lambda\left\{U_0 f'_U + V_0 f'_V + W f'_W\right\} + f(U,V,W) = o.$$

D'après la relation (II bis) N° [460], on voit que :

On obtiendrait l'équation de la polaire de $p^{ème}$ classe ou de la $(n-p)^{ème}$ polaire de la droite (U_o, V_o, W_o), en égalant à zéro le coefficient de λ^{n-p} dans l'équation (3).

D'après cela, on trouvera :

1° Pour l'équation du point polaire de la droite $D(U_o, V_o, W_o)$

$$(4) \qquad U f'_{U_o} + V f'_{V_o} + W f'_{W_o} = 0.$$

2° Pour l'équation de la polaire de 2ème classe de la droite D

$$(5) \qquad U^2 f''_{U_oU_o} + V^2 f''_{V_oV_o} + W^2 f''_{W_oW_o} + 2UV f''_{U_oV_o} + 2UW f''_{U_oW_o} + 2VW f''_{V_oW_o} = 0.$$

Et ainsi de suite.

3° Pour l'équation de la 1ère polaire, à laquelle sont tangentes les droites qui touchent la courbe aux points où elle est coupée par la droite D :

$$(6) \qquad U_o f'_U + V_o f'_V + W_o f'_W = 0.$$

4° On a enfin la relation remarquable :

$$(7) \qquad \frac{\sin \widehat{LIT_1}}{\sin \widehat{DIT_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{LIT_2}}{\sin \widehat{DIT_2}} \cdots\cdots \frac{\sin \widehat{LIT_n}}{\sin \widehat{DIT_n}} = \frac{f(U,V,W)}{f(U_o,V_o,W_o)}.$$

Remarque. La relation (6) du N° [425] que doivent vérifier les coordonnées des tangentes aux points de rebroussement et des tangentes multiples, exprime que la polaire (5) de 2ème classe se réduit à deux points. Ainsi

La polaire de 2ème classe d'une tangente de rebroussement ou d'une tangente double se réduit à un système de deux points

465. ## Courbes de 2ème classe.

L'équation du point polaire d'une droite (U_o, V_o, W_o), par rapport à une courbe de 2ème classe

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(2) \qquad U f'_{U_o} + V f'_{V_o} + W f'_{W_o} = 0,$$

$$(2\,bis) \qquad U_o f'_U + V_o f'_V + W_o f'_W = 0.$$

466. ## Construction du point polaire d'une droite.

Par un point quelconque I de la droite D donnée, menons les deux tangentes IA et IB à la courbe ; par un second point I', menons de même les deux tangentes I'A' et I'B' ; les droites, joignant les points d'intersection de IA avec I'A', et de IB avec I'B' ; ou de IA avec I'B', et de IB avec I'A', passent par un point fixe P, lequel est le point polaire de la droite D.

Prenons pour triangle de référence, le triangle formé par la droite D et les tangentes aux points où cette droite rencontre la courbe ; on déduira de l'équation générale des courbes de 2ème classe, que l'équation de la courbe satisfaisant à ces conditions est

$$(1) \qquad UV = W^2 ;$$

nous désignerons par M, N, P, les sommets $U=0$, $V=0$, $W=0$; du triangle de référence. D'après le N° (465), l'équation du point polaire de la droite MN ou $(U_o=0, V_o=0)$ sera $W=0$, ou le point P.

Soient

$$(2) \qquad V = \lambda U, \quad (3)\ V = \lambda_1 U,$$

les équations des deux points I et I', pris sur la droite MN.

En résolvant les équations (1) et (2), puis les équations (1) et (3), nous obtiendrons pour les coordonnées des tangentes :

$$IA \begin{cases} V = \lambda U, \\ W = +\sqrt{\lambda}\, U, \end{cases} \qquad IB \begin{cases} V = \lambda U, \\ W = -\sqrt{\lambda}.\, U ; \end{cases}$$

$$I'A' \begin{cases} V = \lambda_1 U, \\ W = +\sqrt{\lambda_1}.\, U ; \end{cases} \qquad I'B' \begin{cases} V = \lambda_1 U, \\ W = -\sqrt{\lambda_1}.\, U. \end{cases}$$

L'équation du point d'intersection des deux droites IA et I'A' sera

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ 1 & \lambda & \sqrt{\lambda} \\ 1 & \lambda_1 & \sqrt{\lambda_1} \end{vmatrix} = 0, \text{ où } (G)\quad U\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + V - W(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda_1}) = 0;$$

l'équation du point d'intersection des droites IB et I'B' s'obtiendra en changeant les signes de $\sqrt{\lambda}$ et $\sqrt{\lambda_1}$, on trouve ainsi

$$(5)\qquad (H)\qquad U\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1} + V + W(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda_1}) = 0.$$

Si l'on retranche membre à membre les équations (4) et (5), on aura l'équation d'un point situé sur la droite HG; or on trouve ainsi

$$W = 0;$$

la droite HG passe donc par le point P.

En changeant $\sqrt{\lambda_1}$ en $-\sqrt{\lambda_1}$ dans les équations (4) et (5), on obtiendra les équations des points H' et G', intersections respectives de IB avec I'A', et de IA avec I'B'; on voit encore que la droite H'P' passe par le point P.

Donc.....

467. Dans les courbes de 2ème classe, le point polaire No. (460) d'une droite se confond avec le pôle No. (429) de la droite.

Nous allons, comme exercice de calcul, établir cette propriété par un calcul direct appliqué à l'équation générale.

L'équation en coordonnées-point d'une courbe du second ordre étant

$$(1)\qquad f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy = 0,$$

l'équation tangentielle de cette même courbe sera No. (427)

$$(2)\qquad F(u,v,w) = \begin{vmatrix} a & f & e & u \\ f & b & d & v \\ e & d & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'une droite D, son équation sera

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0,$$

et son pôle, par rapport à la courbe (1), sera déterminé par les équations

$$(3)\qquad \frac{f'_{x_1}}{u_0} = \frac{f'_{y_1}}{v_0} = \frac{f'_{z_1}}{w_0},$$

$$(3\text{ bis})\qquad \begin{cases} ax_1 + fy_1 + ez_1 - \lambda u_0 = 0, \\ fx_1 + by_1 + dz_1 - \lambda v_0 = 0, \\ ex_1 + dy_1 + cz_1 - \lambda w_0 = 0. \end{cases}$$

En désignant par x_1, y_1, z_1, les coordonnées de ce pôle, son équation tangentielle sera

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0;$$

d'où l'on déduit en éliminant x_1, y_1, z_1, en ces quatre équations

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a & f & e & u_0 \\ f & b & d & v_0 \\ e & d & c & w_0 \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (4) est donc l'équation tangentielle du pôle de la droite D, par rapport à la courbe $f(x,y,z) = 0$.

Cherchons maintenant l'équation du point polaire de la droite $D(u_0, v_0, w_0)$ par rapport à la courbe (2).

Or on a, comme il est facile de le vérifier

$$\frac{1}{2}F'_u = -\begin{vmatrix} f & e & u \\ b & d & v \\ d & c & w \end{vmatrix},\quad \frac{1}{2}F'_v = \begin{vmatrix} a & e & u \\ f & d & v \\ e & c & w \end{vmatrix},\quad \frac{1}{2}F'_w = -\begin{vmatrix} a & f & u \\ f & b & v \\ e & d & w \end{vmatrix};$$

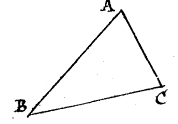
et comme l'équation du point polaire de la droite (u_o, v_o, w_o) est

$$u_o F'_u + v_o F'_v + w_o F'_w = o;$$

on retrouve évidemment l'équation (4). Donc.......

468. Équation générale des courbes de 2ème classe conjuguées par rapport à un triangle fixe. N° [456].

Prenons le triangle fixe pour triangle de référence ABC; l'équation générale des courbes de 2ème classe est



$$(1) \qquad aU^2 + bV^2 + cW^2 + 2dVW + 2eUW + 2fUV = o.$$

Le point polaire d'une droite (U_o, V_o, W_o) a pour équation

$$U_o f'_U + V_o f'_V + W_o f'_W = o.$$

La droite BC $(V_o = o, W_o = o)$ doit avoir pour point polaire le point A, c. à. d. que l'équation

$$f'_U = o, \quad ou \ aU + fV + eW = o,$$

doit représenter le point A ou $U = o$; on a donc

$$f = o, \ e = o.$$

La droite CA $(W_o = o, U_o = o)$ doit avoir pour point polaire le point B, c. à. d. que l'équation

$$f'_V = o, \quad ou \ fU + bV + dW = o,$$

doit représenter le point B ou $V = o$; on a donc

$$f = o, \ d = o.$$

On voit que ces conditions étant remplies, la droite AB a nécessairement le point C pour point polaire.

L'équation générale des courbes de 2ème classe conjuguées par rapport à un triangle fixe est, lorsqu'on prend ce triangle pour triangle de référence:

$$(1) \qquad aU^2 + bV^2 + cW^2 = o.$$

Cette équation ne renferme que deux paramètres arbitraires.

Chapitre III

Points et Tangentes multiples.

---

§I Points multiples. (Équations en coordonnées-points)

1° Définition des points multiples - Tangentes.

469. On dit qu'un point P, situé sur une courbe d'ordre m, est **un point multiple** d'ordre p, lorsqu'une sécante quelconque, passant par ce point, y rencontre la courbe en p points coïncidant avec le point P; par suite, cette sécante ne rencontre plus la courbe qu'en (m−p) points distincts du point P.

Un point multiple d'ordre p est toujours l'intersection de p branches réelles ou imaginaires de la courbe; chacune de ces branches possède une tangente proprement dite au point P, c. à. d. une droite passant par le point P et par un point infiniment voisin situé sur la branche considérée; cette tangente rencontre alors la courbe en (p+1) points coïncidant avec le point P.

Il peut arriver que cette tangente rencontre la courbe en (p+2) points, ou (p+3) points, etc... coïncidant avec le point P; on dit alors que cette tangente a, avec la courbe, un contact du 2ème, 3ème etc. ordre.

Supposons qu'on prenne, pour origine des coordonnées, un point de la courbe; l'équation de cette courbe se présentera sous la forme

$$(1) \quad f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \cdots + \varphi_{p+1}(x,y) + \varphi_p(x,y) = 0,$$

les fonctions $\varphi_i(x,y)$ sont homogènes en x et y, et du degré i; la fonction φ_p est au moins du premier degré.
Si p est supérieur à 1, l'origine des coordonnées sera un point multiple d'ordre p, et les p tangentes aux p branches de la courbe, tant réelles qu'imaginaires, passant par le point O, sont données en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le moins élevé, c. a. d. par l'équation

$$(2) \quad \varphi_p(x,y) = 0.$$

En effet, soit $y = \lambda x$ l'équation d'une sécante quelconque passant par l'origine; les x des points d'intersection de cette droite avec la courbe seront données par l'équation

$$(3) \quad x^m \varphi_m(1,\lambda) + x^{m-1}\varphi_{m-1}(1,\lambda) + \cdots + x^{p+1}\varphi_{p+1}(1,\lambda) + x^p\varphi_p(1,\lambda) = 0.$$

Or le premier membre de cette équation est divisible par x^p, quelque soit λ, c. à. d. qu'elle admet p fois la racine $x=0$ et seulement p fois; par conséquent, une sécante quelconque, passant par l'origine O, rencontre la courbe en p points confondus avec le point O, et, par suite, ne la rencontre plus qu'en $(m-p)$ points distincts du point O; le point O est donc un point multiple d'ordre p.
Pour obtenir les tangentes aux p branches de la courbe qui passent par le point O, il suffit d'exprimer que la droite

$$(4) \quad y = \lambda x$$

rencontre la courbe en $(p+1)$ points coïncidant avec le point O; ce qui exige, d'après l'équation (3), que l'on ait

$$(5) \quad \varphi_p(1,\lambda) = 0;$$

équation du degré p en λ, et dont les racines seront les coefficients angulaires des p tangentes proprement dites à la courbe au point O.
Si l'on remplace λ par $\frac{y}{x}$ dans l'équation (5), et qu'on multiplie ensuite par x^p, on obtiendra l'équation

$$(6) \quad \varphi_p(x,y) = 0;$$

c'est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes, ou l'équation des p tangentes au point multiple d'ordre p.
L'équation (5) peut admettre des valeurs infinies pour λ; les tangentes correspondant à ces valeurs infinies se retrouvent nécessairement dans l'équation (6).

Remarque. Lorsqu'une courbe passe par l'origine des coordonnées, le coefficient angulaire des tangentes en ce point s'obtient en déterminant la limite du rapport $\frac{y}{x}$, lorsqu'on fait tendre x vers zéro. En effet, le coefficient angulaire de la sécante, passant par le point O et par un point voisin (x,y), a pour valeur $\frac{y}{x}$; donc.....

II°. Discussion des points multiples.

470. Soient x_0, y_0, les coordonnées d'un point de la courbe

$$f(x,y) = 0;$$

si l'on prend ce point pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe aura la forme

$$f(x+x_0, y+y_0) = 0,$$

ou en développant:

$$(1) \quad f(x_0,y_0) + \left(x f'_{x_0} + y f'_{y_0}\right) + \frac{1}{1.2}\left[x^2 f''_{x_0x_0} + 2xy f''_{x_0y_0} + y^2 f''_{y_0y_0}\right] + \frac{1}{1.2.3}\left[\quad\right] + \cdots = 0.$$

Si l'on remarque que $f(x_0,y_0) = 0$, et si l'on pose

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = x f'_{x_0} + y f'_{y_0}, \\ 1.2.\ \varphi_2(x,y) = x^2 f''_{x_0x_0} + 2xy f''_{x_0y_0} + y^2 f''_{y_0y_0}; \\ 1.2.3.\ \varphi_3(x,y) = x^3 f'''_{x_0x_0x_0} + 3x^2y f'''_{x_0x_0y_0} + 3xy^2 f'''_{x_0y_0y_0} + y^3 f'''_{y_0y_0y_0}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

l'équation de la courbe aura cette forme définitive :

$$(3) \qquad \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \cdots = 0,$$

$\varphi_p(x,y)$ étant une fonction homogène de degré p.

471. **Points simples.**

Si l'équation (3) renferme des termes du premier degré, c. à. d. si x_0, y_0, n'annulent pas à la fois les dérivées f'_{x_0}, f'_{y_0}, l'origine ou le point (x_0, y_0) est un point simple de la courbe.

En effet, si nous cherchons l'intersection de la courbe par une droite quelconque

$$(4) \qquad y = \lambda x,$$

passant par l'origine, on a l'équation

$$(6) \qquad x\varphi_1(1,\lambda) + x^2\varphi_2(1,\lambda) + \cdots\cdots + x^m\varphi_m(1,\lambda) = 0.$$

Or cette équation n'admet qu'une seule racine nulle, tant que λ reste arbitraire ; donc une droite quelconque, passant par le point O, n'y rencontre la courbe qu'en un seul point ; le point O est un point simple.

Si l'on prend pour λ la valeur unique λ_0, qui annule la fonction $\varphi_1(1,\lambda)$, le premier membre de l'équation (6) deviendra divisible par x^2, par conséquent, la droite

$$y = \lambda_0 x$$

rencontrera la courbe en deux points coïncidant avec le point O ; cette droite sera tangente à la courbe au point O. Il n'y a qu'une seule tangente, puisque $\varphi_1(1,\lambda)$ est du 1er degré en λ ; l'équation de cette tangente sera

$$\varphi_1(x,y) = 0, \text{ ou d'après les égalités (2)}$$

$$(7) \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} = 0, \text{ avec } f(x_0, y_0) = 0$$

Remarque. Il peut arriver que la valeur λ_0 de λ annule en même temps $\varphi_2(1,\lambda)$; le premier membre de l'équation (6) sera alors divisible par x^3 ; la droite $y - \lambda_0 x = 0$ rencontre la courbe en trois points confondus avec le point O, elle a avec la courbe un contact du 2ème ordre ; le point O est un point d'inflexion.

Si la valeur λ_0 annulait $\varphi_1(1,\lambda)$, $\varphi_2(1,\lambda)$, $\varphi_3(1,\lambda)$, le premier membre de l'équation (6) serait alors divisible par x^4, et la droite $y - \lambda_0 x = 0$ rencontrerait la courbe en quatre points coïncidant avec le point O ; le point O est toujours un point simple, mais la tangente a alors avec la courbe un contact du 3ème ordre. Et ainsi de suite.

Lorsque la tangente a un contact d'ordre plus élevé que le premier, elle est alors, comme nous le verrons plus loin, une tangente multiple.

472. **Points doubles.**

Si l'équation (3) ne renferme pas de termes du 1er degré, c. à. d. si l'on a

$$(8) \qquad f(x_0, y_0) = 0, \; f'_{x_0} = 0, \; f'_{y_0} = 0 ;$$

le point (x_0, y_0) est un point double de la courbe.

L'équation de la courbe est alors

$$\varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \cdots + \varphi_m(x,y) = 0 ;$$

et si nous cherchons l'intersection de cette courbe par une droite quelconque

$$y = \lambda x,$$

passant par l'origine, on a l'équation

$$(9) \qquad x^2\varphi_2(1,\lambda) + x^3\varphi_3(1,\lambda) + \cdots + x^m\varphi_m(1,\lambda) = 0.$$

Or cette équation admet deux racines nulles, quel que soit λ ; donc toute droite passant par l'origine y rencontre la courbe en deux points coïncidents, et ne rencontre plus cette courbe qu'en $(m-2)$ points distincts de O ; le point O est un point double.

Lorsqu'on prend pour λ une des deux valeurs λ_1, λ_2, qui annulent la fonction du second degré $\varphi_2(1,\lambda)$, le premier membre de l'équation (9) est divisible par x^3 ; les deux droites

$$y = \lambda_1 x, \; y = \lambda_2 x,$$

rencontrent donc la courbe en trois points coïncidant avec le point O ; ce sont les tangentes à cette courbe au point double O.

Il n'y a que ces deux tangentes, puisque la fonction $\varphi_2(1,\lambda)$ est du second degré ; l'équation des tangentes au point double (x_0, y_0) sera

$$\varphi_2(x,y)=0,$$

ou, d'après les égalités (2):

$$(10)\qquad x^2 f''_{x_0x_0}+2xyf''_{x_0y_0}+y^2f''_{y_0y_0}=0.$$

Le contact d'une de ces tangentes, $y-\lambda_1 x=0$, par exemple, sera du second, troisième, etc.... ordre, lorsque λ_1 annulera $\varphi_3(1,\lambda)$; $\varphi_3(1,\lambda)$ et $\varphi_4(1,\lambda)$; etc...; dans ce cas, la tangente devient multiple.

Discussion des points doubles.

La nature du point double dépend de la nature des racines de l'équation (10).

1er Cas : Les deux racines de l'équation (10) sont réelles ; on a le point double ordinaire. La courbe présente deux branches qui se coupent au point considéré, et forment un nœud.

2ème Cas : Les deux racines de l'équation (10) sont imaginaires ; on a un point isolé.
Les deux tangentes sont imaginaires ; le point ne se rattache à aucune branche réelle de la courbe ; il est l'intersection de deux branches imaginaires.

3ème Cas : Les deux racines de l'équation (10) sont égales ; on a un point de rebroussement.
Les deux tangentes se confondent en une seule qu'on appelle tangente de rebroussement, laquelle est, en général, une tangente simple.

Dans cette dernière hypothèse on peut rencontrer plusieurs cas :

1° Rebroussement de 1ère espèce ; les deux branches de la courbe sont de part et d'autre de la tangente ; c'est le cas général, la tangente de rebroussement a alors, avec la courbe, un contact du 1er ordre ; c'est une tangente simple.

2° Rebroussement de 2ème espèce ; les deux branches de la courbe sont du même côté de la tangente.

3° Un point de rebroussement isolé ; le point est isolé, et néanmoins les deux tangentes sont réelles et se confondent.

4° Deux branches de courbe qui se touchent ; on donne encore à un tel point le nom de point de rebroussement.

Les variétés 2°, 3°, 4°, sont des cas particuliers du point de rebroussement ; la tangente de rebroussement a alors, avec la courbe, un contact au moins du second ordre ; c'est une tangente multiple.

La démonstration de ces propriétés sera donnée plus loin.

193. Points triples.

Si l'équation (3) ne renferme pas de termes du 1er et du 2ème degré, c.à.d. si l'on a

$$(11)\qquad f(x_0,y_0)=0;\ f'_{x_0}=0,\ f'_{y_0}=0;\ f''_{x_0x_0}=0,\ f''_{x_0y_0}=0,\ f''_{y_0y_0}=0;$$

le point (x_0, y_0) est un point triple de la courbe.

L'équation de la courbe se réduit alors à

$$\varphi_3(x,y)+\varphi_4(x,y)+\cdots+\varphi_m(x,y)=0.$$

On verra, comme précédemment, que la droite quelconque

$$y=\lambda x$$

rencontre toujours la courbe en trois points confondus avec le point O ; le point O est un point triple.

Cependant, si l'on prend pour λ une des trois valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, qui annulent la fonction du 3ème degré $\varphi_3(1,\lambda)$, l'équation

$$(12)\qquad x^3\varphi_3(1,\lambda)+x^4\varphi_4(1,\lambda)+\cdots+x^m\varphi_m(1,\lambda)=0.$$

admettra quatre racines nulles ; par suite, les trois droites

$$y=\lambda_1 x,\ y=\lambda_2 x,\ y=\lambda_3 x,$$

rencontrent la courbe en quatre points confondus avec le point O; ces trois droites seront les trois tangentes proprement dites en O; elles seront données par l'équation

$$\varphi_3(x,y)=0,$$

ou d'après les égalités (2):

$$(13)\qquad x^3 f'''_{x_0x_0x_0} + 3x^2y f'''_{x_0x_0y_0} + 3xy^2 f'''_{x_0y_0y_0} + y^3 f'''_{y_0y_0y_0} = 0.$$

La nature du point triple dépend de la nature des racines de l'équation (13).

1° Les trois racines sont réelles; on a un point triple ordinaire, la courbe présente trois branches réelles qui se coupent au point considéré.

2° Une seule racine est réelle; on a une seule branche réelle, et le point O est un point isolé sur cette branche. Toute droite, passant par le point O, ne rencontre plus la courbe qu'en $(m-3)$ autres points.

2° Deux racines sont égales; la courbe présente alors un rebroussement correspondant aux deux tangentes qui se confondent, et une branche simple passant par ce point de rebroussement. Il peut arriver que le point de rebroussement soit isolé, ou qu'il soit formé par deux branches qui se touchent.

3° Les trois racines sont égales; on a trois branches de courbes tangentes à la même droite. Il peut arriver qu'on ait un rebroussement isolé, la courbe ne présente plus alors qu'une seule branche réelle.

474\. On voit, par ce qui précède, comment on peut reconnaître et discuter un point multiple d'ordre quelconque.

De l'équation (1) on tire facilement les conséquences suivantes:

Pour qu'un point (x_0, y_0) soit:

un point simple d'une courbe, il faut 1 condition; $f(x_0,y_0)=0$;
un point double . . . . 1+2 conditions; $f(x_0,y_0)=0, f'_{x_0}=0, f'_{y_0}=0$;
un point triple . . . . 1+2+3 conditions; relations (11).
. . . .
un point multiple d'ordre p ... $1+2+3+\cdots+p=\frac{p(p+1)}{2}$ conditions.

« Ainsi: assujettir un point à être un point simple d'une courbe, revient à donner une condition, c.à.d. une « relation entre les coefficients de l'équation de la courbe.

« Assujettir un point à être un point multiple d'ordre p d'une courbe, revient à donner $\frac{p(p+1)}{2}$ conditions, c.à.d. « $\frac{p(p+1)}{2}$ relations entre les coefficients de l'équation de la courbe.

On peut donc dire que:

Un point multiple d'ordre p équivaut, en général, à $\frac{p(p+1)}{2}$ points simples.

III° Étude d'une courbe autour d'un de ses points.

475\. Nous allons faire une étude plus approfondie des affections de la courbe autour d'un point multiple. L'idée première de la méthode de discussion que nous allons présenter est due à Sturm; elle a été développée par M. Briot, et se trouve dans les premières éditions de son analytique. Nous appliquerons cette méthode à l'étude des points simples et des points doubles, en modifiant légèrement la forme; nous en déduirons plusieurs conséquences, relativement au contact de la tangente dans le cas du point de rebroussement; ces conséquences, quoique fort importantes, n'ont été signalées, jusqu'à présent, dans aucun traité d'Analytique.

Prenons pour origine le point étudié, l'équation de la courbe se présentera sous la forme:

$$(1)\qquad \varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)+\varphi_3(x,y)+\cdots+\varphi_m(x,y)=0;$$

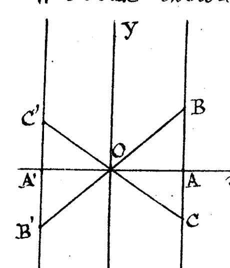
nous étudierons les intersections de la courbe par une droite

$$(2)\qquad y=tx,$$

passant par l'origine O.

476. 1er Cas : L'équation (1) renferme des termes du 1er degré.

Nous choisirons pour axe des x, par exemple, la droite représentée par l'équation



$$\varphi_1(x,y)=0;$$

l'équation de la courbe se présentera alors sous la forme

$$(3) \qquad y+\varphi_2(x,y)+\varphi_3(x,y)+\cdots\cdots=0.$$

Remplaçons, dans cette équation, y par tx, il vient après avoir divisé par x :

$$(4) \qquad f(t)=t+\overbrace{x\varphi_2(1,t)+x^2\varphi_3(1,t)+\cdots\cdots}^{X}=0;$$

d'où l'on tire, en prenant la dérivée par rapport à t et en regardant x comme fixe :

$$(5) \qquad f'(t)=1+\overbrace{x\varphi_2'(1,t)+x^2\varphi_3'(1,t)+\cdots\cdots}^{X'}$$

La lettre t représente le coefficient angulaire de la droite $y-tx=0$ par rapport à l'axe des x. Désignons par θ une valeur positive de t très voisine de zéro; aux valeurs $-\theta$ et $+\theta$ de t correspondent les positions OC et OB de la droite (2), les angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOB}$ sont très-petits.

Nous supposerons maintenant qu'on ait donné à x une valeur assez petite pour que les polynomes X et X' aient, pour cette valeur et pour toute valeur plus petite, le même signe que celui de leurs premiers termes. Nous admettons, en outre, ce qui est toujours possible, que cette valeur de x soit assez petite pour que la valeur absolue du polynome X soit moindre que la valeur absolue θ de t; et pour que la valeur absolu de X' sera moindre que l'unité. Désignons par ε la plus petite des valeurs de x satisfaisant à toutes ces conditions, et soit $OA \gtreqless \varepsilon$, $OA' \gtreqless \varepsilon$. En laissant x fixe et inférieure ou au plus égale à ε, nous allons chercher les points de la courbe qui se trouvent sur les droites AB et A'B'.

Lorsque t varie de $-\infty$ à $-\theta$, le polynome $f(t)$ ou (4) ne change pas de signe, quelle que soit la valeur positive ou négative de x, pourvu qu'elle reste comprise entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$; lorsque t varie de $+\theta$ à $+\infty$, le polynome $f(t)$ ne change pas de signe et ne peut pas s'annuler, pourvu que x reste toujours comprise entre ε et $-\varepsilon$. Donc la courbe ne peut avoir de points réels que dans les angles BOC et B'OC'; et par suite, pour une valeur déterminée de x, ne peut avoir de points que sur les segments correspondants BC et B'C'.

Or lorsque t varie de $-\theta$ à $+\theta$, x ayant une valeur fixe comprise entre les limites $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, la dérivée $f'(t)$ ou (5) est toujours positive; donc la fonction $f(t)$ ou (4) ne peut s'annuler qu'une fois dans l'intervalle de $-\theta$ à $+\theta$.

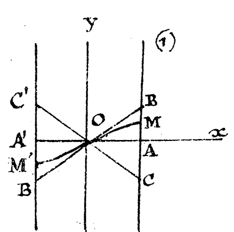
Soit, en général, $x^{p-1}\varphi_p(1,t)$ le premier des termes de l'équation (4), savoir

$$f(t)=t+x\varphi_2(1,t)+\cdots+x^{p-1}\varphi_p(1,t)+\cdots\cdots=0,$$

qui ne s'annule pas pour $t=0$, et soit $\varphi_p(1,0)<0$ par exemple;

1° Soit x positif; pour : $t=-\theta$, on a $f(-\theta)<0$,
: $t=0$, ... $f(0)<0$,
: $t=+\theta$, ... $f(\theta)>0$;

donc $f(t)$ s'annule une fois et une seule entre 0 et $+\theta$; la courbe a un point, M, et un seul entre A et B.



2° Soit x négatif; pour : $t=-\theta$, on a $f(-\theta)<0$,

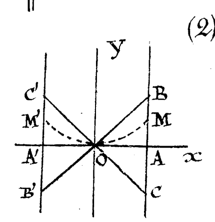
: $t=0$, on a $\begin{cases} +, \text{ si } (p-1) \text{ est impair, figure (2),} \\ -, \text{ si } (p-1) \text{ est pair, figure (1),} \end{cases}$

: $t=+\theta$, on a $f(+\theta)>0$;

donc $f(t)$ s'annule une fois et une seule, soit entre 0 et θ, soit entre 0 et $-\theta$; la courbe a un point M' et un seul ou entre A' et B', ou entre A' et C'.

Il ne faut pas oublier qu'aux valeurs de t comprises entre 0 et θ, correspondent les rayons vecteurs situés dans l'angle AOB ou dans son opposé A'OB'; et, qu'aux valeurs de t comprises entre 0 et $-\theta$, correspondent les rayons vecteurs situés dans l'angle AOC ou dans son opposé A'OC'.

Les conclusions restent les mêmes, si $\varphi_p(1,t)$ est positif pour $t=0$; mais la courbe est placée inversement par rapport à Ox.



(2) Ces conséquences ont lieu, quel que petit que soit x; donc en faisant décroître x d'une manière continue jusqu'à zéro, on obtiendra à chaque fois un seul point de part et d'autre de Oy; cette série de points formera une seule branche de courbe qui touchera la droite Ox en O. Si $(p-1)$ est impair, cette portion de courbe sera toute entière du même coté de la tangente AA' fig (2); si $(p-1)$ est pair, la branche de courbe traversera la tangente AA' fig (1).

Or, supposer que $\varphi_2(1,t)$, $\varphi_3(1,t)$, ..., $\varphi_{p-1}(1,t)$ s'annulent pour $t=0$, c'est admettre que l'équation de la courbe est de la forme

$$y + y\psi_1(x,y) + y\psi_2(x,y) + \cdots + y\psi_{p-1}(x,y) + \varphi_p(x,y) + \cdots = 0,$$

c.à.d. que la tangente $y=0$, rencontre la courbe en p points coïncidants avec le point O; ou, en d'autres termes, que la tangente a, avec la courbe, un contact du $(p-1)^{ème}$ ordre.

Donc, par un **point simple**, passe une branche réelle de la courbe et une seule; la courbe reste du même côté de la tangente aux environs du point de contact, si l'ordre de contact de la tangente est impair; la courbe traverse sa tangente, si l'ordre de contact de cette tangente est pair.

477. **2ème Cas**: L'équation (1) ne renferme pas de termes du 1er degré, et contient des termes du second degré. L'équation de la courbe est, de la forme

$$(6) \qquad \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \varphi_4(x,y) + \cdots = 0;$$

l'origine est alors un **point double**.

La discussion de ce point comprend les trois hypothèses suivantes:

1° Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont imaginaires;

2° Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont réelles et distinctes;

3° Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont coïncidentes.

1° Première hypothèse. Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont imaginaires.

Si nous posons encore

$$y = tx,$$

l'équation (6) donnera, après avoir divisé par x^2:

$$f(t) = \varphi_2(1,t) + x\varphi_3(1,t) + x^2(1,t) \cdots = 0.$$

Quel que soit t, le premier terme $\varphi_2(1,t)$ ne s'annule pas, nous pouvons le supposer positif; on peut, en outre, supposer que x soit assez petit pour que la valeur absolue de la somme de tous les termes qui suivent soit moindre que la plus petite des valeurs de $\varphi_2(1,t)$, valeur différente de zéro, finie, et positive. Donc, pour des valeurs de x suffisamment petites, la fonction $f(t)$ restera toujours positive, et, par suite, ne deviendra jamais nulle.

Il n'y a pas de points réels de la courbe dans le voisinage du point O; le point O est un **point isolé**.

478. **II° Seconde hypothèse.** Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont réelles et distinctes.

Soient t_1, t_2, les deux racines réelles de l'équation $\varphi_2(1,t)=0$; en remplaçant y par tx et divisant par x^2, l'équation (6) donnera:

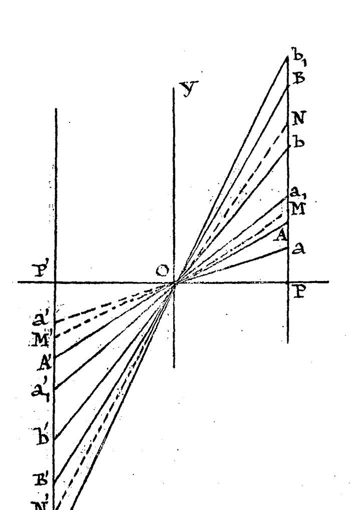
$$(7) \qquad f(t) = (t-t_1)(t-t_2) + \overbrace{x\varphi_3(1,t) + x^2\varphi_4(1,t) + \cdots}^{X} = 0.$$

on en déduira, en prenant les dérivées par rapport à t, x restant fixe:

$$(8) \qquad f'(t) = 2t - (t_1+t_2) + \overbrace{x\varphi_3'(1,t) + x^2\varphi_4'(1,t) + \cdots}^{X'};$$

$$(9) \qquad f''(t) = 2 + \overbrace{x\varphi_3''(1,t) + x^2\varphi_4''(1,t) + \cdots}^{X''}.$$

Désignons par θ une valeur très-petite et positive de t; supposons les valeurs t_1 et t_2 positives, $t_1 < t_2$; et soient OA et OB les positions de la sécante $y=tx$ pour les valeurs t_1 et t_2 de t.



Nous supposerons maintenant qu'on ait donné à x une valeur assez petite pour que les polynomes X, X', X'' aient, pour cette valeur et pour toute valeur plus petite, le même signe que celui de leurs premiers termes. Nous admettrons, en outre, ce qui est toujours possible, que cette valeur de x soit assez petite, pour que la valeur absolue des polynomes X, X', X'', soit respectivement moindre que la valeur absolue des termes qui les précèdent dans $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, lorsqu'on fait dans ces termes $t=t_1 \pm \theta$ ou $t=t_2 \pm \theta$, θ étant une valeur très-petite mais déterminée.

Désignons par ε la plus petite des valeurs de x satisfaisant à toutes ces conditions; et soit $OP = OP' = \varepsilon$. Laissant x fixe, inférieure ou au plus égale à ε, en valeur absolue, nous allons chercher les points de la courbe qui se trouvent sur les droites PA et $P'A'$.

Lorsque t varie de $-\infty$ à $(t_1-\theta)$, le polynome $f(t)$ ou (6) ne change pas de signe, pourvu que la valeur positive ou négative de x reste comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$; lorsque t varie de $(t_2+\theta)$ à $+\infty$, le polynome $f(t)$ ou (6) ne change pas de signe et ne peut s'annuler, quelles que soient les valeurs positives ou négatives de x, pourvu que leur valeur absolue ne soit pas supérieure à ε. Donc la courbe ne peut avoir de points réels que dans les angles aOb_1 et $a'Ob'_1$; nous supposerons que

$$aa',\ a_1a'_1\ ;\ bb',\ b_1b'_1\ ;$$

soient les positions de la sécante $y = tx$ correspondant respectivement aux valeurs

$$t=t_1-\theta,\ \ t_1+\theta\ ;\ t_2-\theta,\ t_2+\theta.$$

Or lorsque t varie de $(t_1-\theta)$ à $(t_2+\theta)$, la fonction $f''(t)$ ou (9) reste positive; la dérivée $f'(t)$ ou (8) change de signe et s'annule une seule fois, la valeur de x étant toujours comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$; en effet,

$$\text{pour } t=t_1-\theta, \quad f'(t) \text{ a le signe de } [-2\theta-(t_2-t_1)], \text{ quantité négative,}$$
$$\text{pour } t=t_2+\theta, \quad f'(t) \text{ a le signe de } [2\theta+(t_2-t_1)], \text{ quantité positive.}$$

La fonction $f(t)$ ou (7) ne peut donc, dans l'intervalle de $(t_1-\theta)$ à $(t_2+\theta)$ et pour une valeur déterminée de x, s'annuler que deux fois.

Supposons que $\varphi_3(1,t)$ ne s'annule pas lorsqu'on y fait $t=t_1$, ou $t=t_2$; et soit, par exemple, $\varphi_3(1,t_1)>0$, $\varphi_3(1,t_2)>0$.

1° Si l'on suppose x positif, et compris entre 0 et $+\varepsilon$;

$$\text{pour} \begin{cases} t=t_1-\theta, & \text{on a } f(t_1-\theta)>0, \\ t=t_1, & \text{on a } +, \\ t=t_1+\theta, & \text{on a } f(t_1+\theta)<0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} t=t_2-\theta, & \text{on a } f(t_2-\theta)<0, \\ t=t_2, & \text{on a } +, \\ t=t_2+\theta, & \text{on a } f(t_2+\theta)>0. \end{cases}$$

Donc la fonction $f(t)$ s'annule une fois et une seule entre $(t_1-\theta)$ et $(t_1+\theta)$; puis une fois et une seule, entre $(t_2-\theta)$ et $(t_2+\theta)$; la courbe a donc un point M situé entre a et a_1, et un autre N situé entre b et b_1; la position relative de M et N par rapport à A et B dépend des signes de $\varphi_3(1,t_1)$, $\varphi_3(1,t_2)$; ainsi, d'après les hypothèses faites, M se trouve sur le segment Aa_1; N se trouve sur le segment Bb.

2° Soit x négatif et compris entre 0 et $-\varepsilon$;

$$\text{pour} \begin{cases} t=t_1-\theta, & \text{on a } f(t_1-\theta)>0, \\ t=t_1, & \text{on a } -, \\ t=t_1+\theta, & \text{on a } f(t_1+\theta)<0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} t=t_2-\theta, & \text{on a } f(t_2-\theta)<0, \\ t=t_2, & \text{on a } -, \\ t=t_2+\theta, & \text{on a } f(t_2+\theta)>0. \end{cases}$$

La courbe a deux points et deux seulement situés sur la droite $P'B'$; et d'après les hypothèses faites, l'un, M', se trouve sur le segment $A'a'$; l'autre, N', se trouve sur le segment $B'b'_1$.

On a donc deux branches réelles, et deux seulement, se coupant en O et allant de part et d'autre de ce point ; ces deux branches touchent respectivement les droites AA' et BB'. La branche sera du même côté de sa tangente ou traversera sa tangente, suivant que le contact avec la tangente sera d'ordre impair ou pair No. [469]. Le point O est un point double ordinaire.

La dernière partie de cette proposition s'établira comme au No. [476].

479. III° Troisième hypothèse. Les deux droites $\varphi_2(x,y)=0$ sont coïncidentes.

Prenons cette droite pour axe des x, l'équation de la courbe sera de la forme

$$(10)\qquad y^2+\varphi_3(x,y)+\varphi_4(x,y)+\cdots\cdots=0;$$

La discussion de cette troisième est la plus complexe, mais aussi la plus importante. C'est le cas du point de rebroussement.

Etudions les intersections de la courbe par une droite passant par l'origine

$$(11)\qquad y=tx.$$

Remplaçons, dans l'équation (10), y par tx, il vient, après avoir divisé par x^2 :

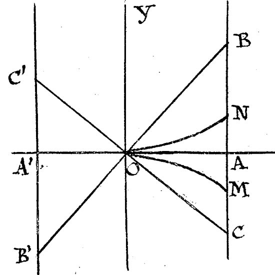
$$(12)\qquad f(t)=t^2+\overbrace{x\varphi_3(1,t)+x^2\varphi_4(1,t)+\cdots\cdots}^{X}=0;$$

d'où l'on déduit, en prenant les dérivées par rapport à t, x étant considérée comme fixe :

$$(13)\qquad f'(t)=2t+\overbrace{x\varphi_3'(1,t)+x^2\varphi_4'(1,t)+\cdots\cdots}^{X'},$$

$$(14)\qquad f''(t)=2+\overbrace{x\varphi_3''(1,t)+x^2\varphi_4''(1,t)+\cdots\cdots}^{X''}$$

Désignons par θ une valeur positive très-petite de t ; soient OC et OB les positions de la sécante $y=tx$ correspondant aux valeurs $-\theta$ et $+\theta$ de t ; les angles COA et AOB sont très petits.



Nous supposerons maintenant qu'on ait donné à x une valeur assez petite pour que les polynomes X, X', X'' aient, pour cette valeur et pour toute valeur plus petite, le même signe que celui de leurs premiers termes. Nous admettrons, en outre, que cette valeur soit assez petite pour que la valeur absolue des polynomes X, X', X''' soit moindre que la valeur absolue des termes qui les précèdent dans $f(t), f'(t), f''(t)$, lorsqu'on fait dans ces termes $t=\theta$, θ étant une valeur de t très-petite, mais déterminée. Désignons par ε la plus petite des valeurs de x satisfaisant à toutes ces conditions, et soit $OA=OA'\overline{\overline{<}}\varepsilon$. Laissant x fixe, inférieure ou au plus égale à ε, nous allons chercher les points de la courbe qui se trouvent sur les droites AB et A'B'.

Lorsque t varie de $-\infty$ à $-\theta$, et de $+\theta$ à $+\infty$, le polynome $f(t)$ ne change pas de signe et ne peut s'annuler, pourvu que les valeurs positives ou négatives de x restent comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$; donc la courbe ne peut avoir de points réels que dans les angles BOC et B'OC' ; et, par suite, pour une valeur déterminée de x, ne peut avoir de points que sur les segments BC et B'C'.

Or lorsque t varie de $-\theta$ à $+\theta$, la dérivée $f''(t)$ ou (14) reste toujours positive ; la fonction $f'(t)$ ou (13) ne peut donc s'annuler qu'une seule fois ; et c'est ce qui a lieu, car elle est négative pour $t=-\theta$, et positive pour $t=+\theta$.

Il résulte de là que la fonction $f(t)$ ou (12) ne peut s'annuler que deux fois dans l'intervalle de $-\theta$ à $+\theta$.

Pour faire complètement cette discussion, nous aurons plusieurs cas à étudier.

1° $\varphi_3(1,t)\gtrless 0$ pour $t=0$, soit par exemple $\varphi_3(1,0)<0$.

Si x est positif et compris entre 0 et $+\varepsilon$:

$$\text{pour}\begin{cases} t=-\theta, & \text{on a } f(-\theta)>0,\\ t=0, & \text{on a } f(0)<0,\\ t=+\theta & \text{on a } f(+\theta)>0;\end{cases}$$

la courbe a un point M entre A et C, et un second point N entre A et B.

Soit x négatif et compris entre 0 et $-\varepsilon$:

le polynome X, dans $f(t)$ ou (12), est toujours de même signe que son premier terme $x\varphi_3(1,t)$, lequel est ici positif ; le terme t^2 est également positif ; donc, quelque petits que soient x et t, la fonction $f(t)$ est la somme de deux quantités constamment positives ; par conséquent elle ne peut s'annuler ; la courbe ne possède donc aucun point sur le segment B'C'.

Les conséquences précédentes ayant lieu, quelque petit que soit x, il en résulte que si l'on fait décroître x d'une manière continue, on obtiendra deux branches réelles de la courbe situées, l'une dans l'angle AOC, l'autre dans l'angle AOB ; elles viennent toucher toutes deux la droite OA en O et ne se prolongent pas au delà du point O.

Nous avons supposé que $\varphi_3(1,t)$ ne s'annulait pas pour $t=0$, c. à d. que la droite $y=0$ ne rencontrait la courbe (10) qu'en deux points coïncidant avec l'origine, ou que la tangente $y=0$ avait, avec la courbe, un contact du 1er ordre. Donc

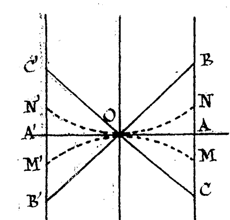
Lorsque la tangente de rebroussement a, avec la courbe, un contact du premier ordre, on a deux branches de courbe situées de part et d'autre de la tangente et s'arrêtant au point double ; on a un rebroussement de première espèce.

2°. $\varphi_3(1,t)=0$ pour $t=0$, et $\varphi_4(1,t)<0$ pour $t=0$.

Si x est positif et compris entre 0 et $+\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \text{pour} \ : \ & t=-\theta, \text{ on a } f(-\theta)>0, \\ : \ & t=0 \ , \text{ on a } f(0)<0, \\ : \ & t=+\theta, \text{ on a } f(+\theta)>0 ; \end{aligned}$$

la courbe a donc un point M sur AC, et un point N sur AB ; elle ne peut d'ailleurs posséder que deux points sur le segment BC.

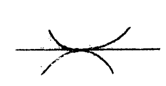


Si x est négatif et compris entre 0 et $-\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \text{pour} \ : \ & t=-\theta, \text{ on a } f(-\theta)>0, \\ : \ & t=0 \ , \text{ on a } f(0)<0, \\ : \ & t=+\theta, \text{ on a } f(+\theta)>0 ; \end{aligned}$$

la courbe a donc un point N' sur A'C', et un point M' sur A'B' ; elle ne peut d'ailleurs posséder que deux points sur le segment B'C'.

Faisant décroître x jusqu'à zéro, on conclut de là que :



La courbe présente deux branches qui se touchent au point double, lesquelles sont situées de part et d'autre de la tangente, et se prolongent de côté et d'autre du point double.

3°. $\varphi_3(1,t)=0$ pour $t=0$, et $\varphi_4(1,t)>0$, pour $t=0$.

Dans le cas actuel, les substitutions précédentes ne séparent plus les racines ; il y a doute.

Le polynome $f(t)$ ou (12) est alors

$$f(t)=t^2+(B+Ct+Dt^2)tx+\overbrace{x^2\varphi_4(1,t)+\cdots}^{Y}=0 ;$$

on peut supposer x assez petit pour que Y soit de même signe que son premier terme, c. à d. constamment positif ; mais lorsque, ayant choisi une valeur pour x, on fait varier t de $-\theta$ à $+\theta$, l'ensemble des deux premiers termes peut changer de signe, car le second terme n'est nul que pour $t=0$; on ne sait donc pas si le polynome $f(t)$ change ou non de signe.

L'impossibilité de la séparation des racines tient à ce que les deux points de la courbe peuvent être situés constamment sur le segment AB, par exemple, quelque petits que soient la quantité OA ou ε et l'angle AOB ; ou, ce qui revient au même, tient à ce qu'on ne peut pas faire passer une droite par le point O et entre les deux branches de la courbe.

Pour lever cette difficulté, posons

$$(15) \qquad t=t'x, \text{ d'où } y=t'x^2 \quad (15 \text{ bis}),$$

et soient

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_3(1,t) &= Bt+Ct^2+Dt^3, \\ \varphi_4(1,t) &= A_1+B_1t+C_1t^2+D_1t^3+E_1t^4, \\ \varphi_5(1,t) &= A_2+B_2t+C_2t^2+D_2t^3+E_2t^4+F_2t^5 ; \end{aligned}\right.$$

par hypothèse $\varphi_4(1,t)$ est positif pour $t=0$, c.à.d. que A_1 est positif.

La fonction $f(t)$ ou (12) deviendra alors, après avoir divisé par x^2:

$$\varphi(t') = t'^2 + Bt' + A_1 + x(A_2 + B_1 t' + Ct'^2) + x^2(\dots)\dots = 0,$$

ou

$$(16) \qquad \varphi(t') = t'^2 + Bt' + A_1 + \overbrace{x\psi(1,t') + x^2\psi_4(1,t')\dots\dots}^{X} = 0;$$

d'où l'on déduit, en prenant les dérivées par rapport à t':

$$(17) \qquad \varphi'(t') = 2t' + B + \overbrace{x\psi_3'(1,t') + x^2\psi_4'(1,t') + \dots\dots}^{X'};$$

$$(18) \qquad \varphi''(t') = 2 + \overbrace{x\psi_3''(1,t) + x^2\psi_4''(1,t) + \dots\dots}^{X''}.$$

Supposons encore que θ soit une valeur très-petite de t', et que ε soit une valeur de x assez petite pour que les polynomes X, X', X'' aient les signes de leurs premiers termes, et que leur valeur absolue soit moindre que celle des termes qui les précèdent dans $\varphi(t')$, $\varphi'(t')$, $\varphi''(t')$, lorsqu'on y fait $t = \pm\theta$.

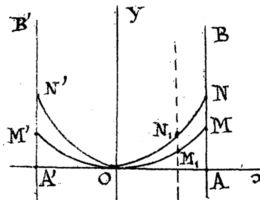
Si $B^2 - A_1 < 0$, la quantité $(t'^2 + Bt' + A_1)$ reste positive et finie quelque petits que soient x et t; la fonction $\varphi(t')$ ne peut donc pas s'annuler; le point O est un point de rebroussement isolé.

Si $B^2 - A_1 > 0$, on a alors $t'^2 + Bt' + A_1 = (t'-t_1)(t'-t_2)$; les deux valeurs t_1 et t_2 sont de même signe, puisque $A_1 > 0$; supposons $\psi_3(1,t')$ différent de zéro lorsqu'on y fait $t'=t_1$, ou $t'=t_2$; soit, par exemple, $\psi_3(1,t_1) > 0$, $\psi_3(1,t_2) > 0$; et $t_1 < t_2$.

Soit x positif et compris entre O et $+\varepsilon$:

pour $t' = t_1 - \theta$, on a $\varphi(t_1-\theta) > 0$,
$t' = t_1$, on a $+$,
$t' = t_1 + \theta$, on a $\varphi(t_1+\theta) < 0$;
$t' = t_2 - \theta$, on a $\varphi(t_2-\theta) < 0$,
$t' = t_2$, on a $+$,
$t' = t_2 + \theta$, on a $\varphi(t_2+\theta) > 0$.

On a donc deux points M et N de la courbe sur la parallèle AB à Oy et deux seulement; les y de ces points seront donnés par la relation



$$(15 \text{bis}) \qquad y = t'x^2.$$

Si nous supposons t_1 positif, il en sera de même de t_2; les valeurs de t', auxquelles correspondent ces points, différant infiniment peu de t_1 et t_2, les valeurs de y seront positives et très-petites; les deux points M et N seront au dessus de l'axe des x.

Si l'on suppose x négatif et compris en O et $-\varepsilon$, on trouvera de même deux points M' et N' situés sur la parallèle A'B' et correspondant à des valeurs de t' qui diffèrent infiniment peu de t_1 et t_2; on voit, par la relation (15 bis), que les y de ces points seront encore positives; les deux points M' et N' seront au dessus de l'axe des x.

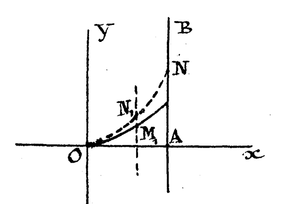
Faisons maintenant décroître x jusqu'à zéro; on a la relation (15):

$$(15) \qquad t = t'x;$$

les valeurs de t' restant finies et toujours voisines de t_1 et t_2, lorsque x tendra vers zéro, les valeurs correspondantes de t tendront également vers zéro; c.à.d. que les sécantes OM et ON, et par suite les points M et N, tendront à se confondre avec l'axe des x, lorsque x deviendra nul.

La courbe présente donc deux branches qui se touchent au point double et sont situées du même côté de la tangente Ox.

Si $(B^2 - A_1) = 0$; on a alors $t'^2 + Bt' + A_1 = (t'-t_0)^2$; supposons $\psi_3(1,t')$ différent de zéro lorsqu'on fait $t'=t_0$, et soit $\psi_3(1,t_0) < 0$.



Lorsque x est positif et compris entre 0 et $+\varepsilon$:

$$\text{pour } t' = t_0 - \theta, \text{ on a } \varphi(t_0-\theta) > 0,$$
$$t' = t_0 \quad, \text{ on a } \varphi(t_0) < 0,$$
$$t' = t_0 + \theta, \text{ on a } \varphi(t_0+\theta) > 0.$$

On a donc deux points de la courbe M et N situés sur AB, et au dessus de l'axe Ox, si t_0 est positif.

Lorsque x est négatif, le premier terme de X est toujours positif, il en sera de même de X; les premiers termes de $\varphi(t')$ forment un carré positif; donc la fonction $\varphi(t')$ ou (16) reste toujours positive lorsque t' varie de $(t_0-\theta)$ à $(t_0+\theta)$, et par suite ne peut s'annuler. La courbe n'a pas de points réels à gauche de l'axe Oy.

Si l'on fait tendre x vers zéro, les droites OM et ON se rapprocheront indéfiniment de Ox.

La courbe présente donc deux branches situées du même côté de la droite Ox, touchant cette droite Ox au point O, et s'arrêtant en ce point; on a un rebroussement de 2ème espèce.

Si $\psi_3(1,t')$ s'annulait pour $t'=t_0$, on pourrait séparer les points de la courbe si l'on avait $\psi_4(1,t_0)<0$; dans le cas où $\psi_4(1,t_0)$ serait positif on continuerait la discussion en posant

$$t' = t_0 + t''x\ ;$$

et ainsi de suite.

Dans cette dernière partie de la discussion (3°) nous avons supposé que $\varphi_3(1,t)$ s'annulait pour $t=0$, c.à.d. que la droite $y=0$ rencontrait la courbe en trois points coïncidant avec l'origine, ou que la tangente $y=0$ avait avec la courbe un contact du second ordre.

480. ## Conclusion.

De l'analyse développée dans les N.os [477], [478], [479] nous tirons les conséquences suivantes relatives aux points doubles:

I° Les deux tangentes au point double sont imaginaires; on a un point double isolé.

II° Les deux tangentes au point double sont réelles et distinctes; on a un point double ordinaire, c.à.d. deux branches réelles de courbe qui se coupent en ce point et se prolongent de part et d'autre; il peut arriver que les tangentes aient avec leurs branches respectives un contact d'ordre supérieur au premier.

III° Les deux tangentes au point double se confondent; le point porte le nom général de point de rebroussement.

1° Si la tangente de rebroussement a, avec la courbe, un contact du 1er ordre seulement, on a deux branches se terminant au point O et situées de part et d'autre de la tangente, c'est le rebroussement de 1ère espèce; c'est la seule forme qui se présente dans ce cas.

2° Si la tangente de rebroussement a, avec la courbe, un contact du second ordre, la courbe peut présenter les singularités suivantes:

(I.) Un point de rebroussement de 2ème espèce;

(II.) Deux branches qui se touchent, soit de part et d'autre de la tangente, soit du même côté de la tangente;

(III.) Un point de rebroussement isolé.

481. ## Remarque I.

L'analyse qui a été développée dans les N.os [476], [477], [478], [479], est applicable, mot pour mot, au cas où l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(1) \qquad \varphi_p(x,y) + \varphi_{p+1}(x,y) + \varphi_{p+2}(x,y) + \cdots + \varphi_m(x,y) = 0;$$

cette équation donne, en remplaçant y par tx et divisant par x^p:

$$(2) \qquad \varphi_p(1,t) + x\,\varphi_{p+1}(1,t) + x^2\varphi_{p+2}(1,t) + \cdots\cdots = 0.$$

Nous pouvons de suite énoncer les conséquences suivantes:

I°. L'équation $\varphi_p(1,t)=0$ n'a pas de racines réelles; le point O ou l'origine est un point multiple d'ordre p et isolé; par ce point ne passe aucune branche réelle de la courbe; il est l'intersection de p branches imaginaires.

II°. L'équation $\varphi_p(1,t)=0$ admet une seule racine réelle; le point O est un point multiple d'ordre p par lequel passe une seule branche réelle de la courbe qui se prolonge de part et d'autre du point; le point O peut être regardé comme composé d'un point simple et d'un point multiple isolé d'ordre $(p-1)$.

III°. L'équation $\varphi_p(1,t)=0$ admet deux racines réelles et inégales; le point O est un point multiple d'ordre p par lequel passent deux branches réelles de la courbe qui se prolongent de part et d'autre du point; etc....

IV°. L'équation $\varphi_p(1,t)=0$ admet deux racines égales; le point O est un point multiple d'ordre p, présentant un rebroussement ou les variétés de rebroussement, et un point isolé d'ordre $(p-2)$

Et ainsi de suite.

182. ## Remarque II.

Lorsqu'une branche unique de courbe s'arrête en un point, un tel point porte le nom de point d'arrêt.

Lorsque deux branches réelles, se coupant sous un angle différent de zéro, ne se prolongent pas au delà de leur point d'intersection, elles forment un point anguleux.

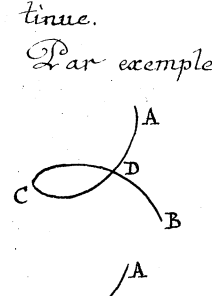
Il résulte de la discussion du numéro précédent que:

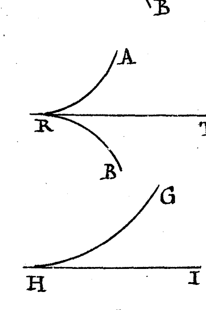
Une courbe algébrique ne peut avoir ni point d'arrêt, ni point anguleux.

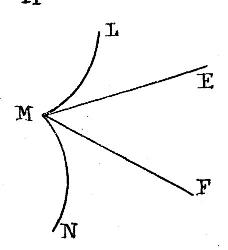
On peut encore démontrer comme il suit la proposition que nous venons d'énoncer:

Si l'on imagine une tangente roulant sur une courbe, on voit que le mouvement de la tangente sera continu, même lorsqu'elle aura à passer par un point double, ou par un point de rebroussement, ou par un point multiple quelconque; par suite, l'angle que fera cette tangente avec une droite fixe du plan variera d'une manière continue.

Par exemple, dans le cas du point double D, on pourra faire rouler la tangente sur l'arc ADC, puis sur l'arc CDB; dans le cas d'un point de rebroussement R, la tangente roulant sur l'arc AR viendra prendre la position RT, puis partira de cette position pour rouler sur l'arc RB.







Mais il n'en est plus de même lorsque la courbe présente un point d'arrêt, ou un point anguleux. Ainsi dans le cas d'un point d'arrêt H, la tangente roulant sur l'arc GH viendra prendre la position HI, et à partir de là son mouvement est indéterminé. Dans le cas d'un point anguleux M, la tangente roulant d'abord sur l'arc LM, viendra prendre la position ME, puis son mouvement restera indéterminé lorsqu'elle viendra prendre la position MF pour rouler sur l'arc MN.

Donc si l'on exprime le coefficient angulaire de la tangente, à l'aide d'une quantité qui fixe son point de contact, les coordonnées de ce point, par exemple, on aura une fonction non continue dans le cas des points d'arrêt ou anguleux; ainsi pour les coordonnées d'un point d'arrêt cette fonction présentera une indétermination effective et non apparente; pour des valeurs infiniment voisines des coordonnées d'un point anguleux, cette même fonction passerait d'une valeur finie à une autre valeur finie.

Or, dans les courbes algébriques, le coefficient angulaire est une fonction algébrique des coordonnées du point de contact; mais une telle fonction ne peut pas présenter une indétermination réelle; elle ne peut pas non plus, pour un accroissement infiniment petit de la variable, passer d'une valeur finie à une autre valeur finie, lorsqu'on a soin de conserver avec le même signe les radicaux qui peuvent s'annuler pendant l'accroissement de la variable.

Donc une courbe algébrique ne peut avoir ni point d'arrêt, ni point anguleux.

IV°. Propriétés des premières polaires dans le cas des points multiples.

183 Lorsqu'un point O est un point multiple d'ordre p pour la courbe, il sera point multiple de degré (p-1) pour la première polaire d'un point P_0 quelconque; il sera multiple d'ordre p pour la première polaire du point O lui-même.

Lorsqu'en un point multiple d'ordre p, il y a l tangentes coïncidant entre elles, il y aura (l-1) tangentes coïncidant entre elles et avec les premières pour le point multiple de la 1ère polaire d'un point quelconque:

Prenons le point multiple pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe sera de la forme

$$(1)\qquad \varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x,y)+z^{m-p}\varphi_p(x,y)=0.$$

La première polaire d'un point $P_0(x_0,y_0,z_0)$ a pour équation N° (434):

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

D'après la forme de l'équation (1), on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0\left[\varphi'_{x\,m}(x,y)+z\varphi'_{x\,m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p}\varphi'_{x\,p}(x,y)\right] \\ +\,y_0\left[\varphi'_{y\,m}(x,y)+z\varphi'_{y\,m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p}\varphi'_{y\,p}(x,y)\right] \\ +\,z_0\left[\varphi_{m-1}(x,y)+2z\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots\cdots+(m-p)z^{m-p-1}\varphi_p(x,y)\right] \end{array}\right\}=0.$$

Or l'ensemble des termes du degré le moins élevé est

$$z^{m-p}\left[x_0\varphi'_{x\,p}(x,y)+y_0\varphi'_{y\,p}(x,y)\right];$$

ces termes sont du degré (p-1); l'origine est donc un point multiple d'ordre (p-1) pour la première polaire d'un point quelconque.

Si le point P_0 est le point multiple lui-même, on a $x_0=0$, $y_0=0$, et l'équation de la première polaire est

$$f'_z=\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots\cdots+(m-p)z^{m-p-1}\varphi_p(x,y)=0;$$

c.à.d. que le point O est un point multiple d'ordre p pour la 1ère polaire de ce point.

y
O x

Supposons, en second lieu, que l tangentes du point multiple O soient coïncidentes; prenons cette direction pour axe des x, l'équation de la courbe aura la forme N° (469)

$$(3)\qquad \varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p}y^l\varphi(x,y)=0,$$

la fonction $\varphi(x,y)$ étant du degré (p-l).

La première polaire d'un point quelconque (x_0,y_0,z_0) sera

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0\left[\varphi'_{x\,m}(x,y)+z\varphi'_{x\,m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p}y^l\varphi'_x(x,y)\right] \\ +\,y_0\left[\varphi'_{y\,m}(x,y)+z\varphi'_{y\,m-1}(x,y)+\cdots\cdots+z^{m-p}\left\{y^l\varphi'_y(x,y)+ly^{l-1}\varphi(x,y)\right\}\right] \\ +\,z_0\left[\varphi_{m-1}(x,y)+2z\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots\cdots+(m-p)z^{m-p-1}y^l\varphi(x,y)\right] \end{array}\right\}=0.$$

L'ensemble des termes du degré le moins élevé est

$$z^{m-p}\left[x_0 y\varphi'_x(x,y)+y_0 y\varphi'_y(x,y)+ly_0\varphi(x,y)\right]y^{l-1};$$

cette expression est du degré (p-1), et admet le facteur y^{l-1}; c.à.d. que le point O est multiple d'ordre (p-1) pour la première polaire d'un point quelconque; et que (l-1) tangentes de ce point multiple coïncident avec la tangente correspondante du point multiple d'ordre p de la courbe.

En particulier:

Lorsqu'un point est un point double d'une courbe, la 1ère polaire d'un point quelconque passera par ce point double; il sera un point simple pour cette première polaire.

Lorsqu'une courbe a un point de rebroussement, la première polaire d'un point quelconque passe par ce point de rebroussement, et touche la tangente de rebroussement.

N. B. Nous nous contenterons d'énoncer la proposition suivante:

La polaire d'ordre p d'un point multiple d'ordre p est le système des p tangentes en ce point multiple.

La démonstration est facile, si l'on prend le point multiple pour origine.

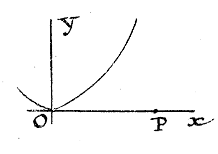
484. Lorsqu'une tangente a, avec la courbe un contact d'ordre $(r-1)$, cette tangente est multiple d'ordre $(r-1)$.

Supposons, par exemple, que le point de contact soit un point simple, et prenons la tangente pour axe des x; l'équation de la courbe sera, d'après les hypothèses admises

$$(1)\qquad f(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots+z^{m-r}\varphi_r(x,y)+z^{m-r+1}y\varphi_{r-2}(x,y)+z^{m-r+2}y\varphi_{r-3}(x,y)\\ +\cdots\cdots+\cdots+z^{m-2}y\varphi_1(x,y)+z^{m-1}y\end{array}\right\}=0.$$

Pour reconnaître le degré de multiplicité de la tangente Ox, il faut chercher de combien est diminué le nombre des tangentes qu'on peut mener à la courbe, lorsqu'on prend un point quelconque P sur la droite Ox. Or les points de contact des tangentes menées d'un point P à une courbe, sont les intersections de cette courbe avec la première polaire du point P N° (434).

Les coordonnées d'un point quelconque P pris sur Ox, sont $(x_0, 0, z_0)$; et l'équation de sa première polaire sera



$$x_0 f'_x + z_0 f'_z = 0,$$

ou.

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l}x_0\left[{}_x\varphi'_m(x,y)+\cdots+z^{m-r}{}_x\varphi'_r(x,y)+z^{m-r+1}y\,{}_x\varphi'_{r-2}(x,y)+\cdots+z^{m-2}y\,{}_x\varphi'_1(x,y)\right]\\ +z_0\left[\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots+(m-r)z^{m-r+1}\varphi_r(x,y)+(m-r+1)z^{m-r}y\,\varphi_{r-2}(x,y)+\cdots+(m-1)z^{m-2}y\right]\end{array}\right\}=0.$$

Le point O est un point simple pour la courbe (2); la tangente est encore la droite $y=0$. La droite $y=0$ rencontre la courbe (1) en r points coïncidant avec le point O; elle rencontre la courbe (2) en $(r-1)$ points coïncidant avec ce même point O; les courbes (1) et (2) ont donc $(r-1)$ points communs et coïncidant avec O; par suite, si n est, dans le cas général, le nombre des intersections de la courbe et d'une première polaire quelconque, les courbes (1) et (2) n'auront plus que $[n-(r-1)]$ points communs et distincts du point O. Par conséquent, d'un point quelconque de la droite Ox, on ne peut mener à la courbe que $[n-r-1]$ tangentes distinctes de la droite Ox; donc N° (381), la droite Ox est une tangente multiple d'ordre $(r-1)$.

La même démonstration s'appliquera au cas d'un point multiple; donc

Lorsqu'une des tangentes en un point multiple a, avec la courbe un contact proprement dit de l'ordre $(r-1)$, cette tangente est multiple d'ordre $(r-1)$.

485. Une tangente, en un point simple ou multiple, est toujours une tangente simple, lorsque l'ordre de son contact proprement dit n'est pas supérieur au premier.

Prenons le point de contact pour origine et la tangente pour axe des x, l'équation de la courbe sera, par exemple,

$$(1)\qquad \varphi_m(x,y)+\cdots+z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x,y)+z^{m-p}y\,\varphi(x,y)=0,$$

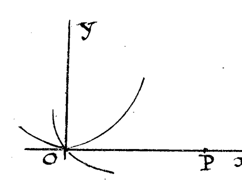
la fonction $\varphi_{p+1}(x,y)$ ne s'annulant pas pour $y=0$.

L'origine étant un point multiple d'ordre p, le nombre des tangentes qu'on peut mener d'un point quelconque est diminué $p(p-1)$ unités N° (487).

Soit P un point quelconque de la droite Ox, la 1ère polaire de ce point sera

$$x_0 f'_x + z_0 f'_z = 0,$$

ou, en développant:



$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l}x_0\left[{}_x\varphi'_m(x,y)+\cdots+z^{m-p-1}{}_x\varphi'_{p+1}(x,y)+z^{m-p}y\varphi'_x(x,y)\right]\\ +\ z_0\left[\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots+(m-p)\,z^{m-p-1}\,y\,\varphi(x,y)\right]\end{array}\right\}=0.$$

L'ensemble des termes du degré le moins élevé dans la 1ère polaire est

$$z^{m-p}x_0 y\varphi'_x(x,y);$$

l'origine est un point multiple d'ordre $(p-1)$ pour la 1ère polaire, et la droite $y=0$ est une tangente simple; la courbe et cette première polaire ont donc $[p(p-1)+1]$ points communs coïncidant avec l'origine et pas plus; donc du point P quelconque pris sur la tangente on ne peut mener que $[m(m-1)-p(p-1)-1]$ tangentes distinctes de Ox.

Or si n est la classe de la courbe, on a N° (487)

$$n = m(m-1)-p(p-1);$$

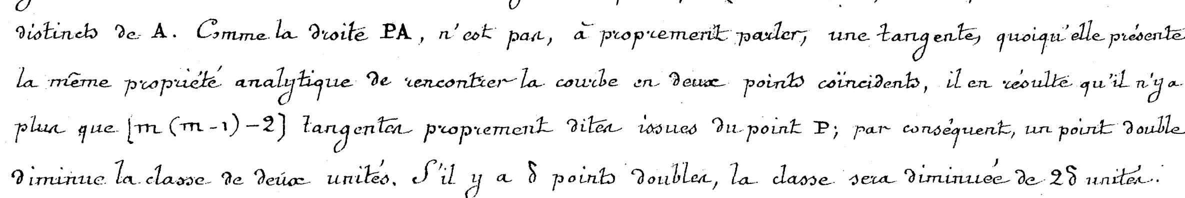
donc d'un point quelconque de Ox, on peut mener $(n-1)$ tangentes distinctes de Ox ; cette droite est, par suite, une tangente **simple**.

V: Influence des points multiples sur la classe de la courbe.

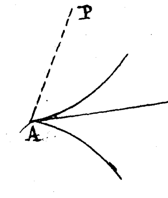
486. **Influence des points doubles.**

La classe d'une courbe d'ordre m est, en général, $m(m-1)$ N° [375].

Mais si la courbe possède un point double A ; la première polaire d'un point quelconque P passe par ce point N° [483] ; cette première polaire y rencontre la courbe en deux points, il n'y a donc plus que $[m(m-1)-2]$ autres points d'intersection distincts de A. Comme la droite PA, n'est pas, à proprement parler, une tangente, quoiqu'elle présente la même propriété analytique de rencontrer la courbe en deux points coïncidents, il en résulte qu'il n'y a plus que $[m(m-1)-2]$ tangentes proprement dites issues du point P ; par conséquent, un point double diminue la classe de deux unités. S'il y a δ points doubles, la classe sera diminuée de 2δ unités.



Supposons maintenant que la courbe possède un point de rebroussement A. La 1ère polaire d'un point quelconque P passe par le point de rebroussement et touche la tangente de rebroussement N° [483] ; la courbe et la 1ère polaire ont trois points communs coïncidant avec le point A ; par suite, la 1ère polaire ne rencontre plus la courbe qu'en $[m(m-1)-3]$ points distincts du point A. Or, comme la droite PA n'est pas une tangente proprement dite, il n'y a donc effectivement que $[m(m-1)-3]$ tangentes issues du point P ; par conséquent, un point de rebroussement diminue la classe de trois unités. S'il y a $\varkappa$ points de rebroussement, la classe sera diminuée de $3\varkappa$ unités.



Donc, si une courbe d'ordre m possède δ points doubles et $\varkappa$ points de rebroussement, la classe n de cette courbe sera définie par l'égalité

$$\text{(I)} \qquad n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa .$$

487. **Influence des points multiples.**

Un point multiple d'ordre p est N° [483] un point multiple d'ordre $(p-1)$ pour la première polaire d'un point quelconque ; par conséquent, la courbe et la première polaire ont en commun $p(p-1)$ points coïncidant avec le point multiple ; il ne restera donc plus $[m(m-1)-p(p-1)]$ autres points distincts du point multiple. Ainsi

Un point multiple d'ordre p diminue la classe de la courbe de

$$p(p-1) \text{ unités.}$$

Lorsque l tangentes d'un point multiple coïncident, il y en aura $(l-1)$ d'entre elles qui seront des tangentes coïncidentes pour la première d'un point quelconque N° [483] ; alors la courbe et la première polaire ont en commun $[p(p-1)+(l-1)]$ points coïncidant avec le point multiple. Par suite

Lorsque l des tangentes d'un point multiple d'ordre p viennent à coïncider, la classe diminue de

$$[p(p-1)+(l-1)] \text{ unités.}$$

488. **Remarque.**

Un point double ordinaire diminue la classe de deux unités et de deux seulement. Un point de rebroussement diminue, en général, la classe de trois unités ; mais il peut arriver que la diminution soit plus considérable, si le contact de la tangente de rebroussement, avec la courbe et la première polaire d'un point quelconque, est d'un ordre supérieur au premier. (Voir N^{elles} annales, année 1867, page 113).

Cette observation s'étend aux points multiples d'ordre supérieur.

VI.° Influence des points multiples sur le nombre des points d'inflexion.

489. Nous avons vu N.° [385] que les points d'inflexion de la courbe

$$(1) \quad f(x,y,z)=0,$$

sont les intersections de cette courbe avec la courbe H:

$$(2) \quad (H) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

Or

Un point double de la courbe $f=0$ est un point double de la courbe $H=0$; et, en outre, ces deux courbes ont en ce point les mêmes tangentes.

Lorsque la courbe $f=0$ a un point de rebroussement, ce point sera un point triple pour la courbe $H=0$, et deux des tangentes de ce point triple coïncideront avec la tangente de rebroussement.

En général, un point multiple d'ordre p sur la courbe $f=0$, sera un point multiple d'ordre $(3p-4)$ pour la courbe $H=0$; et les p tangentes à la courbe $f=0$ seront tangentes au même point à la courbe $H=0$.

Nous ne ferons qu'énoncer ces propositions, on les démontrera facilement en prenant le point multiple pour origine des coordonnées.

Lorsque deux courbes ont un point double commun et les mêmes tangentes, ces deux courbes ont six points communs coïncidant avec le point double; donc un point double diminue le nombre des points d'inflexion de six unités.

Lorsque deux courbes ont un point commun, qui est un point double sur l'une et un triple sur l'autre; ces deux courbes ont, en ce point, six points communs; mais si, en outre, les deux tangentes au point double sont aussi tangentes au point triple, les courbes auront, en plus, deux points consécutifs communs. Donc un point de rebroussement diminue le nombre des points d'inflexion de huit unités.

Une courbe d'ordre m a, en général, $3m(m-2)$ points d'inflexion N.° [385].

Donc si une courbe d'ordre m possède δ points doubles et $\varkappa$ points de rebroussement, le nombre ι de ses points d'inflexion sera défini par l'égalité

$$(II) \quad \iota = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa.$$

Un point multiple d'ordre p diminue, en général, le nombre des points d'inflexion de

$$p(3p-4)+p \text{ ou } 3p(p-1) \text{ unités.}$$

Cette proposition résulte immédiatement du théorème que nous avons énoncé au commencement de ce numéro.

§ II Tangentes multiples.

I.° Définition.

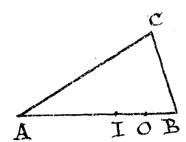
490. Si n est la classe d'une courbe, une tangente T sera multiple d'ordre p, lorsque d'un point quelconque de cette ligne on ne pourra mener à la courbe que $(n-p)$ tangentes distinctes de la tangente T.

Pour étudier les tangentes multiples, il y aura avantage à supposer de suite l'équation tangentielle de la courbe donnée en coordonnées trilatères. Ainsi, nous admettrons que u, v, w, représentent ici les coordonnées trilatères d'une droite, et que l'équation de la courbe

$$f(u,v,w)=0,$$

est du $n^{\text{ème}}$ degré, c.à.d. que la courbe est de $n^{\text{ème}}$ classe.

Supposons qu'on prenne pour droite AB du triangle de référence une des tangentes à la courbe, l'équation de la courbe se présentera sous la forme



(1) $\varphi_n(u,v) + w\,\varphi_{n-1}(u,v) + \cdots\cdots + w^{n-p-1}\varphi_{p+1}(u,v) + w^{n-p}\varphi_p(u,v) = 0,$

les fonctions φ_i sont homogènes en u et v et du degré i ; la fonction $\varphi_p(u,v)$ est au moins du premier degré.

Si p est supérieur à 1, la droite AB sera une tangente multiple d'ordre p, et les p points de contact de cette tangente sont donnés par l'équation obtenue en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le moins élevé, c. à. d. par l'équation

$$(2) \qquad \varphi_p(u,v) = 0.$$

En effet, soit $v = \lambda u$ l'équation d'un point quelconque situé sur la droite AB, les coordonnées u des tangentes menées de ce point à la courbe seront données par l'équation

$$(3) \qquad u^n\varphi_n(1,\lambda) + w\,u^{n-1}\varphi_{n-1}(1,\lambda) + \cdots + w^{n-p-1}u^{p+1}\varphi_{p+1}(1,\lambda) + w^{n-p}u^p\varphi_p(1,\lambda) = 0.$$

Or cette équation admet p fois la racine $u = 0$ et p fois seulement ; donc, par un point quelconque de la droite AB, on peut mener $(n-p)$ tangentes distinctes de AB et on n'en peut mener que $(n-p)$; la tangente AB est une tangente multiple d'ordre p.

Supposons maintenant que le point I ou $v = \lambda u$ soit un des points donnés par l'équation (2), c. à. d. qu'on ait

$$\varphi_p(1,\lambda) = 0 ;$$

l'équation (3) admettra alors $(p+1)$ racines nulles ; ainsi, par chacun des points (2), on ne peut mener que $(n-p-1)$ tangentes distinctes de AB ; chacun de ces points est donc l'intersection de la droite AB par une tangente infiniment voisine, ou un des points de contact de cette tangente ; donc l'équation des points de contact est

$$\varphi_p(u,v) = 0.$$

Nous allons discuter avec plus de détails les cas où p est égal à 1, 2, ou 3.

II. Discussion.

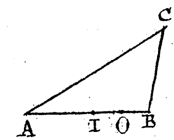
491. ### Tangentes simples.

Si, prenant pour droite AB, la tangente considérée, l'équation de la courbe se réduit à la forme

$$(1) \qquad \varphi_n(u,v) + \cdots\cdots + w^{n-2}\varphi_2(u,v) + w^{n-1}\varphi_1(u,v) = 0,$$

la droite AB sera une tangente simple.

Cherchons les tangentes menées à la courbe par un point quelconque



$$(2) \qquad v = \lambda u$$

de la droite AB ; les coordonnées u de ces tangentes seront données par l'équation

$$(3) \qquad u^n\varphi_n(1,\lambda) + \cdots + w^{n-2}u^2\varphi_2(1,\lambda) + w^{n-1}u\,\varphi_1(1,\lambda) = 0.$$

Or cette équation n'admet qu'une racine nulle tant que λ reste arbitraire ; donc d'un point quelconque de AB on peut mener à la courbe $(n-1)$ tangentes distinctes de AB ; AB est une tangente simple.

Si l'on prend pour λ la valeur unique λ_0 qui annule la fonction du 1er degré $\varphi_1(1,\lambda)$, l'équation (3) admet deux racines nulles ; c. à. d. que par le point

$$(0) \qquad v = \lambda_0 u$$

passent deux tangentes infiniment voisines et coïncidant avec AB ; ce point est le contact de la droite AB.

Si la valeur λ_0 annulait à la fois $\varphi_1(1,\lambda)$ et $\varphi_2(1,\lambda)$, l'équation (3) admettrait trois racines nulles ; par le point O passeraient trois tangentes confondues avec AB, c. à. d. que le point O serait le point d'intersection de trois tangentes infiniment voisines ; comme la tangente AB est une tangente simple, le point O sera, en général, un point de rebroussement ; il peut arriver, plus particulièrement, que le point O soit un point double, si l'équation (3) admet un autre couple de racines égales lorsque λ a été remplacé par λ_0.

Si la valeur λ_0 annulait à la fois $\varphi_1(1,\lambda)$, $\varphi_2'(1,\lambda)$, et $\varphi_3(1,\lambda)$, l'équation (3) admettrait quatre racines nulles; le point O serait alors l'intersection de quatre tangentes infiniment voisines et confondues avec AB. Comme la tangente AB est une tangente simple, le point O sera, en général, un point de rebroussement provenant d'un point triple, à moins que l'équation (3) n'admette encore, après y avoir fait $\lambda = \lambda_3$, un ou deux autres couples de racines égales.

492. Tangentes doubles.

Si l'équation de la courbe se réduit à la forme

$$(1) \qquad \varphi_n(u,v) + \cdots + w^{n-3}\varphi_3(u,v) + w^{n-2}\varphi_2(u,v) = 0,$$

la droite AB sera une **tangente double**; les deux points de contact seront

$$(2) \quad i\,j \qquad \varphi_2(u,v) = 0;$$

par un point quelconque de la droite AB, on ne peut mener à la courbe que $(n-2)$ tangentes distinctes de AB; par un quelconque des points (2), on ne peut mener que $(n-3)$ tangentes à la courbe; chacun des points i ou j est l'intersection de la tangente double AB avec une tangente infiniment voisine.

La discussion des tangentes doubles dépend de la nature des racines de l'équation

$$(2) \qquad \varphi_2(u,v) = 0, \text{ ou } Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0. \ \ i,j$$

1er Cas: Les racines de l'équation (2) sont réelles.

On a une **tangente double ordinaire**, touchant la courbe en deux points distincts, i et j. Ces points de contact pourront, être des points multiples, si par ces points, passent plus de trois tangentes coïncidant avec la droite AB.

2ème Cas: Les racines de l'équation (2) sont imaginaires.

La tangente double AB est alors une **tangente double isolée**; la droite AB est une tangente réelle, mais ses point de contact ne sont pas réels; elle est caractérisée par cette propriété analytique:

D'un point quelconque de la droite AB on ne peut mener que $(n-2)$ tangentes distinctes de AB; par ses points de contact, on n'en peut mener que $(n-3)$.

3ème Cas: Les racines de l'équation (2) sont égales.

Les deux points de contact de la tangente double viennent se confondre; par ce point passent trois tangentes infiniment voisines et coïncidant avec la droite AB; le point de contact est alors **un point d'inflexion**, puisque la tangente est une tangente double.

Comme exemples des deux derniers cas nous citerons:

1°. La courbe

$$u^3 + (u^2+v^2)\,w = 0,$$

dont l'équation en coordonnées-point trilatères est

$$(x^2+y^2)^2 - (9y^2+x^2)\,xz + \frac{27}{4}y^2z^2 = 0.$$

2°. La courbe

$$u^3 + v^2 = 0,$$

dont l'équation en coordonnées-point trilatères est

$$x^3 = \frac{27}{4}y^2z.$$

On discutera de la même manière les tangentes multiples d'ordre supérieur.

493. Pour qu'une droite soit tangente multiple d'ordre p, il faut que, cette droite étant prise pour côté AB du triangle de référence, l'équation de la courbe se ramène à la forme

$$\varphi_n(u,v) + w\,\varphi_{n-1}(u,v) + \cdots + w^{n-p}\varphi_p(u,v) = 0,$$

c. à d. que le terme indépendant de u et v les termes du 1er, 2ème, ..., $(p-1)$ème degré en u et v disparaissent, ce qui exige

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2} \text{ relations.}$$

« Ainsi: Assujettir une droite à être tangente à la courbe revient à donner une condition, c.à.d. une relation « entre les coefficients de l'équation de la courbe.

« Assujettir une droite à être tangente multiple d'ordre p revient à donner $\frac{p(p+1)}{2}$ conditions, c.à.d. $\frac{p(p+1)}{2}$ « relations entre les coefficients de la courbe.

On peut donc dire que:

Une tangente multiple d'ordre p équivaut, en général, à $\frac{p(p+1)}{2}$ tangentes simples.

III°. Propriétés des premières polaires d'une droite dans le cas des tangentes multiples.

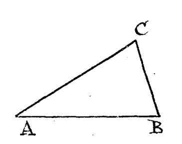
494. Si une courbe a une tangente multiple d'ordre p, cette droite sera une tangente multiple d'ordre (p−1) pour la première polaire d'une droite quelconque.

Si l des points de contact de la tangente multiple coïncident il y en aura (l−1) de la première polaire coïncidant entre eux et avec les premiers.

En effet, si l'on suppose que la droite AB soit la tangente multiple d'ordre p, l'équation de la courbe sera de la forme

$$(1)\qquad \varphi_n(u,v) + w\varphi_{n-1}(u,v) + \dots + w^{n-p}\varphi_p(u,v) = 0.$$

Or la première polaire d'une droite quelconque (u_0, v_0, w_0), sera N.° [464]



$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0,$$

ou

$$(2)\qquad u_0\left[\dots + w^{n-p}\varphi'_{u\,p}(u,v)\right] + v_0\left[\dots + w^{n-p}\varphi'_{v\,p}(u,v)\right] + w_0\left[\dots + (n-p)w^{n-p-1}\varphi_p(u,v)\right] = 0;$$

on voit que les termes du degré le moins élevé en u et v seront du degré (p−1); la droite AB est donc, pour cette première polaire, une tangente multiple d'ordre (p−1).

Si, parmi les points de contact de la tangente AB, l coïncident entre eux, l'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(3)\qquad \varphi_n(u,v) + \dots + w^{n-p-1}\varphi_{p+1}(u,v) + w^{n-p}u^l\varphi(u,v) = 0,$$

on suppose que ces points de contact coïncident avec le point A.

Dans la 1.ère polaire d'une droite quelconque, l'ensemble des termes du degré le moins élevé en u et v sera

$$u_0\left[u^l\varphi'_u(u,v) + l u^{l-1}\varphi(u,v)\right] + v_0 u^l \varphi'_v(u,v);$$

on voit que ces termes contiennent u^{l-1} en facteur; donc le point u=0, qui était la réunion de l points de contact de la tangente à la courbe donnée, sera la réunion de (l−1) points de contact pour la première polaire d'une droite quelconque.

En particulier:

Lorsqu'une droite T est tangente double pour une courbe, elle est une tangente simple pour la première polaire d'une droite quelconque.

Lorsqu'une droite est une tangente double d'inflexion, la première polaire d'une droite quelconque touche cette tangente au point d'inflexion; cette droite est une tangente simple pour les premières polaires.

Influence des tangentes multiples sur l'ordre de la courbe.

495. L'ordre d'une courbe, donnée par son équation tangentielle de degré n, est, en général, égal à n(n−1) N.° [413].

Les tangentes aux points, où une droite quelconque rencontre la courbe, sont en même temps tangentes à la première polaire de cette droite N.os [413], [462].

Lorsqu'une courbe possède une tangente double T, la première polaire d'une droite quelconque D touche cette tangente

double; or cette tangente, qui compte pour deux tangentes à la courbe primitive et qui touche la polaire de la droite D, devra compter pour deux tangentes communes à la courbe et à la polaire; il restera donc $[n(n-1)-2]$ tangentes communes distinctes de la droite T. Les tangentes aux points où la droite D rencontre la courbe proposée sont communes à la courbe et à la première polaire de cette courbe. Mais par le point où elle rencontre la tangente T (point qui n'appartient pas, à proprement parler, à la courbe), passent deux tangentes communes et coïncidant avec la tangente T; par suite, le nombre des tangentes communes correspondant aux autres points d'intersection sera réduit à $[n(n-1)-2]$. Ainsi, une tangente double diminue l'ordre de deux unités; s'il y a τ tangentes doubles, l'ordre sera diminué de 2τ unités.

Supposons que la tangente double T soit une tangente d'inflexion en I; par le point I on ne peut mener que $(n-3)$ tangentes à la courbe. Or, la première polaire d'une droite quelconque, D, touche la tangente T en I; par suite, la droite T devra compter pour trois tangentes communes à la courbe et à la première polaire; l'ordre de la courbe sera donc diminué de trois unités. S'il y a ι tangentes d'inflexion, l'ordre sera diminué de 3ι unités.

Donc, si une courbe de classe n possède τ tangentes doubles et ι tangentes d'inflexion, l'ordre m de cette courbe sera défini par l'égalité

$$\text{(III)} \qquad m = n(n-1) - 2\tau - 3\iota .$$

En général, une tangente multiple d'ordre p diminuera l'ordre de $p(p-1)$ unités, si les points de contact sont distincts; et de

$$[p(p-1)+(l-1)] \text{ unités}.$$

s'il y a l points de contact qui coïncident.

V° Influence des tangentes multiples sur le nombre des points de rebroussement.

496. Nous avons vu N° [425] que les tangentes aux points de rebroussement de la courbe, dont l'équation tangentielle est

$$(1) \qquad f(u, v, w) = 0,$$

sont en même temps tangentes à la courbe

$$(2) \qquad H = \begin{vmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{vv} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{ww} \end{vmatrix} = 0.$$

En choisissant la tangente double pour droite AB du triangle de référence, on démontrera facilement les propositions suivantes:

Une tangente double de la courbe $f=0$ est une tangente double de la courbe $H=0$, et les points de contact sont les mêmes pour les deux courbes.

Lorsque la courbe $f=0$ a une tangente d'inflexion, cette tangente sera triple pour la courbe $H=0$, et deux des points de contact de cette tangente triple coïncideront avec le point d'inflexion.

D'après cela, si la courbe $f=0$ a une tangente double, prenons la pour droite AB du triangle de référence et soient A et B les deux points de contact; les deux équations

$$f(u, v, w) = 0, \quad H = 0;$$

admettront alors six fois la solution $u=0, v=0$, N° [489]; par suite, les deux courbes $f=0$, $H=0$ n'auront plus que $[3n(n-2)-6]$ autres tangentes communes et distinctes de AB; comme les points A et B ne sont pas des points de rebroussement, le nombre des points de rebroussement de la courbe $f=0$ sera donc diminué de six.

Dans le cas d'une tangente d'inflexion, on voit, en raisonnant de même, que la diminution est de huit unités.

Une courbe de classe n a, en général, $3n(n-2)$ points de rebroussement, N° [425]; donc, si une courbe de classe n possède τ tangentes doubles et ι tangentes d'inflexion, le nombre $\varkappa$ de ses points de rebroussement sera défini par l'égalité

$$\text{(IV)} \qquad \varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8\iota .$$

497. N. B. Les relations (I) N.º [485], (II) N.º [489], (III) N.º [495], (IV) N.º [496], fondamentales dans l'étude des courbes algébriques, sont dues à Plücker.

Rappelons ces formules: En désignant par

m, l'ordre d'une courbe,
n, la classe,
δ, le nombre des points doubles,
$\varkappa$, le nombre des points de rebroussement,
τ, le nombre des tangentes doubles,
ι, le nombre des tangentes d'inflexion;

on a les relations:

$$\text{(I)} \quad n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa;$$
$$\text{(II)} \quad \iota = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa;$$
$$\text{(III)} \quad m = n(n-1) - 2\tau - 3\iota;$$
$$\text{(IV)} \quad \varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8\iota.$$

Une quelconque de ces relations est une conséquence des trois autres.

VI. Remarque sur les équations en coordonnées-point et les équations tangentielles.

498. Lorsque l'équation en coordonnées-point d'une courbe d'ordre m

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

est la plus générale de son espèce, c.à.d. lorsque ses coefficients sont complètement arbitraires, cette courbe ne possède pas de points doubles, de points multiples; mais elle a alors un nombre déterminé de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion; elle n'a pas de tangentes multiples d'ordre supérieur au second. La présence des points multiples diminuera la classe, ainsi que le nombre des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion; mais l'ordre de la courbe restera invariable.

Lorsque l'équation tangentielle d'une courbe de classe n

$$(2) \quad F(u, v, w) = 0$$

est la plus générale de son espèce, c.à.d. lorsque ses coefficients sont complètement arbitraires, cette courbe ne possède pas de tangentes doubles, de tangentes multiples; mais elle a alors un nombre déterminé de points doubles et de points de rebroussement; elle n'a pas de points multiples d'ordre supérieur au second. La présence des tangentes doubles diminuera l'ordre, ainsi que le nombre des points doubles et des points de rebroussement; mais la classe de la courbe reste invariable.

Il résulte de là que si l'on se donne l'équation générale en coordonnées-point d'une courbe d'ordre déterminé, l'équation tangentielle de cette même courbe ne sera pas la plus générale de son degré; car la première ne possède pas de points multiples, et a des tangentes doubles, il en sera de même de la seconde; or l'existence des tangentes doubles, dans le cas d'une équation tangentielle, entraine des relations entre les coefficients de cette équation; donc...... Inversement, si l'on se donne l'équation générale tangentielle d'une courbe de classe déterminée, l'équation en coordonnées-point de cette même courbe ne sera pas la plus générale de son degré; car la première courbe ayant des points doubles, il en sera de même de la seconde, ce qui entraine des relations entre les coefficients de son équation.

Chapitre IV

Asymptotes - Points à l'infini.

§I Détermination des Asymptotes. (1ère Méthode)

1° Définition; Coefficient angulaire, etc....

499. Cette première méthode, due à Cauchy, est souvent utile dans l'étude des courbes transcendantes, mais elle se prête difficilement à la recherche des points multiples à l'infini.

Définition des asymptotes; propriété caractéristique.

On appelle **asymptote** d'une branche infinie de courbe une droite telle que la distance d'un point de la courbe à cette droite tend vers zéro quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

Si l'asymptote n'est pas parallèle à l'axe des y, la différence, entre l'ordonnée de l'asymptote et l'ordonnée de la courbe correspondant à la même abscisse, tend vers zéro, quand le point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

En effet, si M est un point de la courbe, et MN la différence entre les ordonnées de la courbe et de l'asymptote correspondant à la même abscisse OP; si β est l'angle de l'asymptote avec l'axe Oy, et MQ la distance du point M à l'asymptote, on a

$$MQ = MN \sin\beta.$$

Comme β est différent de zéro, on voit que MN tend vers zéro en même temps que MQ, et réciproquement; c. à. d. que si la droite AB est une asymptote, la différence des ordonnées des deux points M et N tend vers zéro, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe; et réciproquement, si la différence, entre l'ordonnée d'un point de la courbe et l'ordonnée d'un point de la droite AB correspondant à une même abscisse, tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe, la droite AB est asymptote à cette branche.

Cette conclusion supposant β différent de zéro, c. à. d. l'asymptote non parallèle à l'axe Oy; nous ferons une étude spéciale de ce cas.

500. Coefficient angulaire et Ordonnée à l'origine d'une asymptote.

Soit l'équation d'une courbe

$$f(x, y) = 0,$$

possédant une branche infinie, on peut supposer que

$$(1) \qquad y = \varphi(x),$$

est l'équation de cette branche infinie; la valeur (1) de y doit vérifier l'équation de la courbe.

Soient c et d le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine de l'asymptote à cette branche infinie; l'équation (1) peut s'écrire

$$y = cx + d + \underbrace{\varphi(x) - (cx+d)}_{\varepsilon(x)},$$

c. à. d.

$$(2) \qquad y = cx + d + \varepsilon(x);$$

l'équation (2) représente également la branche considérée. Mais y ou $\varphi(x)$ est l'ordonnée d'un point de la courbe correspondant à l'abscisse x, $(cx+d)$ est l'ordonnée de l'asymptote correspondant à la même abscisse; or on a vu que cette différence tend vers zéro lorsque x et y croissent indéfiniment; donc

$$(3) \qquad \lim.\ \varepsilon(x) = 0;$$

la fonction $\varepsilon(x)$ tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment.

Ceci posé, l'équation (2) nous donne

$$\frac{y}{x} = c + \frac{d+\varepsilon(x)}{x};$$

lorsque le point (x,y) s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe, x et y croissent indéfiniment; alors $\frac{d+\varepsilon(x)}{x}$ a pour limite zéro, par suite:

$$(\mathrm{I}) \qquad c = \lim.\ \frac{y}{x};$$

c.à.d. que le coefficient angulaire de l'asymptote est la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$, lorsque x et y croissent indéfiniment; les variables x et y sont liées entre elles par l'équation de la courbe.

L'équation (2) nous donne encore

$$d = y - cx - \varepsilon(x);$$

lorsque x et y croissent indéfiniment, il reste

$$(\mathrm{II}) \qquad d = \lim(y - cx);$$

c.à.d. que l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est la limite de l'expression $(y-cx)$, lorsque x et y croissent indéfiniment; c a la valeur précédemment trouvée, y est liée à x par l'équation de la courbe.

II.° Application aux courbes du second ordre.

501. Soit l'équation générale des courbes du second ordre

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

si l'équation d'une asymptote à cette courbe est

$$(2) \qquad y = cx + d,$$

on devra avoir, d'après le N.° qui précède:

$$c = \lim \frac{y}{x}, \quad d = \lim(y - cx).$$

Or, de l'équation (1) de la courbe, on tire

$$(3) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

après avoir posé:

$$(3\,bis) \qquad m = B^2 - AC, \quad n = BE - CD, \quad p = E^2 - CF.$$

L'équation (3) nous donne

$$\frac{y}{x} = -\frac{B + \frac{E}{x}}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{m + \frac{2n}{x} + \frac{p}{x^2}};$$

d'où l'on conclut en faisant croître x indéfiniment

$$(4) \qquad c = \lim \frac{y}{x} = -\frac{B}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{m};$$

dans les équations (3) et (4) les signes supérieurs et inférieurs $\pm$ doivent se correspondre.

Dans le cas de l'Ellipse, m est négatif; les coefficients angulaires des asymptotes sont alors imaginaires.

Dans le cas de l'Hyperbole, m est positif; les coefficients angulaires des asymptotes sont réels. Dans le cas de

la parabole, m est nul; les valeurs des coefficients angulaires deviennent égales entre elles et égales à $\left(-\frac{B}{C}\right)$.

Déterminons maintenant les ordonnées à l'origine; prenons d'abord la valeur de C (4) correspondant aux signes supérieurs, savoir

$$c = \frac{-B+\sqrt{m}}{C}.$$

On a dès-lors

$$y - cx = -\frac{Bx+E}{C} + \frac{1}{C}\sqrt{mx^2+2nx+p} - x\,\frac{(-B+\sqrt{m})}{C},$$

ou

$$y - cx = \frac{\sqrt{mx^2+2nx+p} - (x\sqrt{m}+E)}{C};$$

ou enfin, en multipliant les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du numérateur, c'est à dire $\sqrt{mx^2+2nx+p} + (x\sqrt{m}+E)$:

$$y - cx = \frac{2x[n - E\sqrt{m}] + p - E^2}{C\sqrt{mx^2+2nx+p} + C(x\sqrt{m}+E)}.$$

Maintenant divisons les deux termes de cette dernière fraction par x, il vient

$$y - cx = \frac{2(n - E\sqrt{m}) + \frac{p-E^2}{x}}{C\sqrt{m+\frac{2n}{x}+\frac{p}{x^2}} + C\left[\sqrt{m}+\frac{E}{x}\right]};$$

faisons croître alors x indéfiniment, on trouve

$$(5) \qquad d = \lim(y-cx) = \frac{n - E\sqrt{m}}{C\sqrt{m}} = -\frac{E}{C} + \frac{n}{C\sqrt{m}}.$$

Si l'on avait pris dans les égalités (3) et (4) les signes inférieurs, on aurait trouvé

$$(5\,\text{bis}) \qquad d = -\frac{E}{C} - \frac{n}{C\sqrt{m}}; \quad \text{où } n = BE - CD.$$

En remplaçant, dans l'équation (2), c et d par leurs valeurs (4) et (5), on obtient pour l'équation des asymptotes de la courbe (1)

$$(6) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\left(x\sqrt{m} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right);$$

les supérieurs et inférieurs doivent être pris ensemble dans les équations (3) et (6).

Dans le cas de l'Ellipse, $m < 0$; les deux valeurs de d (5) sont imaginaires. Dans le cas de l'hyperbole, $m > 0$; les valeurs de d sont réelles. Dans le cas de la parabole, $m = 0$; d est infini; le coefficient angulaire n'étant pas infini, l'asymptote est à l'infini.

N. B. L'équation (3) de la courbe peut s'écrire, en décomposant en carrés la quantité sous le radical:

$$(7) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{\left(x\sqrt{m}+\frac{n}{\sqrt{m}}\right)^2 + p - \frac{n^2}{m}};$$

en comparant cette dernière équation avec celle (6) des asymptotes, on en conclut une règle assez simple pour déduire l'équation (6) de l'équation (7).

502. Équation des asymptotes.

L'équation générale des courbes du second ordre étant

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

nous obtiendrons les coefficients angulaires des asymptotes en divisant par x^2, ce qui donne

$$A + 2B\frac{y}{x} + C\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{D}{x} + 2\frac{E}{x}\cdot\frac{y}{x} + \frac{F}{x^2} = 0;$$

puis en faisant croître x indéfiniment, et remarquant que $c = \lim \frac{y}{x}$, il vient

$$(2) \qquad Cc^2 + 2Bc + A = 0;$$

telle est l'équation qui détermine les coefficients angulaires des asymptotes de la courbe (1).

Si $B^2 - AC < 0$, c. à. d. dans le cas de l'Ellipse, les deux racines sont imaginaires;

Si $B^2 - AC > 0$, c. à. d. dans le cas de l'hyperbole, les deux racines sont réelles;

Si $B^2 - AC = 0$, c. à. d. dans le cas de la parabole, les deux racines sont réelles.

Lorsqu'on rapporte la courbe à son centre, c. à. d. lorsqu'on pose

$$x = x' + x_0,$$
$$y = y' + y_0,$$

et qu'on fait disparaître les termes du premier degré, N.° [316], l'équation de la courbe devient

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = H;$$

les coefficients angulaires des asymptotes sont encore donnés par l'équation

$$Cc^2 + 2Bc + A = 0.$$

Mais on voit alors, par les valeurs (5) du N.° [501], dans lesquelles on doit supposer E et D nuls, que les asymptotes passent par la nouvelle origine, ou le centre de la courbe, comme nous le constaterons encore plus loin.

Alors, si c est le coefficient angulaire de l'une d'elles, on aura

$$c = \frac{y'}{x'},$$

x' et y' représentant les nouvelles coordonnées d'un point quelconque de cette asymptote. La valeur c devant vérifier l'équation (2), on en déduira

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 0;$$

c'est l'équation quadratique des asymptotes rapportées aux nouveaux axes.

On conclut de là que: les termes du second degré, dans l'équation (1), représentent deux droites passant par l'origine et parallèles aux asymptotes.

L'équation quadratique des asymptotes par rapport aux axes primitifs sera donc

$$A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2 = 0.$$

Développant et ayant égard aux relations (3) du N.° [316], cette équation devient

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + Ax_0^2\ 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = 0;$$

ainsi l'équation des deux asymptotes a les mêmes termes du second degré et les mêmes termes du premier degré que l'équation de la courbe elle-même.

Pour déterminer le terme indépendant de l'équation (4), remarquons que

$$Ax_0 + By_0 + D = 0,$$
$$Bx_0 + Cy_0 + E = 0,$$

d'où l'on déduit en ajoutant après avoir multiplié par x_0 et y_0:

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = -(Dx_0 + Ey_0);$$

remplaçant alors x_0 et y_0 par les valeurs déduites des égalités précédentes, on a

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 2BDE}{AC - B^2} = -\frac{\Delta}{AC - B^2} + F.$$

L'équation des deux asympotes est donc

$$(5) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F + \frac{\Delta}{B^2 - AC} = 0,$$

où l'on a posé, suivant l'habitude:

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

503. Condition pour qu'une hyperbole soit équilatère.

On appelle hyperbole équilatère une hyperbole dont les asymptotes sont rectangulaires.

Or nous venons de voir que les coefficients angulaires des asymptotes sont déterminés par l'équation :

$$Cc^2 + 2Bc + A = 0 ;$$

si c_1 et c_2 sont les racines de cette équation et si θ est l'angle des axes, la condition d'orthogonalité de ces deux droites sera

$$1 + (c_1 + c_2)\cos\theta + c_1 c_2 = 0 ;$$

or, d'après l'équation qui définit les racines c_1 et c_2, on a

$$c_1 + c_2 = -\frac{B}{C}, \quad c_1 c_2 = \frac{A}{C} ;$$

la condition pour que l'hyperbole soit équilatère est donc

$$(7) \qquad A + C - 2B\cos\theta = 0 ;$$

cette relation devient dans le cas des axes rectangulaires

$$(7 \text{ bis}) \qquad A + C = 0 ,$$

c.à.d. que les coefficients des carrés des variables sont égaux et de signes contraires.

N. B. Dans le cas de l'ellipse, cette relation (7) ne peut pas être vérifiée par des valeurs réelles de A, B, C ; on a, en effet, dans l'hypothèse actuelle

$$B^2 - AC = -m^2, \text{ d'où } C = \frac{B^2 + m^2}{A} ;$$

et la relation (7) devient

$$A^2 + B^2 + m^2 - 2AB\cos\theta = 0 ;$$

ou, en décomposant en carrés :

$$(A - B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta + m^2 = 0 ;$$

somme de carrés qui ne peut être nulle pour des valeurs réelles de A, B, C.

III. Application aux courbes algébriques.
Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

504. Déterminons les asymptotes parallèles à l'axe des y.

Pour cela, nous ordonnerons l'équation de la courbe par rapport aux puissances décroissantes de y ; soit m le degré de la courbe, et (m − p) la plus haute puissance de y qui entre dans son équation, cette équation pourra dès-lors s'écrire

$$(1) \qquad A_p y^{m-p} + A_{p+1} y^{m-p-1} + A_{p+2} y^{m-p-2} + \dots + A_{m-1} y + A_m = 0 ;$$

la lettre A_i désignant une fonction entière de x, laquelle est, en général, du degré i, mais n'est jamais d'un degré supérieur.

En divisant par y^{m-p}, l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad A_p + A_{p+1}\cdot\frac{1}{y} + A_{p+2}\cdot\frac{1}{y^2} + \dots + A_m\cdot\frac{1}{y^{m-p}} = 0.$$

S'il existe une asymptote parallèle à l'axe des y et que a soit l'abscisse de cette asymptote, la valeur de y devra croître de plus en plus lorsqu'on donnera à x des valeurs de plus en plus voisines de la quantité finie a ; donc lorsque x tend vers a, la valeur correspondante de y croît indéfiniment, les fonctions $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots A_m$ restent finies ; l'équation (2) se réduit alors à

$$(3) \qquad A_p = 0 ;$$

ainsi la relation (3) est la condition nécessaire pour qu'à une valeur finie de x corresponde une valeur infinie de y ; donc les valeurs de x correspondant aux asymptotes parallèles à l'axe des y annulent le coefficient de la plus haute

puissance de y; nous allons voir qu'il y a alors, en général, des asymptotes parallèles à l'axe des y, c.à.d. que cette condition est suffisante; Ainsi

Les asymptotes parallèles à l'axe des y s'obtiennent en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y.

Lorsque le coefficient de la plus haute puissance de y est une constante, et que cette puissance n'est pas y^m, nous ne trouvons pas d'asymptotes à distance finie, ces asymptotes sont transportées à l'infini. Si la plus haute puissance de y est y^m, le coefficient est une constante; il n'y a pas alors d'asymptotes parallèles à l'axe des y, ni à distance finie, ni à l'infini.

505\. Désignons par $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ les fonctions A_p, A_{p+1}, A_{p+2}, de sorte que l'équation (2) s'écrira

$$(4)\qquad F(x)=\varphi(x)+\overbrace{\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{y}+\varphi_2(x)\cdot\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{A_m}{y^{m-p}}}^{X}=0.$$

Soit a une racine de l'équation

$$(5)\qquad \varphi(x)=0;$$

nous allons constater qu'à cette valeur correspond, en général, une branche infinie de la courbe ayant pour asymptote la droite $x-a=0$, et étudier la position de cette branche par rapport à l'asymptote.

1° La racine a est simple, ou plus généralement, elle est racine multiple d'ordre impair.

Si h est une quantité positive suffisamment petite, on aura, par exemple, d'après l'hypothèse admise

$$\varphi(a-h)<0,\ \varphi(a+h)>0;$$

et $\varphi(x)$ ne s'annulera que pour $x=a$ dans l'intervalle de $(a-h)$ à $(a+h)$. Supposons, en outre, que $\varphi_1(x)$ ne s'annule pas pour $x=a$, soit $\varphi_1(a)>0$, par exemple; on pourra admettre que h soit assez petit, pour que l'on ait à la fois

$$\varphi_1(a-h)>0,\ \varphi_1(a)>0,\ \varphi_1(a+h)>0.$$

Ceci posé, donnons à $\frac{1}{y}$ une valeur assez petite pour que le polynome X, reste, pour cette valeur et pour toute valeur plus petite, de même signe que son premier terme, et, en outre, assez petite pour que la valeur absolue de X soit moindre que la valeur absolue de $\varphi(a\pm h)$.

Soient $OA=a$, $OA'=a-h$, $OA''=a+h$; et AB, $A'B'$, $A''B''$, des droites parallèles à Oy.

Supposons d'abord $\frac{1}{y}>0$, $\frac{1}{y}$ ayant une valeur déterminée et suffisamment petite:

pour: $x=a-h$, on a $F(a-h)<0$,

$x=a$, on a $F(a)>0$,

$x=a+h$, on a $F(a+h)>0$;

on a donc un point M, compris entre $A'B'$ et AB, au dessus de Ox et très-éloigné.

Supposons, en second lieu, $\frac{1}{y}<0$, $\frac{1}{y}$ ayant une valeur déterminée et suffisamment petite en valeur absolue.

pour: $x=a-h$, on a $F(a-h)<0$,

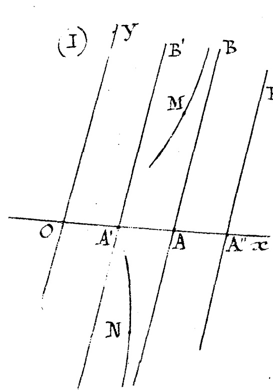
$x=a$, on a $F(a)<0$,

$x=a+h$, on a $F(a+h)>0$

on a un deuxième point N, compris entre AB et $A''B''$, en dessous de Ox et très éloigné.

Si maintenant, on fait croître y de plus en plus, on aura toujours une valeur réelle correspondante pour x, valeur qui se rapprochera de a, puisque le premier membre de l'équation (4) tend à se réduire au terme $\varphi(x)$, lequel s'annulera seulement pour $x=a$, dans l'intervalle de $(a-h)$ à $(a+h)$. On aura donc, pour $y>0$, une série de point formant une courbe qui se rapproche de plus en plus de la partie supérieure de la droite AB et à gauche de cette ligne; pour $y<0$, on aura une série de points formant une courbe qui se rapproche de plus en plus de la partie inférieure de la droite AB et à droite de cette ligne.

Si l'on avait $\varphi_1(a)=0$ et $\varphi_2(a)>0$, la branche infinie présenterait la forme ci-contre. (Fig. 1).



2°. La racine a est double, ou plus généralement, elle est multiple de degré pair.
On peut alors supposer h assez petit de manière que l'on ait, par exemple,

$$\varphi(a-h)>0,\ \varphi(a+h)>0.$$

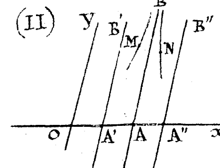
Soit d'abord $\varphi_1(a)$ différent de zéro, et supposons $\varphi_1(a)<0$.

Si $y>0$, pour : $x=a-h$, on a $F(a-h)>0$,

$x=a$, on a $F(a)<0$,

$x=a+h$, on a $F(a+h)>0$.

Pour $y<0$, on ne pourra plus affirmer l'existence des racines. Les conclusions seraient inverses, si l'on avait $\varphi_1(a)>0$. La branche infinie présentera la forme ci-contre (Fig. II).



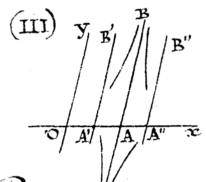
Soit enfin $\varphi_1(a)=0$. Si, dans les hypothèses déjà faites, on suppose $\varphi_2(a)<0$,

pour : $x=a-h$, on a $F(a-h)>0$,

$x=a$, on a $F(a)<0$, quelque soit le signe de y,

$x=a+h$, on a $F(a+h)>0$;

on a alors la forme ci-contre. (Fig. III).



Si l'on a, à la fois, $\varphi_1(a)=0$ et $\varphi_2(a)>0$, cette méthode ne séparera pas les racines, et on ne pourra plus conclure l'existence des branches infinies réelles.

Remarque. Les asymptotes parallèles à l'axe des x, se détermineront absolument de la même manière; et nous aurons la règle suivante:

Les asymptotes parallèles à l'axe des x s'obtiennent en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de x.

506. Appliquons aux courbes du second ordre:

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Lorsque les coefficients A et C sont différents de zéro, il n'y a pas d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées. Si l'on a $C=0$, l'équation de l'asymptote parallèle à Oy s'obtiendra en égalant à zéro le coefficient de y, ce qui donne

$$Bx+E=0,\ \text{d'où}\ x=-\frac{E}{B};$$

cette asymptote coïncidera avec l'axe des y, si l'on a $E=0$. Donc

L'axe des y sera asymptote, si les coefficients de y^2 et de y sont nuls.

Lorsqu'on suppose $A=0$, l'équation de l'asymptote parallèle à Ox s'obtient en égalant à zéro le coefficient de x, ce qui donne

$$Bx+D=0,\ \text{d'où}\ x=-\frac{D}{B};$$

cette asymptote coïncidera avec Ox, si l'on a $D=0$. Donc

L'axe des x sera asymptote, si les coefficients de x^2 et de x sont nuls.

Les conditions que nous venons d'énoncer sont évidemment nécessaires et suffisantes; il résulte de là que l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes est nécessairement de la forme

$$2Bxy+F=0,\ \text{ou}\ xy=k;$$

les deux axes de coordonnées sont alors les asymptotes de la courbe.

IV°. Application aux courbes algébriques. Asymptotes non parallèles aux axes.

507. Nous rappellerons que si c et d sont le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une asymptote, l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme N° (499)

$$(1)\qquad y=cx+d+\varepsilon(x),$$

ε est une fonction de x qui tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment; et alors

$$(2) \qquad c = \lim \frac{y}{x}, \quad d = \lim (y - cx).$$

Soit maintenant l'équation générale d'une courbe algébrique:

$$(3) \qquad f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \varphi_{m-2}(x,y) + \cdots = 0,$$

les fonctions φ_i étant homogènes et du degré i en x et y.

L'équation (3) pourra s'écrire

$$x^m \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1}\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \cdots = 0,$$

ou, en divisant par x^m

$$(4) \qquad \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\cdot\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \cdots = 0.$$

Si l'on fait croître x indéfiniment, y, en général, croîtra indéfiniment, mais on aura $\lim \frac{y}{x} = c$, c étant une quantité finie puisqu'on suppose l'asymptote non parallèle à l'axe des y. Or, lorsqu'on fait croître x indéfiniment, tous les termes, à partir du second, tendent vers zéro, car les fonctions φ_i sont des fonctions entières de la quantité $\frac{y}{x}$ qui a une limite finie; donc les valeurs limites du rapport $\frac{y}{x}$, ou les coefficients angulaires des asymptotes doivent vérifier l'équation

$$(5) \qquad (I) \qquad \varphi_m(1, c) = 0;$$

ainsi les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé, où l'on remplace x par 1 et y par c.

Les racines nulles de l'équation (5) donnent les asymptotes parallèles à l'axe des x.

L'équation (5) étant, en général, du degré m, on en conclut que:

Il y a au plus m asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Remarque. Nous venons de démontrer que, s'il y a des asymptotes, leurs coefficients angulaires doivent nécessairement vérifier l'équation (5). Par une analyse tout-à-fait semblable à celle qui a été présentée au N.° [505], on constatera que, en général, à une racine réelle c de l'équation (5), correspond une branche infinie réelle de la courbe; ou mieux, on conclura de cette analyse, que

A une racine de degré de multiplicité impair de l'équation $\varphi_m(1,c) = 0$ correspond toujours au moins une branche réelle infinie de la courbe. Cette conclusion n'a plus nécessairement lieu lorsque la racine est de degré de multiplicité pair.

508. Déterminons maintenant l'ordonnée à l'origine de ces asymptotes.

Soit c une des racines réelles de l'équation (5), et posons

$$d + \varepsilon(x) = \delta,$$

on aura, pour $x = \infty$

$$(6) \qquad \lim \delta = \lim (d + \varepsilon) = d.$$

L'équation (1), qui est aussi l'équation de la courbe, s'écrira

$$\frac{y}{x} = c + \frac{\delta}{x};$$

mais les coordonnées x et y doivent vérifier l'équation (3), ou, ce qui revient au même, l'équation (4); on devra donc avoir

$$\varphi_m\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \cdots = 0.$$

Développons chacune de ces fonctions par la formule de Taylor, et rappelons que les notations $\varphi_i'(1,c)$, $\varphi_i''(1,c)$,.... désignerons les dérivées 1.ère, 2.ème, ... de la fonction $\varphi_i(x,y)$ par rapport à y où l'on aura remplacé, après la différentiation, x par 1 et y par c, on trouve

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi_m(1,c)+\frac{\delta}{x}\varphi'_m(1,c)+\frac{\delta^2}{1.2\,x^2}\varphi''_m(1,c)+\frac{\delta^3}{1.2.3\,x^3}\varphi'''_m(1,c)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{x}\varphi_{m-1}(1,c)+\frac{\delta}{x^2}\varphi'_{m-1}(1,c)+\frac{\delta^2}{1.2.x^3}\varphi''_{m-1}(1,c)+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}(1,c)+\frac{\delta}{x^3}\varphi'_{m-2}(1,c)+\cdots\\&\qquad\quad+\frac{1}{x^3}\varphi_{m-3}(1,c)+\cdots\end{aligned}\right\}=0.$$

D'après la relation (5) le premier terme de cette équation est nul, et il reste après avoir multiplié par x

$$(8)\quad[\delta\varphi'_m(1,c)+\varphi_{m-1}(1,c)]+\mathrm{H}.\frac{1}{x}+\mathrm{G}.\frac{1}{x^2}+\cdots=0.$$

Or lorsqu'on fait croître x indéfiniment, δ a pour limite d, quantité finie; tous les termes, qui suivent le premier et qui sont des fonctions entières de la quantité finie δ, tendent vers zéro; l'équation (8) se réduit à

$$\mathrm{d}\,\varphi'_m(1,c)+\varphi_{m-1}(1,c)=0.$$

De là on conclut

$$(9)\qquad(\mathrm{II})\quad \mathrm{d}=-\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)};$$

c.à.d. que l'ordonnée à l'origine, correspondant à un coefficient angulaire c, est égale à moins l'ensemble des termes du degré $(m-1)$, où l'on remplace x par 1 et y par c, divisé par la dérivée, par rapport à c, du premier membre de l'équation (I).

Remarque I. Nous venons de démontrer que, s'il y a une valeur réelle de d, elle doit vérifier l'équation (9); or, en raisonnant sur l'équation (8) comme il a été fait au N.° [505], on constatera que l'équation (8) admet une valeur réelle pour δ, lorsqu'on attribue à x des valeurs très-grandes; et que cette valeur de δ se rapproche indéfiniment de la valeur d, lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes. L'asymptote est donc, en général, complètement déterminée.

Remarque II. Nous avons dit que l'équation de la courbe pouvait être représentée par

$$(10)\qquad y=cx+\mathrm{d}+\varepsilon(x),\ \text{ou}\ \ y=cx+\delta$$

or, pour obtenir l'équation (7), nous avons substitué cette valeur dans l'équation (4) de la courbe elle-même; il semble donc que l'équation (7) devrait être une identité. C'est, en effet, ce qui aurait lieu, si la valeur de d, et la fonction δ qui entrent dans l'expression (10) de y et correspond à la quantité connue c, étaient elles-mêmes connues. Mais d et δ étant inconnues, l'équation (7) n'est pas une identité, et elle peut servir, comme il a été fait, à déterminer la quantité inconnue d, en faisant $x=\infty$; ce qui fait disparaître la quantité inconnue $\varepsilon(x)$.

509. **Discussion de la valeur de d:**

$$\mathrm{d}=-\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)}.$$

1.° : $\varphi_{m-1}(1,c)=0$, $\varphi'_{m-1}(1,c)\gtrless 0$;

on a alors une asymptote passant par l'origine des coordonnées. Lorsque l'équation de la courbe ne renferme pas de termes du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, toutes les asymptotes, pour lesquelles on n'a pas $\varphi'_m(1,c)=0$, passent par l'origine des coordonnées.

2.° : $\varphi_{m-1}(1,c)\gtrless 0$, $\varphi'_m(1,c)=0$;

il n'y a pas d'asymptote, ou mieux l'asymptote se trouve transportée à l'infini.

L'étude de ces cas particuliers ne pourra être faite convenablement qu'à l'aide de la seconde méthode.

3.° $\varphi_{m-1}(1,c)=0$, $\varphi'_m(1,c)=0$,

la valeur de l'ordonnée se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour obtenir, dans ce cas, les valeurs de l'ordonnée, il faut revenir à l'équation (7). Après avoir introduit ces hypothèses et multiplié par x^2, on trouve en faisant croître

x indéfiniment

$$(11)\qquad \frac{d^2}{2}\,\varphi''_m(1,c)+d\,\varphi'_{m-1}(1,c)+\varphi_{m-2}(1,c)=0.$$

Les valeurs de d sont alors données par une équation du second degré; cependant le nombre des asymptotes n'est pas augmenté, car, pour cette valeur de c, on a à la fois

$$\varphi_m(1,c)=0,\ \varphi'_m(1,c)=0;$$

c.à.d. que l'équation (5), qui donne les coefficients angulaires, a deux racines égales; les asymptotes correspondantes sont deux droites parallèles.

Si l'on avait en même temps, en outre des relations qui précèdent:

$$\varphi''_m(1,c)=0,\ \varphi'_{m-1}(1,c)=0,\ \varphi_{m-2}(1,c)=0,$$

l'équation (11) se réduirait à une identité, et les valeurs des ordonnées dépendraient alors d'une équation du troisième degré; mais nous remarquerons que, dans ce cas, l'équation (5) a trois racines égales.

Remarque I. De cette discussion nous concluons que, si m est le degré de l'équation (5) en c, il y a au plus m asymptotes non parallèles à l'axe des y.

S'il n'y a pas d'asymptotes parallèles à l'axe des y, l'équation $\varphi_m(1,c)=0$ est, au plus, du degré m par rapport à c.

S'il y a des asymptotes parallèles à l'axe des y, et si p est le nombre de ces asymptotes, la plus haute puissance de y qui entre dans l'équation de la courbe est y^{m-p} N.° [504]; car, c'est le coefficient de la plus haute puissance de y qui doit donner, en l'égalant à zéro, ces p asymptotes. Par suite, l'équation $\varphi_m(1,c)=0$, qui s'obtient en égalant à l'ensemble des termes du degré le plus élevé et en y faisant $y=c$, sera, au plus, du degré $(m-p)$; et, par suite, il y aura plus $(m-p)$ asymptotes non parallèles à l'axe des y; c.à.d. qu'il y a, au plus, m asymptotes en tout. Donc

Une courbe du $m^{ième}$ degré a, au plus, m asymptotes, tant parallèles que non parallèles à l'axe des y.

Remarque II. Lorsqu'un point (x,y) est un point double de la courbe, on a $f'_x=0$, $f'_y=0$, et le coefficient angulaire de la tangente $-\frac{f'_x}{f'_y}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais si l'on considère un point voisin, correspondant à $(x+h)$, la nouvelle valeur de la fraction précédente représentera encore le coefficient angulaire de la tangente en ce point voisin. On pourra appliquer à ce cas la règle de la détermination des valeurs limites des fractions $\frac{0}{0}$; en regardant x comme variable, et prenant le quotient des dérivées par rapport à x, il vient

$$-\frac{f''_{xx}+y'_x\,f''_{xy}}{f''_{yx}+y'_x\,f''_{yy}};$$

désignons par m la valeur limite de y'_x lorsque x et y prennent les valeurs qui correspondent au point double, on a

$$m=-\frac{f''_{xx}+m f''_{xy}}{f''_{xy}+m f''_{yy}},\ \text{d'où}\ m^2 f''_{yy}+2m f''_{xy}+f''_{xx}=0;$$

c'est l'équation qui déterminent les coefficients angulaires des tangentes au point double N.° [472].

Cette règle est-elle applicable à la valeur (9) de d N.° [508], lorsque cette fraction se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur de c telle que c_0? Non; car le second membre de la fraction en question ne représente plus l'ordonnée à l'origine d'une asymptote lorsqu'on attribue à c la valeur c_0+h, h étant aussi petit qu'on voudra mais différent de zéro, puisque l'équation $\varphi_m(1,c)=0$ n'est plus vérifiée pour $c=c_0+h$. Ainsi la fraction $-\frac{\varphi_{m-1}(1,c_0)}{\varphi'_m(1,c_0)}$ ne représente plus l'ordonnée à l'origine d'une asymptote; par conséquent, lorsqu'on soumettra cette fraction au raisonnement connu pour en obtenir la valeur limite, on trouvera bien une valeur limite, mais qui n'a aucun rapport avec la quantité d qu'on cherche. La chose est d'ailleurs visible à priori, puisque l'équation (11) N.° [509] donne les valeurs de d dépend des termes du degré $(m-2)$ de l'équation proposée, et que la fraction $\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)}$ est complètement indépendante de ces termes.

510. **Position de la courbe par rapport aux asymptotes.**

Dans les courbes algébriques, la courbe, à partir d'un certain point, finit toujours par être du même côté de l'asymptote.

Soit Y l'ordonnée de l'asymptote correspondant à une certaine valeur de x, et y l'ordonnée de la courbe correspondant à la même abscisse; on a N.° [500]

$$(12)\qquad y = cx + d + \varepsilon, \text{ ou } y - Y = \varepsilon;$$

si ε est positif, l'ordonnée de la courbe est plus grande que l'ordonnée de l'asymptote; ce sera l'inverse, si ε est négatif. On peut donc conclure du signe de ε la position de la courbe par rapport à son asymptote. Or l'équation (7) N.° [507] donne:

$$\left.\begin{array}{l}(d+\varepsilon)\,\varphi'_m(1,c) + \varphi_{m-1}(1,c) + \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{\delta^2}{2}\varphi''_m(1,c) + \delta\,\varphi'_{m-1}(1,c) + \varphi_{m-2}(1,c)\right] \\ \quad + \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{\delta^3}{1.2.3}\varphi'''_m(1,c) + \dfrac{\delta^2}{1.2}\varphi''_{m-1}(1,c) + \dfrac{\delta}{1}\varphi'_{m-2}(1,c) + \varphi_{m-3}(1,c)\right] + \dfrac{1}{x^3}(\;) + \cdots\end{array}\right\} = 0,$$

équation, dans laquelle on a

$$\delta = d + \varepsilon.$$

Eu égard à la valeur (9) de d N.° [508], les premiers termes se réduisent à $\varepsilon\,\varphi'_m(1,c)$; de là nous conclurons, en supposant $\varphi'_m(1,c)$ différent de zéro:

$$(13)\qquad \varepsilon = -\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m(1,c) + \delta\,\varphi'_{m-1}(1,c) + \varphi_{m-2}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)} - \frac{1}{x^2}H_1 - \frac{1}{x^3}\cdot G_1 \;\ldots\ldots$$

Le second membre est un polynome ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; les numérateurs sont finis, car ce sont des fonctions entières de c qui est fini, et de δ qui se compose de la quantité finie d et de la quantité ε indéfiniment décroissante lorsque x croît. Or on peut donner à x une valeur assez grande de façon que, pour cette valeur et pour toute valeur plus grande, le signe du second membre soit le même que le signe du premier terme

$$-\frac{1}{x}\;\frac{\varphi_{m-2}(1,c) + \delta\,\varphi'_{m-1}(1,c) + \frac{\delta^2}{1.2.}\varphi''_m(1,c)}{\varphi'_m(1,c)}.$$

Dans cette expression, entre δ, qui dépend de d et de l'inconnue ε; mais, lorsque x croît indéfiniment, ε tend vers zéro; on peut donc prendre x assez grand pour que le signe du numérateur soit le même que celui de la quantité indépendante de ε; de sorte que le signe du second membre de l'équation (13) sera le même que celui de la fraction

$$(14)\qquad -\frac{1}{x}\;\frac{\varphi_{m-2}(1,c) + d\,\varphi'_{m-1}(1,c) + \frac{d^2}{2}\varphi''_m(1,c)}{\varphi'_m(1,c)}.$$

Donc, à partir d'une valeur de x suffisamment grande, x croissant indéfiniment, le signe de ε restera toujours le même et sera celui de l'expression (14); c. à. d. que

A partir d'un point suffisamment éloigné, la courbe se trouve d'un certain côté de l'asymptote, et reste toujours de ce même côté lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe.

Remarque. La propriété que nous venons de démontrer est caractéristique pour les courbes algébriques, car elle n'a pas toujours lieu dans les courbes transcendantes. Ainsi la courbe

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

a pour asymptote l'axe des x; elle coupe l'axe des x en un nombre infini de points séparés par un intervalle constant et égal à π; la hauteur des portions d'arcs, correspondant à ces intervalles, diminue de plus en plus; on voit que la courbe oscille autour de son asymptote en s'en rapprochant indéfiniment.

V.° Remarques générales.

511. 1.° Une asymptote, dans les courbes algébriques, est toujours asymptote à deux branches de la courbe.

Cette proposition résulte de la discussion faite au N.° (505); on peut encore la démontrer comme il suit.

Supposons qu'une courbe ait une asymptote et prenons cette asymptote pour axe des x, soit alors

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$

l'équation de la courbe; de sorte que, pour $x=\infty$, on a $y=0$; soit MA une branche infinie asymptote à Ox.

Posons $x=\frac{1}{t}$, l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{t},y\right)=\varphi(t,y)=0;$$

ce sera l'équation d'une courbe algébrique, transformée de la proposée; nous regarderons t comme représentant toujours des abscisses qui seront comptées sur la droite Ox.

Lorsque x croît indéfiniment, une des valeurs de y de l'équation (1) tend vers zéro, on a une branche infinie MA asymptote de Ox; lorsque x croît indéfiniment, la variable t tend vers zéro, et l'équation (2) fournissant pour ~~x~~ les mêmes valeurs que l'équation (1), une valeur de y tendra alors vers zéro; nous aurons donc, dans la courbe transformée, une branche NO qui vient se terminer à l'origine. Par conséquent, si la courbe (1) n'avait que la seule branche infinie MA asymptote à la droite Ox, la courbe (2) posséderait une seule branche passant par l'origine et s'arrêtant en ce point, car si la courbe NO avait deux branches terminées en O, la courbe primitive MA aurait deux branches touchant Ox. Ainsi la courbe (2) aurait un point d'arrêt; ce qui ne peut avoir lieu, N.° (482), puisque l'équation (2) est algébrique. Il existe donc une seconde branche infinie ayant pour asymptote l'axe des x. C. Q. F. D.

Cette proposition pourrait aussi se démontrer en faisant la perspective de la courbe N.° (43), etc....

512. 2.° Une asymptote est, en général, la limite des positions d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie de la courbe.

L'équation de la tangente, en un point (x,y) de la courbe

$$(1) \qquad f(x,y)=\varphi_m(x,y)+z\,\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots\cdots=0,$$

est, en désignant par X, Y, les coordonnées courantes:

$$(2) \qquad Xf'_x+Yf'_y+f'_z=0,$$

avec la condition

$$(3) \qquad f(x,y)=0, \text{ ou } xf'_x+yf'_y+f'_z=0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est $\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right)$; on tire de la relation (3)

$$-\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{y}{x}+\left(\frac{f'_z}{f'_y}\right)\cdot\frac{1}{x};$$

or si l'on fait croître x indéfiniment, et si l'on suppose que $\left(\frac{f'_z}{f'_y}\right)$ reste finie, il vient

$$(4) \qquad \lim\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right)=\lim\frac{y}{x}=c;$$

c.à.d. que le coefficient angulaire de la tangente a pour limite le coefficient angulaire de l'asymptote; la tangente est donc parallèle à l'asymptote.

L'ordonnée à l'origine de la tangente est $\left(-\frac{f'_z}{f'_y}\right)$; or de l'équation (1) on déduit (on a fait $z=1$ après la différentiation)

$$-\frac{f'_z}{f'_y}=-\frac{\varphi_{m-1}(x,y)+2\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots\cdots}{\varphi'_{y\,m}(x,y)+\varphi'_{y\,m-1}(x,y)+\cdots\cdots},$$

expression qui peut encore s'écrire en divisant les deux termes de la fraction par x^{m-1}

$$-\frac{f'_z}{f'_y}=-\frac{\varphi_{m-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{2}{x}\,\varphi_{m-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{x^2}\,\varphi_{m-3}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\cdots}{\varphi'_{y\,m}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\,\varphi'_{y\,m-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\,\varphi''_{m-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\cdots}.$$

Maintenant, si l'on fait croître x indéfiniment, comme $\lim\frac{y}{x}=c$, d'après ce qui vient d'être démontré, il en résulte

$$(5)\qquad \lim\left(-\frac{f'_z}{f'_y}\right)=-\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m\ (1,c)}=d\qquad \text{N}^{\circ}\ [508],$$

c.a.d. que l'ordonnée à l'origine de la tangente a pour limite l'ordonnée à l'origine de l'asymptote.

Remarque. La propriété que nous venons de constater peut ne plus exister même pour des asymptotes à distance finie, lorsque la courbe est transcendante.

Ainsi les courbes

$$(1^{\circ})\qquad y=\frac{\sin x}{x},\quad (2^{\circ})\quad y=\frac{\sin x^2}{x},$$

ont pour asymptote l'axe des x.

Pour la première, le coefficient angulaire de la tangente est

$$y'_x=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2};$$

sa valeur est nulle pour $x=\infty$; on retrouve bien la direction de l'asymptote.

Mais l'ordonnée à l'origine de la tangente, savoir

$$y-xy'_x,\ \text{ou}\ \left(\frac{\sin x}{x}-\frac{x\cos x-\sin x}{x}\right),\ \text{ou}\left(2\,\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),$$

est indéterminée pour $x=\infty$, car $\cos.\infty$ est une quantité indéterminée.

Pour la deuxième courbe, le coefficient angulaire de la tangente est

$$y'_x=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2},$$

quantité qui reste indéterminée lorsqu'on suppose $x=\infty$.

On pourra vérifier dans le second cas que la quantité $-\frac{f'_z}{f'_y}$ est infinie pour $x=\infty$.

513. Trouver l'équation générale des courbes d'ordre m ayant p asymptotes parallèles à une direction donnée.

Prenons l'axe des y parallèle à la direction donnée, les p asymptotes auront pour équations

$$x-a_1=0,\ x-a_2=0,\ \ldots,\ x-a_p=0;$$

nous poserons :

$$(1)\qquad \varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_p).$$

Puisqu'il y a p asymptotes parallèles à l'axe des y, la plus haute puissance de y qui doive entrer dans l'équation de la courbe est $(m-p)$; l'équation de la courbe sera donc de la forme

$$A_p\,y^{m-p}+A_{p+1}\,y^{m-p-1}+\cdots+A_{m-1}y+A_m=0;$$

et comme les asymptotes parallèles à l'axe des y s'obtiennent en égalant à zéro le coefficient de y^{m-p}, on devra avoir

$$A_p=\varphi(x),$$

car A_p est du $p^{\text{ème}}$ degré. L'équation cherchée est donc

$$(2)\qquad \varphi(x)\,y^{m-p}+A_{p+1}\,y^{m-p-1}+\cdots+A_{m-1}\,y+A_m=0;$$

$A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_m$ sont des fonctions entières de x et arbitraires, des degrés respectifs $(p+1), (p+2), \ldots, m$.

Il résulte de là que le nombre des coefficients arbitraires renfermés dans l'équation (2) est

$$(p+2)+(p+3)+\cdots+(m+1), \text{ ou } \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right].$$

Si l'on suppose $p=m-1$, l'équation cherchée est alors

$$(3) \qquad (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{m-1})\cdot y+A_m=0,$$

équation de la forme

$$(3\text{ bis}) \qquad y=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

le polynome $\psi(x)$ est du degré m, le polynome $\varphi(x)$ est du degré $(m-1)$.

Remarque. Si l'on voulait qu'il y eût m asymptotes parallèles, l'équation de la courbe se réduirait à

$$(4) \qquad (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)=0,$$

c. à. d. que la courbe se composerait de m droites parallèles.

Ainsi: *Une courbe algébrique d'ordre m ne peut avoir m asymptotes parallèles à moins qu'elle ne se compose de m droites parallèles.*

Ceci est un cas particulier de la proposition suivante:

Une courbe algébrique d'ordre m ne peut avoir un point multiple d'ordre m, à une distance finie, à moins qu'elle ne se compose de m droites concourantes.

En effet, l'équation de la courbe étant mise sous la forme

$$(5) \qquad \varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\cdots+\varphi_1(x,y)+\varphi_0=0,$$

choisissons le point multiple pour origine; une droite quelconque, passant par ce point,

$$y=\lambda x,$$

doit rencontrer la courbe en m points coïncidents, c. à. d. que le premier membre de l'équation (5), lorsqu'on a fait $y=\lambda x$, doit être divisible par x^m, quel que soit λ; or ceci exige que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ soient identiquement nulles; l'équation de la courbe se réduit alors à

$$\varphi_m(x,y)=0,$$

équation qui représente m droites passant par l'origine.

Nous verrons plus loin que, lorsqu'une courbe a m asymptotes parallèles, cette courbe possède à l'infini un point multiple d'ordre m; la proposition énoncée d'abord est donc un cas particulier de celle que nous venons de démontrer.

514. **Équation générale des courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre ayant m asymptotes données non parallèles.**

Soient

$$(1) \qquad y-a_1x-b_1=0,\ y-a_2x-b_2=0, \ldots\ y-a_mx-b_m=0,$$

les équations des m droites données, l'équation générale des courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre, ayant pour asymptotes ces m droites, sera

$$(2) \qquad (y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)\cdots(y-a_mx-b_m)+\varphi(x,y)=0,$$

$\varphi(x,y)$ étant une fonction du degré $(m-2)$ en x et y, dont les coefficients sont complètement arbitraires.

Vérifions d'abord que la courbe représentée par cette équation a pour asymptotes les m droites données.

On sait que les coefficients angulaires des asymptotes d'une courbe sont donnés No. [507] par l'équation

$$\varphi_m(1,c)=0;$$

ici, l'ensemble des termes du degré m est

$$(y-a_1x)(y-a_2x)\cdots(y-a_mx);$$

les coefficients angulaires des asymptotes seront donc donnés par l'équation

$$(3) \qquad (c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_m)=0;$$

par conséquent, les asymptotes seront parallèles aux droites proposées.

Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, rappelons la formule No. [508]

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)},$$

laquelle devient, dans le cas actuel

$$d = -\frac{-b_1(c-a_2)\cdots(c-a_m) - b_2(c-a_1)(c-a_3)\cdots(c-a_m) - \cdots}{(c-a_2)(c-a_3)\cdots(c-a_m) + (c-a_1)(c-a_3)\cdots(c-a_m) + \cdots}.$$

Pour la direction $c = a_1$, on trouve $d = b_1$; donc la droite

$$y = a_1 x + b_1,$$

est bien asymptote de la courbe. La même démonstration s'applique aux $(m-1)$ autres droites.

On peut encore démontrer cette proposition en partant de la définition même des asymptotes. Soit δ la distance d'un point (x, y) de la courbe à la droite, par exemple,

$$y - a_1 x - b_1 = 0;$$

vérifions que cette distance tend vers zéro lorsque le point (x, y) s'éloigne à l'infini dans la direction de la droite, c. à d. lorsqu'on a

$$\lim \frac{y}{x} = a_1.$$

D'après la formule connue, on sait que

$$\delta = \frac{y - a_1 x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}}; \text{ d'où } y - a_1 x - b_1 = \delta\sqrt{a_1^2 + 1}.$$

Mais x, y, étant les coordonnées d'un point de la courbe, on devra avoir, en substituant cette valeur dans l'équation (2)

$$\delta\sqrt{a_1^2+1}\,.\,(y - a_2 - b_2)\cdots(y - a_m x - b_m) + \varphi(x,y) = 0;$$

d'où l'on déduit, en résolvant par rapport à δ et en divisant les deux termes de la fraction par x^{m-1}:

$$\delta = -\frac{\frac{1}{x^{m-1}}\varphi(x,y)}{\sqrt{a_1^2+1}\left(\frac{y}{x} - a_2 - \frac{b_2}{x}\right)\left(\frac{y}{x} - a_3 - \frac{b_3}{x}\right)\cdots\left(\frac{y}{x} - a_m - \frac{b_m}{x}\right)}.$$

Or si l'on suppose que le point s'éloigne à l'infini sur la courbe, de façon que $\lim \frac{y}{x} = a_1$, le dénominateur a une limite finie; le numérateur a pour limite zéro, car $\varphi(x, y)$ est du degré $(m-2)$ au plus.

Enfin, nous pouvons arriver à la même conclusion en démontrant que les droites proposées sont tangentes à la courbe aux points où cette courbe est rencontrée par la droite de l'infini. En effet, si l'on rend l'équation (2) homogène, il vient

$$(4) \quad (y - a_1 x - b_1 z)(y - a_2 x - b_2 z)\cdots(y - a_m x - b_m z) + z^2\varphi(x,y,z) = 0.$$

Or, si on cherche l'intersection de la courbe avec la droite

$$y - a_1 x - b_1 z = 0,$$

par exemple, on trouve

$$z^2\varphi(x,y,z) = 0;$$

équation dont le premier membre est divisible par z^2; la droite en question touche donc la courbe à l'infini; elle est, par suite, asymptote.

Il nous reste maintenant à démontrer que l'équation (2) est l'équation la plus générale des courbes du $m^{ème}$ ordre ayant pour asymptotes les m droites données. Pour cela, remarquons que se donner une asymptote revient à établir deux relations entre les coefficients de l'équation de la courbe; en effet, une asymptote étant une tangente à la courbe en un point à l'infini, on exprimera qu'une droite est asymptote en cherchant son intersection avec la courbe, et en écrivant que l'équation obtenue a deux racines infinies; ce qui conduira à deux relations entre les coefficients. Donc, puisqu'on se donne m asymptotes, on a par là même $2m$ conditions. Mais l'équation d'une courbe du degré m contient No. (36)

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \text{ termes, ou } \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right] \text{ coefficients arbitraires,}$$

c.à.d. que la courbe est déterminée par $\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right]$ conditions simples.

Or la courbe étant déja assujettie à avoir m asymptotes données, il suffira, pour la déterminer complètement, de se donner

$$\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1-2m\right] \text{ ou } \frac{(m-1)m}{2}$$

points; par conséquent, son équation ne devra plus renfermer que $\frac{(m-1)m}{2}$ paramètres complètement arbitraires. Or la fonction $\varphi(x,y)$, du degré $(m-2)$, contient précisément ce nombre de termes; et, comme le premier membre de l'équation (2) a été divisé par le coefficient de y^m, les coefficients de tous les termes de $\varphi(x,y)$ restent arbitraires; l'équation (2) renferme ainsi $\frac{(m-1)m}{2}$ constantes arbitraires.

Application.

L'équation la plus générale des courbes du second ordre ayant pour asymptotes les deux droites

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ A_1x+B_1y+C_1=0, \end{cases}$$

est

$$(5) \qquad (Ax+By+C)(A_1x+B_1y+C_1)=k$$

k étant une constante arbitraire.

---

§II Étude des points à l'infini. (2ème Méthode)

1° Détermination générale. Directions asymptotiques.

515. Voir aux N.os [42], [43], [44], [45], [46] les développements donnés sur la conception de la droite de l'infini.

Nous mettrons l'équation de la courbe sous la forme suivante

$$(1) \qquad \varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,y)+\cdots+z^m\varphi_0=0,$$

φ_i représentant une fonction homogène et du degré i par rapport aux variables x et y.

Les points où cette courbe est rencontrée par la droite de l'infini $(z=0)$ sont donnés par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} z=0, \\ \varphi_m(x,y)=0. \end{cases}$$

Soit

$$(3) \qquad \varphi_m(x,y)=(y-ax)(y-a_1x)\ldots(y-a_{m-1}x);$$

nous aurons ainsi m points situés sur la droite de l'infini et déterminés par les m droites que fournit la seconde des équations (2); nous appellerons **directions asymptotiques** les m droites passant par l'origine et données par l'équation

$$(3\,bis) \qquad \varphi_m(x,y)=(y-ax)(y-a_1x)\ldots(y-a_{m-1}x)=0.$$

Les **directions asymptotiques** sont donc les droites qui joignent un point du plan aux points où la courbe est rencontrée par la droite de l'infini.

516. Considérons un des points à l'infini, le point

$$i \begin{cases} z=0, \\ y-ax=0; \end{cases}$$

et cherchons la tangente au point i, c.à.d. l'asymptote correspondant à ce point. Dans ce but, prenons une droite

quelconque passant par le point i,

$$(4) \qquad y - ax = \lambda z;$$

et déterminons les intersections de cette droite avec la courbe. La substitution de la valeur (4) de y, dans l'équation (1), donne, en développant d'après la formule de Taylor:

$$(5) \quad \left.\begin{array}{l} x^m \varphi_m(1,a) + x^{m-1} z \left[\lambda \varphi'_m(1,a) + \varphi_{m-1}(1,a)\right] \\ + x^{m-2} z^2 \left[\frac{\lambda^2}{1.2} \varphi''_m(1,a) + \frac{\lambda}{1} \varphi'_{m-1}(1,a) + \varphi_{m-2}(1,a)\right] \\ + x^{m-3} z^3 \left[\frac{\lambda^3}{1.2.3} \varphi'''_m(1,a) + \frac{\lambda^2}{1.2} \varphi''_{m-1}(1,a) + \frac{\lambda}{1} \varphi'_{m-2}(1,a) + \varphi_{m-3}(1,a)\right] \\ + \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0;$$

la notation $\varphi_i^p(1,a)$ indique qu'on a pris la dérivée $p^{\text{ème}}$, par rapport à y, de la fonction $\varphi_i(x,y)$, et que, dans cette dérivée, on a remplacé x par 1, et y par a.

Comme le terme $\varphi_m(1,a)$ est nul, nous concluons de l'équation (5) que

Une droite quelconque, parallèle à une direction asymptotique, rencontre la courbe en un point à l'infini et en $(m-1)$ autres points, en général, à distance finie.

II.° Points simples à l'infini.

516. Nous supposons que le point i, à l'infini, est un point simple, c.à.d. que les fonctions

$$\varphi'_{y\,m}(x,y), \quad \varphi_{m-1}(x,y)$$

ne s'annulent pas pour $x=1$, $y=a$, ou, ce qui revient au même, n'admettent pas le facteur $(y-ax)$; nous verrons plus loin que, si cela a lieu, le point i est un point multiple.

Pour obtenir la tangente en i, nous exprimerons que la droite (4) rencontre la courbe en deux points confondus avec le point i, c.à.d. que nous déterminerons λ par la condition que le premier membre de l'équation (5) est divisible par z^2. Or $\varphi_m(1,a)$ est nul, le premier membre de l'équation (5) sera donc divisible par z^2, ou la droite (4) sera asymptote, si nous prenons pour λ la valeur

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{\varphi_{m-1}(1,a)}{\varphi'_m(1,a)}.$$

Les asymptotes sont parallèles aux directions asymptotiques; il peut arriver que l'asymptote se trouve transportée à l'infini, mais en étant toujours parallèle à la direction asymptotique correspondante.

517. Discussion de la valeur de λ.

1.° $\varphi_{m-1}(1,a) = 0$, $\varphi'_m(1,a) \gtrless 0$;

alors $\lambda = 0$, c.à.d. que l'asymptote coïncide avec la droite $(y-ax)=0$; dans ce cas, l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(y-ax)u_{m-1} + (y-ax)u_{m-2}\, z + z^2 \varphi_{m-2} + z^3 \varphi_{m-3} + \cdots = 0,$$

les u_i désignant, comme les φ_i, des fonctions homogènes et de degré i par rapport aux variables x et y.

2.° $\varphi'_m(1,a) = 0$, $\varphi_{m-1}(1,a) \gtrless 0$;

alors $\lambda = \infty$, c.à.d. que l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique correspondante, car l'équation (4) donne $z=0$. Dans ce cas l'équation de la courbe a la forme

$$(y-ax)^2 u_{m-2} + z\varphi_{m-1} + z^2 \varphi_{m-2} + \cdots = 0.$$

La parabole nous offre un exemple de ce cas particulier.

Si les deux termes de la valeur de λ étaient nuls à la fois, on aurait un point double, comme nous le constaterons tout-à-l'heure.

518. ## Remarques.

I. Il peut arriver que, pour la valeur a et la valeur correspondante de λ, le coefficient de z^2 (équation (5)) s'annule; le point à l'infini serait alors un point d'inflexion. Ce n'est pas, en effet, un point double, car une droite quelconque, passant par le point i, ne rencontre pas la courbe en deux points coïncidents, puisqu'on suppose que $\varphi'_m(1,a)$ et $\varphi_{m-1}(1,a)$ ne sont pas nuls à la fois.

Le contact de l'asymptote, en supposant toujours le point simple, serait du ($p^{ème}$ ordre), si les valeurs de a et λ annulaient à la fois les coefficients de $z, z^2, z^3, \ldots, z^{p-1}, z^p$; car le premier membre de l'équation (5) serait alors divisible par z^{p+1}.

II. Lorsque l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(7) \qquad (y-ax)^p u_{m-p} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \cdots\cdots = 0,$$

$\varphi_{m-1}(x,y)$ n'admettant pas le facteur $(y-ax)$; la droite à l'infini a un contact du $(p-1)^{ème}$ ordre au point à l'infini

$$i \begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

En effet, si de l'équation (4) nous tirons la valeur de y pour la substituer dans l'équation (7), il vient

$$(8) \qquad \lambda^p z^p u_{m-p}(x, ax+\lambda z) + z x^{m-1}\varphi_{m-1}(1,a) + z^2 x^{m-2}[\lambda\varphi'_{m-1}(1,a) + \varphi_{m-2}(1,a)] + \cdots = 0.$$

Nous voyons d'abord que le point i n'est pas un point multiple, car une droite quelconque, passant par ce point, n'y rencontre la courbe qu'en un seul point, puisque $\varphi_{m-1}(1,a)$ n'est pas nul d'après notre hypothèse.

En second lieu, la droite (4) ne peut être tangente c.à.d. que le terme en z (équation (8)) ne peut disparaître à moins que λ ne soit infini; donc l'asymptote se trouve transportée à l'infini parallèlement à la direction asymptotique $y - ax = 0$.

Enfin, cette droite à l'infini a avec la courbe, au point i, un contact du $(p-1)^{ème}$ ordre; car, si, dans l'équation (7), on fait $z = 0$, on trouve

$$(y-ax)^p u_{m-p} = 0;$$

cette droite rencontre donc la courbe en p points confondus avec le point i.

N. B. Cette étude se fera plus rapidement et plus nettement, en posant

$$(4\,bis) \qquad z = \mu(y-ax),$$

et, en remplaçant, dans l'équation (7), z par cette valeur; il vient alors

$$(8\,bis) \quad (y-ax)^p u_{m-p} + \mu(y-ax)\varphi_{m-1} + \mu^2(y-ax)^2\varphi_{m-2} + \cdots\cdots = 0.$$

Cette équation représente des droites passant par l'origine et par les points où la droite (4 bis) rencontre la courbe proposée.

Si l'on veut exprimer que la droite (4 bis) est tangente, il faudra que le premier membre de l'équation (8 bis) admette comme facteur $(y-ax)^2$ ou une puissance plus élevée; ce qui exige que l'on ait $\mu = 0$, d'où $z = 0$; et le premier membre est, dans ce cas, divisible par $(y-ax)^p$.

En particulier, si l'équation de la courbe est de la forme

$$(y-ax)^3 u_{m-3} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \cdots = 0,$$

le point à l'infini ($z = 0$, $y - ax = 0$) sera un point d'inflexion ayant pour tangente la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique.

Si l'équation de la courbe est de la forme

$$(y-ax)^2(y-a_1x)^2(y-a_2x)^2 u_{m-6} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \cdots = 0,$$

$\varphi_{m-1}(x,y)$ ne contenant aucun des facteurs binômes qui entrent au carré dans $\varphi_m(x,y)$; la droite de l'infini sera une tangente triple.

III. Lorsque les coefficients angulaires de deux directions asymptotiques sont $\pm\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe a la forme

$$(x^2+y^2)\, u_{m-2} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + \cdots = 0;$$

la courbe passe par les points circulaires à l'infini.

IV. Le mode de recherche qui vient d'être exposé est complètement indépendant de la forme particulière $(y-ax)$ qui a été choisie pour définir la direction asymptotique. Lorsque la direction asymptotique est l'axe des x ou l'axe des y, la droite passant par le point correspondant à l'infini aura pour équation $y-\lambda z=0$, ou $x-\lambda z=0$, et le calcul indiqué dans les N.os (515) etc. devient alors beaucoup plus simple.

III.e Points doubles à l'infini.

519. Rappelons d'abord la classification des points doubles. En un point double, il y a deux tangentes; et trois cas peuvent se présenter:

1.° Les deux tangentes sont réelles: point double ordinaire.

2.° Les deux tangentes sont imaginaires: point double isolé.

3.° Les deux tangentes se confondent:
- I. point de rebroussement { 1.ère espèce ; 2.ème espèce }
- II. point de rebroussement isolé,
- III. Contact de deux branches de la courbe;

dans le rebroussement de 2.ème espèce et dans le contact de deux branches, la tangente a un contact d'ordre plus élevé que dans le rebroussement de 1.ère espèce, N.o (479).

Considérons toujours la direction asymptotique $y-ax=0$, et le point à l'infini correspondant

$$i \begin{cases} z=0 \\ y-ax=0. \end{cases}$$

Supposons qu'on ait (équation (5))

$$\varphi_m(1,a)=0,$$
$$\varphi'_m(1,a)=0,$$
$$\varphi_{m-1}(1,a)=0,$$

c. à. d. que l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(9)\qquad (y-ax)^2 u_{m-2} + z(y-ax)v_{m-2} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \cdots = 0;$$

la valeur (6) de λ est alors indéterminée.

Une droite quelconque passant par le point i, savoir

$$y-ax=\lambda z,$$

y rencontre la courbe en deux points coïncidents, car le premier membre de l'équation (9) est divisible par z^2 quelque soit λ; le point i est donc un point double.

Les deux tangentes proprement dites en ce point double s'obtiendront en déterminant λ de manière à ce que le premier membre de l'équation soit divisible par z^3. D'après l'équation (5) nous aurons, pour déterminer λ, l'équation

$$(10)\qquad \frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_m(1,a) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{m-1}(1,a) + \varphi_{m-2}(1,a) = 0.$$

On a ainsi deux valeurs pour λ; les deux tangentes en un point double à l'infini sont donc deux asymptotes parallèles; c'est visible à priori.

520. Discussion de l'équation (10).

1.° Les deux racines de l'équation (10) sont réelles et inégales, on a un point double à l'infini dont les deux tangentes sont deux asymptotes parallèles à la droite $y-ax=0$.

2.° Les deux racines sont imaginaires; on a un point double isolé à l'infini.

3.° Les deux racines sont égales: on a à l'infini un point de rebroussement proprement dit ou un point de rebroussement isolé suivant que les branches de courbe correspondant à cette direction asymptotique sont réelles ou imaginaires.

4.° Une des racines est infinie: une des tangentes au point double est alors la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y-ax)^3 u_{m-3} + z(y-ax)u_{m-2} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \cdots = 0.$$

5° Les deux racines sont infinies : les deux tangentes au point double se confondent avec la droite à l'infini, on a un rebroussement à l'infini et la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y-ax)^3 u_{m-3} + z(y-ax)^2 v_{m-3} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \cdots = 0.$$

6° Lorsque le coefficient angulaire a a la valeur particulière $\sqrt{-1}$ l'équation de la courbe, si l'on suppose ses coefficients réels, se présentera alors sous la forme [d'après l'équation (9)]

$$(x^2+y^2)^2 u_{m-4} + z(x^2+y^2)u_{m-3} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \cdots = 0;$$

les deux points circulaires à l'infini sont deux points doubles de la courbe. Ces points sont, il est vrai, imaginaires, et ne s'offriront pas dans la représentation réelle de la courbe. Mais ils ont sur la classe de la courbe la même influence que les points doubles réels ; et on doit effectuer la recherche des points multiples imaginaires aussi bien que des points réels, si l'on veut connaître toutes les causes de la diminution de la classe dans une courbe donnée.

Remarque. Les tangentes proprement dites aux points doubles peuvent, comme dans le cas des points simples, avoir avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que le premier.

IV. Points multiples à l'infini.

521. Soit une direction asymptotique $(y-ax=0)$; l'équation d'une droite quelconque, passant par le point à l'infini i correspondant, sera

$$y - ax = \lambda z.$$

Si après avoir remplacé y par la valeur que fournit cette équation le premier membre de l'équation de la courbe est divisible par z^p, quel que soit λ, le point i sera un point multiple d'ordre p, car une droite quelconque y rencontre la courbe en p points confondus avec le point i.

Pour obtenir les tangentes proprement dites en ce point, il suffira de déterminer λ de manière à ce que le premier membre de l'équation soit divisible par z^{p+1}, on obtiendra ainsi p asymptotes parallèles à la direction asymptotique considérée. Les valeurs de λ seront données par l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de z^p (équation (5)).

La discussion présentera des variétés du même genre que celles que nous avons rencontrées dans les points doubles ; il n'y a là aucune difficulté théorique.

Nous terminerons par l'examen des diverses particularités qui peuvent se présenter lorsque plusieurs directions asymptotiques viennent à coïncider.

522. Soit par exemple

$$\varphi_m(x,y) = (y-ax)^p u_{m-p};$$

cherchons les singularités qu'on pourra rencontrer au point à l'infini

$$\begin{cases} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{cases}$$

1er Cas. L'équation de la courbe est de la forme

$$(\text{I}) \qquad (y-ax)^p u_{m-p} + z\varphi_{m-1} + z^2\varphi_{m-2} + z^3\varphi_{m-3} + \cdots = 0,$$

φ_{m-1} n'admettant pas le facteur $y-ax$.

Le point i est alors un point simple, l'asymptote est la droite à l'infini laquelle a avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre. Ce cas a été discuté remarque II N° [518].

2ème Cas. L'équation de la courbe est de la forme

$$(\text{II}) \quad \left.\begin{array}{l} (y-ax)^p u_{m-p} + z(y-ax)^{p-1} v_{m-p} + z^2(y-ax)^{p-2} w_{m-p} + \cdots + z^{p-1}(y-ax)t_{m-p} \\ + z^p\varphi_{m-p} + z^{p+1}\varphi_{m-p-1} + \cdots\cdots\cdots + z^m\varphi_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Le point i est alors un point multiple d'ordre p, car une droite quelconque, passant par le point i, y rencontre la courbe en p points

coïncidents.

3ème Cas. Le degré d'un des termes précédant z^p est, par rapport à z et (y−ax) à la fois, inférieur à p.

Ainsi l'équation serait de la forme

$$\text{(III)}\qquad (y-ax)^p u_{m-p}+\cdots+z^k(y-ax)^{p-k-i}u_{m-p+i}+\cdots+z^p\varphi_{m-p}+z^{p+1}\varphi_{m-p-1}+\cdots=0,$$

le degré des termes qui précèdent z^k étant par rapport à z et (y−ax) à la fois au moins égal à p.

Dans ce cas, le point $(z=0,\ y-ax=0)$ est un point multiple d'ordre (p−i), car une droite quelconque passant par ce point y rencontre la courbe en (p−i) points coïncidents seulement, quel que soit λ.

En outre la droite à l'infini touche la courbe au point i ; car, en cherchant l'intersection de la courbe avec la droite à l'infini z=0, on trouve

$$(y-ax)^p u_{m-p}=0;$$

donc cette droite rencontre la courbe en p points confondus avec le point i. Or une droite, passant par le point multiple d'ordre (p−i), aura avec la courbe un contact du 1er, 2ème, 3ème .... ordre, suivant qu'elle y rencontre la courbe en p−i+1, p−i+2, p−i+3, ... points. Mais la droite en question rencontre la courbe en (p−i)+i points ; on en conclut qu'elle a, avec la branche à laquelle elle est tangente proprement dite, un contact de l'ordre i. Donc la droite à l'infini a avec la courbe un contact de l'ordre i.

4ème Cas. L'équation de la courbe est de la forme

$$\text{(IV)}\qquad (y-ax)^p u_{m-p}+z^p\varphi_{m-p}+z^{p+1}\varphi_{m-p-1}+\cdots=0,$$

c. à d. l'équation ne contient aucune des puissances de z inférieures à p.

Le point i est encore un point multiple d'ordre p ; les p tangentes en ce point seront données par l'équation

$$\lambda^p u_{m-p}(1,a)+\varphi_{m-p}(1,a)=0.$$

Cette équation a une seule racine réelle si p est impair ; et elle n'a que deux racines réelles, ou aucune racine réelle, si p est pair ; donc par le point i $(z=0,\ y-ax=0)$ il peut ne passer aucune branche réelle de la courbe, il peut n'en passer qu'une seule, il peut en passer deux réelles au plus.

Ce qu'il faut ici remarquer, c'est que les asymptotes correspondant aux autres points à l'infini, coïncident avec les directions asymptotiques et ont avec la courbe un contact du (p−1)ème ordre.

Soit en effet

$$u_{m-p}=(y-a_1x)u_{m-p-1}\ ;$$

cherchons l'intersection avec la courbe de la droite

$$y-a_1x=\lambda z$$

passant par le point à l'infini $(z=0,\ y-a_1x=0)$.

On a d'après l'équation (IV)

$$\left.\begin{array}{l}[(a_1-a)x+\lambda z]^p\,\lambda z\left[u_{m-p-1}(1,a_1)x^{m-p-1}+zx^{m-p-1}u'_{m-p-1}(1,a)+\cdots\right]\\ \qquad +z^p\varphi_{m-p}(x,a_1x+\lambda z)+z^{p+1}\varphi_{m-p-1}(x,a_1x+\lambda z)+\cdots\end{array}\right\}=0.$$

On voit que pour obtenir la tangente au point i $(z=0,\ y-a_1x=0)$, il faudra faire $\lambda=0$, pourvu toutefois que $\varphi_m(x,y)$ ou u_{m-p} ne contienne pas $(y-a_1x)$ à une puissance égale à p ; le premier membre de l'équation est alors divisible par z^p, c. à d. que la droite $y-a_1x=0$ a avec la courbe un contact du (p−1)ème ordre.

V. Exemples.

523. Nous allons maintenant indiquer plusieurs courbes faciles à construire complètement et présentant les diverses singularités qu'on vient de signaler.

Nous appliquerons aux deux premiers exemples la méthode générale qu'on vient de développer.

1er Exemple. Soit la courbe

$$2yx^3-y^2-x=0.$$

ou en rendant l'équation homogène

$$(1) \qquad 2yx^3 - y^2z^2 - xz^3 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$yx^3 = 0.$$

Étudions d'abord le point à l'infini i $(y=0, z=0)$; l'axe des x est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par une droite quelconque passant par ce point

$$(2) \qquad y = \lambda z;$$

on a

$$(3) \qquad 2\lambda x^3 z - xz^3 - \lambda^2 z^4 = 0;$$

donc une droite quelconque passant par le point $(y=0, z=0)$ ne rencontre la courbe qu'en un seul point, car le premier membre de l'équation (3) n'admet que le facteur z, donc le point i est **un point simple**.
Exprimons que la droite (2) est tangente, il faut faire pour cela $\lambda=0$, et le premier membre de l'équation (3) est divisible par z^3, donc la droite $(y=0)$ rencontre la courbe au point simple i en trois points coïncidents; le point i à l'infini est donc **un point d'inflexion**, la droite $y=0$ est la tangente d'inflexion.
Étudions le point j $(x=0, z=0)$; l'axe des y est la direction asymptotique. Pour cela, cherchons l'intersection de la courbe (1) par la droite quelconque passant par le point j

$$(4) \qquad \lambda x - z = 0,$$

on a, en remplaçant z par λx

$$(5) \qquad -\lambda^2 y^2 x^2 - 2yx^3 - \lambda^3 x^4 = 0;$$

le premier membre de l'équation (5) est divisible par x^2 quelque soit λ, le point j est donc un point double. Pour que la droite (4) soit tangente il faut annuler le coefficient de x^2, ce qui donne $\lambda^2=0$; ainsi au point double j, les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z=0$; donc le point j est un point de rebroussement; la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. Lorsqu'on fait $\lambda=0$ le premier membre de l'équation (5) devient divisible par x^3, et seulement par x^3 c'est donc un rebroussement de 1ère espèce.

2ème Exemple. Soit la courbe

$$y^3 - y^2 - x = 0$$

ou en rendant l'équation homogène

$$(1) \qquad y^3 - y^2 z - xz^2 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$y^3 = 0.$$

On a donc la seule direction asymptotique $y=0$, c.à.d. l'axe des x; le point à l'infini correspondant i est $(y=0, z=0)$. Cherchons l'intersection de la courbe (1) par une droite quelconque passant par ce point

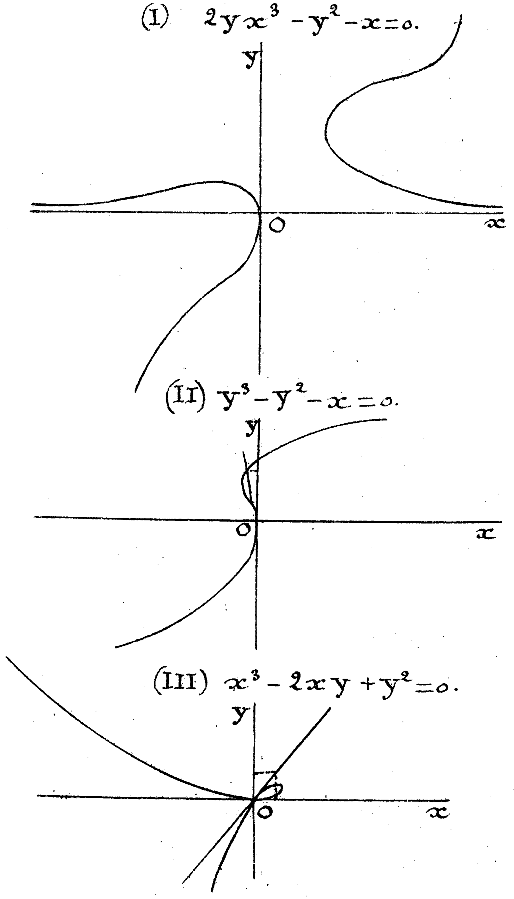
$$(2) \quad \lambda y - z = 0;$$

« (nous prenons ici, comme dans le dernier cas de la courbe précédente, $\lambda y - z = 0$ au lieu de $y - \lambda z = 0$; c'est qu'en prenant « cette seconde forme on est conduit à une valeur infinie pour λ; la première forme est alors plus commode pour la « discussion, et on pourra constater, dans l'étude des autres courbes l'utilité de cette remarque).
Cherchons l'intersection de la droite (2) avec la courbe (1), on a

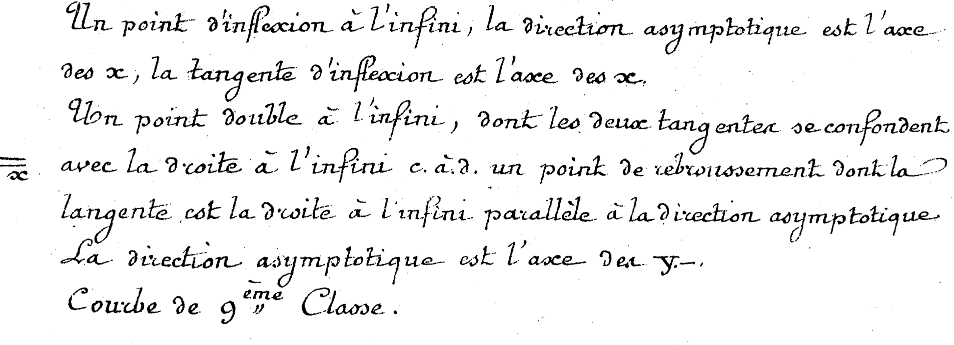
$$(3) \qquad -\lambda^2 xy^2 - \lambda y^3 + y^3 = 0;$$

le premier membre de l'équation (3) est divisible par y^2, quelque soit λ; le point i est donc un point double. Pour que la droite (2) soit tangente, il faut annuler le coefficient de y^2, ce qui conduit à $\lambda^2=0$; ainsi, au point double i les deux tangentes proprement dites se confondent avec la droite $z=0$, le point i est donc un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. — Lorsqu'on fait $\lambda=0$, le premier membre de l'équation (3) est et ne peut être divisible que par y^3; c'est un rebroussement de 1ère espèce.

Exemples.



(I) $2yx^3 - y^2 - x = 0.$



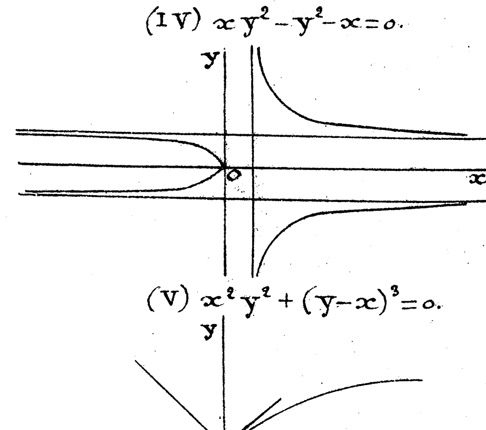
Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x, la tangente d'inflexion est l'axe des x.
Un point double à l'infini, dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini c. à d. un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique
La direction asymptotique est l'axe des y.–
Courbe de 9ème Classe.

(II) $y^3 - y^2 - x = 0.$

Un point double à l'infini dont les deux tangentes se confondent avec la droite à l'infini, c. à d. un point de rebroussement dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, la direction asymptotique est l'axe des x ; –.
Courbe de 3ème Classe.

(III) $x^3 - 2xy + y^2 = 0.$

Un point d'inflexion à l'infini, la tangente d'inflexion est la droite à l'infini, parallèle à la direction asymptotique qui est l'axe des y ; point double à l'origine.–
Courbe de 4ème Classe.



(IV) $xy^2 - y^2 - x = 0.$

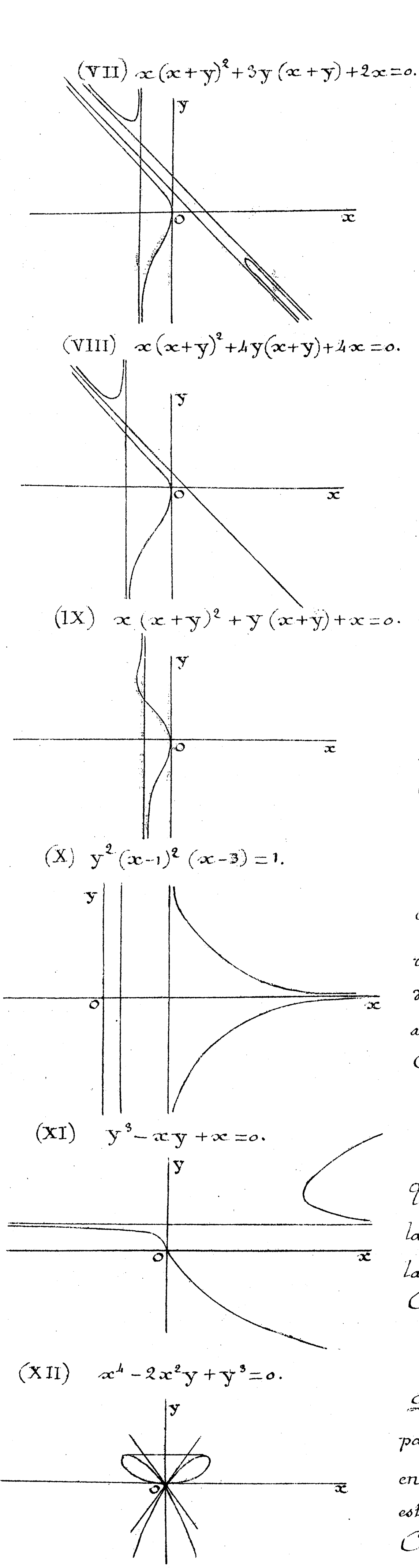
Un point d'inflexion à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y, – un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x, –
Courbe de 4ème Classe.

(V) $x^2y^2 + (y - x)^3 = 0.$

La droite à l'infini est une tangente double, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y ; – un point triple à l'origine dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle.–
Courbe de 4ème Classe.

(VI) $x^2y^2(y - x)^2 - (x + y)^5 = 0.$

La droite à l'infini est une tangente triple, les directions asymptotiques sont l'axe des x, l'axe des y et la bissectrice des axes ; – l'origine est un point quintuple dont les cinq tangentes se confondent, une seule branche est réelle.–
Courbe de 6ème Classe.–



Un point double à l'infini dont les asymptotes sont à des distances finies et réelles, la direction asymptotique est la 2ème bissectrice des axes, — un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. —
Courbe de 4ème Classe. —

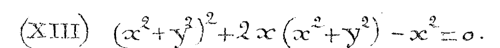
Un point de rebroussement à l'infini, la direction asymptotique est la 2ème bissectrice des axes, — un point simple à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y. —
Courbe de 3ème Classe.

Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est la 2ème bissectrice; un point simple à l'infini la direction asymptotique est l'axe des y. —
Courbe de 4ème Classe.

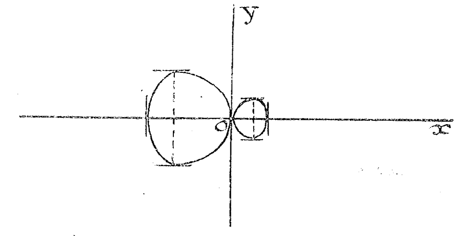
Un point triple à l'infini dont fait partie un point de rebroussement isolé, la direction asymptotique est l'axe des y — un point de rebroussement réel à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x. —
Courbe de 10ème Classe.

Un point double à l'infini, dont une des tangentes est la droite à l'infini, parallèle à la direction asymptotique laquelle est l'axe des x. —
Courbe de 4ème Classe.

Point simple à l'infini, la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique, elle a avec la courbe en ce point un contact du 3ème ordre, la direction asymptotique est l'axe des y, point triple à l'origine.
Courbe de 6ème Classe.

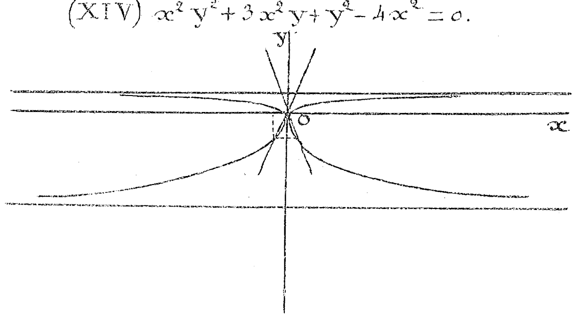


(XIII) $(x^2+y^2)^2+2x(x^2+y^2)-x^2=0.$



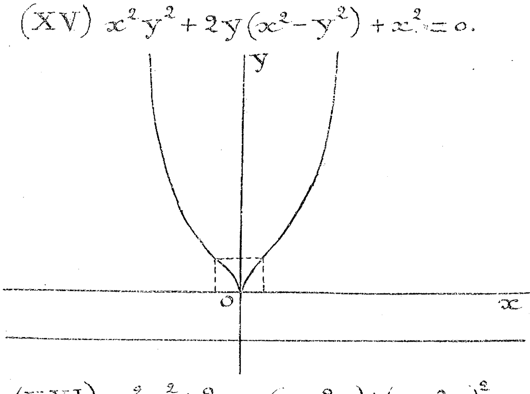
Les deux points circulaires à l'infini sont deux points doubles.
L'origine est un point de rebroussement.
Courbe de 5ème Classe.-

(XIV) $x^2y^2+3x^2y+y^2-4x^2=0.$



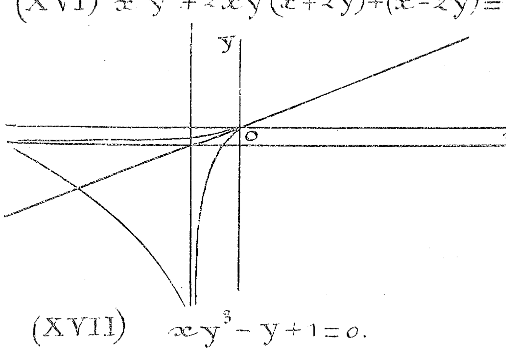
Un point double isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des y — un point double à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x — les asymptotes ont un contact du 2ème ordre — un point double à l'origine —
Courbe de 6ème Classe.-

(XV) $x^2y^2+2y(x^2-y^2)+x^2=0.$



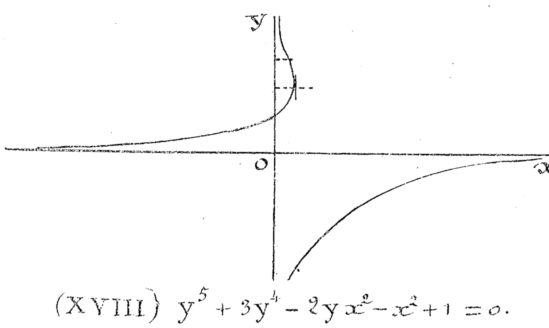
Un point simple à l'infini dont la tangente est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique qui est l'axe des y — un point de rebroussement isolé à l'infini, la direction asymptotique est l'axe des x — un point de rebroussement à l'origine.
Courbe de 6ème Classe.-

(XVI) $x^2y^2+2xy(x+2y)+(x-2y)^2=0.$



Deux points de rebroussement à l'infini, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y — un point de rebroussement à l'origine — la droite à l'infini est la seule tangente double —
Courbe de 3ème Classe.

(XVII) $xy^3-y+1=0.$

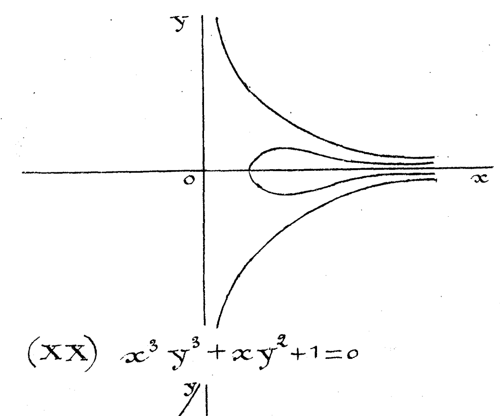


Un point triple à l'infini dont les trois tangentes se confondent, une seule branche est réelle, la direction asymptotique est l'axe des x ; un point d'inflexion à l'infini ayant pour tangente l'axe des y.—
Courbe de 4ème Classe.

(XVIII) $y^5+3y^4-2yx^2-x^2+1=0.$

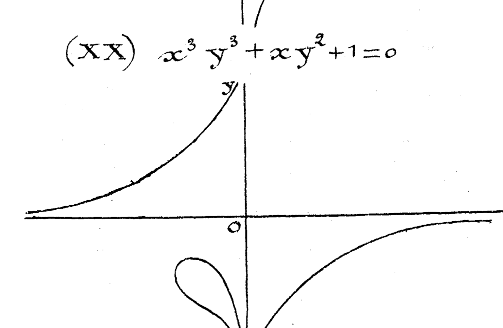
Un point triple à l'infini dont deux tangentes coïncident avec la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique qui est l'axe des x ; les tangentes au point triple ont avec la courbe un contact du second ordre.
Courbe de 13ème Classe.

(XIX) $x^7y^4 - 2x^6y^2 + x^5 - 1 = 0.$



Un point septuple à l'infini dont les 7 tangentes coïncident avec l'axe des y, le contact est du 4ème ordre, une seule branche est réelle ; un point quadruple à l'infini, dont les quatre tangentes coïncident avec l'axe des x, le contact est du 2ème ordre.
La classe de la Courbe est au plus égale à (110−63) = 47.

(XX) $x^3y^3 + xy^2 + 1 = 0$



Deux points triples dont les trois tangentes se confondent, les directions asymptotiques sont l'axe des x et l'axe des y.
Courbe de 14ème Classe.

524. L'importance de la recherche des points multiples à l'infini est incontestable. Cette étude permet, en effet, de voir plus nettement la manière dont la courbe se dirige vers l'infini ; elle est surtout indispensable pour reconnaître la cause de la diminution de la classe pour la courbe, car cette diminution tient à la présence des points multiples tant à l'infini que non à l'infini. La méthode que nous venons d'indiquer est en outre fort utile pour diriger convenablement le tracé des branches paraboliques.
On voit aussi, par les exemples cités, la manière dont les branches de la courbe sont disposées par rapport à l'asymptote, suivant que le point à l'infini correspondant est ou un point simple ordinaire ou un point simple d'inflexion, ou un point de rebroussement etc......

---

§III Équation des asymptotes – Coordonnées trilatères. Classification des courbes du second ordre.

I° Équation des asymptotes.

525. Équation d'une asymptote correspondant à une direction asymptotique.
Soit l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(x,y,z) = \varphi_m(x,y) + z\,\varphi_{m-1}(x,y) + z^2\varphi_{m-2}(x,y) + \cdots = 0;$$

et $y - ax = 0$ une direction asymptotique de cette courbe.
Une asymptote est la tangente en un des points où la courbe est rencontrée par la droite de l'infini ; si nous considérons le point (x_1, y_1, z_1) correspondant à la direction asymptotique choisie, on devra avoir

$$(2) \qquad z_1 = 0, \quad y_1 = ax_1.$$

Mais l'équation de la tangente au point (x_1, y_1, z_1) est

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0, \quad \text{avec } f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

On a, d'après l'équation (1) :

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x = \varphi'_{x\,m}(x,y) + z\,\varphi'_{x\,m-1}(x,y) + \cdots; \\ f'_y = \varphi'_{y\,m}(x,y) + z\,\varphi'_{y\,m-1}(x,y) + \cdots; \\ f'_z = \varphi_{m-1}(x,y) + 2z\,\varphi_{m-2}(x,y) + \cdots; \end{array}\right.$$

en introduisant les hypothèses (2), on trouve

$$f'_{x_1} = {}_x\varphi'_m(x_1, y_1) = x_1^{m-1}\,{}_x\varphi'_m(1, a);$$
$$f'_{y_1} = {}_y\varphi'_m(x_1, y_1) = x_1^{m-1}\,{}_y\varphi'_m(1, a);$$
$$f'_{z_1} = \varphi_{m-1}(x_1, y_1) = x_1^{m-1}\,\varphi_{m-1}(1, a).$$

Donc l'équation de la tangente au point (2), ou l'équation de l'asymptote correspondant à la direction asymptotique $y - ax = 0$, est

$$(3) \qquad x\,{}_x\varphi'_m(1, a) + y\,{}_y\varphi'_m(1, a) + z\,\varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

On peut remarquer que cette équation est la même que celle de la polaire du point à l'infini sur la droite $y - ax = 0$ No. [436], c.à.d. que celle du diamètre conjugué des cordes parallèles à la droite $y - ax = 0$.

Dans ce cas particulier, le diamètre est parallèle aux cordes; on a, en effet, l'identité

$$x\,{}_x\varphi'_m(x, y) + y\,{}_y\varphi'_m(x, y) = m\,\varphi_m(x, y);$$

ou, en faisant $x = 1$ et $y = a$, et remarquant que $\varphi_m(1, a)$ est nul, il vient

$$(4) \qquad {}_x\varphi'_m(1, a) + a\,{}_y\varphi'_m(1, a) = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

526. L'équation d'une courbe et l'équation des asymptotes ont les mêmes termes du degré m et du degré $(m-1)$.

Les m directions asymptotiques sont données par les m facteurs linéaires de la fonction $\varphi_m(x, y)$; de sorte que, si l'on a

$$(5) \qquad \varphi_m(x, y) = (y - a_1x)(y - a_2x)\cdots(y - a_mx),$$

les m asymptotes de la courbe auront des équations de la forme

$$y - a_1x - \lambda_1 z = 0,$$
$$y - a_2x - \lambda_2 z = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y - a_mx - \lambda_m z = 0.$$

Or l'équation suivante

$$(6) \qquad (y - a_1x - \lambda_1 z)\cdots\cdots(y - a_mx - \lambda_m z) + z^2\psi_{m-2}(x, y) + z^3\psi_{m-3}(x, y) + \cdots = 0,$$

est l'équation d'une courbe ayant pour asymptotes No. [514] les m droites $y - a_ix - \lambda_i z = 0$. En effet, si l'on cherche son intersection avec la droite $y - a_ix - \lambda_i z = 0$, le résultat obtenu est divisible par z^2; cette droite est donc tangente à la courbe, et son point de contact est à l'infini; par conséquent, elle est asymptote à la courbe.

La courbe proposée (1)

$$f(x, y, z) = 0,$$

et la courbe représentée par l'équation (6) ont les mêmes asymptotes; par suite, en exprimant que les équations (1) et (6) représentent la même courbe, nous pourrons déterminer complètement les m quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, supposées inconnues.

Or le terme du degré le plus élevé, dans l'équation (6), est

$$(y - a_1x)(y - a_2x)\cdots(y - a_mx);$$

c'est précisément $\varphi_m(x, y)$ (5); donc les termes du $m^{ème}$ degré sont les mêmes dans les équations (1) et (6).

Égalons maintenant les termes du degré $(m-1)$; comme le nombre de ces termes est m, nous obtiendrons, entre les m quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, m relations qui permettront de les déterminer. De sorte que la position des asymptotes d'une courbe ne dépend, en général, que des coefficients des termes du degré m et du degré $(m-1)$ de son équation. Ainsi, en prenant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs trouvées par la méthode qu'on vient d'indiquer, l'équation des asymptotes sera

$$(y-a_1x-\lambda_1 z)(y-a_2x-\lambda_2 z)\dots(y-a_mx-\lambda_m z)=0;$$

équation qui, d'après le mode de détermination des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, aura les mêmes termes du degré m et du degré $(m-1)$ que l'équation proposée. C. Q. F. D.

Nous avons dit que les valeurs des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, ne dépendent, en général, que des coefficients des termes du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré de l'équation de la courbe; cette conclusion suppose que la courbe n'a pas de points multiples à l'infini. On a vu, en effet, que lorsque la courbe a des points doubles à l'infini, la valeur de la constante λ N.° [519] dépend des coefficients des termes du degré $(m-2)$.

Le mode de démonstration qu'on vient de présenter nous fournit une seconde méthode pour déterminer les ordonnées à l'origine des asymptotes.

Seconde démonstration.

La proposition énoncée N.° [526] peut se démontrer plus simplement comme il suit.

Soit l'équation de la courbe

$$(1) \quad f(x,y,z)=\varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,y)+\dots=0;$$

si l'on désigne par (α,β) une solution de l'équation $\varphi_m(x,y)=0$, de sorte que $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{y}{x}$; on aura

$$(2) \quad \varphi_m(x,y)=(\alpha_1x+\beta_1y)(\alpha_2x+\beta_2y)\dots(\alpha_mx+\beta_my);$$

et l'équation des m asymptotes sera

$$(3) \quad (\alpha_1x+\beta_1y+\lambda_1z)(\alpha_2x+\beta_2y+\lambda_2z)\dots(\alpha_mx+\beta_my+\lambda_mz)=0.$$

Il est évident, d'après la relation (2), que les termes du degré m, dans l'équation (3), sont les mêmes que ceux de l'équation (1); par suite, l'équation (3) des asymptotes pourra s'écrire

$$(4) \quad \varphi_m(x,y)+z\psi(x,y)+z^2\psi(x,y)+\dots=0.$$

L'équation de la tangente en un des points

$$z=0,\quad \alpha x+\beta y=0,$$

où la droite de l'infini rencontre la courbe (4), est N.° [525]

$$x\varphi'_{x\,m}(\alpha,\beta)+y\varphi'_{y\,m}(\alpha,\beta)+z\psi(\alpha,\beta)=0;$$

et la tangente, en ce même point, à la courbe proposée (1), est N.° [525]

$$x\varphi'_{x\,m}(\alpha,\beta)+y\varphi'_{y\,m}(\alpha,\beta)+z\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)=0.$$

Ces deux équations doivent représenter la même droite, on aura donc

$$(5) \quad \psi(\alpha,\beta)=\varphi_{m-1}(\alpha,\beta),$$

et cette relation doit avoir lieu pour les m solutions de l'équation

$$\varphi_m(\alpha,\beta)=0.$$

En d'autres termes, le polynome du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré par rapport à $\frac{y}{x}$,

$$(6) \quad \left[\psi\left(1,\frac{y}{x}\right)-\varphi_{m-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)\right],$$

doit s'annuler pour les m valeurs qui vérifient l'équation

$$\varphi_m\left(1,\frac{y}{x}\right)=0;$$

le polynome (6) est donc identiquement nul, c. à. d. que

$$(7) \quad \psi(x,y)=\varphi_{m-1}(x,y);$$

c'est la proposition qu'il fallait démontrer.

527. Les m asymptotes d'une courbe rencontrent cette courbe en $m(m-2)$ points, ces $m(m-2)$ points sont situés sur une courbe du $(m-2)^{\text{ème}}$ ordre.

Une asymptote, touchant la courbe à l'infini, ne peut plus rencontrer la courbe qu'en $(m-2)$ autres points; par suite, les m asymptotes rencontreront la courbe en $m(m-2)$ points qui, en général, seront à distance finie.

Cela posé, si l'équation de la courbe est

$$(1) \quad \varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\varphi_{m-2}(x,y)+\dots=0,$$

l'équation des m asymptotes sera de la forme N.° [526]

$$(2) \qquad \varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+z^2\psi_{m-2}(x,y)+\cdots=0.$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on aura la courbe suivante

$$(3) \qquad z^2\left[\varphi_{m-2}(x,y)-\psi_{m-2}(x,y)\right]+z^3\left(\varphi_{m-3}(x,y)-\psi_{m-3}(x,y)\right]+\cdots=0,$$

sur laquelle se trouveront tous les points communs aux deux courbes (1) et (2).

Si l'on supprime le facteur z^2, lequel donne les points de contact à l'infini, on aura l'équation d'une courbe passant par les points d'intersection autres que les points de contact des asymptotes; cette équation est évidemment du degré $(m-2)$; ce qui prouve le théorème.

Cette proposition pouvait aussi se conclure de l'équation (1) N.° [514].

Les trois asymptotes d'une courbe du 3.ème ordre rencontrent la courbe en trois autres points; ces trois points sont en ligne droite.

II.° Coordonnées trilatères.

528. Détermination des asymptotes.

Pour déterminer les asymptotes d'une courbe donnée par son équation en coordonnées trilatères

$$(1) \qquad f(X,Y,Z)=0,$$

on cherchera les points où cette courbe est rencontrée par la droite de l'infini; les asymptotes seront les tangentes en ces points.

529. Équation des deux asymptotes à une courbe du 2.ème ordre.

Soit l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(X,Y,Z)=A_{11}X^2+A_{22}Y^2+A_{33}Z^2+2A_{12}XY+2A_{13}XZ+2A_{23}YZ=0;$$

soit l'équation de la droite de l'infini N.° [96]

$$(2) \qquad mX+nY+pZ=0.$$

D'après l'équation donnée au N.° [407], on conclura immédiatement pour l'équation des deux asymptotes

$$(3) \qquad f(X,Y,Z)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix}+(mX+nY+pZ)^2.\Delta=0.$$

III.° Classification des courbes du second ordre. (Coordonnées cartésiennes)

530. En cherchant l'intersection de la courbe

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

avec la droite de l'infini $z=0$, on trouve que les directions asymptotiques, dans les courbes du second ordre, sont données par l'équation

$$(1)' \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

1.° Si $B^2-AC<0$, les deux droites représentées par cette équation sont imaginaires; la droite à l'infini rencontre la courbe en deux points imaginaires; la courbe appartient au genre ellipse.

2.° Si $B^2-AC>0$, la droite de l'infini rencontre la courbe en deux points réels; la courbe appartient au genre hyperbole.

3.° Si $B^2-AC=0$, les directions asymptotiques coïncident, et comme il n'y a pas de point double dans les courbes proprement dites du second ordre, la droite de l'infini est tangente à la courbe; on a une parabole.

On peut constater, comme il suit, dans ce dernier cas, que la droite à l'infini touche la courbe; en effet, l'équation peut s'écrire

$$(Ax+By)^2+2Az(Dx+Ey)+AFz^2=0.$$

La direction asymptotique est

$$Ax+By=0;$$

les intersections de la courbe, par la droite

$$z=\lambda(Ax+By),$$

seront données par l'équation

$$(3)\qquad (Ax+By)^2+2\lambda A(Ax+By)(Dx+Ey)+AF\lambda^2(Ax+By)^2=0.$$

La droite sera tangente à la courbe, si $\lambda=0$, car alors seulement le premier membre de l'équation est divisible par $(Ax+By)^2$; mais, si $\lambda=0$, la droite considérée devient $z=0$; donc

La parabole est tangente à la droite à l'infini parallèle à la direction

$$Ax+By=0;$$

c. à. d. à la direction constante des diamètres (comme il sera vu plus loin).

Si les deux droites

$$(4)\qquad Ax+By=0,\ Dx+Ey=0,$$

coïncidaient, le premier membre de l'équation (3) deviendrait divisible par $(Ax+By)^2$, quelle que soit la valeur de λ; de sorte que toute droite, passant par le point à l'infini

$$z=0,\ Ax+By=0,$$

rencontrerait la courbe en deux points coïncidents; la courbe aurait donc un point double à l'infini.

Or, les deux droites (4) se confondent, et d'après la relation $B^2=AC$, il résulte alors

$$(5)\qquad \frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E};$$

c. a. d. que l'équation (1) représente deux droites parallèles; on le constate par la décomposition en carrés. Deux droites parallèles sont deux droites se rencontrant à l'infini; mais le point d'intersection de deux droites est un point double du système de ces deux droites; nous devions donc trouver, dans le cas présent, un point double à l'infini.

531. Les courbes du second ordre passant par les points circulaires à l'infini sont des cercles.

Les points circulaires à l'infini sont donnés par les équations

$$z=0,\ x^2+y^2=0,$$

si l'on suppose les axes rectangulaires. Pour que la courbe (1) passe par ces deux points, il faut que l'équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

se réduise à

$$x^2+y^2=0;$$

ce qui entraine les relations

$$B=0,\ A=C;$$

c. à. d. que la courbe (1) est un cercle.

IV. Classification des courbes du second ordre. (Coordonnées trilatères).

532. Soit l'équation de la courbe, en coordonnées trilatères:

$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=A_{11}X^2+A_{22}Y^2+A_{33}Z^2+2A_{12}XY+2A_{13}XZ+2A_{23}YZ=0;$$

si l'on cherche les intersections de cette courbe avec la droite

$$(2)\qquad mX+nY+pZ=0,$$

on trouve, sans difficulté, que les points d'intersection seront réels si l'on a

$$(3)\qquad \mathfrak{H} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & m \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & n \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

Supposons que la droite (2) soit la droite de l'infini N.° (96), alors

1.° Si $\mathfrak{H} < 0$, la courbe appartient au genre Ellipse;

2.° Si $\mathfrak{H} > 0$, la courbe appartient au genre Hyperbole;

3.° Si $\mathfrak{H} = 0$, la courbe appartient au genre parabole.

---

§IV Équations tangentielles.

I.° Détermination des asymptotes.

533. On a vu N.os (462), (464), que les tangentes aux points où une droite donnée rencontre une courbe déterminée par son équation tangentielle, sont les tangentes communes à la courbe et à la première polaire de la droite donnée.

D'après cela, on déterminera les asymptotes en cherchant les tangentes communes à la courbe et à la première polaire de la droite de l'infini N.° (116), ou N.° (151).

Dans le système des coordonnées (bilatères) u, v, les coordonnées de la droite de l'infini sont nulles ($u_0 = 0$, $v_0 = 0$).

Dans le système des coordonnées trilatères (U, V, W), les coordonnées de la droite de l'infini sont proportionnelles aux paramètres de référence; ainsi, on a

$$\frac{U_0}{\lambda} = \frac{V_0}{\mu} = \frac{W_0}{\nu},$$

λ, μ, ν étant les paramètres de référence.

Remarque. Les propriétés des premières polaires, énoncées au N.° (494), nous permettront de reconnaître si les asymptotes sont ou ne sont pas des tangentes multiples.

II.° Courbes de 2.ème classe. (Coordonnées bilatères.)

534. La classification des courbes de 2.ème classe a été faite, d'après ces principes, aux N.os (361), (362), (363); nous ne reviendrons pas sur ce sujet.

Détermination des asymptotes.

L'équation tangentielle des courbes de 2.ème classe est

$$(1)\qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0;$$

la 1.ère polaire d'une droite (u_0, v_0, w_0) a pour équation N.° (462)

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0;$$

la 1.ère polaire (ou point polaire) de la droite de l'infini ($u_0 = 0$, $v_0 = 0$) sera

$$(2)\qquad Du + Ev + Fw = 0.$$

Les asymptotes seront les tangentes communes aux deux courbes (1) et (2); l'équation (2) représente un point, c'est le point de concours des asymptotes.

Les asymptotes seront réelles ou imaginaires suivant que les solutions communes aux équations (1) et (2) seront réelles ou imaginaires.

III° Courbes de 2ème classe : (Coordonnées trilatères.)

535. Classification des courbes de 2ème classe (coordonnées trilatères).

L'équation tangentielle, en coordonnées trilatères, des courbes de 2ème classe, est

$$(1) \qquad f(U,V,W)=A_{11}U^2+A_{22}V^2+A_{33}W^2+2A_{12}UV+2A_{13}UW+2A_{23}VW=0.$$

Si λ, μ, ν, sont les paramètres de référence, les coordonnées de la droite de l'infini seront N° (151)

$$\frac{U}{\lambda}=\frac{V}{\mu}=\frac{W}{\nu};$$

la première polaire (ou point polaire) de cette droite aura pour équation

$$(2) \qquad \lambda f'_U+\mu f'_V+\nu f'_W=0,$$

ou

$$(2bis) \qquad U f'_\lambda+V f'_\mu+W f'_\nu=0;$$

les asymptotes de la courbe seront les tangentes communes aux courbes (1) et (2); et les solutions communes à ces deux équations seront les coordonnées de ces asymptotes.

La condition, pour que les équations (1) et (2) aient leurs solutions réelles, est

$$(3) \qquad H_1=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & f'_\lambda \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & f'_\mu \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & f'_\nu \\ f'_\lambda & f'_\mu & f'_\nu & 0 \end{vmatrix} > 0;$$

on y arrive, en éliminant W, par exemple, entre les équations (1) et (2bis), et en écrivant que les racines de l'équation obtenue sont réelles.

En retranchant de la dernière colonne du déterminant H_1, les trois premières respectivement multipliées par 2λ, 2μ, 2ν, il vient

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ f'_\lambda & f'_\mu & f'_\nu & -2f(\lambda,\mu\nu) \end{vmatrix} > 0;$$

et la condition de réalité des racines devient

$$(4) \qquad f(\lambda,\mu,\nu)\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0;$$

relation déjà démontrée N° (424) par une autre méthode.

Ceci nous conduit à des critériums très-simples pour la classification des courbes de 2ème classe :

Posant

$$(5) \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix};$$

et désignant par λ, μ, ν, les paramètres de référence, nous obtiendrons les conclusions suivantes :

- I° $f(\lambda,\mu,\nu).\Delta>0$, genre Ellipse;
- II° $f(\lambda,\mu,\nu).\Delta<0$, genre hyperbole;
- III° $f(\lambda,\mu,\nu)=0$, parabole;
- IV° $\Delta=0$, système de deux points.

Dans le cas III° la droite de l'infini touche la courbe; les deux asymptotes se confondent avec la droite de l'infini.

Dans le cas IV° les deux asymptotes se confondent sans être à l'infini; elles passent par les deux points qui constituent le système

Chapitre V
Théorie des Centres.

§ I Définition. Théorèmes généraux

1°. Définition. Recherche générale.

536. On appelle **centre** d'une courbe un point tel que, toute corde qui passe par ce point y est divisée en deux parties égales.

Condition pour que l'origine des coordonnées soit centre.

1° Si l'origine est centre d'une courbe $f(x,y)=0$, les deux équations $f(x,y)=0$ et $f(-x,-y)=0$ ont toutes leurs solutions communes; ou autrement, l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on change x et y en $-x$ et $-y$.

Soit, en effet, M_1 (x_1, y_1) un point (réel ou imaginaire) de la courbe; joignons le point M_1 à l'origine O (par une droite réelle ou imaginaire); puisque O est centre, la droite M_1O rencontrera nécessairement la courbe en un certain point M_2 (x_2, y_2) tel, que O sera le milieu du segment M_1M_2. Mais les coordonnées du point milieu du segment (réel ou imaginaire) ont pour valeurs $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$; or ces coordonnées doivent être celles de l'origine O; on a donc

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

Par conséquent, à une solution quelconque (x_1, y_1) (réelle ou imaginaire) de l'équation de la courbe, correspond toujours la solution $(-x_1, -y_1)$.

En ayant égard seulement aux points réels, on peut donner la démonstration géométrique suivante.

Soit, M, un point réel de la courbe; si l'origine est centre, en joignant OM, puis en prenant $OM' = OM$, on aura un deuxième point de la courbe; or les coordonnées des deux points M et M' sont égales, car les deux triangles OMP et OM'P' sont égaux; il est de plus évident qu'elles sont de signes contraires. Donc si x et y sont les coordonnées d'un point M de la courbe, $-x$ et $-y$ seront les coordonnées d'un second point M'; c.à.d. que l'équation de la courbe sera vérifiée lorsqu'on y remplacera x et y par $-x$ $-y$; et cela, quelque soit le point réel (x,y) de la courbe.

Donc toutes les solutions, réelles et imaginaires, de l'équation

$$f(x,y)=0,$$

vérifieront l'équation

$$f(-x,-y)=0.$$

2° Réciproquement: Si les deux équations $f(x,y)=0$ et $f(-x,-y)=0$ ont toutes leurs solutions communes, c.à.d. si l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on change x et y en $-x$ et $-y$, l'origine sera centre de la courbe.

Soit, en effet, M_1 (x_1, y_1) un point quelconque (réel ou imaginaire) de la courbe; il y aura, d'après l'hypothèse, un autre point M_2 (réel ou imaginaire) dont les coordonnées seront $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$; or les coordonnées du point milieu du segment (réel ou imaginaire) M_1M_2 sont

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2}; \text{ ou } \frac{x_1-x_1}{2}=0, \quad \frac{y_1-y_1}{2}=0;$$

donc l'origine est le point milieu du segment M_1M_2.

Si l'on considère les points réels, on peut donner la démonstration géométrique qui suit:

Soit, $M(x, y)$ un point réel de la courbe, il existera alors sur la courbe un autre point M', dont les coordonnées seront $-x$ et $-y$. On aura donc, dans les deux triangles OMP, $OM'P'$: (les deux points M et M' seront dans des angles opposés)

$$OP = OP', \quad MP = M'P';$$

or l'angle $\widehat{MPO} = \widehat{M'P'O}$; les deux triangles sont, par suite, égaux; donc les trois points M, O, M', sont en ligne droite; et $OM = OM'$. Cette conséquence a lieu pour tous les points réels de la courbe.

Donc pour que l'origine soit centre, il faut et il suffit que les deux équations $f(x, y) = 0$ et $f(-x, -y) = 0$ aient toutes leurs solutions communes; ou il faut et il suffit que l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on remplace x et y par $-x$ et $-y$.

Lorsque la courbe est algébrique, la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine soit centre est que tous les termes soient de même parité.

Remarque I. Nous avons dit que les équations

$$f(x, y) = 0, f(-x, -y) = 0,$$

devaient avoir toutes leurs solutions communes, et non pas seulement, une infinité de solutions communes. C'est qu'en effet deux équations peuvent avoir une infinité de solutions communes sans avoir toutes leurs solutions communes. Par exemple, les deux équations

$$\begin{cases} \varphi(x, y) \cdot F(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) \cdot F_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

ont une infinité de solutions communes, qui sont celles de $\varphi(x, y) = 0$; mais elles n'ont pas toutes leurs solutions communes, puisque les fonctions $F(x, y)$ et $F_1(x, y)$ sont supposées différentes.

Il résulte de là que si les fonctions $f(x, y)$ et $f(-x, -y)$ ont un diviseur commun $\varphi(x, y)$, elles n'auront pas toutes leurs solutions communes; l'origine ne sera pas centre. Ceci d'ailleurs ne peut se présenter que si le premier membre de l'équation de la courbe est décomposable, par exemple:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot F(x, y);$$

il peut arriver alors qu'une des courbes partielles ait pour centre l'origine, tandis que cela n'aurait pas lieu pour l'autre; dans ce cas, l'origine n'est pas centre du système ou de la courbe composée.

Remarque II. Supposons la courbe algébrique:

Lorsque la courbe est d'ordre impair, le centre est nécessairement sur la courbe; ce point sera un point simpl ou un point multiple d'ordre impair, les tangentes en ce point sont toujours des tangentes d'inflexi

Toutes ces conséquences sont immédiatement visibles, en prenant le centre pour origine des coordonnées.

537. Soient x_0, y_0, les coordonnées du centre d'une courbe

$$f(x, y) = 0;$$

si l'on transporte les axes en ce point, l'équation devient

$$(1) \qquad f(x' + x_0, y' + y_0) = 0.$$

Or la nouvelle origine étant centre de la courbe, l'équation (1) et l'équation suivante

$$(2) \qquad f(-x' + x_0, -y' + y_0) = 0,$$

ont toutes leurs solutions communes. Par conséquent, si l'on élimine une des variables, y' par exemple, ent les équations (1) et (2), on arrivera à une relation, telle que

$$(3) \qquad \varphi(x', x_0, y_0) = 0,$$

qui devra se réduire à une identité, lorsqu'on y mettra pour x_0 et y_0 les valeurs des coordonnées du centre. La relation (3) servira donc, en exprimant que l'identité a lieu, à déterminer les quantités x_0 et y_0, si elles sont inconnues.

Lorsque la courbe est algébrique, cette méthode de calcul se simplifie; car il suffit alors de chercher, si l'on

peut profiter de l'indétermination de x_0 et y_0, de manière à ramener l'équation (1) à ne contenir que des termes de même parité.

On voit par là qu'une courbe n'a pas, en général, de centre, puisqu'on ne peut disposer que de deux indéterminées, et que le nombre des termes qu'on doit faire disparaître est, en général, supérieur à deux.

Cette conclusion n'a plus lieu pour les courbes du second ordre; les courbes du second ordre ont, en général, un centre.

Remarque. Le nombre des conditions, pour qu'une courbe d'ordre m ait un centre, est égal à

$$\left(\frac{m(m+2)}{4}-2\right), \text{ si } m \text{ est pair,}$$

$$\text{ou à } \left(\frac{(m+1)^2}{4}-2\right), \text{ si } m \text{ est impair.}$$

II.° Théorèmes sur les centres.

538. **Si une courbe a deux centres, elle en a une infinité en ligne droite et équidistants.**

Soient O et O_1 deux centres, et M un point quelconque de la courbe; joignons MO puis prenons $OM_1 = OM$; joignons M_1O_1, puis prenons $O_1M_2 = O_1M_1$; joignons enfin MO_1, et prenons $O_1M_3 = O_1M$; les trois points M_1, M_2, M_3 appartiennent à la courbe. La droite M_2M_3 rencontre la ligne OO_1 au point O_2; nous allons démontrer que, quel que soit le point M choisi, le point O_2 reste fixe, et qu'on a toujours $O_2M_2 = O_2M_3$.

Comme les deux triangles $M_2O_1M_3$ et MO_1M_1 sont égaux, il en résulte que la médiane OO_1 passe par le milieu de M_2M_3, et que $OO_1 = O_1O_2$; donc

$$O_1O_2 = OO_1, \quad O_2M_2 = O_2M_3.$$

Ainsi le point O_2 divise en deux parties égales les cordes passant par ce point, le point O_2 est centre de la courbe.

De l'existence des deux centres O_1, O_2 on déduira de même l'existence d'un 3ème centre O_3; et ainsi de suite.

On voit qu'à un point M de la courbe correspondront une infinité de points situés sur des parallèles à la ligne des centres et à des intervalles égaux; la courbe est donc transcendante, puisqu'elle est coupée en une infinité de points par une parallèle à la ligne des centres. Cependant il peut arriver qu'une courbe algébrique ait une infinité de centres en ligne droite, lorsque le premier membre de son équation se décompose en facteurs linéaires qui, égalés à zéro, donnent des droites parallèles équidistantes deux à deux d'une autre droite; tous les points de cette dernière droite seront alors des centres par rapport à la courbe formée par le système des droites parallèles. De là:

Lorsqu'une courbe algébrique a une infinité de centres en ligne droite, cette courbe se compose d'un système de droites parallèles équidistantes d'une même droite.

Cette dernière proposition peut se démontrer aisément par un calcul direct; on prendra pour axe la droite passant par deux centres.

539. **Lorsqu'une courbe a trois centres non en ligne droite, elle en admet une infinité situés aux intersections de deux systèmes de parallèles équidistantes.**

Soient O, O_1, O_2, trois centres de la courbe, et M un quelconque de ses points. Joignons MO, et prenons $OM_1 = OM$; puis M_1O_1, et soit $O_1M_2 = O_1M_1$; puis M_2O_2, et soit $O_2M_3 = O_2M_2$; les trois points M_1, M_2, M_3, appartiennent à la courbe.

Joignons MM_3, et soit O_3 le milieu de cette droite; la figure $OO_1O_2O_3$ est un parallélogramme, puisque les points O, O_1, O_2, O_3, sont les milieux des côtés du quadrilatère $MM_1M_2M_3$. Si l'on prenait un autre point M' de la courbe, on arriverait à la même conclusion;

le point O_3 est donc centre de la courbe.

Cela posé, en prenant pour point de départ le centre O_1 au lieu du centre O, on trouvera un autre parallélogramme; les centres ainsi obtenus conduiront de même à de nouveaux parallélogrammes; et ainsi de suite. Donc....

Exemple: $\sin y = \frac{1}{2} \sin x$;

construire la courbe, déterminer tous les centres.

---

§II Détermination du centre dans les courbes du second ordre.

1°. Calcul des coordonnées du centre.

540. Soit l'équation d'une courbe du second ordre

$$(1) \qquad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

si x_0 et y_0 sont les coordonnées du centre de la courbe et qu'on transporte l'origine en ce point, l'équation de la courbe deviendra

$$(2) \qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + x'f'_{x_0} + y'f'_{y_0} + f(x_0, y_0) = 0.$$

Or, l'origine étant centre de cette courbe, l'équation (2) ne devra contenir que des termes de même parité; par conséquent, on devra pouvoir disposer de x_0 et y_0 de manière à faire disparaître les termes du 1er degré, on est ainsi conduit aux équations de condition

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} f'_{x_0} = Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ \frac{1}{2} f'_{y_0} = Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

On voit donc qu'en général une courbe du second ordre a un centre.

Lorsqu'on rapporte la courbe à son centre, c. à d. lorsqu'on prend le centre pour origine, l'équation de la courbe prend la forme

$$(4) \qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0,$$

où l'on a posé

$$(4 \text{ bis}) \qquad F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Eu égard aux relations (3), la valeur de F' se simplifie; en ajoutant les relations (2) respectivement multipliées par x_0 et y_0, il vient

$$(5) \qquad F' = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{1}{2} f'_{z_0};$$

valeur qu'on pourrait encore écrire de suite, en partant de l'identité

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 2f(x_0, y_0, z_0) = 2.F'.$$

Ainsi, lorsqu'on rapporte une courbe du second ordre à son centre:

1° les coefficients des termes du second degré ne changent pas;

2° les termes du premier degré disparaissent;

3° le terme indépendant est la demi-dérivée par rapport à z du premier membre de l'équation rendue homogène, dérivée dans laquelle x et y doivent être remplacées par les coordonnées du centre relatives aux anciens axes.

En effectuant le calcul du terme constant, et en désignant par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

on trouve pour l'équation de la courbe (1) rapportée à son centre

$$(6) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{\Delta}{B^2-AC}.$$

II°. Discussion.

541. Si, dans les équations (3), on remplace x_0 et y_0 par x et y, on a les deux équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_x = Ax+By+D=0, \\ \frac{1}{2}f'_y = Bx+Cy+E=0; \end{cases}$$

lesquelles représentent deux droites dont l'intersection détermine le centre de la courbe.

Cela posé, trois cas peuvent se présenter:

1er Cas. Les deux droites (7) se coupent. Pour que cela ait lieu, il faut que leurs coefficients angulaires soient différents, c. à. d. qu'on ait $-\frac{A}{B} \gtrless -\frac{B}{C}$, ou $B^2-AC \gtrless 0$; alors il y a un centre unique; c'est le cas de l'ellipse et de l'hyperbole.

2ème Cas. Les deux droites sont parallèles. Leurs coefficients angulaires doivent être égaux, ce qui donne $B^2-AC=0$; c'est le cas de la parabole. Ce second cas résulte du premier, en supposant que la fonction (B^2-AC) tende d'une manière continue vers zéro; donc, dans la parabole, le centre se trouve transporté à l'infini parallèlement à la direction commune des deux droites $f'_x=0$, $f'_y=0$.

3ème Cas. Les deux droites (7) se confondent. Les coefficients des deux équations sont alors proportionnels, et l'on a les conditions

$$(8) \qquad \frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E}.$$

Dans ce cas, il y a une infinité de centres en ligne droite; la courbe se compose donc de droites parallèles N° (538); et comme la courbe est du second degré, le nombre de ces droites est égal à deux.

Il résulte de cette discussion qu'on peut diviser les courbes du second ordre en trois classes

1° Un centre unique ..... { Genre Ellipse, Genre Hyperbole.
2° Centre à l'infini .... { Parabole,
3° Infinité de centres ..... { Deux droites parallèles.

Remarque I. Nous avons dit que, dans la parabole, le centre était à l'infini sur la direction de l'axe. Nous devons retrouver, dans ce cas particulier l'empreinte de la propriété générale des centres, et voici comment on peut le concevoir: Une droite, passant par le centre (à l'infini) de la parabole, est, ou à l'infini, ou parallèle à l'axe. Dans le premier cas, elle touche la parabole, les deux points se confondent; dans le second cas, elle rencontre la courbe en un point à distance finie et un second point à l'infini, ce qui détermine un segment infini dont le milieu est nécessairement à l'infini.

Remarque II. On peut constater par un calcul direct que, dans le 3ème cas, la courbe se réduit à deux droites parallèles. Décomposons en carrés l'équation (1); il y a toujours un des coefficients des carrés qui n'est pas nul; car, autrement, les deux droites (7) ne pourraient se confondre que si A, B, C, étaient nuls à la fois; on aurait alors deux droites dont l'une est à l'infini. Soit $A \gtrless 0$; on aura, en formant le carré par rapport aux termes en x:

$$(Ax+By+D)^2+(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2=0.$$

Or, si l'on a égard aux relations (8), cette dernière équation se réduit à

$$(Ax+By+D)^2+AF-D^2=0;$$

équation qui représente évidemment deux droites parallèles.

Remarque III. Condition pour que l'équation générale du second degré représente deux droites.

Nous avons déjà obtenu, par différentes méthodes, cette condition: voir N.os (315), (351). Nous remarquerons seulement ici que **cette condition exprime que le centre est sur la courbe.**

Reprenons les calculs: si x_0, y_0, sont les coordonnées du point de rencontre des deux droites, en transportant les axes en ce point, l'équation (1) deviendra

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+x'f'_{x_0}+y'f'_{y_0}+f(x_0,y_0)=0;$$

or cette équation, représentant deux droites qui passent par l'origine, devra être homogène; la réciproque est évidemment vraie. Donc, pour que l'équation générale du second degré représente deux droites, il faut et il suffit que

$$(9)\qquad f'_{x_0}=0,\ f'_{y_0}=0,\ f(x_0,y_0)=0.$$

Mais d'après la relation identique

$$x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}=2f(x_0,y_0,z_0),$$

les trois relations précédentes deviennent

$$f'_{x_0}=0,\ f'_{y_0}=0,\ f'_{z_0}=0;$$

ou, en rendant explicite

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+Dz_0=0,\\ Bx_0+Cy_0+Ez_0=0,\\ Dx_0+Ey_0+Fz_0=0.\end{cases}$$

La condition cherchée s'obtiendra en éliminant x_0, y_0, z_0, entre ces trois dernières équations, ce qui donne

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\quad \text{ou } \Delta=0.$$

Cette condition aurait pu se déduire de l'équation (6) N.o (540).

Or si l'on considère les équations (9), les deux premières déterminent le centre, et la troisième exprime que le centre est sur la courbe.

Donc pour qu'une courbe du second ordre se réduise à deux droites il faut et il suffit que le centre soit sur la courbe.

On peut établir cette proposition par des considérations directes, en remarquant que, si le centre est sur la courbe, il y aura trois points de la courbe en ligne droite; et, par suite, la droite fera partie de la courbe, puisqu'une courbe de second degré proprement dite ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Lorsqu'une courbe du second ordre se réduit à un système de deux droites, le point de rencontre est **un point double** de la courbe; et réciproquement.

Les polaires d'un point quelconque passent alors par ce point double.

542. **Le centre est le pôle de la droite de l'infini, et réciproquement.**

Le pôle d'une droite

$$mx+ny+pz=0,$$

est déterminé par les équations

$$\frac{f'_{x_0}}{m}=\frac{f'_{y_0}}{n}=\frac{f'_{z_0}}{p};$$

or, si la droite est à l'infini, on a $m=0$, $n=0$, d'où l'on conclut

$$f'_{x_0}=0,\ f'_{y_0}=0,$$

équations qui déterminent le centre. Ainsi le centre est le pôle de la droite de l'infini.

La polaire du centre est la droite de l'infini. En effet, la polaire d'un point (x_0, y_0, z_0) est

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0;$$

or, si ce point est le centre, on a $f'_{x_0} = 0$, $f'_{y_0} = 0$, $f'_{z_0} \gtrless 0$; d'où l'on conclut

$$z = 0;$$

c'est la droite de l'infini.

III° Coordonnées trilatères.

543. On pourrait donner une théorie générale de la recherche des centres dans le système des coordonnées trilatères; nous ne ferons qu'en indiquer le point de départ. Cherchons, par exemple comment on pourrait arriver aux conditions pour que le sommet A du triangle de référence soit centre d'une courbe donnée par son équation en coordonnées trilatères:

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

Soit d'abord

$$(2) \qquad mX + nY + pZ = 2S,$$

la relation que doivent vérifier les coordonnées trilatères d'un point.

Si le sommet A est centre de la courbe, à un point quelconque, M_0, de cette courbe dont l'Y et le Z sont, par exemple, Y_0 et Z_0, devra toujours correspondre un autre point, M'_0, dont l'Y et le Z sont $-Y_0$ et $-Z_0$; et réciproquement. La démonstration est la même qu'au N° (536).

Mais, pour que ceci ait lieu, les conditions analytiques sont tout autres que celles qui ont été énoncées au N° cité; il ne faudrait pas du tout en conclure que l'équation (1) ne doit pas changer lorsqu'on remplace Y et Z par $-Y$ et $-Z$. Ceci tient à ce que l'équation (1) ne détermine que les rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, et que X est lié à Y et Z par la relation (2).

Voici comment on pourrait procéder à la recherche des conditions pour que le sommet A soit centre de la courbe. De la relation (2) nous tirons

$$X = K + T,$$

après avoir posé

$$(3) \qquad K = \frac{2S}{m}, \quad \text{et} \quad T = -\frac{n}{m} Y - \frac{p}{m} Z,$$

T est une fonction linéaire et homogène par rapport à Y et Z. L'équation de la courbe devient alors

$$f(T+K, Y, Z) = 0;$$

ou, en développant par la formule de Taylor:

$$(4) \qquad f(T,Y,Z) + K f'_X(T,Y,Z) + \frac{K^2}{1.2} f''_{XX}(T,Y,Z) + \frac{K^3}{1.2.3} f'''_{XXX}(T,Y,Z) + \cdots = 0.$$

L'équation (4) ne renfermant plus que Y et Z, il faut, et il suffit, pour que le point A soit centre, que cette équation ne change pas lorsqu'on remplace Y et Z par $-Y$ et $-Z$, c. à d. que tous les termes soient de même parité.

Or les dérivées f', f'', ... sont homogènes en Y et Z; puisque T est une fonction linéaire et homogène de Y et Z; il faut alors et il suffit que les dérivées d'ordre impair f'_X, f'''_{XXX}, f^{V}_{XXXXX}, ... etc. soient identiquement nulles, après qu'on y a remplacé X par T.

Application.

Soit la courbe du second ordre

$$A_{11} X^2 + A_{22} Y^2 + A_{33} Z^2 + 2A_{12} XY + 2A_{13} XZ + 2A_{23} YZ = 0.$$

Pour que le sommet A soit centre, il faut que la dérivée

$$f'_X(T, Y, Z) \quad \text{c. à d.} \quad A_{11} T + A_{12} Y + A_{13} Z,$$

soit identiquement nulle; or, après avoir remplacé T, il vient

$$m(A_{12} Y + A_{13} Z) - A_{11}(nY + pZ);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{A_{11}}{m} = \frac{A_{12}}{n} = \frac{A_{13}}{p};$$

telles sont les conditions cherchées.

544 Dans le cas des courbes du second ordre, nous déterminerons le centre d'après cette propriété N° (542) : qu'il est le pôle de la droite de l'infini.

Soit l'équation de la courbe du second degré

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0,$$

et

$$(2) \qquad mX + nY + pZ = 2S,$$

la relation que doivent vérifier les coordonnées trilatères d'un point ; l'équation de la droite de l'infini est N° (96)

$$(3) \qquad mX + nY + pZ = 0.$$

Le pôle (X_0, Y_0, Z_0) de cette droite ou le centre de la courbe (1) sera déterminé par les équations suivantes N° (453)

$$(4) \qquad \frac{f'_{X_0}}{m} = \frac{f'_{Y_0}}{n} = \frac{f'_{Z_0}}{p}.$$

---

§ III Équations tangentielles.

Nous ne nous occuperons ici de la détermination du centre que pour les courbes de 2ème classe.

I° Coordonnées (bilatères) u, v.

545. On pourrait remarquer que lorsque l'origine des coordonnées est centre, à une tangente (u, v) correspond toujours une autre tangente $(-u, -v)$, et réciproquement ; ceci résulte de la définition du centre. Les formules de transformation du N° (356) nous permettront alors de déterminer le centre dans le cas de l'équation générale. Cette remarque est applicable à une courbe de classe quelconque, et conduit, sans difficulté, à une détermination générale du centre, dans le système des coordonnées (u, v).

546. Pour les courbes de 2ème classe, nous nous bornerons à appliquer la propriété suivante, laquelle, vu la remarque du N° (467), dérive de la proposition du N° (542), savoir : Le centre d'une courbe de 2ème classe est le point polaire de la droite de l'infini.

L'équation de la courbe étant

$$(1) \qquad f(u, v, w) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

le point polaire d'une droite (u_0, v_0, w_0) a pour équation

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0.$$

La droite de l'infini a pour coordonnées $u_0 = 0$, $v_0 = 0$; donc l'équation du centre de la courbe (1) sera

$$(2) \qquad f'_w = 0, \quad \text{ou} \quad Du + Ev + F = 0.$$

Ce sera l'origine des coordonnées si E et D sont nuls.

Donc, pour que l'origine des coordonnées soit centre, il faut et il suffit que l'équation ne change pas lorsqu'on change w en $-w$

II° Coordonnées trilatères.

Nous appliquerons encore le principe précédent. Soit

$$(1) \qquad f(U, V, W) = 0,$$

l'équation générale d'une courbe de 2ème classe. Si λ, μ, ν, sont les paramètres de référence, les coordonnées de la droite de l'infini seront λ, μ, ν ; le point polaire de cette droite, c. à. d. le centre de la courbe (1) aura pour équation No (465)

$$(2) \qquad \lambda f'_U + \mu f'_V + \nu f'_W = 0,$$

ou

$$(2 \text{ bis}) \qquad U f'_\lambda + V f'_\mu + W f'_\nu = 0.$$

Chapitre VI

Théorie des Diamètres.

§I Définition et notions générales.

1° Définition et équation des diamètres.

548. On appelle **Diamètre** d'une courbe le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection avec la courbe d'une sécante quelconque parallèle à une direction donnée.

Dans le cas des courbes du second ordre, on peut dire que :

Un diamètre est le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe.

Cette définition générale des diamètres a été donnée par Newton, (Enumeratio linearum tertii ordinis, anno 1706), et il a énoncé la proposition suivante :

Dans une courbe d'ordre quelconque, les diamètres sont des lignes droites.

Pour démontrer cette proposition, nous prendrons l'équation de la courbe sous la forme

$$(1) \qquad \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \cdots = 0.$$

Si a est le coefficient angulaire de la direction donnée, une sécante quelconque aura pour équation

$$(2) \qquad y = ax + \lambda,$$

λ étant une indéterminée.

En désignant par x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; .... les coordonnées des m points d'intersection de cette sécante avec la courbe, le centre des moyennes distances de ce système aura pour coordonnées

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}, \\[2ex] y = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}; \end{cases}$$

x et y devront, en outre, vérifier la relation (2).

Pour déterminer les x des points d'intersection, nous écrirons l'équation (1) comme il suit

$$(4) \qquad x^m \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \cdots\cdots = 0;$$

puis de l'équation (2) nous tirerons

$$\frac{y}{x} = a + \frac{\lambda}{x};$$

substituant cette valeur de $\frac{y}{x}$ dans l'équation (4), développant chaque terme par la formule de Taylor, puis ordonnant, on trouve :

$$(5)\qquad x^m\varphi_m(1,a)+x^{m-1}\left[\varphi_{m-1}(1,a)+\lambda\varphi'_m(1,a)\right]+x^{m-2}[\dots]+\dots=0.$$

Prenant la somme des racines de cette équation, on a

$$x_1+x_2+\dots+x_m=-\frac{\varphi_{m-1}(1,a)+\lambda\varphi'_m(1,a)}{\varphi_m(1,a)};$$

d'où nous concluons pour l'abscisse x d'un point du lieu

$$(6)\qquad x=-\frac{\varphi_{m-1}(1,a)+\lambda\varphi'_m(1,a)}{m\varphi_m(1,a)};$$

φ'_m désigne la dérivée par rapport à y de la fonction φ_m.

Éliminant λ entre les équations (2) et (6), on trouve pour l'équation du lieu, la droite

$$(7)\qquad x\left[m\varphi_m(1,a)-a\,{}_y\varphi'_m(1,a)\right]+y\,{}_y\varphi'_m(1,a)+\varphi_{m-1}(1-a)=0;$$

la proposition est donc démontrée.

On peut donner à cette dernière équation une forme plus symétrique.

La fonction $\varphi_m(x,y)$ étant homogène, on a l'identité

$$x\,{}_x\varphi'_m(x,y)+y\,{}_y\varphi'_m(x,y)=m\varphi_m(x,y);$$

d'où l'on conclut, en faisant $x=1$, $y=a$,

$${}_x\varphi'_m(1,a)+a\,{}_y\varphi'_m(1,a)=m\varphi_m(1,a).$$

L'équation du diamètre, correspondant à la direction de cordes $y-ax=0$, sera donc

$$(8)\qquad x\,{}_x\varphi'_m(1,a)+y\,{}_y\varphi'_m(1,a)+\varphi_{m-1}(1,a)=0.$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (5) du N.° [436], on en conclut que :

Un diamètre est la polaire du point à l'infini sur la direction des cordes à laquelle correspond ce diamètre.

Cette conséquence résulte aussi immédiatement de la définition de la polaire d'un point, définition traduite par l'égalité

$$\frac{MA_1}{PA_1}+\frac{MA_2}{PA_2}+\dots+\frac{MA_m}{PA_m}=0.$$

Remarque. Nous voyons, par l'équation (8), que si l'équation de la courbe ne renferme pas de termes du degré $(m-1)$, $\varphi_{m-1}(1,a)$ est nul ; alors tous les diamètres passent par l'origine, quelle que soit la direction des cordes.

549. **Il y a, en général, $(m-1)$ diamètres parallèles à une direction donnée.**

Soit, en effet, k le coefficient angulaire de la direction donnée, et a le coefficient angulaire des cordes auxquelles correspondent les diamètres cherchés, on devra avoir, d'après l'équation (8):

$$(9)\qquad -\frac{{}_x\varphi'_m(1,a)}{{}_y\varphi'_m(1,a)}=k;$$

équation du degré $(m-1)$ par rapport à l'inconnue a ; elle donnera $(m-1)$ valeurs pour la direction a des cordes et comme, à chaque valeur de a, correspond un seul diamètre, il y a donc $(m-1)$ diamètres parallèles à une direction donnée.

550. **Il y a, en général, m diamètres perpendiculaires à leurs cordes.**

En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait

$$a\left(-\frac{{}_x\varphi'_m(1,a)}{{}_y\varphi'_m(1,a)}\right)=-1,$$

ou

$$(10)\qquad a\,{}_x\varphi'_m(1,a)-{}_y\varphi'_m(1,a)=0;$$

équation du degré m par rapport à l'inconnue a ; il y a donc m diamètres perpendiculaires à leurs cordes.

Il y en a deux, dans les courbes du second ordre.

II°. Notion plus particulière des diamètres.

551. On désigne souvent, sous le nom de **diamètres**, des droites divisant en deux parties égales les cordes parallèles à une certaine direction. Ces diamètres portent le nom d'**axes** lorsqu'ils sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales. Il est évident que ce n'est que très accidentellement que les courbes possèdent de ces lignes; dans les courbes du second ordre, au contraire, elles se présentent nécessairement.

Indiquons la marche qu'on peut suivre pour reconnaître si une courbe a des diamètres rectilignes et si elle a des axes.

Supposons que la droite AB soit un diamètre d'une courbe et que les cordes correspondantes soient parallèles à CD.

Prenons le diamètre AB pour axe des x, et une parallèle à CD, pour axe des y; voyons quelles sont les propriétés caractéristiques que devra présenter l'équation de la courbe.

D'après l'hypothèse admise, l'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y, c.à.d. qu'à une valeur quelconque de x doivent correspondre pour y des valeurs formant toutes des couples de valeurs égales et de signes contraires.

L'équation de la courbe ne doit donc renfermer que des puissances paires de y.

Réciproquement: Si l'équation ne renferme que des puissances paires de y, l'axe des x divisera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y; en d'autres termes, l'axe des x sera un diamètre rectiligne des cordes parallèles à l'axe Oy. En effet, si l'on donne à x une certaine valeur, on aura une équation ne renfermant que des puissances paires de y, et dont les racines seront, par couple de deux, égales et de signes contraires.

Pour que Ox soit un axe de la courbe, il faut et il suffit que, les axes de coordonnées étant rectangulaires, l'équation de la courbe ne renferme que des puissances paires de y.

Alors, pour reconnaître si une courbe a des **diamètres rectilignes**, on rapportera la courbe à de nouveaux axes; on pourra supposer que le nouvel axe O'x' soit un diamètre des cordes parallèles à O'y', c.à.d. qu'on pourra disposer des constantes introduites par les formules de transformation de coordonnées de manière à ce que la nouvelle équation ne renferme que des puissances paires de y'.

Pour reconnaître si une courbe a des **axes**, on suivra la même méthode; il suffira seulement de supposer les nouveaux axes rectangulaires.

On simplifiera un peu ces recherches en laissant la nouvelle origine sur un des anciens axes.

---

§II Recherche des diamètres dans les courbes du second ordre.

I°. Equation des diamètres.

552. L'équation générale des courbes du second ordre est:

$$(1)\quad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

1ère Méthode.

Dans les courbes du second ordre, un diamètre est le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.

Cette définition est un cas particulier de la définition générale donnée au N° (548); l'équation du diamètre, dans les courbes du second ordre, se déduira donc de l'équation générale des diamètres N° (548).

$$x\,\varphi'_{x_m}(1,a)+y\,\varphi'_{y_m}(1,a)+\varphi_{m-1}(1,a)=0.$$

Dans le cas actuel, on a

$$\varphi_m = Ax^2+2Bxy+Cy^2\ ;$$
$$\varphi_{m-1}=2\,(Dx+Ey).$$

En remplaçant dans l'équation générale ci-dessus, il vient

$$x(A+Ba)+y(B+Ca)+D+Ea=0,$$

équation qui peut s'écrire ainsi :

$$(Ax+By+D)+a(Bx+Cy+E)=0,$$

ou

$$(2)\qquad f'_x+af'_y=0.$$

553. 2ème Méthode.

La méthode que nous allons exposer est applicable à la question suivante :

« Trouver, pour une courbe d'ordre quelconque, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction « donnée.

Soit AB une corde parallèle à la direction donnée

$$y-mx=0,$$

m est le coefficient angulaire ; soit x_0, y_0, les coordonnées du point milieu M.

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point (x_0, y_0), les formules de transformation seront

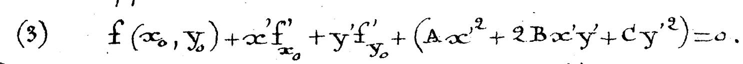
$$x=x_0+x',$$
$$y=y_0+y'.$$

L'équation (1) de la courbe du second ordre deviendra

$$f(x'+x_0,\,y'+y_0)=0,$$

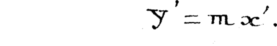
ou, en développant

$$(3)\qquad f(x_0,y_0)+x'f'_{x_0}+y'f'_{y_0}+(Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2)=0.$$



Par rapport au nouveau système d'axes, l'équation de la corde AB sera

$$y'=mx'.$$



Nous obtiendrons les abscisses des points d'intersection A et B de cette droite avec la courbe, en remplaçant y' par mx' dans l'équation (3), ce qui donne

$$(4)\qquad f(x_0,y_0)+x'\left[f'_{x_0}+mf'_{y_0}\right]+(A+2Bm+Cm^2)x'^2=0.$$

Or le point M étant le milieu de AB, l'équation (4) devra admettre deux racines égales et de signes contraires. Pour cela, il faut et il suffit que le coefficient de x soit nul ; ce qui conduit à

$$f'_{x_0}+mf'_{y_0}=0.$$

Nous avons ainsi une relation entre les coordonnées x_0, y_0, d'un point quelconque milieu d'une des cordes parallèles à la direction donnée ; c'est donc l'équation du lieu. En supprimant les indices, nous aurons pour l'équation du diamètre, correspondant aux cordes de coefficient angulaire m,

$$(5)\qquad f'_x+mf'_y=0.$$

554. 3ème Méthode.

Soit l'équation du second degré

$$(1)\qquad f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

et m le coefficient angulaire des cordes dont on cherche le lieu des milieux ; une quelconque de ces cordes aura pour équation

$$(2)\qquad y=mx+n,$$

où m est une quantité donnée, et n une indéterminée. Cherchons l'intersection de cette droite avec la

courbe, c. à. d. remplaçons y par $(mx+n)$ dans l'équation (1), on obtiendra une équation de la forme

$$(3) \qquad Mx^2+Nx+P=0.$$

Soient A et B les intersections de la corde avec la courbe, x et y les coordonnées du point milieu du segment AB. L'abscisse x du point milieu doit être égale à la demi-somme des abscisses des points A et B donnés par l'équation (2); on aura donc la première des équations suivantes

$$(4) \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{N}{2M}, \\ y=mx+n; \end{cases}$$

la seconde exprime que le point milieu est sur la corde AB. On obtiendra l'équation du lieu en éliminant l'indéterminée n entre les deux équations (4). Les deux équations (4) peuvent s'écrire

$$(5) \qquad \begin{cases} 2Mx+N=0, \\ y=mx+n. \end{cases}$$

Or le premier membre de la première des équations (5) est la dérivée, par rapport à x, du premier membre de l'équation (3); mais l'équation (3) a été déduite de l'équation (1) en y remplaçant y par $(mx+n)$; nous aurons donc la première équation du groupe (5) en prenant la dérivée par rapport à x du premier membre de l'équation (1), pourvu que nous regardions y comme égal à $(mx+n)$; on aura ainsi

$$f'_x(x,y)+mf'_y(x,y)=0,$$

en supposant toujours y remplacé par $(mx+n)$. Or, pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer n c. à. d. remplacer $(mx+n)$ par y; l'équation du lieu n'est donc autre que la dernière équation.

Ainsi l'équation du diamètre correspondant aux cordes de coefficient angulaire m est

$$(6) \qquad f'_x+mf'_y=0,$$

ou, en remplaçant les dérivées par leur valeur explicite:

$$(7) \qquad x(A+Bm)+y(B+Cm)+D+Em=0.$$

II°. Diamètres singuliers.

555. Dans les calculs et les raisonnements qui précèdent, nous avons supposé que les cordes rencontraient la courbe en deux points à distance finie. Il peut arriver que l'un des points d'intersection soit à l'infini, l'équation (3) doit admettre alors une racine infinie; pour cela il faut et il suffit que M soit nul; on a donc

$$(8) \qquad M \text{ ou } Cm^2+2Bm+A=0;$$

on trouve cette valeur de M en calculant explicitement le terme en x^2 dans l'équation (3).

Remarquons que la valeur de M ne dépend que du coefficient angulaire m; par suite, si une corde rencontre la courbe en un point à l'infini, il en sera de même de toutes les cordes parallèles. (Les cordes sont alors parallèles à l'une des directions asymptotiques Nº (530)).

Nous appellerons **diamètres singuliers** les diamètres correspondant à cette direction de cordes. Cherchons leur signification.

L'équation des diamètres est donnée par la première des équations (5), où l'on suppose n remplacé par $(y-mx)$; or, si M est nul, la première des équations (5) se réduit à

$$(9) \qquad N=0, \quad N \text{ est une fonction de } (m,n), \text{ soit } N=\varphi(m,n)$$

n doit y être remplacé par $(y-mx)$.

1° Or toute corde, parallèle à la direction actuelle m, ayant avec le diamètre (9) un point commun (x_0, y_0) à distance finie, rencontrera la courbe en deux points à l'infini.

En effet, une corde passant par ce point, aura pour équation

$$(10) \qquad y = mx + n, \quad \text{où} \quad n = y_0 - m x_0 ; \quad (10 \text{ bis})$$

si l'on cherche ses intersections avec la courbe, on aura l'équation

$$(11) \qquad Mx^2 + Nx + P = 0,$$

équation dans laquelle

$$M = Cm^2 + 2Bm + A, \text{ et } N = \varphi(m, n).$$

Mais M est nul d'après l'hypothèse; N est aussi nul, car le point (x_0, y_0) étant à distance finie sur le diamètre (9), on a

$$\varphi(m, y_0 - m x_0) = 0, \text{ ou } \varphi(m, n) = 0,$$

d'après la valeur (10 bis) de n. L'équation (11) a donc deux racines infinies.

2° Mais ici les cordes sont parallèles au diamètre correspondant (9).

En effet, d'après l'équation (9) ou (7), le coefficient angulaire du diamètre est

$$-\frac{A + Bm}{B + Cm};$$

et cette valeur est égale à m, eu égard à la relation (8).

Par conséquent une corde qui a, avec le diamètre (9), un point commun à distance finie, se confond avec ce diamètre.

Donc le diamètre singulier (9) rencontre la courbe en deux points à l'infini; ce diamètre est une asymptote.

556. Les directions de cordes qui correspondent aux diamètres singuliers sont données par l'équation

$$(12) \qquad Cm^2 + 2Bm + A = 0.$$

Dans le cas de l'Ellipse, $B^2 - AC < 0$; les diamètres singuliers sont imaginaires.

Dans le cas de l'hyperbole, $B^2 - AC > 0$; les diamètres singuliers sont réels, ce sont les asymptotes.

Dans le cas de la parabole $B^2 - AC = 0$; le diamètre singulier est à l'infini.

En effet, l'équation (7) de ce diamètre est, en rendant homogène:

$$x(A + Bm) + y(B + Cm) + z(D + Em) = 0.$$

Or on a d'après l'équation (12) et la relation caractéristique de la parabole:

$$\frac{B}{C} = \frac{A}{B}, \quad m = -\frac{B}{C} = -\frac{A}{B};$$

et l'équation du diamètre se réduit évidemment à

$$z = 0.$$

557. Nous pouvons expliquer ainsi l'existence de cette double propriété de l'asymptote, d'être à la fois asymptote et diamètre.

Prenons l'hyperbole, et soit MN une asymptote ou diamètre singulier.

Si l'on considère une corde quelconque, elle sera parallèle à ce diamètre; de plus, elle rencontre la courbe en un point à distance finie A, et en un autre à l'infini; le point milieu correspondant est à l'infini. Il en sera de même pour toutes les cordes parallèles à MN, tant qu'elles ne rencontreront pas MN en un point à distance finie; tous les points milieux, correspondant aux segments déterminés par ces cordes, sont à l'infini sur le diamètre MN. Mais lorsque la corde vient à rencontrer le diamètre en un point à distance finie, elle se confond alors avec lui, puisqu'elle lui est parallèle; dans ce cas, la corde rencontre la courbe en deux points à l'infini; par suite, un point quelconque du diamètre MN peut être regardé comme le milieu du segment déterminé par cette corde.

Remarque. Ces diamètres singuliers se rencontrent dans les courbes d'ordre quelconque. Car, si le

coefficient angulaire a de la corde, à laquelle correspond un diamètre, vérifie la relation

$$\varphi_m(1, a) = 0,$$

l'équation (8) de ce diamètre N.º [548] n'est autre que l'équation (3) N.º [525] de l'asymptote correspondant à la direction asymptotique

$$y - ax = 0.$$

III.º Discussion de l'équation des diamètres.

558. Nous avons trouvé pour l'équation du diamètre correspondant aux cordes dont le coefficient angulaire est m

$$(1) \qquad f'_x + m f'_y = 0;$$

nous rapellerons aussi que les coordonnées du centre sont déterminées N.º [540] par les équations

$$(2) \qquad f'_x = 0, \; f'_y = 0.$$

Donc tous les diamètres passent par le centre.

Donnons avec plus de détails cette conclusion.

S'il y a un centre unique, l'équation d'une droite quelconque passant par le centre sera

$$(3) \qquad f'_x + \lambda f'_y = 0;$$

équation qu'on peut toujours identifier avec l'équation (1) des diamètres, en posant $\lambda = m$. Donc, dans l'ellipse ou l'hyperbole, tous les diamètres passent par le centre; et réciproquement, toute droite passant par le centre est un diamètre.

Lorsque le centre est à l'infini, les deux droites $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ sont parallèles; on pourra alors disposer des constantes λ et μ de manière à ce qu'on ait identiquement

$$f'_y = \lambda f'_x + \mu;$$

l'équation (1) des diamètres devient alors

$$(1 + \lambda m) f'_x + m\mu = 0;$$

c. à. d. que, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à la direction commune des droites qui déterminent le centre.

S'il y a une infinité de centres, les deux droites $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ se confondent; on pourra alors disposer de la constante λ de manière à avoir identiquement

$$f'_y = \lambda f'_x;$$

l'équation (1) devient, dans ce cas,

$$(1 + \lambda m) f'_x = 0, \text{ ou } f'_x = 0.$$

Donc, lorsque la courbe se réduit à deux droites parallèles, tous les diamètres se confondent avec la ligne des centres.

559. Si l'on développe l'équation (1) des diamètres, on trouve

$$(1) \qquad x(A + Bm) + y(B + Cm) + z(D + Em) = 0;$$

la valeur m' du coefficient angulaire de ce diamètre sera

$$(2) \qquad m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm}$$

1.º La valeur de m' sera indépendante de m lorsqu'on aura

$$\frac{B}{C} = \frac{A}{B}, \text{ d'où } B^2 - AC = 0;$$

donc, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles; leur coefficient angulaire est

$$(3) \qquad m' = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{C}.$$

2° Supposons qu'on ait à la fois : $A+Bm=0$, $B+Cm=0$;
l'équation du diamètre se réduit alors à

$z=0$, ou la droite de l'infini.

D'après les hypothèses admises, on a

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{C}{B}, \text{ et } B^2-AC=0.$$

Nous retrouvons ainsi le diamètre singulier de la parabole. Nous remarquerons que les cordes, correspondant au diamètre singulier, lesquelles rencontrent la courbe en un seul point à distance finie, sont parallèles à la direction commune des diamètres de la parabole.

3° Supposons qu'on ait à la fois : $A+Bm=0$, $B+Cm=0$, $D+Em=0$.
L'équation des diamètres se réduit alors à une identité ; il y a indétermination.
Les trois relations admises donnent, par l'élimination de m :

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E}, \quad m=-\frac{A}{B};$$

c.à.d. que la courbe se réduit à deux droites parallèles N° [541].

D'où vient l'indétermination ? D'après ce que nous venons de voir, la courbe se compose de deux droites parallèles A et B, et, de plus, parallèles à la ligne des centres DD'. En outre, les cordes correspondant au cas particulier en question, ont pour coefficient angulaire $-\frac{A}{B}$, c.à.d. sont parallèles à la ligne des centres. Ces cordes rencontrent donc la courbe en deux points à l'infini, car un système de deux droites parallèles possède un point double à l'infini N° [530].

A

D D'

B

Le milieu d'une de ces cordes est, par suite, indéterminé ; le lieu des milieux, ou le diamètre, est donc complètement indéterminé. Ceci explique parfaitement l'indétermination que présente le calcul.
Lorsque les cordes ne sont pas parallèles aux droites A et B, il est bien évident que le lieu des milieux est la droite DD'.

IV°. Propositions relatives aux diamètres.

560. Nous rappellerons cette propriété déjà démontrée plusieurs fois :
La polaire d'un point à l'infini est un diamètre ; réciproquement, un diamètre est la polaire d'un point à l'infini.

La polaire d'un point (x_0, y_0, z_0) est

$$(1) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0;$$

si le point est à l'infini sur la droite $y-mx=0$, on a

$$z_0=0, \quad y_0=mx_0 \;;$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad f'_x + m f'_y = 0;$$

ce qui est l'équation des diamètres.

Pour obtenir le pôle d'un diamètre, il faudra identifier les équations (1) et (2), ce qui conduit à

$$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{m}=\frac{z_0}{0} \;; \text{ d'où } z_0=0, \; y_0=mx_0.$$

Cette proposition peut aussi s'énoncer :
La corde des contacts de deux tangentes parallèles est un diamètre.
Le calcul est le même que le précédent, puisque l'équation (1) est la corde des contacts des deux tangentes menées par le point (x_0, y_0, z_0).

Ou bien encore, la corde des contacts de deux tangentes parallèles est la polaire d'un point à l'infini sur la direction de ces asymptotes; donc.....

561. Lieu des milieux des cordes passant par un point fixe.

Soient a et b les coordonnées d'un point fixe P, et

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

l'équation de la courbe du second ordre. L'équation d'une sécante quelconque passant par le point P est

$$(2) \qquad y - b = \lambda(x - a).$$

Les points d'intersection de la sécante avec la courbe s'obtiendront en remplaçant y par cette valeur dans l'équation (1); on aura ainsi une équation de la forme

$$(3) \qquad Mx^2 + Nx + P = 0.$$

L'abscisse x du point milieu sera égale à la demi-somme des racines de cette équation, on aura donc

$$\begin{cases} x = -\dfrac{N}{2M}, \\ y - b = \lambda(x - a); \end{cases}$$

la seconde de ces équations exprime que le point milieu est sur la sécante.

Pour obtenir l'équation du lieu, il faut éliminer λ entre les deux relations qui précèdent. Remarquons d'abord qu'on peut les écrire

$$(4) \quad \begin{cases} 2Mx + N = 0, \\ y - b = \lambda(x - a). \end{cases}$$

Or la première des équations (4) est la dérivée, par rapport à x, du premier membre de l'équation (3), ou du premier membre de l'équation (1), lorsqu'on y suppose y remplacé par $[\lambda(x-a)+b]$.

Prenons donc la dérivée du premier membre de l'équation (1) par rapport à x, en y regardant y comme défini par la relation (2); il vient, en égalant cette dérivée à zéro

$$(5) \qquad f'_x(x, y) + \lambda f'_y(x, y) = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant λ entre les équations (5) et (2), ce qui donne

$$(6) \qquad (x - a) f'_x + (y - b) f'_y = 0;$$

telle est l'équation du lieu des milieux des cordes passant par le point fixe P; c'est une courbe du second ordre.

1°. La courbe (6) passe par le centre de la courbe proposée, puisque les coordonnées du centre annulent f'_x et f'_y; cette propriété est évidente à priori.

2°. La courbe (6) passe par le point fixe (a, b). La raison de ce fait est que la droite, passant par le point P et parallèle à la polaire de ce même point, rencontre la courbe en deux points A et B réels ou imaginaires conjugués, et que le point P est le milieu du segment AB.

3°. L'équation de la courbe (6) a les mêmes termes du second degré que l'équation (1) de la courbe proposée; les deux courbes sont donc homothétiques, comme nous le verrons plus loin; ou encore, les deux courbes (1) et (6) ont les mêmes directions asymptotiques.

P

Il est facile d'expliquer ce résultat; car une droite, menée par le point P parallèlement à l'une des asymptotes de la courbe (1), rencontre la courbe (1) en deux points dont un seul est à l'infini; le point milieu est alors à l'infini. Les directions asymptotiques de la courbe (6) sont donc parallèles aux asymptotes de la courbe (1). Les deux courbes (1) et (6) passent par les mêmes points à l'infini.

4°. La courbe (6) passe par les points de contact des tangentes menées à la courbe (1) par le point fixe (a, b); ce résultat est évident à priori.

Pour le déduire de l'équation (6), on remarque que cette équation peut s'écrire

$$xf'_x + yf'_y - (af'_x + bf'_y) = 0,$$

ou encore

$$xf'_x + yf'_y + f'_z - (af'_x + bf'_y + f'_z) = 0;$$

et enfin

$$(6 bis) \qquad 2f(x, y) = af'_x + bf'_y + f'_z.$$

La courbe (6) ou (6bis) passe donc par les points d'intersection de la courbe donnée $f(x, y) = 0$ avec la polaire $af'_x + bf'_y + f'_z = 0$ du point fixe (a, b). C. Q. F. D.

562. L'équation des diamètres se déduit de l'équation (6) en supposant que le point P s'éloigne à l'infini sur une direction fixe

$$(7) \qquad y = mx + n.$$

D'après cette hypothèse, on fera a et b infinis et l'on aura

$$(8) \qquad \lim \frac{b}{a} = m.$$

Si l'on divise par a les deux membres de l'équation (6), qu'on fasse croître a et b indéfiniment, il vient, eu égard à la relation (8):

$$f'_x + mf'_y = 0;$$

ce qui est l'équation des diamètres.

Cependant il faut observer que l'équation (6) ne donne pas seulement, pour ce cas limite, le diamètre, mais encore une droite à l'infini. Pour mettre ce résultat en évidence, introduisons dans l'équation (6) les coordonnées homogènes; soient x, y, z les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la courbe, et a, b, c, celles du point P; l'équation (6) devient

$$\left(\frac{x}{z} - \frac{a}{c}\right) f'_x + \left(\frac{y}{z} - \frac{b}{c}\right) f'_y = 0, \text{ ou } (cx - az) f'_x + (cy - bz) f'_y = 0.$$

En faisant alors $c = 0$, $b = ma$, il reste

$$(9) \qquad z\left[f'_x + mf'_y\right] = 0;$$

c. à. d. que la courbe se compose d'un diamètre et d'une droite à l'infini.

On peut se rendre compte, à priori, de ce résultat, d'après la remarque 3° de la discussion qui précède.

Remarque. Hyperboles conjuguées.

Le lieu des extrémités des diamètres imaginaires d'une hyperbole est une seconde hyperbole qui est dite **hyperbole conjuguée** de la première.

Soit l'équation d'une hyperbole,

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

le centre étant à l'origine. Les coordonnées d'un point situé sur une sécante, passant par l'origine, seront

$$\begin{cases} x = \lambda\rho, \\ y = \mu\rho, \end{cases}$$

ρ étant la distance du point (x, y) à l'origine. Si le point est sur la courbe, on aura

$$\rho^2 = \frac{H}{A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2}.$$

Lorsqu'on suppose le diamètre imaginaire, ρ^2 est négatif, et la longueur réelle, ρ', du diamètre imaginaire est, par définition, le coefficient de $\sqrt{-1}$; si l'on porte, sur la droite OM, une longueur OM égale à la longueur géométrique ρ', le point réel M est dit **l'extrémité** correspondant au diamètre imaginaire, ou simplement **l'extrémité du diamètre imaginaire**. On aura, par conséquent:

$$\rho' = \sqrt{\frac{-H}{A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2}}, \text{ et } x=\lambda\rho', \ y=\mu\rho',$$

En éliminant λ et μ entre ces deux équations, on trouve

$$(2) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=-H;$$

c'est l'équation de l'hyperbole conjuguée.

Si l'on se donne les équations de deux hyperboles rapportées à un centre commun, savoir

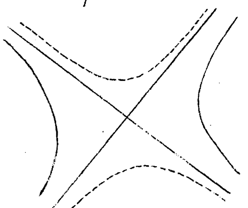
$$(3) \qquad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2=H, \\ A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2=H_1, \end{cases}$$

on exprimera que ces deux hyperboles sont conjuguées, en écrivant que, sur un diamètre quelconque, la somme des carrés des valeurs algébriques des longueurs des diamètres est nulle.

Soient, en effet,

$$x=\lambda\rho, \ y=\mu\rho,$$

les équations d'un diamètre quelconque; les carrés des longueurs des diamètres pour l'une et l'autre courbe sont:



$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2}{H}, \quad \frac{1}{\rho_1^2}=\frac{A_1\lambda^2+2B_1\lambda\mu+C_1\mu^2}{H_1}.$$

Exprimons que $\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_1^2}\right)$ est nulle, quels que soient λ et μ, on trouve

$$(4) \qquad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=-\frac{H}{H_1};$$

relations qui conduisent aux équations (1) et (2) de deux hyperboles conjuguées.

Deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes; elles sont situées respectivement dans les angles supplémentaires.

---

§III Diamètres conjugués.

1° Définition.

563. Directions conjuguées.

L'équation du diamètre, correspondant aux cordes dont le coefficient angulaire est m, est

$$(1) \; x(A+Bm)+y(B+Cm)+(D+Em)=0;$$

si nous désignons par m' le coefficient angulaire de ce diamètre, on aura

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm},$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad A+B(m+m')+Cmm'=0.$$

On appelle directions conjuguées deux directions dont les coefficients angulaires m et m' satisfont à la relation (2).

Le mot conjugué a déjà été pris dans une acception plus générale dans le cas des droites conjuguées Nos (443), (444). Ces deux cas se distinguent par les dénominations employées; le nom de droites conjuguées convient au cas général cité, et le nom de directions conjuguées appartient à l'acception plus particulière que nous donnons ici.

Parmi les directions conjuguées nous signalerons les suivantes:

1° Un diamètre et ses cordes;

2° Une tangente et le diamètre qui passe par le point de contact;

3°. Une polaire et le diamètre qui passe par le pôle.

Nous allons constater cette dernière propriété, la seconde est un cas particulier.

Soit (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point, l'équation de sa polaire sera

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0;$$

le coefficient angulaire m de cette polaire aura pour valeur

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}.$$

Le diamètre, correspondant aux cordes dont le coefficient angulaire est m, aura pour équation

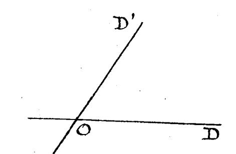
$$f'_x + mf'_y = 0, \quad ou \quad \frac{f'_x}{f'_{x_0}} = \frac{f'_y}{f'_{y_0}}.$$

Ce diamètre passe évidemment par le pôle (x_0, y_0); ainsi le diamètre, conjugué des cordes parallèles à la polaire d'un point, passe par ce point; donc les coefficients angulaires de la polaire et du diamètre passant par le pôle vérifient la relation (2).

564. Deux diamètres sont dits conjugués, lorsque leurs coefficients angulaires vérifient la relation (2). Deux diamètres conjugués sont tels, que l'un quelconque d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Soient OD et OD' deux diamètres dont les coefficients angulaires vérifient la relation

$$A + B(m + m') + Cmm' = 0.$$



Soit m_1 la direction des cordes que OD divise en deux parties égales, on aura d'après la relation (2):

$$A + B(m + m_1) + Cmm_1 = 0;$$

la comparaison de ces deux relations nous donne $m_1 = m'$; c.à.d. que les cordes conjuguées du diamètre OD sont parallèles au diamètre OD'. La conclusion réciproque résulte de la symétrie de la relation admise.

Remarque. Lorsque les axes de coordonnées sont deux diamètres conjugués d'une courbe du second ordre, l'équation ne doit contenir que les carrés des variables et réciproquement. Car, à une valeur quelconque de x doivent correspondre pour y deux valeurs égales et de signes contraires; et, à une valeur quelconque de y, doivent correspondre pour x deux valeurs égales et de signes contraires.

565. Dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles, il n'y a pas lieu à considérer des diamètres conjugués. Néanmoins, il y a, dans la parabole comme dans l'ellipse et l'hyperbole, des directions conjuguées; ainsi: un diamètre et ses cordes, une tangente et le diamètre qui passe par son point de contact, une polaire et le diamètre qui passe par le pôle, sont des directions conjuguées. Il faut remarquer que parmi les directions conjuguées il y en aura toujours une parallèle à la direction commune des diamètres. En effet, dans le cas de la parabole, où $B^2 - AC = 0$, la relation (2) devient en remplaçant C par $\frac{B^2}{A}$:

$$(3) \qquad A^2 + AB(m+m') + B^2mm' = 0, \quad ou \quad (A + Bm)(A + Bm') = 0;$$

or, pour que cette relation soit vérifiée, il faut et il suffit que le coefficient angulaire d'une des directions données soit égal à $-\frac{B}{A}$, c.à.d. que cette direction soit parallèle aux diamètres. La direction conjuguée d'une droite quelconque parallèle aux diamètres sera la tangente à l'extrémité de cette droite.

II°. Théorèmes d'Apollonius.

566. Considérons une courbe du second ordre rapportée à son centre et à deux axes Ox, Oy, faisant l'angle θ; soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H$$

l'équation de cette courbe. Rapportons cette même courbe à deux nouveaux axes Ox', Oy', ayant même

origine et faisant l'angle θ'; l'équation (1) prendra la forme

$$(2) \qquad A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2=H,$$

lorsqu'on y remplacera x et y par leurs valeurs en fonction de x' et y' que fournissent les formules de transformation de coordonnées; la constante H n'a pas changé, puisque ces valeurs sont linéaires et homogènes par rapport à x' et y'.

Il s'agit de trouver les relations qui existent entre les anciens coefficients A, B, C, et les nouveaux coefficients A', B', C'.

Remarquons que, eu égard aux formules de transformation, la fonction

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

se change identiquement en la fonction

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2.$$

Mais le carré de la distance d'un point M (x,y) à l'origine des coordonnées a, pour expression, dans l'ancien système,

$$x^2+2\cos\theta.xy+y^2;$$

cette fonction se change donc identiquement en la suivante

$$x'^2+2\cos\theta' x'y'+y'^2,$$

qui représente, dans le nouveau système, le carré de la distance du même point M (x',y') à la même origine.

Il résulte de là que, la fonction

$$F=Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda(x^2+2xy\cos\theta+y^2)$$

se change identiquement, quel que soit λ, en la fonction suivante

$$F'=A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+\lambda(x'^2+2x'y'\cos\theta'+y'^2).$$

Or, si la fonction F, homogène en x et y, devient un carré parfait pour une certaine valeur de λ, il en sera de même de la fonction F' pour la même valeur de λ. Car alors F sera de la forme $(Mx+Ny)^2$, et en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de x' et y', cette expression restera un carré parfait; la valeur de λ n'aura pas changé, puisque les formules de transformation ne contiennent pas cette arbitraire.

De plus, si la fonction F devient un carré parfait pour une valeur λ_0 de λ, la fonction F' ne pourra pas être un carré parfait pour une valeur λ_1 différente de λ_0; car soit $\lambda_1=\lambda_0+k$, la fonction F deviendra

$$[A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+\lambda_0(x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta')]+k[x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta'];$$

or la quantité entre parenthèses est un carré parfait; on voit ainsi que la fonction F' ne sera pas un carré parfait si k n'est pas nul. Donc, si l'on exprime que les fonctions F et F' deviennent des carrés parfaits, on aura deux équations en λ qui devront admettre les mêmes racines; puisque, si l'une des fonctions devient un carré, l'autre ne peut devenir un carré que si l'on attribue à la constante λ la même valeur dans les deux fonctions.

Effectuons le calcul qui vient d'être indiqué; les fonctions F et F' développées, s'écrivent

$$\begin{cases} F=(A+\lambda)x^2+2(B+\lambda\cos\theta)xy+(C+\lambda)y^2, \\ F'=(A'+\lambda)x'^2+2(B'+\lambda\cos\theta')x'y'+(C'+\lambda)y'^2. \end{cases}$$

Pour que les fonctions F et F' soient des carrés parfaits, il faut que

$$(A+\lambda)(C+\lambda)=(B+\lambda\cos\theta)^2,$$
$$(A'+\lambda)(C'+\lambda)=(B'+\lambda\cos\theta')^2;$$

ou, en ordonnant:

$$\lambda^2+\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}\lambda+\frac{AC-B^2}{\sin^2\theta}=0;$$

$$\lambda^2+\frac{A'+C'-2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}\lambda+\frac{A'C'-B'^2}{\sin^2\theta'}=0.$$

Ces équations devant avoir, d'après ce que nous avons dit, les mêmes racines, il en résulte ces deux relations fondamentales :

$$\text{(I)}\qquad \frac{A'+C'-2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\text{(II)}\qquad \frac{A'C'-B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{AC-B^2}{\sin^2\theta}.$$

Nous avons déjà obtenu ces relations Nº [322], mais par une méthode plus longue.

N. B. L'expression $(AC-B^2)$ est un invariant de la fonction $(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$; l'expression $(A+C-2B\cos\theta)$ est un invariant des deux fonctions simultanées $(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$, et $(x^2+2xy\cos\theta+y^2)$.

567. Les théorèmes d'Apollonius sont une interprétation géométrique des relations précédentes.

Supposons que les nouveaux axes Ox' et Oy' soient deux diamètres conjugués ; l'équation de la courbe ne devra renfermer que les carrés des variables, et l'équation (2) se réduira à

$$A'x'^2+C'y'^2=H, \quad \text{c.à.d. que } B'=0.$$

Cherchons les intersections de la courbe avec les axes Ox' et Oy'; soit a' la valeur algébrique de la longueur du diamètre dirigé suivant Ox', et b' celle du diamètre dirigé suivant Oy'; on aura

$$a'^2=\frac{H}{A'}, \quad b'^2=\frac{H}{C'},$$

d'où

$$\text{(4)}\qquad A'=\frac{H}{a'^2}, \quad C'=\frac{H}{b'^2}.$$

La quantité a'^2, par exemple, sera positive si le diamètre est réel, et négative si le diamètre est imaginaire; de même pour b'^2.

En remplaçant A' et C' par les valeurs (4) dans la relation (II) et en remarquant que B' est nul, il vient

$$\frac{H^2}{a'^2b'^2\sin^2\theta'} = \frac{AC-B^2}{\sin^2\theta},$$

ou

$$\text{(5)}\qquad a'^2b'^2\sin^2\theta' = \frac{H^2\sin^2\theta}{AC-B^2}.$$

Or le premier membre représente le carré du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués a' et b'; le second membre est une quantité constante, donc

La surface du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

En substituant les valeurs (4) dans la relation (I), après y avoir fait $B'=0$, on trouve

$$H.\frac{\dfrac{1}{a'^2}+\dfrac{1}{b'^2}}{\sin^2\theta'} = \frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

ou, en réduisant et en ayant égard à la relation (5)

$$\text{(6)}\qquad a'^2+b'^2 = \frac{H(A+C-2B\cos\theta)}{AC-B^2}.$$

Le second membre est encore une quantité constante ; donc

La somme algébrique des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer sont traduits par les égalités :

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} a'^2+b'^2=\dfrac{H(A+C-2B\cos\theta)}{AC-B^2}; \\ a'^2b'^2\sin^2\theta'=\dfrac{H^2\sin^2\theta}{AC-B^2}. \end{cases}$$

Ils ont été donnés par Apollonius (v. 247 av. J.-C.) dans son traité des sections coniques.
En remplaçant H par la valeur trouvée au N.° [540], savoir

$$H = \frac{\Delta}{B^2 - AC},$$

on a les formules importantes :

$$(7bis)\quad \begin{cases} a'^2 + b'^2 = -\dfrac{\Delta\,(A + C - 2B\cos\theta)}{(AC - B^2)^2}, \\[2ex] a'^2 b'^2 \sin^2\theta' = \dfrac{\Delta^2 \sin^2\theta}{(AC - B^2)^3}\ ; \end{cases} \quad \text{où } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

568. On déduit encore de la relation (I) un théorème remarquable sur les diamètres rectangulaires.
Supposons les nouveaux axes Ox' et Oy' rectangulaires, c.-à-d. $\theta' = 90°$; la relation (I) devient alors

$$A' + C' = \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Si nous désignons par m et n les valeurs algébriques des longueurs des diamètres dirigés suivant Ox' et Oy', on aura

$$m^2 = \frac{H}{A'},\quad n^2 = \frac{H}{C'}\ ;\ \text{d'où } A' = \frac{H}{m^2},\quad C' = \frac{H}{n^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation qui précède, il vient

$$(8)\qquad \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{A + C - 2B\cos\theta}{H\sin^2\theta}.$$

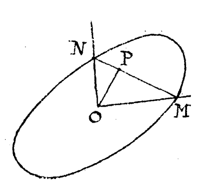
Donc la somme algébrique des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.

On conclut de là que :

La corde, qui joint les intersections avec la courbe de deux diamètres rectangulaires, enveloppe un cercle.

Soit, en effet, OP la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur une quelconque de ces cordes, MN ; on a

$$2\,\text{Surf. } OMN = OM \cdot ON = OP \cdot MN\ ;$$



d'où

$$\overline{OP}^2 = \frac{\overline{OM}^2 \cdot \overline{ON}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{OM}^2 \cdot \overline{ON}^2}{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2}\ ;$$

par suite

$$\frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{1}{\overline{OM}^2} + \frac{1}{\overline{ON}^2} = \text{constante, (d'après le théorème ci-dessus).}$$

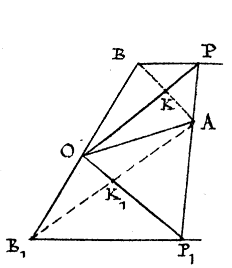
La corde MN est donc à une distance constante du centre O ; donc……

III.° Signification géométrique générale des relations (I) & (II).

569. Les relations (I) et (II) N.° [366] peuvent se prêter à un grand nombre d'interprétations géométriques ; nous citerons les suivantes qui nous paraissent assez générales et comprennent, comme cas particulier, celles que nous venons de signaler.

Théorème I. Soient deux diamètres réels quelconques OA et OB ; menons les tangentes aux extrémités B et B_1 du diamètre OB, lesquelles rencontrent en P et P_1 la tangente en A ; soient k et k_1 les intersections des diamètres OP et OP_1 avec les cordes AB et AB_1 : on a

$$(1)\qquad \text{Surf. } AOB.\sqrt{\frac{OP.\,OP_1}{OK.\,OK_1}} = \text{Constante} = ab,$$



a et b étant les longueurs des demi-axes de la courbe.

Si l'un des diamètres est imaginaire, OB par exemple, on mènera en B la tangente à l'hyperbole conjuguée, et on aura

$$(1\ bis)\qquad \text{Surf. } AOB.\sqrt{\frac{OP}{OK}} = \text{Constante} = ab;$$

a et b étant les demi-axes de la courbe.

Théorème II. Soient deux diamètres quelconques OA et OB, l'un d'eux au moins étant réel, OA par exemple. Menons la tangente en A et joignons le point O au milieu I de la corde AB; soit Q le point de rencontre de OI avec la tangente en A, et AA', BB', les distances respectives des extrémités A et B aux diamètres OA et OB; on a

$$(2)\qquad \frac{1}{\overline{AA'}^2} \pm \frac{1}{\overline{BB'}^2} - \frac{OI-IQ}{OQ}.\ \frac{\cot\text{ang}\,\theta}{\text{Surf. } AOB} = \text{Constante} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2};$$

θ est l'angle des deux diamètres considérés, a et b sont les axes de la courbe.

Le signe − devant les seconds termes de chaque membre correspond au cas où le diamètre OB est imaginaire. La distance OQ étant considérée comme positive, on devra regarder les segments

$$OI,\ IQ,\ (OI-IQ),$$

comme positifs ou négatifs suivant qu'ils seront dirigés dans le sens OQ ou en sens contraire.

Lorsque les deux diamètres OA et OB sont réels, la droite BQ est tangente à la courbe au point B. Si les deux diamètres OA et OB sont imaginaires, on mène les tangentes à l'hyperbole conjuguée.

Ces deux théorèmes sont des traductions géométriques des deux relations

$$(II)\qquad \frac{A'C'-B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{AC-B^2}{\sin^2\theta},$$

$$(I)\qquad \frac{A'+C'-2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Pour les démontrer, on rapporte la courbe aux deux diamètres considérés, son équation sera de la forme

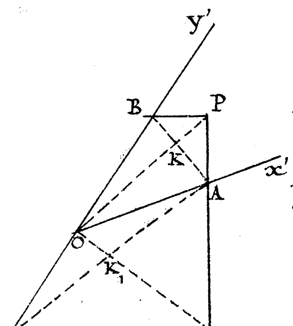
$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2=H;$$

H ne varie pas avec la position des axes Ox' et Oy'.

Le calcul des lignes OP, OK, etc..., qui entrent dans les expressions (1) et (2) des théorèmes cités, en fonction des coefficients A', B', C', se fait très-aisément; et la vérification des égalités énoncées en est une conséquence immédiate. On pourra supposer le terme indépendant H égal à l'unité.

Admettons, par exemple, que les diamètres OA et OB sont réels, on a:

$$\overline{OA} = \frac{1}{\sqrt{A'}},\quad \overline{OB} = \frac{1}{\sqrt{C'}};\quad \text{Surf. } AOB = \frac{\sin\theta'}{2\sqrt{A'C'}}.$$



La droite AB a pour équation

$$(AB)\qquad x'\sqrt{A'}+y'\sqrt{C'}=1;$$

le point P, pôle de la droite AB, a pour coordonnées

$$x_0' = \frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{A'C'}+B'},\quad y_0' = \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{A'C'}+B'}.$$

Le rapport $\frac{OK}{KP}$ dans lequel la droite AB partage le segment OP aura pour valeur N° (55)

$$\frac{OK}{KP} = -\frac{-1}{x'_0\sqrt{A'} + y'_0\sqrt{C'} - 1} = \frac{\sqrt{A'C'} + B'}{\sqrt{A'C'} - B'};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{OP}{OK} = \frac{OK + KP}{OK} = \frac{2\sqrt{A'C'}}{B' + \sqrt{A'C'}} = \frac{\sin\theta'}{\text{Surf. AOB.}(B' + \sqrt{A'C'})}.$$

On trouvera, en remplaçant $\sqrt{C'}$ par $-\sqrt{C'}$,

$$\frac{OP_1}{OK_1} = \frac{\sin\theta'}{\text{Surf. AOB.}(B' - \sqrt{A'C'})}.$$

En multipliant ces deux rapports membre à membre, il vient

$$(\text{Surf AOB})^2 \cdot \frac{OP}{OK} \cdot \frac{OP_1}{OK_1} = \frac{\sin^2\theta'}{B'^2 - A'C'}.$$

Donc, d'après la relation (II)

$$\text{Surf. AOB.}\sqrt{\frac{OP}{OK} \cdot \frac{OP_1}{OK_1}} = \text{constante.}$$

On voit, par là, comment on pourra diriger le calcul pour la démonstration des autres théorèmes. Nous n'entrerons pas dans de plus longs détails.

IV° Équation aux carrés des longueurs de deux diamètres conjugués.

570. Les relations (7) du N° [567] nous fournissent immédiatement la solution de cette question. Nous connaissons, en effet, la somme et le produit des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués a' et b', faisant entre eux l'angle θ'; a'^2 et b'^2 seront les racines de l'équation du second degré

$$R^2 - (a'^2 + b'^2)\,R + a'^2 b'^2 = 0.$$

Cette équation devient, en remplaçant $(a'^2 + b'^2)$ et $a'^2 b'^2$ par les valeurs (7) :

$$(1) \qquad (AC - B^2)\cdot R^2 - H\,(A + C - 2B\cos\theta)\cdot R + \frac{H^2 \sin^2\theta}{\sin^2\theta'} = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les carrés des longueurs de deux diamètres conjugués faisant l'angle θ', l'équation de la courbe étant

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H\,;$$

elle est rapportée à son centre et à deux axes Ox et Oy faisant l'angle θ.

Si l'angle des axes Ox et Oy est droit, l'équation (1) prend la forme

$$(1\text{ bis}) \qquad (AC - B^2)\cdot R^2 - H\,(A + C)\cdot R + \frac{H^2}{\sin^2\theta'} = 0.$$

Si l'on remplace H par sa valeur N° [540]

$$(3) \qquad H = \frac{\Delta}{B^2 - AC}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};$$

les carrés des longueurs de deux diamètres conjugués d'angle θ', appartenant à la courbe

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

rapportée aux axes Ox et Oy d'angle θ, seront les racines de l'équation

$$(5) \qquad R^2 + \frac{\Delta\,(A + C - 2B\cos\theta)}{(AC - B^2)^2}\cdot R + \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{(AC - B^2)^3 \sin^2\theta'} = 0.$$

571. Discussion de l'équation aux carrés des diamètres.

1° Dans le cas de l'Ellipse, $B^2 - AC < 0$; les racines de l'équation (5) sont toutes deux positives ou toutes deux négatives ; positives si l'ellipse est réelle ; négatives, si l'ellipse est imaginaire.

Cherchons la condition pour que deux diamètres conjugués soient égaux ; en exprimant que l'équation (5) a deux racines égales, on trouve

$$(6) \qquad \sin^2\theta' = \frac{4\,(AC - B^2)\sin^2\theta}{(A + C - 2B\cos\theta)^2}.$$

Cette relation détermine l'angle θ' des deux diamètres conjugués égaux ; on vérifiera, sans difficulté, que cette valeur est moindre que l'unité.

2° Dans le cas de l'Hyperbole, $B^2 - AC > 0$; il résulte de là que les valeurs algébriques des carrés des longueurs de deux diamètres conjugués sont de signes contraires.

Supposons que la racine positive soit $(+a'^2)$ et que la racine négative soit $(-b'^2)$; les racines carrées de ces quantités sont a' et $b'\sqrt{-1}$; a' est la longueur du diamètre réel ; b', ou le coefficient de $\sqrt{-1}$, est, par définition, la longueur du diamètre imaginaire.

Cherchons la condition pour que les longueurs géométriques de deux diamètres conjugués soient égales ; cela revient à dire que l'on a

$$a'^2 = b'^2, \quad \text{ou } a'^2 - b'^2 = 0.$$

Mais a'^2 et $(-b'^2)$ sont les racines de l'équation (5) ; la somme de ces racines doit donc être nulle ; on a ainsi la condition

$$(7) \qquad A + C - 2B\cos\theta = 0 ;$$

c'est aussi la condition trouvée N.° [503] pour que l'hyperbole soit équilatère.

La relation (7) est indépendante de l'angle θ' des diamètres conjugués.

Donc, lorsque deux diamètres conjugués, non infinis, de l'hyperbole sont égaux, tous les diamètres conjugués sont égaux. Ou encore, dans une hyperbole équilatère, tous les diamètres conjugués sont égaux.

N. B. La différence, entre cette conclusion et celle à laquelle nous avons été conduits dans le cas de l'ellipse, tient à ce que la définition géométrique des longueurs des diamètres n'est plus la même.

V°. Équation de deux diamètres conjugués faisant un angle donné.

572. Soient m et m' les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués ; ils doivent N.° [564] vérifier la relation

$$(1) \qquad A + B(m + m') + Cmm' = 0.$$

Soit ω l'angle des deux diamètres conjugués et θ l'angle des axes de coordonnées, on aura

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{(m' - m)\sin\theta}{1 + (m + m')\cos\theta + mm'}.$$

Tirons de la relation (2) la valeur de m', et substituons cette valeur dans la relation (1), on trouve, en ordonnant par rapport à m :

$$(3) \quad m^2\left[C(\sin\theta + \cos\theta\operatorname{tang}\omega) - B\operatorname{tang}\omega\right] + m\left[(C - A)\operatorname{tang}\omega + 2B\sin\theta\right] + A(\sin\theta - \cos\theta\operatorname{tang}\omega) + B\operatorname{tang}\omega = 0 ;$$

équation qu'on peut écrire encore :

$$(3\ bis) \quad \sin\theta\left[A + 2Bm + Cm^2\right] + \operatorname{tang}\omega\left[m^2(C\cos\theta - B) + m(C - A) + B - A\cos\theta\right] = 0 ;$$

telle est la relation qui donne les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués faisant l'angle donné ω ; θ est l'angle des axes de coordonnées auxquels est rapportée la courbe.

Pour obtenir l'équation des deux diamètres, désignons par x, y, les coordonnées d'un point quelconque situé sur le diamètre correspondant aux cordes dont le coefficient angulaire est m; l'équation de ce diamètre sera

$$f'_x + m f'_y = o, \text{ d'où } m = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Mais la relation (3) donne aussi, si l'on veut, les coefficients des cordes respectivement conjuguées des deux diamètres faisant l'angle ω, puisque les cordes conjuguées de l'un de ces diamètres sont parallèles à l'autre.

En remplaçant m par la valeur ci-dessus dans l'équation (3) ou (3 bis), on obtiendra une relation entre les coordonnées d'un point quelconque situé sur un quelconque des diamètres, c.à.d. l'équation des deux diamètres. On a ainsi

$$(4) \qquad f'^2_x \left[C(\sin\theta + \cos\theta \tang\omega) - B \tang\omega\right] - f'_x f'_y\left[(C-A)\tang\omega + 2B\sin\theta\right] + f'^2_y\left[A(\sin\theta - \cos\theta\tang\omega) + B\tang\omega\right] = o.$$

Si l'on suppose que le centre de la courbe soit à l'origine, il suffira de remplacer alors m par $\frac{y}{x}$, dans l'équation (3 bis), on trouve, dans ce cas :

$$(4 \text{bis}) \qquad \sin\theta\left[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\right] + \tang\omega\left[(B - A\cos\theta)x^2 + (C-A)xy + (C\cos\theta - B)y^2\right] = o;$$

telle est l'équation de deux diamètres conjugués faisant l'angle ω, si l'on suppose le centre à l'origine des coordonnées.

Nous remarquerons que le coefficient de $\sin\theta$ est le premier membre de l'équation quadratique des asymptotes; le coefficient de $\tang\omega$ est le premier membre, comme on va le voir, de l'équation quadratique des axes.

N. B. Lorsqu'on suppose le centre à l'origine, c.à.d. D et E nuls, l'expression $-\frac{f'_x}{f'_y}$ n'est pas égale à $\frac{y}{x}$; mais en remplaçant m par $-\frac{f'_x}{f'_y}$ dans la relation (1), on retrouve pour m' la valeur $\frac{y}{x}$. Cette remarque nous démontre l'accord des équations (4) et (4 bis), quoique nous y soyons arrivés par des voies différentes.

---

§ IV Axes.

1° Définition. Théorèmes.

573\. Les axes d'une courbe sont des diamètres rectilignes perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales.

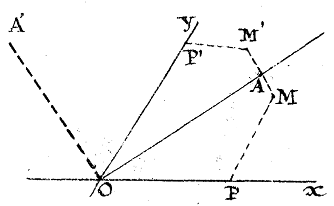
La recherche des axes pourra s'effectuer comme il a été indiqué au N.° [551].

Cette recherche repose sur l'un ou l'autre des théorèmes suivants.

1° Si les axes de coordonnées sont rectangulaires et que l'équation ne contienne que des puissances paires de y, l'axe des x est un axe de la courbe; si elle ne contient que des puissances de x, l'axe des y est un axe de la courbe. On dit encore, que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, dans le premier cas; par rapport à l'axe des y, dans le second.

2° Si l'équation d'une courbe est symétrique par rapport à x et y, la bissectrice de l'angle des coordonnées est axe de la courbe.

Une équation est dite symétrique par rapport aux variables x et y, lorsqu'elle ne change pas par la permutation de ces deux lettres; c.à.d. que si $(x = \alpha, y = \beta)$ est une solution de cette équation, $(x = \beta, y = \alpha)$ en sera une seconde solution. Cela posé, soit M un point de la courbe représentée par l'équation proposée, et $x = OP = \alpha$, $y = MP = \beta$, ses coordonnées; prenons le point M', symétrique de M par rapport à la bissectrice OA; de sorte que $M'A = AM$; les coordonnées du point M' seront



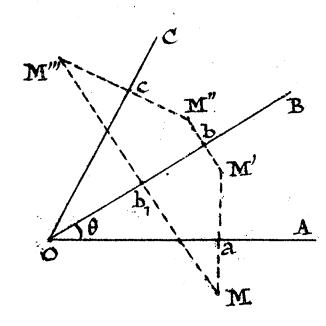
$$x' = M'P' = \beta, \quad y' = OP = \alpha.$$

On le voit immédiatement par la superposition des deux figures OPMA et OP M'A, en faisant tourner la première autour de OA pour la rabattre sur la seconde. Les coordonnées du point M' vérifient donc l'équation de la courbe; par suite, la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice OA.

Si, après avoir changé x en $-x$, l'équation d'une courbe devenait symétrique par rapport à x et y, la bissectrice OA' de l'angle $y\,O\,x'$ des coordonnées serait axe de la courbe.

574. Si une courbe a deux axes faisant un angle θ différent d'un droit, cette courbe aura un nombre limité d'axes, si θ et quatre droits ont une mesure commune; elle en aura une infinité, si θ et quatre droits n'ont pas de mesure commune.

Soient OA et OB deux axes de la courbe, et M un quelconque de ses points; alors, puisque OA et OB sont deux axes, les points M', M'', M''', symétriques de M par rapport à ces axes, appartiennent aussi à la courbe. Or, soit c le milieu de M''M''', nous allons constater que Oc est perpendiculaire à M''M''', et que l'angle BOC est égal à θ. En effet, faisons tourner la figure $bM''M'''b_1$ autour de OB et rabattons-la sur la figure $bM'Mb_1$; ces deux figures coïncideront dans toutes leurs parties, le point M'' viendra se placer en M', le point M''' en M, et le milieu c de M''M''' avec le milieu a de MM'; par suite, la droite OC coïncidera avec la droite OA.



On voit donc que OC est un axe de la courbe. En continuant la répétition du même raisonnement, on obtiendra une série d'axes successifs faisant l'angle θ.

Soit alors θ la mesure, sur le cercle de rayon un, de l'angle AOB; quatre droits auront pour mesure 2π. Si le rapport $\frac{\theta}{2\pi}$ est un nombre commensurable $\frac{p}{q}$, après avoir répété θ un nombre de fois marqué par q, on aura fait p fois le tour de la circonférence, puisque

$$q\theta = p \cdot 2\pi,$$

et on sera revenu au point de départ; la courbe aura donc un nombre limité d'axes lequel est égal à q. On suppose la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible.

Exemple: La courbe, $\rho = 4 + \cos 5\omega$, a cinq axes.

Si le rapport $\frac{\theta}{2\pi}$ est incommensurable, la courbe admet une infinité d'axes, puisque, en répétant l'angle θ, on ne retrouvera jamais un nombre exact de circonférences, par suite, on ne retombera jamais sur un des axes déjà obtenus.

Dans ce dernier cas, la courbe est un cercle. Car en traçant successivement les axes d'angle θ et en tournant indéfiniment autour du pôle, on obtiendra une série indéfinie de droites formant des rayons de plus en plus rapprochés sans jamais se confondre, puisqu'aucun des axes ainsi tracés ne doit coïncider avec un de ceux qu'on a déjà figurés. Or le cercle est la seule courbe qu'on puisse concevoir symétrique à la fois par rapport à toutes ces droites en nombre infini et infiniment rapprochées.

575. Si une courbe a deux axes parallèles, elle a une infinité d'axes parallèles et équidistants.

On pourrait regarder ce théorème comme un cas particulier du précédent. Démontrons-le directement: Soient AA' et BB' deux axes d'une courbe et M un de ses points; les points M', M'', M''', symétriques de M par rapport aux deux axes AA' et BB', appartiendront aussi à la courbe. On a pris

$$aM' = aM, \quad bM''' = bM, \quad bM'' = bM'.$$

Par le point c, milieu de M''M''', menons CC' parallèle à AA'; on aura $cb = ba$. En effet, si on rabat la partie supérieure de la figure sur la partie inférieure, en la faisant tourner

autour de BB', le point M'' viendra en M', le point M''' en M, et le point c en a; par suite bc = ba.
La courbe possède donc un troisième axe CC' parallèle aux deux autres et à la même distance. En continuant ce raisonnement, on en conclut que la courbe admet une infinité d'axes parallèles et équidistants.

Exemple. La courbe $y = \sin x$ admet une infinité d'axes parallèles.

Une courbe qui admet une infinité d'axes parallèles est évidemment une courbe transcendante. Car la courbe aura un nombre infini de points sur une perpendiculaire à la direction des axes. Donc...

II°. Détermination des axes dans les courbes du second ordre.

576. On a vu N° [564] que si m est le coefficient angulaire d'un diamètre, et m' celui des cordes qu'il divise en deux parties égales, on a la relation

$$(1) \qquad A + B(m+m') + Cmm' = 0.$$

Or les axes de la courbe sont des diamètres perpendiculaires à leurs cordes; on a donc, en désignant par θ l'angle des axes de coordonnées

$$1 + (m+m')\cos\theta + mm' = 0.$$

Tirant de là la valeur de m' et substituant dans la relation (1), on trouve que les coefficients angulaires des axes d'une courbe du second ordre sont donnés par l'équation

$$(2) \qquad (B - C\cos\theta)m^2 + (A - C)m + (A\cos\theta - B) = 0;$$

ou, si l'on suppose $\theta = 90°$

$$(2\,bis) \qquad Bm^2 + (A-C)m - B = 0.$$

Il y a donc deux axes dans les courbes du second degré; ces deux axes sont perpendiculaires entre eux, car le produit de leurs coefficients angulaires (2 bis) est égal à -1.

Les deux axes d'une courbe du second ordre ne sont autres que deux diamètres conjugués rectangulaires, car leurs coefficients angulaires vérifient la relation (1) qui existe entre deux directions conjuguées.

577. Dans l'ellipse et l'hyperbole, ces deux axes se trouvent à distance finie; et on obtiendra leurs équations, en remplaçant dans l'équation générale des diamètres

$$(3) \qquad x(A+Bm) + y(B+Cm) + (D+Em)z = 0,$$

m par les valeurs déduites de l'équation (2) ou (2 bis).

Dans le cas de la parabole, où $B^2 - AC = 0$, l'équation (2 bis) donne

$$(4) \qquad (\text{axes}) \quad m_1 = \frac{C}{B}, \quad m_2 = -\frac{A}{B};$$

les coefficients angulaires des cordes correspondantes seront, d'après la relation $mm' = -1$:

$$(5) \qquad (\text{cordes}) \quad m'_1 = -\frac{B}{C}, \quad m'_2 = +\frac{B}{A}.$$

En remplaçant, dans l'équation (3), m par les valeurs m'_1 et m'_2, on aura pour les équations des deux axes dans la parabole:

$$\text{Axe} \quad m_2 = -\frac{A}{B}: \quad x(A^2+B^2) + B(A+C)y + (AD+EB)z = 0; \quad \text{ou } Ax + By + \frac{AD+BE}{A+C}z = 0;$$

$$\text{axe} \quad m_1 = \frac{C}{B}: \qquad z(CD - BE) = 0.$$

Ainsi un des axes est à distance finie, son coefficient angulaire est $\left(-\frac{A}{B}\right)$ ou $\left(-\frac{B}{C}\right)$; l'autre est à l'infini, son coefficient angulaire est $\left(+\frac{C}{B}\right)$.

III° Équation des deux axes.

578. On peut déduire l'équation cherchée de celle des diamètres conjugués N° (572), puisque les axes d'une courbe du second degré sont deux diamètres conjugués rectangulaires.

On peut aussi traiter directement la question.

Les coefficients angulaires des deux axes vérifient N° (576) la relation

$$(2) \qquad (B - C\cos\theta)\, m^2 + (A - C)\, m + (A\cos\theta - B) = 0.$$

Si l'on suppose la courbe rapportée à son centre, et que x, y, soient les coordonnées d'un point quelconque d'un des axes, on aura

$$m = \frac{y}{x}\;;$$

l'équation des deux axes sera donc

$$(6) \qquad (A\cos\theta - B)\, x^2 + (A - C)\, xy + (B - C\cos\theta)\, y^2 = 0,$$

ou, si les axes de coordonnées sont rectangulaires $\theta = 90°$:

$$(6\,bis) \qquad -Bx^2 + (A - C)\, xy + By^2 = 0\;;$$

on suppose que l'origine est le centre de la courbe.

Lorsque le centre de la courbe n'est pas à l'origine des coordonnées, nous remarquerons que l'équation d'un diamètre ou d'un axe est

$$f'_x + m f'_y = 0, \text{ d'où } m = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

m est le coefficient angulaire de la corde conjuguée. Mais l'équation (2) peut être regardée aussi comme donnant les coefficients angulaires des cordes respectivement conjuguées des deux axes; donc en y remplaçant m par la valeur ci-dessus, nous aurons pour l'équation des deux axes

$$(6\,ter) \qquad (B - C\cos\theta)\, f'^2_x - (A - C)\, f'_x f'_y + (A\cos\theta - B)\, f'^2_y = 0,$$

θ étant l'angle des axes de coordonnées; ou, si $\theta = 90°$,

$$(6\,quater) \qquad Bf'^2_x = (A - C)\, f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0\;;$$

l'origine des coordonnées n'est plus le centre de la courbe.

579. L'équation (6 bis) permet d'écrire immédiatement l'équation des deux bissectrices des angles formés par les deux droites.

$$(7) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Nous pouvons, en effet, regarder le système de ces deux droites comme formant une courbe du second degré; les bissectrices sont précisément les axes de cette courbe; l'équation (6) ou (6 bis) sera l'équation de ces deux bissectrices.

N. B. Nous nous contenterons d'énoncer la propriété suivante dont la démonstration est extrêmement facile.

La polaire d'un point quelconque situé sur une axe d'une courbe du second ordre est perpendiculaire à cet axe; et réciproquement, tout diamètre jouissant de cette propriété est un axe.

On peut utiliser cette proposition pour la détermination des axes.

IV° Équation aux carrés des longueurs des axes.

580. Cette équation se déduit de l'équation (5) aux carrés des longueurs de deux diamètres conjugués N° (570), en supposant les deux diamètres conjugués rectangulaires; on trouve ainsi

$$(8)\qquad R^2+\frac{\Delta(A+C-2B\cos\theta)}{(AC-B^2)^2}\cdot R+\frac{\Delta^2\sin^2\theta}{(AC-B^2)^3}=0,$$

θ est l'angle des axes de coordonnées; si $\theta=90^\circ$, on a

$$(8\ bis)\qquad R^2+\frac{\Delta(A+C)}{(AC-B^2)^2}\cdot R+\frac{\Delta^2}{(AC-B^2)^3}=0.$$

Les racines de cette équation sont les valeurs algébriques des carrés des axes de la courbe:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Si l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=H,$$

l'équation au carré des longueurs des axes sera N.º [570] (1)

$$(9)\qquad R^2-\frac{H(A+C-2B\cos\theta)}{AC-B^2}\cdot R+\frac{H^2\sin^2\theta}{(AC-B^2)}=0,$$

ou, si $\theta=90^\circ$:

$$(9\ bis)\qquad R^2-\frac{H(A+C)}{AC-B^2}\cdot R+\frac{H^2}{AC-B^2}=0.$$

Dans l'Ellipse, $B^2-AC<0$; les deux racines de cette équation sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives. Les deux axes sont réels, si l'ellipse est réelle; les deux axes sont imaginaires, si l'ellipse est imaginaire.

Dans l'Hyperbole, $B^2-AC>0$; les racines étant toujours de signes contraires, un des axes de la courbe est réel, l'autre est imaginaire.

Dans la parabole, les deux axes sont infinis.

581. **Nombre des conditions qu'entraine l'égalité des axes.**

Ellipse.

Pour que les axes de l'ellipse soient égaux, il faut que l'équation (8) ait ses deux racines égales, ce qui donne:

$$(10)\qquad (A+C-2B\cos\theta)^2=4(AC-B^2)\sin^2\theta.$$

Si l'on suppose $\theta=90^\circ$, la relation (9) devient

$$(A+C)^2=4(AC-B^2),\ \text{ou}\ (A-C)^2+4B^2=0;$$

relation qui ne peut avoir lieu, pour des valeurs réelles de A, B, C, que si l'on a à la fois

$$(11)\qquad A=C,\ B=0.$$

Si l'on suppose θ différent de 90°, la relation (9) pourra s'écrire

$$[A-C+2(B-A\cos\theta)\cos\theta]^2+4(B-A\cos\theta)^2\sin^2\theta=0;$$

relation qui entraine les suivantes:

$$(10\ bis)\qquad A=C,\quad \frac{B}{A}=\cos\theta.$$

Ainsi, l'égalité des axes, dans l'ellipse, entraine deux conditions; la courbe se réduit alors à un cercle.

Ces conséquences résultent immédiatement de l'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

où a et b sont précisément les longueurs des axes.

Hyperbole.

Lorsqu'on suppose les longueurs géométriques des axes égales, ceci revient à dire que $a^2-b^2=0$, ou que la somme des racines de l'équation (8) est nulle; on a donc la seule condition

$$(12)\qquad A+C-2B\cos\theta=0,\ \text{ou}\ A+C=0\ \text{si}\ \theta=90^\circ.$$

Ainsi, l'égalité des axes, dans l'hyperbole, exige une seule condition; l'hyperbole est alors équilatère.

582. Les axes d'une courbe du second degré sont les rayons des cercles concentriques à la courbe et doublement tangents à cette courbe.

En effet, supposons la courbe rapportée à son centre, et soit

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=H,$$

son équation, l'équation d'un cercle concentrique sera

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2=\rho^2.$$

Ce cercle coupera la première courbe en quatre points situés sur les deux droites qu'on obtient en retranchant membre à membre les équations qui précèdent, respectivement multipliées par ρ^2 et H, c.à.d.

$$(A\rho^2-H)x^2+2(B\rho^2-H\cos\theta)xy+(C\rho^2-H)y^2=0.$$

Si nous exprimons que ces deux droites coïncident, le cercle coupera alors la courbe en quatre points formant deux couples de points coïncidents, c.à.d. qu'il sera doublement tangent à la courbe. Or, pour que ces deux droites coïncident, il faut que

$$(B\rho^2-H\cos\theta)^2=(A\rho^2-H)(C\rho^2-H);$$

d'où nous concluons, en développant:

$$(13)\qquad \rho^4(AC-B^2)-H(A+C-2B\cos\theta).\rho^2+H^2\sin^2\theta=0.$$

Or, si l'on compare cette équation à l'équation (9) du N.° [580], on voit qu'elle donne les carrés des longueurs des axes. Donc......

La proposition, que nous venons de démontrer par le calcul, résulte aussi des considérations suivantes: Si un cercle, concentrique à une conique, est tangent à cette conique, la tangente commune sera perpendiculaire au diamètre de la conique; par suite, ce diamètre sera un axe N.° [579].

V.° Remarque sur la direction des axes.

583. Le triangle formé par le centre d'une courbe du second ordre et par les points à l'infini sur ses axes est conjugué N.° [455] à la fois par rapport à la conique et par rapport à un cercle concentrique avec la conique; et réciproquement.

La proposition directe est visible, car la polaire du centre est la droite de l'infini; la polaire par rapport à la conique du point à l'infini sur un des axes passe par le centre et elle est perpendiculaire à cet axe, puisqu'elle lui est conjuguée; mais ceci a également lieu pour le cercle, car la polaire d'un point par rapport au cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point.

Réciproquement: si un triangle, dont un des côtés est la droite de l'infini, est conjugué à la fois par rapport à une courbe du second degré et à un cercle, les deux côtés du triangle sont les axes de la conique.

Le pôle de la droite de l'infini est le centre de la courbe; donc la conique et le cercle ont pour centre commun le sommet, à distance finie, du triangle. Soient

y
O x

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=Hz^2,$$

$$(2)\qquad x^2+2xy\cos\theta+y^2=\rho^2z^2,$$

les équations de la conique et du cercle, rapportées aux deux côtés du triangle. Le point à l'infini sur Ox a pour polaire, dans la conique, Oy, donc Oy est conjugué de Ox; l'équation (1) ne doit pas renfermer le produit xy, donc $B=0$. Le point à l'infini sur Ox, a pour polaire, dans le cercle, Oy; donc Oy est perpendiculaire à Ox; par suite $\theta=90°$. Les deux côtés, à distance finie, du triangle, seront donc les axes de la courbe.

584. Les traces des deux axes d'une courbe du second ordre sur la droite de l'infini forment un système harmonique, soit avec les deux points d'intersection de la droite de l'infini avec la courbe, soit avec les deux points d'intersection de cette droite avec le cercle.

Ou encore; si ω et ω_1 sont les points circulaires à l'infini; si γ et γ_1 sont les intersections de la droite de l'infini avec la courbe du second ordre; si, enfin, PA et PA_1 sont les directions des deux axes; les deux faisceaux

$$(P, \overline{AA_1}\ \overline{\omega\omega_1}),\ (P, \overline{AA_1}\ \overline{\gamma\gamma_1})\ ;$$

seront harmoniques (P est un point quelconque du plan); c. à. d. qu'on aura Nos (167) et (169)

$$(1)\qquad \frac{\omega A}{\omega A_1} : \frac{\omega_1 A}{\omega_1 A_1} = -1,\quad \frac{\gamma A}{\gamma A_1} : \frac{\gamma_1 A}{\gamma_1 A_1} = -1\ .$$

Les relations (1) permettront de déterminer les deux directions PA et PA_1.

Pour démontrer cette proposition, soient

$$(2)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H\,z^2,$$

$$(3)\qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = \rho^2 . z^2;$$

les équations de la courbe du second ordre rapportée à son centre et d'un cercle qu'on peut supposer concentrique à la conique. Désignons par P l'origine des coordonnées; les droites $P\gamma$, $P\gamma_1$ s'obtiendront en cherchant les intersections de la droite de l'infini avec la courbe du second ordre (2), on a ainsi

$$(4)\quad P\gamma, P\gamma_1 : \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 .$$

Les droites $P\omega$, $P\omega_1$, s'obtiendront en cherchant les intersections de la droite de l'infini avec le cercle, on a

$$(5)\quad P\omega, P\omega_1 : \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0 .$$

Cherchons maintenant un système de droites PA, PA_1, qui forme un couple conjugué harmonique soit par rapport au couple (4), soit par rapport au couple (5); nous représenterons par

$$(6)\qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0,$$

l'ensemble des deux droites cherchées. Si, à l'aide de la formule du No (177), nous exprimons que le couple (6) forme avec le couple (4), puis avec le couple (5), un système harmonique; on obtient les deux relations

$$(7)\qquad \begin{cases} AC' + A'C = 2BB' \\ C' + A' = 2B'\cos\theta \end{cases}$$

Si, des équations (7), nous tirons les valeurs de $\frac{A'}{B'}$, $\frac{C'}{B'}$, et qu'on les transporte dans l'équation (6), on trouve

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ C & -B & A \\ 1 & -\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant:

$$(8)\qquad x^2(A\cos\theta - B) + xy(A - C) + y^2(B - C\cos\theta) = 0;$$

telle est l'équation des deux droites satisfaisant aux conditions imposées.

On reconnait là l'équation quadratique des axes No [578].

---

§ V Coordonnées trilatères.

1.° Diamètres. Axes. (Courbe du second ordre.)

585. L'équation du diamètre conjugué d'une droite donnée s'obtiendra en cherchant la polaire du point d'intersection de cette droite avec la droite de l'infini.

Les directions des axes s'obtiendront par l'application des propriétés énoncées dans le No (584): On sait déterminer

le centre; les sommets seront les intersections de la courbe avec les droites menées, parallèlement aux axes, par le centre de cette courbe.

Ainsi, on peut donc, en restant dans le système des coordonnées trilatères, déterminer de cette manière les axes et les sommets.

Comme nous l'avons fait remarquer, l'emploi des coordonnées trilatères est surtout avantageux dans l'étude des propriétés descriptives; elles se prêtent avec beaucoup moins de facilité à la recherche des propriétés métriques.

Cependant, nous donnerons l'expression des longueurs des axes d'une conique dans le système des coordonnées trilatères; ces formules, une fois établies, conduisent à des démonstrations simples et élégantes de plusieurs propriétés remarquables.

II°. Longueurs des axes d'une courbe du second ordre.

586. Soit l'équation générale, en coordonnées trilatères, d'une courbe du second ordre

$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=A_{11}X^2+A_{22}Y^2+A_{33}Z^2+2A_{12}XY+2A_{13}XZ+2A_{23}YZ=0\,;$$

si l'on suppose la courbe rapportée à deux axes rectangulaires, son équation sera de la forme

$$(2)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

de sorte qu'on aura l'identité, eu égard aux formules de transformation:

$$(3)\qquad A_{11}X^2+A_{22}Y^2+A_{33}Z^2+2A_{12}XY+2A_{13}XZ+2A_{23}YZ=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2\,;$$

les formules de transformation sont ici N.os (91), (93):

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}X&=a_1x+a_2y+a_3z,\\Y&=b_1x+b_2y+b_3z,\\Z&=c_1x+c_2y+c_3z,\end{aligned}\right.\quad\text{ou en mettant en évidence les paramètres de référence } \lambda,\mu,\nu \quad (4\ bis)\ \left\{\begin{aligned}X&=\lambda(p-x\cos\alpha-y\sin\alpha),\\Y&=\mu(q-x\cos\beta-y\sin\beta),\\Z&=\nu(r-x\cos\gamma-y\sin\gamma).\end{aligned}\right.$$

Or, si a^2 et b^2 sont les valeurs algébriques des carrés des longueurs des axes de la courbe, on a N.o (180)

$$(5)\qquad a^2+b^2=-\frac{A+C}{(AC-B^2)^2}\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}\,;$$

$$(6)\qquad a^2b^2=\frac{1}{(AC-B^2)^3}\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}^2.$$

Il nous faut donc calculer, en fonction des A_{rs}, les quantités

$$\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix},\ (A+C),\ (AC-B^2).$$

Nous désignerons par Δ le discriminant de l'équation (1), de sorte que

$$(7)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}.$$

587. Différentions l'identité (3) par rapport à x, y, et z; en regardant X,Y,Z comme des fonctions de x,y,z, définies par les relations (4). On aura

$$\left\{\begin{aligned}Ax+By+Dz&=(A_{11}X+A_{12}Y+A_{13}Z)a_1+(A_{21}X+A_{22}Y+A_{23}Z)b_1+(A_{31}X+A_{32}Y+A_{33}Z)c_1\,;\\Bx+Cy+Ez&=(A_{11}X+A_{12}Y+A_{13}Z)a_2+(A_{21}X+A_{22}Y+A_{23}Z)b_2+(A_{31}X+A_{32}Y+A_{33}Z)c_2\,;\\Dx+Ey+Fz&=(A_{11}X+A_{12}Y+A_{13}Z)a_3+(A_{21}X+A_{22}Y+A_{23}Z)b_3+(A_{31}X+A_{32}Y+A_{33}Z)c_3\,;\end{aligned}\right.$$

ou, si l'on pose

$$(8)\quad \begin{cases} M_{11} = A_{11}a_1 + A_{21}b_1 + A_{31}c_1\,, & M_{21} = A_{11}a_2 + A_{21}b_2 + A_{31}c_2\,, & M_{31} = A_{11}a_3 + A_{21}b_3 + A_{31}c_3\,, \\ M_{12} = A_{12}a_1 + A_{22}b_1 + A_{32}c_1\,, & M_{22} = A_{12}a_2 + A_{22}b_2 + A_{32}c_2\,, & M_{32} = A_{12}a_3 + A_{22}b_3 + A_{32}c_3\,, \\ M_{13} = A_{13}a_1 + A_{23}b_1 + A_{33}c_1\,; & M_{23} = A_{13}a_2 + A_{23}b_2 + A_{33}c_2\,; & M_{33} = A_{13}a_3 + A_{23}b_3 + A_{33}c_3\,; \end{cases}$$

les relations ci-dessus s'écriront :

$$A x + B y + D z = M_{11}X + M_{12}Y + M_{13}Z\,,$$
$$B x + C y + E z = M_{21}X + M_{22}Y + M_{23}Z\,,$$
$$D x + E y + F z = M_{31}X + M_{32}Y + M_{33}Z\,.$$

Différentiant encore ces dernières relations par rapport à x, y, et z, on trouve

$$(9)\quad \begin{cases} A = a_1 M_{11} + b_1 M_{12} + c_1 M_{13}\,, & B = a_1 M_{21} + b_1 M_{22} + c_1 M_{23}\,, & D = a_1 M_{31} + b_1 M_{32} + c_1 M_{33}\,, \\ B = a_2 M_{11} + b_2 M_{12} + c_2 M_{13}\,, & C = a_2 M_{21} + b_2 M_{22} + c_2 M_{23}\,, & E = a_2 M_{31} + b_2 M_{32} + c_2 M_{33}\,, \\ D = a_3 M_{11} + b_3 M_{12} + c_3 M_{13}\,; & E = a_3 M_{21} + b_3 M_{22} + c_3 M_{23}\,; & F = a_3 M_{31} + b_3 M_{32} + c_3 M_{33}\,; \end{cases}$$
$$M_{rs} \gtrless M_{sr}$$

Or, d'après le théorème sur la multiplication des déterminants, on déduit des relations (9)

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}\;;$$

les relations (8) donnent, d'après le même théorème :

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\;;$$

de là on conclut :

$$(10)\quad \begin{vmatrix} A & B & B \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 .$$

Mais si l'on introduit les paramètres de référence en prenant les formules de transformation sous la forme (4 bis), on trouve sans difficulté, en ayant égard aux relations (4) et (6) du N.° [94]

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ p & q & r \end{vmatrix}\,,$$

d'où, eu égard aux relations citées :

$$(11)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm\,\lambda\mu\nu . \frac{S}{R}\,.$$

On a donc définitivement

$$(12)\quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \lambda^2\mu^2\nu^2\,\frac{S^2}{R^2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\,.$$

588. Les relations (8) nous donnent d'abord

$$A = a_1 M_{11} + b_1 M_{12} + c_1 M_{13}\;;\quad C = a_2 M_{21} + b_2 M_{22} + c_2 M_{23}\,,$$
$$B = a_1 M_{21} + b_1 M_{22} + c_1 M_{23} = a_2 M_{11} + b_2 M_{12} + c_2 M_{13}\,;$$

d'où l'on conclut

$$AC - B^2 = (a_1 M_{11} + b_1 M_{12} + c_1 M_{13})(a_2 M_{21} + b_2 M_{22} + c_2 M_{23}) - (a_1 M_{21} + b_1 M_{22} + c_1 M_{22})(a_2 M_{11} + b_2 M_{12} + c_2 M_{13})\,.$$

Développant et réduisant, il vient :

$$AC - B^2 = (b_2 c_1 - b_1 c_2)\left[M_{22} M_{13} - M_{12} M_{23}\right] + (c_2 a_1 - c_1 a_2)\left[M_{11} M_{23} - M_{21} M_{13}\right] + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\left[M_{12} M_{21} - M_{11} M_{22}\right]\,.$$

Si maintenant on remplace les M_{rs} par leurs valeurs (8), et qu'on pose :

$$(13)\quad \begin{cases} b_2 c_1 - b_1 c_2 = a' , \\ c_2 a_1 - c_1 a_2 = b' , \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 = c' ; \end{cases}$$

on trouve :

$$AC - B^2 = \begin{cases} + a' \left[a' (A_{22} A_{33} - A_{23}^2) + b' (A_{13} A_{32} - A_{12} A_{33}) + c' (A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22}) \right] \\ + b' \left[a' (A_{23} A_{31} - A_{21} A_{33}) + b' (A_{11} A_{33} - A_{13}^2) + c' (A_{13} A_{21} - A_{11} A_{23}) \right] \\ + c' \left[a' (A_{21} A_{32} - A_{31} A_{22}) + b' (A_{12} A_{31} - A_{32} A_{11}) + c' (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) \right] \end{cases}$$

Sous cette dernière forme, on voit immédiatement que

$$(14)\quad B^2 - AC = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & a' \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & b' \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & c' \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} .$$

Or, si l'on remarque que

$$(15)\quad \begin{cases} a_1 = -\lambda \cos\alpha, & b_1 = -\mu \cos\beta , & c_1 = -\nu \cos\gamma , \\ a_2 = -\lambda \sin\alpha ; & b_2 = -\mu \sin\beta ; & c_2 = -\nu \sin\gamma ; \end{cases}$$

et si l'on a égard aux relations (5) du N.° [94], les valeurs (13) de a', b', c', seront

$$a' = k . \mu\nu \sin A , \quad b' = k . \lambda\nu \sin B , \quad c' = k . \lambda\mu \sin C .$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (14), divisant par k^2 qui est égal à l'unité N.° [94], et mettant $\lambda^2 \mu^2 \nu^2$ en facteur, on trouve définitivement

$$(16)\quad B^2 - AC = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\sin A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\sin B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\sin C}{\nu} \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0 \end{vmatrix} \lambda^2 \mu^2 \nu^2 .$$

589. Les relations (8) et (9) nous donnent facilement :

$$(17)\quad \begin{cases} A = A_{11} a_1^2 + A_{22} b_1^2 + A_{33} c_1^2 + 2 A_{12} a_1 b_1 + 2 A_{13} a_1 c_1 + 2 A_{23} b_1 c_1 , \\ C = A_{11} a_2^2 + A_{22} b_2^2 + A_{33} c_2^2 + 2 A_{12} a_2 b_2 + 2 A_{13} a_2 c_2 + 2 A_{23} b_2 c_2 . \end{cases}$$

En ajoutant, et ayant égard aux relations (15) et aux relations (4) du N.° [94]

$$(18)\quad A + C = \lambda^2 A_{11} + \mu^2 A_{22} + \nu^2 A_{33} - 2\mu\nu A_{23} \cos A - 2\lambda\nu A_{13} \cos B - 2\lambda\mu A_{12} \cos C .$$

590. Substituant, dans les formules (5) et (6), les valeurs fournies par les relations (12), (16) et (18), on arrive aux relations fondamentales qui servent à déterminer les axes a et b de la courbe (1), savoir

$$(I)\quad a^2 + b^2 = - \frac{S^2}{R^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2} \cdot \frac{(\lambda^2 A_{11} + \mu^2 A_{22} + \nu^2 A_{33} - 2\mu\nu A_{23} \cos A - 2\lambda\nu A_{13} \cos B - 2\lambda\mu A_{12} \cos C) . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\sin A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\sin B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\sin C}{\nu} \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0 \end{vmatrix}^2} .$$

$$(\text{II})\qquad a^2b^2 = -\frac{S^4}{R^4\lambda^2\mu^2\nu^2}\cdot\frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\sin A}{\lambda}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\sin B}{\mu}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\sin C}{\nu}\\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0\end{vmatrix}^3}$$

Les paramètres de référence sont λ, μ, ν; et l'équation de la courbe est

$$(\text{III})\qquad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;$$

A, B, C, R, S désignent les angles, la surface et le rayon circonscrit du triangle de référence.

III.° Discussion des formules (I) et (II) N.° [590].

591. La courbe se réduit à deux droites réelles ou imaginaires si

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix} = 0;$$

car les deux axes de la courbe sont alors nuls.

La courbe est une hyperbole équilatère, si

$$(2)\qquad \lambda^2A_{11} + \mu^2A_{22} + \nu^2A_{33} - 2\mu\nu A_{23}\cos A - 2\lambda\nu A_{13}\cos B - 2\lambda\mu A_{12}\cos C = 0,$$

car alors la somme des algébriques des carrés des axes est nulle.

La courbe est une parabole si

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \frac{\sin A}{\lambda}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \frac{\sin B}{\mu}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \frac{\sin C}{\nu}\\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0\end{vmatrix} = 0;$$

les axes sont, en effet, infinis; cette relation exprime encore que la courbe est tangente à la droite de l'infini

$$\frac{\sin A}{\lambda}\cdot X + \frac{\sin B}{\mu}\cdot Y + \frac{\sin C}{\nu}\cdot Z = 0.$$

On pourrait déduire de ces mêmes formules les deux conditions pour que la courbe se réduise à un cercle. Le calcul présente des difficultés si l'on veut mettre en évidence les deux conditions; nous laisserons de côté cette question.

IV.° Application aux coniques conjuguées par rapport à un triangle.

592. L'équation générale des coniques conjuguées par rapport à un triangle est N.° [456].

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0,$$

si l'on choisit le triangle pour triangle de référence. Nous supposerons, dans tout ce qui suit, les paramètres de référence λ, μ, ν, égaux à l'unité.

Désignant par a et b les longueurs des axes de la courbe (1), nous aurons d'après les formules du N.° [590]:

$$(2)\qquad a^2+b^2=-\frac{S^2}{R^2mnp}\cdot\frac{(m+n+p)}{\left(\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right)^2};$$

$$(3)\qquad a^2b^2=\frac{S^4}{R^4}\cdot\frac{1}{mnp\left[\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right]^3}.$$

Les coordonnées du centre (X_0, Y_0, Z_0) ont pour valeurs Nos [544], [96], [93]:

$$(4)\qquad \frac{mX_0}{\sin A}=\frac{nY_0}{\sin B}=\frac{pZ_0}{\sin C}=\frac{S}{R}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right)}.$$

L'équation (1) représentera:

Une hyperbole équilatère, si

$$(5)\qquad m+n+p=0;$$

une parabole, si

$$(6)\qquad \frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}=0.$$

Si l'on exprime que les axes a et b sont égaux, on trouve que l'équation de condition peut se mettre sous la forme

$$(m+n\cos 2C+p\cos 2B)^2+(n\sin 2C-p\sin 2B)^2=0;$$

d'où l'on conclut que l'équation (1) représentera un cercle, si

$$(7)\qquad \frac{m}{\sin^2 A}=\frac{n}{\sin^2 B}=\frac{p}{\sin^2 C};$$

relations déjà connues No [275].

593. La puissance P_0^2 du centre (X_0, Y_0, Z_0) (4), par rapport au cercle circonscrit au triangle de référence

$$YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0,$$

est No [259]

$$-\frac{2R^2}{S}(Y_0Z_0\sin A+Z_0X_0\sin B+X_0Y_0\sin C).$$

En y introduisant les valeurs (4), cette expression donne

$$(8)\qquad P_0^2=-\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{(m+n+p)}{mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right)^2}.$$

Si l'on compare les relations (8) et (2), on en conclut:

$$(I)\qquad P_0^2=a^2+b^2.$$

C. à d. Que la puissance du centre d'une conique, par rapport au cercle circonscrit à un triangle conjugué, est égale à la somme des carrés des axes. (Théorème donné par M. Faure, nelles annales, année 1861).

594. En ayant égard aux valeurs (4) et à la relation (3), on obtient

$$(II)\qquad R\,X_0Y_0Z_0=a^2b^2,$$

c. à d. que le produit des distances du centre aux côtés d'un triangle conjugué par le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est égal au carré du produit des axes. (Théorème donné par M. Faure nelles annales 1861, page 55).

595. Si l'on suppose que les coniques (1) soient des hyperboles équilatères, on trouve en éliminant m, n, p, entre les relations (4) et (5):

$$(III)\qquad \frac{\sin A}{X}+\frac{\sin B}{Y}+\frac{\sin C}{Z}=0,\quad \text{ou}\quad YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0;$$

c. à d. Lorsque des hyperboles équilatères sont conjuguées par rapport à un triangle fixe, leurs centres décrivent le cercle circonscrit au triangle.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème du No [593].

§ VI Équations tangentielles.

I° Enveloppes diamétrales.

596. Nous appellerons enveloppe diamétrale de la classe p la polaire de classe p de la droite de l'infini.
On a donné N.os [462] et [464] les équations des polaires d'une droite; il est facile d'en conclure les équations des enveloppes diamétrales de diverses classes.
L'enveloppe diamétrale de première classe est un point, c'est le point polaire de la droite de l'infini. Dans le cas des courbes de 2.ème classe, ce point est le centre de la courbe, car c'est le pôle de la droite de l'infini.

II° Diamètres dans les courbes de 2.ème classe.

597. Dans les courbes de 2.ème classe, nous obtiendrons les coordonnées du diamètre conjugué d'une direction donnée, en cherchant les coordonnées de la droite dont le point polaire est à l'infini sur la direction donnée N.os [462], [463], [467], [560].
Soit par exemple, m le coefficient angulaire de la direction des cordes, les coordonnées du point à l'infini sur cette direction seront

$$z_0=0,\ y_0=mx_0,$$

et l'équation tangentielle de ce point sera

$$(1)\qquad x_0u+y_0v=0,\ \text{ou}\ u+mv=0.$$

Les coordonnées de la droite, ayant le point (1) pour point polaire par rapport à la courbe

$$(2)\qquad f(u,v,w)=Au^2+2Buv+Cv^2+2Duv+2Evw+Fw^2=0,$$

seront définies par les équations

$$\frac{f'_u}{1}=\frac{f'_v}{m}=\frac{f'_w}{0};$$

ou

$$(3)\qquad mf'_u-f'_v=0,\ f'_w=0;$$

telles sont les équations du diamètre conjugué des cordes dont le coefficient angulaire est m.
Dans le cas des coordonnées trilatères, le point à l'infini sera défini par les coordonnées λ,μ,ν de la droite de l'infini et par les coordonnées U_0, V_0, W_0 d'une droite parallèle à la direction des cordes; on aura donc, pour l'équation du point à l'infini

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_0 & V_0 & W_0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=0.$$

Par suite, les coordonnées du diamètre seront déterminées par les relations

$$\frac{f'_U}{V_0\nu-W_0\mu}=\frac{f'_V}{W_0\lambda-U_0\nu}=\frac{f'_W}{U_0\mu-V_0\lambda}.$$

598. Conditions pour qu'un des axes de coordonnées soit un diamètre conjugué des cordes parallèles à l'autre axe.

Cherchons, par exemple, les conditions pour que l'axe Ox soit conjugué des cordes parallèles à Oy.

Le point à l'infini sur Oy ($x_0=0, z_0=0$) a pour équation N.o [116]

$$v=0;$$

Les équations du diamètre correspondant seront :

$$f'_u = 0, f'_w = 0; \text{ ou } Au + Bv + Dw = 0, Du + Ev + Fw = 0.$$

Pour que ce diamètre coïncide avec Ox, il faut que les coordonnées de l'axe des x, savoir $u = 0, w = 0$ N.° [116], vérifient les équations précédentes; d'où l'on conclut

$$B = 0, E = 0;$$

et l'équation (2) de la courbe se réduit à

$$(4) \qquad Au^2 + Cv^2 + 2Du + F = 0.$$

Donc pour que l'axe des x soit un diamètre conjugué des cordes parallèles à l'axe des y, il faut que l'équation de la courbe ne renferme que des puissances paires de la variable v.

On verra de même que pour que l'axe des y soit un diamètre conjugué des cordes parallèles à Ox, il faut que l'équation ne renferme que des puissances paires de la variable u.

L'équation tangentielle d'une courbe de 2ème classe, pour laquelle les axes de coordonnées sont deux diamètres conjugués, est donc de la forme

$$(5) \qquad Au^2 + Cv^2 = H.$$

Les réciproques des propositions que nous venons d'énoncer sont faciles à démontrer, soit par le calcul, soit par un raisonnement direct s'appuyant sur les propriétés des diamètres.

599. Condition pour que les directions de deux droites (u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1) soient conjuguées.

Pour cela, il faut et il suffit, que l'une d'elles soit parallèle au diamètre conjugué de l'autre.

Le point à l'infini, situé sur la première droite, aura pour équation

$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0}, \text{ ou } uv_0 - vu_0 = 0.$$

Le diamètre, correspondant à ce point, est défini par

$$\frac{f'_u}{v_0} = \frac{f'_v}{-u_0} = \frac{f'_w}{0}; \text{ ou } f'_w = 0, u_0 f'_u + v_0 f'_v = 0.$$

c. à. d. d'après l'équation (2):

$$(6) \qquad [Du + Ev + Fw = 0, (Au_0 + Bv_0)u + (Bu_0 + Cv_0)v + (Du_0 + Ev_0)w = 0.]$$

Il faut que la droite (6) soit parallèle à la droite (u_1, v_1, w_1), c. à. d. que les équations (6) soient vérifiées par des valeurs de $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$ proportionnelles à $\frac{u_1}{w_1}, \frac{v_1}{w_1}$ N.° [116], telles que $\lambda\frac{u_1}{w_1}$, $\lambda\frac{v_1}{w_1}$. En substituant ces valeurs et en éliminant λ, on trouve:

$$(7) \qquad (AF - D^2)u_0u_1 + (BF - ED)(u_0v_1 + u_1v_0) + (CF - E^2)v_0v_1 = 0,$$

telle est la relation que doivent vérifier les coordonnées de deux droites (u_0, v_0), (u_1, v_1) dont les directions sont conjuguées N.° [563].

III°. Axes dans les courbes de 2ème classe.

600. Si l'on suppose les axes de coordonnées rectangulaires, on démontrera comme au N.° [598], que pour que l'axe des x soit axe de la courbe, il faut et il suffit que l'équation ne renferme que des puissances paires de la variable v; et, l'axe des y, sera un axe de la courbe, si l'équation ne renferme que des puissances paires de la variable u.

Nous allons, par différentes méthodes, déterminer la direction des axes.

1ère Méthode. On peut exprimer, dans la relation (7) que les deux droites (u_0, v_0), (u_1, v_1) sont rectangulaires, c. à. d. que N.° [131]

$$(8) \qquad u_0u_1 + v_0v_1 = 0.$$

Les relations (7) et (8) détermineront les coordonnées de deux droites parallèles aux axes.

Ou encore, en remplaçant dans la relation (7), $\frac{u_1}{v_1}$ par $-\frac{v_0}{u_0}$, et en supprimant l'indice 0, on trouve

$$(9)\quad (u^2-v^2)(BF-ED)+uv\left[(C-A)F+D^2-E^2\right]=0;$$

c'est l'équation des deux points à l'infini sur la direction des axes.

2ème Méthode. On peut se servir des formules de transformation du N° [356], et déterminer les constantes, en supposant les nouveaux axes rectangulaires, de manière à ce que la nouvelle équation ne renferme que les carrés des nouvelles variables.

Nous ne développerons pas ces calculs.

3ème Méthode. Nous nous appuierons sur la propriété énoncée au N° [584].

Soient ω, ω_1, les points circulaires à l'infini; γ et γ_1 les points à l'infini sur la courbe, A et A_1 les points à l'infini sur les directions des axes; on devra avoir à la fois

$$(10)\quad \begin{cases} (\omega\,\omega_1\ A A_1)=-1, \\ (\gamma\,\gamma_1\ A A_1)=-1. \end{cases}$$

L'équation des points circulaires à l'infini est, en supposant les axes rectangulaires, N° [284]

$$(1°)\quad (\omega, \omega_1):\ u^2+v^2=0.$$

L'équation des points γ, γ_1, à l'infini sur la courbe, sera donnée par l'équation (7) du N° [416], en y faisant $\alpha=0, \beta=0$, (coordonnées de la droite de l'infini); on a

$$(2°)\quad (\gamma, \gamma_1):\ (AF-D^2)u^2+2(BF-ED)uv+(CF-E^2)v^2=0.$$

Soit enfin l'équation des points à l'infini sur les directions des axes:

$$(3°)\quad (A, A_1):\ A'u^2+2B'uv+C'v^2=0.$$

Par l'application de la règle du N° [117], les relations (10), eu égard aux équations précédentes, nous donnent

$$\begin{cases} A'+C'=0, \\ A'(CF-E^2)+C'(AF-D^2)=2B'(BF-ED). \end{cases}$$

Substituant, dans l'équation (3°) les valeurs de $\frac{A'}{B'}$, $\frac{C'}{B'}$, fournies par ces équations, on trouve

$$(11)\quad u^2+\frac{(C-A)F+D^2-E^2}{BF-ED}uv-v^2=0.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (9). Le rapport $\frac{u}{v}$ déterminera la direction des axes.

601. **Longueur des axes dans les courbes de 2ème classe.**

Nous supposerons la courbe rapportée à son centre, ce qu'on pourra toujours faire à l'aide des formules de transformation du N° [356]; soit alors

$$(12)\quad Au^2+2Buv+Cv^2=G,$$

l'équation de la courbe. Nous nous appuierons, pour la détermination des longueurs des axes, sur la propriété du N° [582]. Si θ est l'angle des axes de coordonnées, l'équation tangentielle d'un cercle ayant pour centre l'origine, est N° [279]

$$(13)\quad u^2-2\cos\theta.\,uv+v^2=\frac{\sin^2\theta}{\rho^2},$$

ρ étant le rayon de ce cercle.

Si l'on retranche les équations (12) et (13), après avoir multiplié la 1ère par $\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}$, la 2ème par G, il vient

$$(14)\quad \left(A\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}-G\right)u^2+2uv\left(B\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}+G\cos\theta\right)+\left(C\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}-G\right)v^2=0.$$

Cette équation détermine les deux points à l'infini par où passent les deux couples de tangentes communes aux deux courbes concentriques (12) et (13). Si les deux courbes en question sont doublement tangentes, les deux directions des tangentes communes, coïncident, ou les deux points à l'infini se confondent. Exprimons donc que l'équation (14) a ses deux racines égales, on obtient l'équation suivante:

$$(15)\quad \rho^4G^2-G(A+C-2B\cos\theta).\rho^2+(AC-B^2)\sin^2\theta=0.$$

Les racines de cette équation seront les carrés des axes de la courbe.

$$(16) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = G.$$

Si $AC - B^2 > 0$, on a une ellipse réelle ou imaginaire;

Si $AC - B^2 < 0$, on a une hyperbole;

Si $A + C - 2B\cos\theta = 0$, on a une hyperbole équilatère;

Si $A = C$ et $\frac{B}{A} = \cos\theta$ on a un cercle: (en supposant l'équation sous la forme particulière (16)).

Ces résultats quoique se présentant sous une forme différente, sont néanmoins d'accord avec ceux qui ont été obtenus au N.° [363].

D'après la méthode indiquée, on trouvera, dans le cas de l'équation générale

$$(17) \qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

que les carrés des longueurs des axes sont donnés par l'équation suivante:

$$(18) \qquad F^3 \cdot \rho^4 - F\left\{D^2 + E^2 - (A + C)F + 2(ED - BF)\cos\theta\right\}\rho^2 + \Delta\sin^2\theta = 0,$$

$$\text{où} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Chapitre VII

Homothétie.

§I Notions générales.

1.° Définitions.

602. « Soit un système de points A, B, C, ... situés dans un plan; prenons un point O du plan et « joignons-le aux différents points du système; puis, prenons sur ces rayons vecteurs des points A', B', C', « tels que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots\ldots = k;$$

« les deux systèmes ABCD .... et A'B'C'D' .... sont dits semblables et semblablement placés, ou « encore, homothétiques. »

Le point O est le centre commun d'homothétie ou centre de similitude; la constante k est le rapport de similitude.

Les points, tels que A et A', situés sur le même rayon vecteur sont dits points correspondants ou points homologues; les longueurs, telles que AB et A'B', sont dites dimensions homologues.

« Au lieu de prendre les points A', B', C', ... sur les rayons OA, OB, OC, ..., on aurait pu les prendre « sur les prolongements des rayons en A'', B'', C'', ... par exemple, et tels que

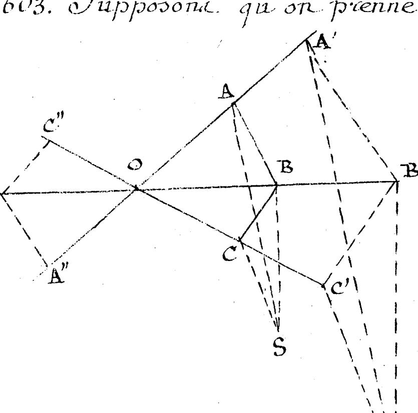
$$\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = \ldots = k,$$

« les deux figures ABCD .... et A''B''C''D'' .... sont dites semblables et inversement placées, ou encore, « homothétiques inverses; le point O est le centre d'homothétie inverse. »

On peut amener, par une rotation de 180°, une figure homothétique plane inverse à coïncider avec une des homothétiques inverses.

L'homothétie est un cas particulier de l'homologie, c'est celui où l'axe d'homologie se trouve transporté à l'infini.

603. Supposons qu'on prenne un point S dans le plan et qu'on le joigne aux points A, B, C, D, ...; puis, que par les points homologues A', B', C', D', ... on mène des parallèles aux droites SA, SB, SC, ...; ces parallèles concourront en un point unique S'. Les deux points S et S' sont nommés points correspondants. Les deux points S et S' sont en ligne droite avec le point O. On pourra supposer que l'une des figures, S'A'B'C'.... par exemple, soit transportée parallèlement à elle-même, le point S' glissant sur la droite S'O, jusqu'à ce que le point S' vienne coïncider avec le point S; les deux figures seront encore homothétiques, et le point S sera alors le centre commun d'homothétie.



Ainsi, étant données deux figures homothétiques, on peut toujours déplacer l'une d'elles parallèlement à elle-même, de manière qu'un point, arbitrairement choisi, soit le centre commun de similitude.

Deux figures sont dites semblables, lorsqu'on peut amener l'une d'elles à coïncider avec une des homothétiques de l'autre.

II°. Équation générale des courbes homothétiques d'une courbe donnée.

604. Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, soit

$$(1) \qquad f(\rho, \omega) = 0,$$

et si l'on suppose que le pôle soit le centre commun de similitude, l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe proposée sera

$$(2) \qquad f(k\rho, \omega) = 0.$$

M' M
ω
P X

En effet, si nous prenons un point quelconque M' sur le rayon vecteur correspondant à l'angle ω, et si l'on désigne par ρ et ρ' les distances PM et PM', on a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{k}, \text{ ou } \rho = k\rho';$$

comme l'angle ω conserve la même valeur, l'équation (1) deviendra

$$f(k\rho', \omega) = 0;$$

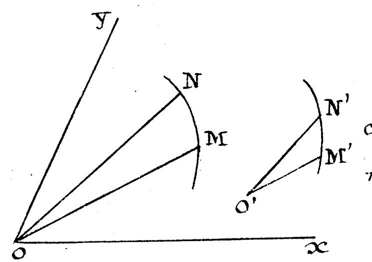
c'est une relation entre les coordonnées ω et ρ' d'un point quelconque de la courbe homothétique. En supprimant l'accent, on trouve l'équation (2). Donc....

605. Soit maintenant l'équation, en coordonnées rectilignes, d'une courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

Regardons l'origine O comme faisant partie du système formé par la courbe proposée, et désignons par x_0 et y_0 les coordonnées du point O' correspondant au point O et faisant partie du système formé par une des courbes homothétiques de la courbe (1).

Soit M (x, y) un point de la courbe proposée et M' (x', y') le point homologue de la courbe homothétique considérée; si l'on joint OM et O'M', les droites OM et O'M' devront être parallèles, et on devra avoir, quels que soient le point M et son homologue M',



$$(2) \qquad \frac{OM}{O'M'} = k.$$

Si l'on projette les lignes OM et O'M' sur l'axe Ox, les projections sont dans le même rapport que les longueurs de ces droites, on a donc

$$\frac{x}{x'-x_0} = \frac{OM}{O'M'} = k.$$

On aura de même, en projetant sur l'axe Oy

$$\frac{y}{y'-y_0} = \frac{OM}{O'M'} = k.$$

On déduit de ces égalités

$$x = k(x'-x_0) \quad y = k(y'-y_0).$$

Or x et y, qui sont les coordonnées d'un point de la courbe proposée, doivent vérifier l'équation de cette courbe ; on a donc

$$f(k(x'-x_0),\ k(y'-y_0)) = 0,$$

ou, en supprimant les accents:

$$(3) \qquad f(k(x-x_0),\ k(y-y_0)) = 0.$$

L'équation (3) est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe homothétique de la courbe proposée; c'est donc **l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (1).**

Pour obtenir le centre commun d'homothétie des courbes (1) et (3), il suffirait de chercher le point de concours de deux rayons vecteurs, tels que MM' et NN', passant par deux couples de points homologues.

Lorsqu'on suppose que l'origine des coordonnées est le centre commun d'homothétie, il faut faire $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, et l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (1) prendra la forme plus simple

$$(4) \qquad f(kx,\ ky) = 0.$$

Remarque. Si l'on veut chercher les conditions pour que deux courbes données

$$(1°) \qquad f(x,y) = 0,$$

$$(2°) \qquad F(x,y) = 0,$$

soient homothétiques, on prendra l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (2°) par exemple, laquelle sera

$$(3°) \qquad F(k(x-x_0),\ k(y-y_0)) = 0,$$

et on exprimera que la courbe (3°) coïncide avec la courbe (1°).

On conclura de là que les courbes f et F doivent être du même ordre, et qu'elles doivent avoir les mêmes directions asymptotiques.

Ces conditions sont nécessaires, mais elles ne sont pas, en général, suffisantes, lorsque l'ordre de la courbe est supérieur à deux.

606. **Cas où l'équation ne renferme qu'un seul paramètre linéaire.**

« Lorsque l'équation d'une courbe ne renferme qu'un seul paramètre linéaire et qu'aucune des lignes « de la figure n'a été prise pour unité, toutes les courbes représentées par cette équation sont homothé« tiques, et l'origine est le centre commun de similitude.

Soit l'équation de ces courbes

$$(C) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

où a représente la mesure, rapportée à une unité arbitraire, d'une certaine ligne A. Puisqu'aucune

ligne de la figure n'a été prise pour unité, la fonction f est homogène par rapport à x, y, et a; de sorte que

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y, \lambda a) = \lambda^m f(x, y, a).$$

Considérons une de ces courbes, celle qui correspond à la valeur particulière a_0 du paramètre a; son équation sera

$$(C_0) \qquad f(x, y, a_0) = 0.$$

L'équation générale des courbes homothétiques de la courbe C_0, l'origine étant le centre commun de similitude, est

$$(C') \qquad f(kx, ky, a_0) = 0.$$

Or, a_0 étant choisi, on peut toujours poser

$$a_0 = ka_1;$$

a_1 sera déterminé si l'on se donne k, ou inversement k sera déterminé si l'on se donne a_1. L'équation de la courbe (C') devient alors

$$f(kx, ky, ka_1) = 0,$$

ou, d'après l'identité (1):

$$(C) \qquad f(x, y, a_1) = 0.$$

Or cette équation est précisément celle d'une des courbes C, obtenue en attribuant à a la valeur particulière a_1. Si k est arbitraire, a_1 sera arbitraire; c.à.d. que les courbes (C) sont homothétiques de l'une d'entre elles; ou, ce qui revient au même, elles sont homothétiques.

607. En général, supposons qu'il faille n paramètres linéaires pour définir toutes les courbes d'une même espèce, abstraction faite de leur position dans le plan; désignons par $a, b, c, \dots$ les mesures de ces paramètres au moyen d'une unité arbitraire. Supposons qu'on ait amené l'équation de ces courbes à ne plus dépendre que de ces paramètres, de sorte que cette équation soit de la forme

$$(C) \qquad f(x, y, a, b, c, \dots) = 0;$$

elle sera homogène par rapport à $x, y, a, b, c, \dots$; c.à.d. que

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \dots) = \lambda^m f(x, y, a, b, c, \dots).$$

Considérons une de ces courbes correspondant aux valeurs particulières $a_0, b_0, c_0, \dots$ des paramètres, son équation sera

$$(C_0) \qquad f(x, y, a_0, b_0, c_0, \dots) = 0.$$

L'équation générale des courbes homothétiques de la courbe C_0, l'origine étant le centre commun de similitude, est

$$(C') \qquad f(kx, ky, a_0, b_0, c_0, \dots) = 0.$$

Or, $a_0, b_0, c_0, \dots$ étant choisis, on peut toujours poser

$$(2) \qquad a_0 = ka_1, \ b_0 = kb_1, \ c_0 = kc_1, \dots;$$

l'équation des courbes C' deviendra, eu égard à l'identité (1):

$$(C') \qquad f(x, y, a_1, b_1, c_1, \dots) = 0.$$

Or c'est précisément l'équation d'une des courbes (C), obtenue en attribuant à $a, b, c, \dots$ les valeurs particulières $a_1, b_1, c_1, \dots$.

« Donc lorsque l'équation d'une courbe est amenée à ne plus dépendre que des paramètres linéaires « qui définissent complètement l'espèce de la courbe, toutes les courbes représentées par cette équation « sont homothétiques et ont pour centre commun de similitude l'origine, si l'on fait varier proportionnellement tous les paramètres linéaires »

608. Lorsque deux courbes sont homothétiques, les tangentes aux points homologues sont parallèles.

En effet, si M et M', N et N', sont deux couples de points homologues, les droites MN et M'N' sont parallèles. Or, si le point N se rapproche indéfiniment de M, le point homologue N' se rapprochera aussi indéfiniment de M', puisque les rayons vecteurs ON et O'N' sont constamment parallèles; les droites MN et M'N' resteront également parallèles; donc, lorsque MN deviendra tangente, M'N' deviendra aussi tangente en M'; et le parallélisme aura encore lieu à la limite.

III. Équation générale des courbes semblables à une courbe donnée.

609. Deux courbes sont semblables lorsque l'une d'elles peut-être amenée à coïncider avec une des homothétiques de l'autre.

Soit une courbe C dont l'équation est

$$(1) \qquad (C) \qquad f(x,y)=0,$$

et C' une courbe semblable. D'après la définition des courbes semblables, la courbe C peut être amenée à coïncider avec une des courbes homothétiques de la courbe C', et inversement la courbe C peut être amenée à coïncider avec une des homothétiques de C'. On peut toujours supposer que l'on transporte les axes Ox et Oy, en entraînant la courbe C, parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce que l'origine O arrive en un certain point O'; puis qu'alors on fasse tourner les axes autour de O', jusqu'à ce que la courbe C vienne se placer en C_1, sur une des homothétiques de C'; de sorte que C_1 est une homothétique de C' égale à C, et que O' est le centre commun de similitude des deux courbes C_1 et C'.

Nous avons supposé que les axes entraînaient avec eux la courbe C, l'équation de la courbe C_1 par rapport aux nouveaux axes sera donc encore

$$(C_1) \qquad f(x',y')=0,$$

la caractéristique f restant la même; x' et y' représentent les coordonnées du point M_1 par rapport aux nouveaux axes O'x', O'y'; elles sont respectivement égales aux coordonnées x et y du point M par rapport aux axes Ox, Oy.

Nous pouvons maintenant considérer la courbe C' comme une courbe homothétique de C_1, la nouvelle origine étant le centre commun de similitude; de sorte que l'équation de C', par rapport aux nouveaux axes, sera No. [605]

$$(2) \qquad (C') \qquad f(kx', ky')=0,$$

x' et y' désignant les coordonnées du point M', homologue de M_1. Cette équation représente donc la courbe C' rapportée aux nouveaux axes O'x', O'y', faisant un angle θ égal à celui des axes primitifs Ox, Oy.

Pour rapporter cette courbe aux axes primitifs, désignons par α et β les angles de O'x', O'y', avec Ox, et par x_0, y_0, les coordonnées de O' par rapport à Ox et Oy, les formules de transformation sont

$$(3) \quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\[2ex] y = y_0 + \dfrac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}, \end{cases}$$

avec la relation $\beta-\alpha=\theta$.

Or la courbe (2) étant rapportée aux nouveaux axes, nous devons passer des nouveaux axes aux anciens, c. à. d. remplacer x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et y. Des formules (3) on déduit

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{(x-x_0)\sin\beta - (y-y_0)\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y' = \dfrac{-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \end{cases}$$

avec la condition $\beta - \alpha = \theta$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on en conclut que l'équation générale des courbes semblables à la courbe proposée (1) est

$$(5)\qquad f\left[k\,\frac{(x-x_0)\sin(\theta+\alpha)+(y-y_0)\sin\alpha}{\sin\theta},\quad k\,\frac{-(x-x_0)\sin\alpha+(y-y_0)\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}\right]=0.$$

Dans cette équation entrent quatre indéterminées, k, x_0, y_0, α.

610. Lorsqu'une courbe est définie géométriquement, abstraction faite de sa position dans le plan, par un seul paramètre linéaire; ou, ce qui revient au même, lorsque l'équation de cette courbe peut être amenée, indépendamment de sa position dans le plan, à ne plus renfermer qu'un seul paramètre linéaire, toutes les courbes de la même espèce sont des courbes semblables.

Car, une quelconque de ces courbes peut être amenée à coïncider avec une de ses homothétiques, (N.° 606).

Ainsi un cercle est défini par son rayon; ou, son équation peut être amenée à la forme

$$x^2+y^2-R^2=0;$$

tous les cercles sont semblables.

Une parabole est définie par son paramètre; ou, son équation peut être amenée à la forme

$$y^2-2px=0;$$

toutes les paraboles sont semblables.

Lorsqu'une courbe est définie géométriquement, abstraction faite de sa position dans le plan, par n paramètres linéaires; ou, ce qui revient au même, lorsque l'équation de cette courbe peut être amenée, indépendamment de sa position dans le plan, à ne plus renfermer que n paramètres linéaires; toutes les courbes de la même espèce seront semblables, lorsqu'on attribuera aux n paramètres des valeurs proportionnelles.

Ainsi, une ellipse est définie en grandeur par les longueurs de ses axes; ou, son équation peut être amenée à la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

donc des ellipses sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.

On conclura de même que des hyperboles sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.

---

§ II Application aux courbes du second ordre.

1.° Conditions d'homothétie.

611. Soient les équations de deux courbes du second ordre

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

$$(2)\qquad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

Pour obtenir les conditions d'homothétie de ces deux courbes, nous prendrons l'équation générale des

courbes homothétiques de l'une d'elles, et nous exprimerons qu'elle représente la même courbe que l'autre.
Regardons l'origine O comme appartenant au système formé par la courbe (1), et soient O' (x_0, y_0) le point homologue dans le système formé par une de ses homothétiques; l'équation générale des courbes homothétiques de (1) sera alors N° [605]:

$$k^2A(x-x_0)^2+2k^2B(x-x_0)+k^2C(y-y_0)^2+2Dk(x-x_0)+2Ek(y-y_0)+F=0,$$

ou

$$(3)\quad Ax^2+2Bxy+Cy^2-2x\left(Ax_0+By_0-\frac{D}{k}\right)-2y\left(Bx_0+Cy_0-\frac{E}{k}\right)+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2-2\frac{Dx_0+Ey_0}{k}+\frac{F}{k^2}=0.$$

Exprimons que l'équation (3) représente la même courbe que l'équation (2), on aura

$$(4)\quad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=\frac{Ax_0+By_0-\frac{D}{k}}{-D_1}=\frac{Bx_0+Cy_0-\frac{E}{k}}{-E_1}=\frac{Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2-2\frac{Dx_0+Ey_0}{k}+\frac{F}{k^2}}{F_1}.$$

On a ainsi cinq relations entre les trois indéterminées x_0, y_0, k; les trois premiers rapports ne renferment aucune de ces indéterminées; on doit donc avoir d'abord

$$(5)\quad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

Ces conditions sont nécessaires; elles sont aussi suffisantes; car, en les supposant remplies, il reste trois relations entre les trois indéterminées x_0, y_0, k; on pourra toujours les déterminer de manière à ce que les relations soient vérifiées. Donc

Pour que deux courbes du second degré soient homothétiques, il faut et il suffit que les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.

On peut dire encore: il faut et il suffit que les directions asymptotiques soient les mêmes. N° [530].

Remarque I. Lorsque les deux courbes (1) et (2) sont deux cercles, les relations (5) sont toujours vérifiées; donc deux cercles quelconques sont toujours homothétiques.

Remarque II. Deux courbes homothétiques sont toujours du même genre, c. à d. ou deux ellipses, ou deux hyperboles, ou deux paraboles; mais, quoiqu'appartenant au même genre, elles peuvent être des variétés différentes.

On a, en effet,

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=\lambda;$$

d'où l'on conclut

$$B^2-AC=\lambda^2(B_1^2-A_1C_1);$$

c. à d. que les quantités (B^2-AC) et $(B_1^2-A_1C_1)$ sont, en même temps, positives, négatives, ou nulles.

Remarque III. Pour que deux paraboles soient homothétiques, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles.

En effet, les courbes (1) et (2) étant des paraboles, on a

$$B^2-AC=0,\ B_1^2-A_1C_1=0;\ \text{d'où}\ \frac{B}{A}=\frac{C}{B},\ \ \frac{B_1}{A_1}=\frac{C_1}{B_1},\ (1°).$$

Or, si l'on suppose les axes parallèles, c. à d. N° [577]

$$-\frac{A}{B}=-\frac{A_1}{B_1},\quad \text{ou}\quad \frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}\ \ (2°),$$

les relations (5) seront vérifiées. Car, eu égard à l'égalité (2°), les relations (1°) donnent

$$\frac{C}{B} = \frac{C_1}{B_1} \text{ ; d'où } \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \text{ ;}$$

C. Q. F. D.

612\. Revenons maintenant au calcul des indéterminées x_0, y_0, et k. Nous admettons qu'on ait les relations

$$(6) \qquad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \lambda \text{ ;}$$

les équations (4) qui servent à déterminer x_0, y_0 et k pourront s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} A x_0 + B y_0 - \dfrac{D}{k} + \lambda D_1 = 0, \\ B x_0 + C y_0 - \dfrac{E}{k} + \lambda E_1 = 0, \\ A x_0^2 + 2 B x_0 y_0 + C y_0^2 - 2\,\dfrac{D x_0 + E y_0}{k} + \dfrac{F}{k^2} - \lambda F_1 = 0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations peut se simplifier en tenant compte des deux premières; retranchons de la troisième la somme des deux premières respectivement multipliées par x_0 et y_0, nous remplacerons le système (7) par le suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} A x_0 + B y_0 - \dfrac{D}{k} + \lambda D_1 = 0, \\ B x_0 + C y_0 - \dfrac{E}{k} + \lambda E_1 = 0, \\ \left(\dfrac{D}{k} + \lambda D_1\right) x_0 + \left(\dfrac{E}{k} + \lambda E_1\right) y_0 - \dfrac{F}{k^2} + \lambda F_1 = 0. \end{cases}$$

Nous nous contenterons de déterminer le **rapport de similitude** k; pour cela, il suffit d'éliminer x_0 et y_0 entre les trois équations (8); le résultat de l'élimination sera

$$(9) \quad \begin{vmatrix} A & B & -\dfrac{D}{k} + \lambda D_1 \\ B & C & -\dfrac{E}{k} + \lambda E_1 \\ \dfrac{D}{k} + \lambda D_1 & \dfrac{E}{k} + \lambda E_1 & -\dfrac{F}{k^2} + \lambda F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant peut se décomposer, comme il suit, en la somme de deux déterminants :

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \dfrac{D}{k} + \lambda D_1 & \dfrac{E}{k} + \lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} - \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ \dfrac{D}{k} + \lambda D_1 & \dfrac{E}{k} + \lambda E_1 & \dfrac{F}{k} \end{vmatrix} = 0;$$

décomposant encore chacun de ces deux déterminants, il vient

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \lambda D_1 & \lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{k} \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ D & E & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{k} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D_1 & E_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le second et le quatrième déterminants se détruisent il reste

$$\lambda \begin{vmatrix} A & B & D_1 \\ B & C & E_1 \\ \lambda D_1 & \lambda E_1 & F_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} ;$$

ou, enfin, remplaçant, dans le 1er membre, A, B, C, par λA_1, λB_1, λC_1, on a définitivement

$$(10)\qquad \frac{1}{k^2}=\lambda^3\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}=\lambda^3\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1\\ B_1 & C_1 & E_1\\ D_1 & E_1 & F_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}};$$

telle est la valeur du rapport de similitude; on peut toujours faire en sorte que λ soit positif.

613. Nous avons déjà remarqué que deux courbes du second degré homothétiques appartiennent au même genre N.° [315]; la valeur (10) nous montre que: si les courbes appartiennent à la même variété, le rapport de similitude k est toujours réel; si les courbes appartiennent à des variétés différentes, le rapport de similitude peut être nul ou imaginaire, car alors les discriminants Δ et Δ_1 ont des signes différents. N.° [315].

Dans le cas de la Parabole, la valeur (10) de k prend une forme plus simple.

On a, en effet,

$$A.\ \Delta=(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2,$$
$$A_1.\ \Delta_1=(A_1C_1-B_1^2)(A_1F_1-D_1^2)-(A_1E_1-B_1D_1)^2;$$

or $AC-B^2=0$, $A_1C_1-B_1^2=0$; on a donc

$$\frac{1}{k^2}=\lambda^3\cdot\frac{A}{A_1}\cdot\frac{(A_1E_1-B_1D_1)^2}{(AE-BD)^2};$$

ou, en ayant égard aux relations (6)

$$(11)\qquad \frac{1}{k}=\pm\lambda^2\,\frac{A_1E_1-B_1D_1}{AE-BD};$$

le rapport d'homothétie est alors réel.

II.° Cas singuliers.

614. Nous allons examiner différents cas où le rapport de similitude peut être nul ou imaginaire. Considérons les deux courbes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0.$$

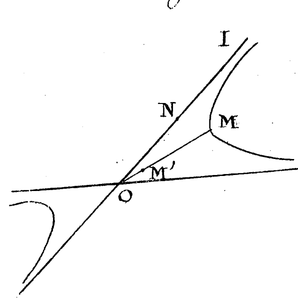
Ces deux équations, ayant les mêmes termes du second degré, représentent deux courbes homothétiques; l'origine est le centre commun de similitude; mais le rapport de similitude est imaginaire. Ces deux équations représentent, en effet, deux hyperboles conjuguées; elles ont les mêmes asymptotes; mais les courbes ne sont pas situées dans le même angle des asymptotes. Si OM est un rayon vecteur, correspondant à un point réel de la 1.ère hyperbole, ce rayon rencontrera la 2.ème hyperbole en un point imaginaire M', de sorte que le rapport $\frac{OM}{OM'}$ est toujours imaginaire.

615. Considérons les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Ces deux équations, ayant les mêmes termes du second degré représentent deux courbes homothé

tiques; l'origine est le centre commun de similitude, mais le rapport de similitude est infini.



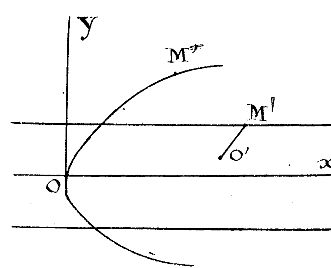
Pour expliquer ce résultat, remarquons que la 1ère équation représente une hyperbole; et la seconde, deux droites qui sont les asymptotes de cette hyperbole. Si l'on considère un rayon vecteur OM, il coupe les asymptotes en un point M' coïncidant avec le point O, de telle sorte que le rapport $\frac{OM}{OM'}$, est infini; l'origine O est donc le point homologue de tous les points de l'hyperbole situés à distance finie. Lorsque le point de l'hyperbole est à l'infini, soit I ce point, un point quelconque N de l'asymptote correspondante donnera $\frac{OI}{ON}=\frac{\infty}{ON}=\infty$; c.à.d. que tous les points d'une asymptote sont alors les points homologues du point de l'hyperbole situé à l'infini sur cette asymptote.

616. Considérons les deux équations

$$(1)\qquad y^2=2px,$$

$$(2)\qquad y^2=a^2;$$

ces deux équations, ayant les mêmes termes du second degré, représentent deux courbes homothétiques.



On voit que la première est une parabole, et la seconde un système de deux droites parallèles à l'axe de la parabole.

Regardons le point O comme appartenant au système formé par la parabole, et soit O' (x_o, y_o) le point homologue dans le système formé par les deux droites parallèles. Soit M un point de la parabole, M' le point correspondant sur le système des deux droites, et soit enfin

$$(3)\qquad \frac{OM}{O'M'}=k;$$

déterminons les valeurs des constantes x_o, y_o, k.

On a $\frac{x}{x'-x_o}=k$, $\frac{y}{y'-y_o}=k$, de sorte que l'équation des courbes homothétiques de la courbe (1) est, en supprimant les accents,

$$(y-y_o)^2=\frac{2p}{k}(x-x_o),\ \text{ou}\ y^2-\frac{2p}{k}x-2y_oy+y_o^2+\frac{2p}{k}x_o=0.$$

Pour que cette équation représente la courbe (2), il faut que

$$(4)\qquad y_o=0,\ k=\infty,\ \lim\frac{2p}{k}x_o=-a^2,\ \text{par suite}\ x_o=\infty.$$

Le point O' est donc à l'infini sur Ox, et le rapport de similitude est infini.

Pour nous rendre compte de ce résultat, évaluons directement le rapport $\frac{OM}{O'M'}$. Le point O' est déterminé par les équations $y=0$, $z=0$; l'équation d'une droite quelconque, passant par ce point, sera donc

$$y=\lambda z;$$

or si l'on cherche l'intersection de cette droite avec la courbe (2), on trouve

$$(\lambda^2-a^2)z^2=0.$$

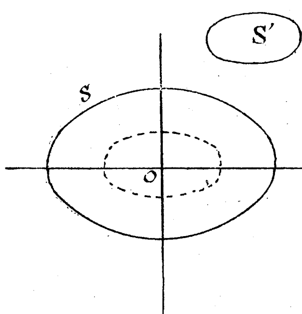
Le point O', à l'infini, est donc un point double de la courbe (2), c.à.d. que toute droite, passant par ce point, y rencontre la courbe en deux points coïncidents; par suite O'M' est nul; on voit ainsi pourquoi le rapport $\frac{OM}{O'M'}$ est infini.

III.e Conditions de similitude.

617. Puisque toutes les paraboles sont semblables, nous n'avons à nous occuper que des courbes à centre. Nous reprendrons ici cette question déjà traitée au N.° [610].

Nous pouvons supposer une des courbes rapportée à ses axes, de sorte que son équation est

$$(S)\qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 .$$



Soit S' la seconde courbe; si elle est semblable à la première, on doit pouvoir la faire coïncider avec une des homothétiques de cette première. Or nous pouvons N° (603) prendre, pour centre commun de similitude, le centre O de la courbe S; l'équation générale des courbes homothétiques de S sera alors

$$(S_1)\qquad \frac{x^2}{k^2 a^2} \pm \frac{y^2}{k^2 b^2} - 1 = 0 ;$$

telle sera aussi l'équation de la courbe S', lorsqu'on l'aura amenée à coïncider avec une des homothétiques de la courbe S, en prenant le centre O pour centre commun d'homothétie. Mais, par ce déplacement, la forme de la courbe S' n'a pas été altérée, et ses axes sont alors

$$a_1^2 = k^2 a^2,\quad b_1^2 = k^2 b^2 ;$$

d'où l'on conclut

$$(7)\qquad \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{b^2} .$$

Donc pour que deux courbes du second degré, de même genre, soient semblables, il faut et il suffit que les axes soient proportionnels.

618. Nous pouvons déduire de là la relation qui doit exister entre les coefficients des équations générales de deux courbes du second ordre, pour que ces deux courbes soient semblables.

Supposons, ce qui est toujours permis, les deux courbes rapportées à un centre commun, et soient les équations

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

$$(2)\qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = H_1 .$$

Pour que ces deux courbes soient semblables, il faut il suffit que

$$(3)\qquad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{k},$$

$a, b; a_1, b_1$, étant les longueurs de leurs axes.

Mais les équations aux carrés des axes des courbes (1) et (2) sont N° (580) :

$$(4)\qquad \begin{cases} (AC - B^2).\ R^2 - H\,(A + C - 2B\cos\theta).\ R + H^2 \sin^2\theta = 0, \\ (A_1C_1 - B_1^2).\ R^2 - H_1\,(A_1 + C_1 - 2B_1\cos\theta).\ R + H_1^2 \sin^2\theta = 0, \end{cases}$$

θ étant l'angle des axes. De ces équations on déduit, eu égard aux relations (3):

$$(5)\qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{H\,(A + C - 2B\cos\theta)}{AC - B^2}, & a^2 b^2 = \dfrac{H^2 \sin^2\theta}{AC - B^2} ; \\ a_1^2 + b_1^2 = k^2\,(a^2 + b^2) = \dfrac{H_1\,(A_1 + C_1 - 2B_1\cos\theta)}{A_1C_1 - B_1^2} ; & a_1^2 b_1^2 = k^4 a^2 b^2 = \dfrac{H_1^2 \sin^2\theta}{A_1C_1 - B_1^2} . \end{cases}$$

Éliminons les quantités a, b, k, entre les égalités (5), nous trouvons

$$(6)\qquad \frac{(A + C - 2B\cos\theta)^2}{AC - B^2} = \frac{(A_1 + C_1 - 2B_1\cos\theta)^2}{A_1C_1 - B_1^2} ;$$

telle est la condition pour que deux courbes du second ordre soient semblables.

On constate immédiatement que la relation (6) se réduit à une identité dans les cas suivants, où les deux courbes sont:

1° Deux paraboles: donc toutes les paraboles sont semblables;

2° deux hyperboles équilatères : toutes les hyperboles équilatères sont semblables;

3° deux hyperboles dont l'angle des asymptotes est le même.

D'ailleurs la relation (6) exprime précisément que la tangente trigonométrique de l'angle des deux

directions asymptotiques a la même valeur pour les deux courbes (1) et (2).

§III. Équations tangentielles

610. Nous remarquerons d'abord que, si l'on se donne les équations tangentielles de deux courbes, on pourra reconnaître par les considérations suivantes si ces courbes sont homothétiques.

« A une tangente quelconque de la première courbe devra correspondre pour la seconde courbe une tangente parallèle; et, en outre, les droites, passant par les points de contact homologues, devront toutes concourir en un point unique; ce point sera le centre commun d'homothétie N° (608). »

Nous pouvons, d'après cela, trouver l'équation générale tangentielle des courbes homothétiques d'une courbe donnée

$$(1)\qquad f(u, v) = 0.$$

Soient x_0, y_0, les coordonnées cartésiennes du centre commun O' de similitude de la courbe (1) avec une de ses homothétiques, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point. D'après les formules du N° (356), on a

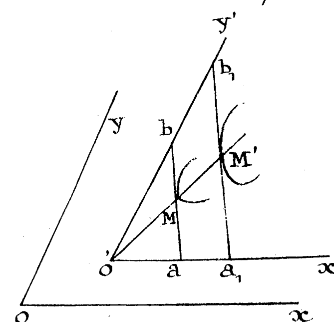
$$(2)\quad \begin{cases} u' = -\dfrac{u}{ux_0 + vy_0 - 1}, \\[2ex] v' = -\dfrac{v}{ux_0 + vy_0 - 1}, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{u'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}, \\[2ex] v = \dfrac{v'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}, \end{cases}$$

u, v étant les coordonnées primitives, et u', v' étant les nouvelles coordonnées d'une même droite.

L'équation de la courbe (1), par rapport aux nouveaux axes, sera

$$(3)\qquad f\left(\frac{u'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}, \frac{v'}{u'x_0 + v'y_0 + 1}\right) = 0.$$

Or si u', v', sont les coordonnées d'une tangente à la courbe (3), les coordonnées de la tangente homologue à une de ses homothétiques seront



$$ku', kv',$$

k étant le rapport de similitude; car si M et M' sont les points de contact, on a

$$\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{O}b_1} = \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}a_1} = \frac{\mathrm{O'M}}{\mathrm{O'M'}} = k.\ \text{etc} \ldots$$

Donc l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (3), sera

$$(4)\qquad f\left(\frac{ku'}{k(u'x_0 + v'y_0) + 1}, \frac{kv'}{k(u'x_0 + v'y_0) + 1}\right) = 0;$$

cette courbe se trouve rapportée aux nouveaux axes.

Si, à l'aide des formules (2), nous la rapportons aux anciens axes, nous constatons que:

L'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (1) est

$$(5)\qquad f\left(\frac{ku}{(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1}, \frac{kv}{(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1}\right) = 0;$$

k est le rapport de similitude; x_0, y_0, sont les coordonnées cartésiennes du centre commun de similitude.

620. Appliquons cette méthode à la recherche des conditions pour que les deux courbes de 2ème classe

$$(1)\qquad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

$$(2)\qquad A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0,$$

soient homothétiques.

D'après ce qui précède, l'équation générale des courbes homothétiques de la courbe (1), est

$$k^2\left[Au^2 + 2Buv + Cv^2\right] + 2k\left[Du + Ev\right]\left[(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1\right] + F\left[(k-1)(ux_0 + vy_0) + 1\right]^2 = 0.$$

Cette équation développée devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &+\left[Ak^2+2k(k-1)Dx_0+(k-1)^2Fx_0^2\right]u^2 \quad +2\left[kD+(k-1)Fx_0\right]u \\ &+2\left[Bk^2+k(k-1)(Dy_0+Ex_0)+(k-1)^2Fx_0y_0\right]uv \quad +2\left[kE+(k-1)Fy_0\right]v \\ &+\left[Ck^2+2k(k-1)Ey_0+(k-1)^2Fy_0^2\right]v^2 \quad +F \end{aligned}\right\}=0.$$

Exprimons que les équations (2) et (3) représentent la même courbe, on a

$$(4)\quad \frac{F}{F_1}=\frac{kE+(k-1)Fy_0}{E_1}=\frac{kD+(k-1)Fx_0}{D_1}=\frac{Ck^2+2k(k-1)Ey_0+(k-1)^2Fy_0^2}{C_1}$$
$$=\frac{Bk^2+k(k-1)(Dy_0+Ex_0)+(k-1)^2Fx_0y_0}{B_1}=\frac{Ak^2+2k(k-1)Dx_0+(k-1)^2Fx_0^2}{A_1}.$$

Par l'élimination des quantités x_0 et y_0, on déduit des cinq relations (4) :

$$(5)\quad \frac{F_1^2}{F^2}k^2=\frac{A_1F_1-D_1^2}{AF-D^2}=\frac{C_1F_1-E_1^2}{CF-E^2}=\frac{B_1F_1-D_1E_1}{BF-DE};$$

ce sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux courbes (1) et (2) soient homothétiques.

Lorsque les deux courbes sont rapportées à leur centre, ces conditions se réduisent à

$$(6)\quad \frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}.$$

Chapitre VIII

Démonstration de plusieurs théorèmes généraux sur les courbes algébriques.

I° Nombre des points nécessaires à la détermination d'une courbe.

621. Par $\frac{m(m+3)}{2}$ points, on peut, en général, faire passer une courbe algébrique d'ordre m, et une seule.

Nous avons vu, en effet, N° [36] que l'équation générale du degré m renferme $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes, et par suite ce même nombre de coefficients A, B, C, ... Or cette équation représentera la même courbe, si on la multiplie ou si on la divise par une constante, A par exemple ; par conséquent, la courbe sera déterminée, si l'on connaît les rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \ldots$; le nombre de ces rapports est égal à $\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right]$ ou $\frac{m(m+3)}{2}$.

Mais exprimer que la courbe passe par un point, c'est écrire que son équation est vérifiée par les coordonnées de ce point ; donner un point, équivaut donc à donner une relation du 1er degré entre les rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \ldots$

Donc, si l'on exprime que la courbe passe par $\frac{m(m+3)}{2}$ points, on aura $\frac{m(m+3)}{2}$ équations du 1er degré entre le même nombre de quantités inconnues $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \ldots$. Par conséquent, le problème aura, en général, une solution et une seule.

Remarque. Nous avons admis que le système linéaire, qui détermine les coefficients de l'équation d'une courbe passant par $\frac{m(m+3)}{2}$ points arbitrairement choisis, avait, en général, une solution et une seule. Cette conclusion serait légitime si les coefficients du système étaient complètement arbitraires ; mais il n'en est pas ainsi, car les coefficients d'une de ces équations seront

$$x_0^m,\ x_0^{m-1}y_0,\ x_0^{m-2},\ x_0^{m-3}y_0,\ \text{etc}\ldots;$$

or, quoique les quantités x_0, y_0, soient arbitraires, les coefficients de l'équation ont entre eux des rapports évidents. Il est donc nécessaire d'établir d'une manière rigoureuse cette importante proposition. Voici la démonstration que nous proposerons.

Nous allons démontrer que si la proposition est vraie pour une courbe d'ordre $(m-1)$, elle sera nécessairement vraie pour une courbe d'ordre m.

L'équation générale d'une courbe d'ordre m peut s'écrire

$$(1) \qquad F = \varphi_m(x,y) + \overbrace{\varphi_{m-1}(x,y) + \varphi_{m-2}(x,y) + \cdots + \varphi_1(x,y) + 1}^{G} = 0,$$

en supposant le dernier terme égal à l'unité, c.à.d. en supposant que la courbe ne passe pas par l'origine. L'ensemble des termes qui suivent la fonction $\varphi_m(x,y)$ est le premier membre de l'équation générale d'une courbe d'ordre $(m-1)$.

Soit $M = \dfrac{(m+1)(m+2)}{1.2} - 1 = \dfrac{m(m+3)}{2}$; exprimons que la courbe F passe par les M points donnés, nous aurons M équations de la forme:

$$(2) \qquad \varphi_m(x_i, y_i) + G_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Les fonctions G_i renfermeront

$$M_1 \quad ou \quad \frac{(m-1)(m+2)}{2}$$

des constantes qu'il s'agit de déterminer; les constantes restantes, dont le nombre est

$$M_2, \ ou \left[\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-1)(m+2)}{2}\right], \ ou \ (m+1),$$

seront celles qui entrent dans $\varphi_m(x,y)$. Ceci posé, prenons les M_1 premières équations (2), on aura le système

$$(3) \qquad G_1 + \varphi_m(x_1,y_1) = 0, \ G_2 + \varphi_m(x_2,y_2) = 0, \ldots, G_{M_1} + \varphi_m(x_{M_1}, y_{M_1}) = 0\,;$$

or ce système admettra une solution finie et déterminée. En effet, le déterminant du système

$$G_1 = 0, \ G_2, \ldots, G_{M_1} = 0,$$

n'est pas nul; car ce sont les équations qui servent à déterminer la courbe G, d'ordre $m-1$, passant par M_1 des points donnés; et, d'après l'hypothèse admise, ce système a une solution finie et déterminée.

Donc le déterminant du système (3) est différent de zéro.

Ainsi les valeurs des M_1 premières constantes seront déterminées et non infinies.

Si maintenant on substitue les valeurs ainsi obtenues dans les $(m+1)$ dernières équations (2), et si l'on suppose

$$\varphi_m(x,y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + A_m y^m,$$

on obtiendra $(m+1)$ équations de la forme suivante:

$$(4) \qquad A_0(x_i^m + \alpha_i) + A_1(x_i^{m-1} y_i + \beta_i) + A_2(x_i^{m-2} y_i^2 + \gamma_i) + \cdots + A_m(y_i^m + \lambda_i) + k_i = 0,$$
$$i = M_1 + 1, \ M_1 + 2, \ldots, M;$$

$A_0, A_1, \ldots A_m$ sont les $(m+1)$ constantes qui restent à déterminer; $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i, k_i$, sont des quantités connues, non infinies, qui dépendent des coordonnées des M_1 premiers points, mais qui sont complètement indépendantes des coordonnées des $(m+1)$ derniers points, lesquelles coordonnées sont les seules qui entrent explicitement dans le système des $(m+1)$ équations (4). Or le déterminant du système (4), savoir

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^m + \alpha_i \quad x_i^m y_i + \beta_i \ \cdots\cdots \ y_i^m + \lambda_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

n'est pas nul; car ce déterminant se décompose en la somme de plusieurs déterminants, tels que

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^m \quad x_i^{m-1} y_i \ \cdots\cdots \ y_i^m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_i \quad x_i^{m-1} y_i \ \cdots \ y_i^m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} + \cdots\cdots$$

Le premier déterminant n'est pas nul, puisqu'il est égal, d'après la formule de Vandermonde, au produit des différences $(x_i y_k - x_k y_i)$; quant aux autres, nuls ou non nuls, ils sont irréductibles avec le premier, puisque les quantités $\alpha_i, \beta_i, \ldots$ ne dépendent nullement des coordonnées qui figurent dans le premier déterminant.

Ainsi le système (A) admet une solution finie et déterminée.

Donc la proposition énoncée est démontrée.

Autrement:

Nous aurons démontré que le système en question admet, en général, une solution finie et déterminée, si nous trouvons un seul cas pour lequel ceci ait lieu.

Or, donnons-nous $(m+1)$ points sur une droite D_1; m autres points sur une 2ème droite D_2; $(m-1)$ autres points sur une 3ème droite D_3; ainsi de suite; et enfin, deux points sur une $m^{ème}$ droite D_m. Nous nous donnerons ainsi

$$\left[(m+1)+m+(m+1)+\ldots+2\right] \text{ ou } \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1\right].$$

points; d'ailleurs le système des m droites $D_1, D_2, \ldots, D_m$, constitue un système du $m^{ème}$ ordre (ou courbe composée du $m^{ème}$ ordre) passant par tous les points donnés dont le nombre est $\frac{m(m+3)}{2}$. Mais le système de ces m droites est représenté par une équation du $m^{ème}$ degré dont tous les coefficients sont finis et déterminés, car on peut écrire immédiatement cette équation. Or l'équation générale du $m^{ème}$ ordre pourra évidemment s'identifier avec cette équation particulière, et l'on en conclura pour les coefficients des valeurs finies et déterminées. Donc le système général en question admettra, pour les $\frac{m(m+3)}{2}$ points que nous venons de choisir, une solution finie et déterminée. A fortiori, il en est de même lorsque ces $\frac{m(m+3)}{2}$ points restent complètement arbitraires.

622. La question peut présenter l'impossibilité, en ce sens qu'il peut arriver qu'on ne puisse pas faire passer une courbe proprement dite du $m^{ème}$ ordre par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés. Nous appelons courbe proprement dite du $m^{ème}$ ordre une courbe dont l'équation n'est pas décomposable en facteurs rationnels.

Nous admettons le théorème suivant qui est une conséquence immédiate des propositions établies dans la théorie de l'élimination:

Deux courbes des degrés respectifs m et n se coupent en mn points, réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini.

Ceci posé nous énoncerons les propositions suivantes:

Parmi les $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés pour déterminer une courbe d'ordre m, il ne doit pas y en avoir plus de mp sur une courbe d'ordre p.

Pour qu'on puisse faire passer une courbe du $m^{ème}$ ordre par les $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, il ne faut pas qu'il y en ait plus de

$$\left[mp-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\right],$$

sur une courbe du $p^{ème}$ ordre. $(p<m)$

La première proposition est évidente, car il est impossible que deux courbes du $m^{ème}$ et $p^{ème}$ degré aient plus de mp points communs. Si, parmi les $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, il y en a plus de mp sur une courbe d'ordre p, le seul système du $m^{ème}$ degré, qu'on pourra faire passer par tous les points donnés, se composera de la courbe du $p^{ème}$ degré en question et d'une courbe du $(m-p)^{ème}$ degré passant par les points restants. Cette dernière courbe pourra être indéterminée, si le nombre des points restants est inférieur au nombre de points qu'il faut pour déterminer une courbe du $(m-p)^{ème}$ ordre; c'est ce qui a lieu, en effet, lorsque p est égal ou supérieur à 3.

Pour démontrer la seconde proposition, supposons que, sur une courbe d'ordre p, il y ait un point de plus que $\left[mp-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\right]$, c.à.d.

$$\left(mp-\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1\right) \text{ points.}$$

Le nombre des points restants sera

$$\left[\frac{m(m+3)}{2} - mp + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1\right] \text{ ou } \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}.$$

Or, par ces derniers points, on pourra faire passer une courbe ou système du $(m-p)^{\text{ème}}$ ordre, puisque c'est précisément le nombre de points qui détermine une courbe de cet ordre. Cette courbe du $(m-p)^{\text{ème}}$ ordre formera, avec la courbe du $p^{\text{ème}}$ ordre en question, un système du $m^{\text{ème}}$ ordre passant par tous les points donnés. Et comme $\frac{m(m+3)}{2}$ points déterminent, en général, un seul système du $m^{\text{ème}}$ ordre; on voit que, s'il n'y a pas indétermination, on ne pourra pas faire passer une courbe proprement dite du $m^{\text{ème}}$ ordre par les $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés.

623 Enfin, la question proposée peut aussi présenter **l'indétermination**; car les équations du 1er degré qu'on a à résoudre peuvent former un système indéterminé. Le théorème suivant donne la signification géométrique de ce fait:

Par $\left[\frac{m(m+3)}{2} - 1\right]$ points donnés, on peut faire passer une infinité de courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre; toutes les courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre, passant par ces $\left[\frac{m(m+3)}{2} - 1\right]$ points fixes, passent aussi toutes par $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres points fixes.

Supposons qu'on se donne un nombre de points moindre d'une unité que celui qu'il faut pour déterminer une courbe d'ordre m, savoir

$$N = \frac{m(m+3)}{2} - 1.$$

Par les N points donnés passent une infinité de courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre; soient

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

les équations de deux de ces courbes particulières; l'équation

$$(1) \qquad F = f + \lambda\varphi = 0,$$

où λ est une constante arbitraire, sera l'équation générale des courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre passant par les N points donnés. En effet, une courbe quelconque du $m^{\text{ème}}$ ordre, passant par ces N points, sera complètement déterminée lorsqu'on l'assujettira à passer par un point arbitrairement choisi; or on pourra disposer de la constante λ, de manière à ce que la courbe représentée par l'équation (1) passe par le point choisi; donc l'équation (1) peut représenter toutes les courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre passant par les N points donnés. Or, la forme de l'équation (1) nous montre que, quelle que soit la valeur de λ, la courbe F passe par les m^2 points d'intersection des courbes fixes $f = 0$, $\varphi = 0$. Cette courbe passe donc d'abord par les N points donnés, et, en outre, par les

$$m^2 - \left[\frac{m(m+3)}{2} - 1\right] \text{ ou } \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

autres points fixes, communs aussi aux courbes f et φ.

La série des courbes passant par les N points donnés forment ce qu'on appelle un **faisceau**; les m^2 points communs à toutes ces courbes constituent **la base du faisceau**.

Remarque I. On voit par là comment **l'indétermination** pourra se présenter lorsqu'on se donnera $\frac{m(m+3)}{2}$ points pour déterminer une courbe du $m^{\text{ème}}$ ordre.

Imaginons, en effet, que, par $\left[\frac{m(m+3)}{2} - 1\right]$ de ces points, on fasse passer deux courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre, f et φ; ces deux courbes se couperont en $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres points; or, il y aura indétermination, si le dernier des points donnés est un de ces $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points.

Remarque II. Deux courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre se coupent en m^2 points; mais m^2 points, arbitrairement choisis, ne seront pas les intersections de deux courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre. Car si nous prenons $\left[\frac{m(m+3)}{2} - 1\right]$ points, parmi les points donnés, toutes les courbes du $m^{\text{ème}}$ ordre passant par les points choisis, auront en commun $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points parfaitement déterminés, et dont la position résultera des points choisis; ces $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points ne coïncideront donc pas avec les points restants et pris arbitrairement.

624 Du théorème précédent, nous déduirons encore cette autre proposition:

Si, parmi les m^2 points d'intersection de deux courbes du $m^{ème}$ ordre, mp de ces points sont sur une courbe du $p^{ème}$ ordre (p étant plus petit que m), les $m(m-p)$ restants seront sur une courbe du $(m-p)^{ème}$ ordre.

En effet, $m(m-p) > \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$; donc, parmi les points restants, nous pouvons en prendre $\frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$, et faire passer une courbe du $(m-p)^{ème}$ ordre par ces points choisis; cette dernière courbe, conjointement avec la courbe du $p^{ème}$ ordre en question, formera un système du $m^{ème}$ ordre; ce système passe par

$$\left[mp + \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}\right] \text{ou} \left[\frac{m(m+3)}{2} - 1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right],$$

points; or ce dernier nombre est supérieur ou au moins égal à $\left(\frac{m(m+3)}{2}-1\right)$; donc, le système formé passera par tous les autres points; c. à. d. qu'il renfermera les m^2 points d'intersection. Et, comme la courbe d'ordre p ne peut pas couper une courbe d'ordre m en plus de mp points, les $m(m-p)$ autres points d'intersection du système avec une des courbes d'ordre m se trouveront sur la courbe d'ordre $(m-p)$.

N. B. La proposition des N^{os} [623], [624] sont applicables aux cas où les courbes du $m^{ème}$ ordre ne sont pas des courbes proprement dites; car la démonstration ne suppose rien sur la forme des fonctions f et φ.

625. Comme application du théorème précédent, nous donnerons la proposition suivante:

Si un polygone de $2m$ côtés est inscrit dans une conique, les $m(m-2)$ points, où chaque côté impair coupe les côtés pairs non adjacents, seront sur une courbe du $(m-2)^{ème}$ ordre.

Les côtés impairs, d'une part, et les côtés pairs, de l'autre, peuvent être regardés comme formant deux systèmes du $m^{ème}$ ordre; chaque système est composé de m droites. Ces deux systèmes se coupent en m^2 points, car chaque côté impair a deux côtés pairs adjacents et $(m-2)$ non adjacents. Ces m^2 points comprennent, d'abord les sommets du polygone, puis les $m(m-2)$ points qui sont l'objet du théorème. Mais, puisque les $2m$ sommets sont sur une conique, les $m(m-2)$ autres points seront, d'après le théorème précédent, sur une courbe du $(m-2)^{ème}$ ordre.

Ainsi, lorsqu'on considère un hexagone inscrit dans une conique, les points d'intersection des côtés opposés sont sur une ligne droite. (Théorème de Pascal).

II.° Nombre des tangentes nécessaires à la détermination d'une courbe.

626. Les considérations développées dans les numéros qui précèdent sont applicables au cas où l'on détermine une courbe par son équation tangentielle, c. à. d. par une relation entre les coordonnées d'une quelconque de ses tangentes. Supposons que l'équation soit du degré n, c. à. d. que la courbe soit de $n^{ème}$ classe; les raisonnements ci-dessus pouvant se reprendre mot pour mot en substituant des droites aux points, nous ne les répéterons pas, et nous énoncerons les théorèmes auxquels on est conduit.

1.° Étant données $\frac{n(n+3)}{2}$ droites, on peut construire, en général, une courbe de $n^{ème}$ classe, et une seule, touchant ces $\frac{n(n+3)}{2}$ droites.

2.° Deux courbes, dont les classes respectives sont m et n, ont mn tangentes communes.

3.° Parmi les $\frac{n(n+3)}{2}$ tangentes données, pour déterminer une courbe de $n^{ème}$ classe, il ne doit pas y en avoir plus de nq touchant une courbe de la classe q.

4.° Pour qu'on puisse construire une courbe de $n^{ème}$ classe touchant $\frac{n(n+3)}{2}$ droites données, il ne faut pas qu'il y en ait plus de

$$\left[nq - \frac{(q-1)(q-2)}{2}\right],$$

touchant une courbe de $q^{ème}$ classe. ($q < n$)

5° Étant données $\left[\frac{n(n+3)}{2}-1\right]$ droites, on peut construire une infinité de courbes de $n^{\text{ème}}$ classe touchant toutes les droites données; toutes les courbes de $n^{\text{ème}}$ classe, touchant les $\left[\frac{n(n+3)}{2}-1\right]$ droites données, touchent en même temps $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres droites fixes.

6° Si, parmi les n^2 tangentes communes à deux courbes de $n^{\text{ème}}$ classe, il y en a nq touchant une courbe de $q^{\text{ème}}$ classe (q étant moindre que n); les $n(n-q)$ tangentes restantes toucheront une courbe de la classe $(n-q)$.

7° Si un polygone de $2n$ sommets est circonscrit à une courbe de $2^{\text{ème}}$ classe (ou conique); les $n(n-2)$ droites, qui joignent chaque sommet impair aux sommets pairs non adjacents, touchent une courbe de $(n-2)^{\text{ème}}$ classe.

Ainsi, lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés (1,2), (2,4), (3,6), passent par un même point. (Théorème de Brianchon).

III°. Théorèmes de Newton.

627\. Si, par un point quelconque O, on mène deux cordes coupant une courbe du $m^{\text{ème}}$ ordre aux points $R_1, R_2, \ldots, R_m$; $S_1, S_2, \ldots S_m$; le rapport

$$\frac{OR_1 \cdot OR_2 \ldots \cdot OR_m}{OS_1 \cdot OS_2 \cdot \ldots \cdot OS_m},$$

restera constant, quelle que soit la position du point O, pourvu que les directions des lignes OR, OS, restent les mêmes.

(Newton: Enumeratio linearum tertii ordinis, anno 1706).

Soit l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \cdots = 0;$$

désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de OR; par ρ la distance OM; par x_0, y_0, les coordonnées du point O; on aura alors N° [40], 5° :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\rho, \\ y = y_0 + \mu\rho; \end{cases}$$

λ et μ dépendant uniquement de la direction de OR; ainsi, dans le cas des axes rectangulaires, on aura $\lambda = \cos\omega$, $\mu = \sin\omega$, ω étant l'angle de OR avec Cx.

Remplaçons x et y par les valeurs (2) dans l'équation (1), on a

$$(3) \qquad f(x_0+\lambda\rho, y_0+\mu\rho) = \varphi_m(x_0+\lambda\rho, y_0+\mu\rho) + \varphi_{m-1}(x_0+\lambda\rho, y_0+\mu\rho) + \cdots = 0;$$

ou, en développant par la formule de Taylor

$$(4) \qquad \rho^m \varphi_m(\lambda,\mu) + \rho^{m-1}\left[x_0 \varphi'_{x\,m}(\lambda,\mu) + y_0 \varphi'_{y\,m}(\lambda,\mu) + \varphi_{m-1}(\lambda,\mu)\right] + \cdots + f(x_0,y_0) = 0;$$

car on voit, par le premier membre de l'équation (3), que le terme indépendant de ρ est $f(x_0, y_0)$.

On conclut de là

$$(1°) \qquad OR_1 \cdot OR_2 \cdot \ldots \cdot OR_m = \pm \frac{f(x_0,y_0)}{\varphi_m(\lambda,\mu)}.$$

En désignant par λ', μ', les valeurs des constantes λ, μ, pour la direction OS, on aura de même

$$(2°) \qquad OS_1 \cdot OS_2 \cdot \ldots \cdot OS_m = \pm \frac{f(x_0,y_0)}{\varphi_m(\lambda',\mu')}.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$(5) \qquad \frac{OR_1 \cdot OR_2 \cdot \ldots \cdot OR_m}{OS_1 \cdot OS_2 \cdot \ldots \cdot OS_m} = \frac{\varphi_m(\lambda',\mu')}{\varphi_m(\lambda,\mu)}.$$

Or le second membre est constant, puisqu'il est indépendant de x_0 et y_0, qui sont les seules quantités variables.

Si l'on représente par $f(x, y, z)$ le premier membre de l'équation de la courbe, la relation précédente pourra s'écrire

$$(5\,bis) \qquad \frac{OR_1 . OR_2 \ldots\ldots OR_m}{OS_1 . OS_2 \ldots\ldots OS_m} = \frac{f(\lambda', \mu', o)}{f(\lambda, \mu, o)}.$$

628. Si par deux points O et O', on mène deux lignes quelconques parallèles, coupant une courbe du $m^{ème}$ ordre aux points $R_1, R_2, \ldots R_m$; $R'_1, R'_2, \ldots, R'_m$; le rapport des produits, savoir

$$\frac{OR_1 . OR_2 \ldots\ldots OR_m}{O'R'_1 . O'R'_2 \ldots\ldots O'R'_m},$$

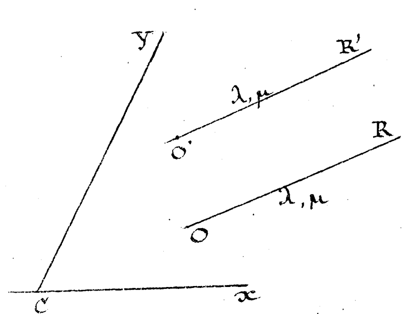
restera constant, quelle que soit la direction commune des deux cordes.

(Newton. idem).

Soit toujours

$$(1) \qquad f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \cdots = o,$$

l'équation de la courbe. Désignons par x_o, y_o ; x'_o, y'_o les coordonnées des points O et O' ; λ et μ les valeurs des constantes qui déterminent la direction des droites OR et O'R' ; si x et y sont les coordonnées d'un point M de OR, et si $OM = \rho$, on aura N.° [40], 5° :



$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_o + \lambda\rho, \\ y = \rho_o + \mu\rho. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouvera comme précédemment

$$(3) \qquad \rho^m \varphi_m(\lambda, \mu) + \rho^{m-1}[\ldots] + \cdots + f(x_o, y_o) = o.$$

On conclut de cette équation

$$(1°) \qquad OR_1 . OR_2 \ldots\ldots OR_m = \pm \frac{f(x_o, y_o)}{\varphi_m(\lambda, \mu)}.$$

En faisant le même calcul pour la droite O'R', on trouvera

$$(2°) \qquad O'R'_1 . O'R'_2 \ldots\ldots O'R'_m = \pm \frac{f(x'_o, y'_o)}{\varphi_m(\lambda, \mu)}.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$(4) \qquad \frac{OR_1 . OR_2 \ldots\ldots OR_m}{O'R'_1 . O'R'_2 \ldots\ldots O'R'_m} = \frac{f(x_o, y_o)}{f(x'_o, y'_o)}.$$

Or le second membre est constant, puisque les points O et O' sont fixes et que la direction (λ, μ) des deux droites OR, O'R' est seule variable.

Donc ....

Dans ce théorème et le précédent, les segments $OR_1, OR_2, \ldots$ sont représentés en grandeur et signe par les racines de l'équation (3) ; on devra, par suite, les regarder comme positifs ou négatifs suivant, qu'à partir du point O, ils sont parcourus dans un sens ou dans le sens contraire.

N. B. Il est intéressant de comparer les relations (4 bis) N.° [627] ; (4) N.° [628], avec la relation donnée au N.° [435].

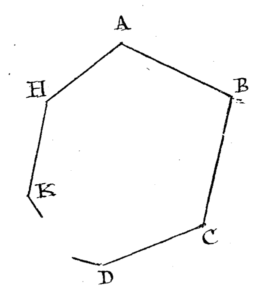
IV.° Théorème des transversales.

629. On coupe une courbe algébrique par un polygone ABC.... Si, en parcourant ce polygone dans un sens, on fait le produit des segments compris entre les sommets successifs et la courbe ; puis, si l'on fait ce même produit, en parcourant le polygone en sens contraire les produits ainsi obtenus sont égaux.

(Carnot. Géométrie de position).

Soient A, B, C, ..., K, H, les sommets du polygone ; $a_1, a_2, \ldots a_m$ les m points d'intersection de AB avec

la courbe; $b_1, b_2, \ldots, b_m$, les intersections de BC; $c_1, c_2, \ldots, c_m$, les intersections de CD; ....; $k_1, k_2, \ldots k_m$, les intersections de KH; et enfin, $h_1, h_2, \ldots h_m$, les intersections de HA.



Désignons par x_a, y_a; x_b, y_b, ...; x_h, y_h; les coordonnées des sommets du polygone; et appliquons successivement la relation (8 bis) du N.º [435], relation d'ailleurs qui est une conséquence immédiate du théorème de Newton N.º [628]. On a

$$\frac{Aa_1 . Aa_2 \ldots\ldots Aa_m}{Ba_1 . Ba_2 \ldots\ldots Ba_m} = \frac{f(a, y_a)}{f(x_b, y_b)};$$

$$\frac{Bb_1 . Bb_2 \ldots\ldots Bb_m}{Cb_1 . Cb_2 \ldots\ldots Cb_m} = \frac{f(x_b, y_b)}{f(x_c, y_c)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{Hh_1 . Hh_2 \ldots\ldots Hh_m}{Ah_1 . Ah_2 \ldots\ldots Ah_m} = \frac{f(x_h, y_h)}{f(x_a, y_a)}.$$

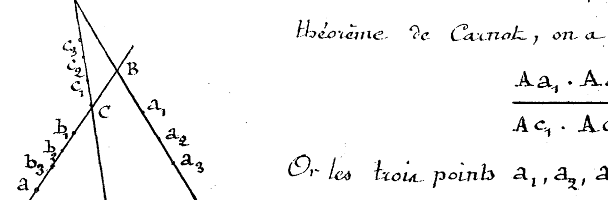
Multiplions ces égalités membre à membre, on en conclut le théorème énoncé:

$$(1) \qquad \frac{Aa_1 . Aa_2 \ldots\ldots A_m \times Bb_1 . Bb_2 \ldots\ldots Bb_m \times \ldots\ldots Hh_1 . Hh_2 \ldots\ldots Hh_m}{Ah_1 . Ah_2 \ldots\ldots Ah_m \times Hk_1 . Hk_m \times \ldots\ldots Ba_1 . Ba_2 \ldots\ldots Ba_m} = +1;$$

on devra toujours tenir compte de la convention faite sur le signe des segments, le signe devant changer avec le sens du parcours; les points de départ ou origines des segments sont toujours les sommets du polygone.

630. Comme application de ce théorème, démontrons la proposition suivante.

Si une courbe du 3ème ordre a trois points réels d'inflexion, ces trois points sont en ligne droite.



Soient a, b, c, ces trois points, et BC, CA, AB, les tangentes; appliquant au triangle ABC le théorème de Carnot, on a

$$\frac{Aa_1 . Aa_2 . Aa_3 . Bb_1 . Bb_2 . Bb_3 . Cc_1 . Cc_2 . Cc_3}{Ac_1 . Ac_2 . Ac_3 . Cb_1 . Cb_2 . Cb_3 . Ba_1 . Ba_2 . Ba_3} = +1.$$

Or les trois points a_1, a_2, a_3, se confondent avec c par exemple; b_1, b_2, b_3, se confondent avec a; c_1, c_2, c_3, se confondent avec b; il vient donc

$$(1) \qquad (Ac . Ba . Cb.)^3 = (Ab . Ca . Bc)^3,$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad Ac . Ba . Cb = (Ab . Ca . Bc) \times (1, \varepsilon, \text{ou } \varepsilon^2),$$

$1, \varepsilon, \varepsilon^2$ étant les racines cubiques de l'unité.

Si les trois points a, b, c, sont réels, le triangle ABC est réel ainsi que les segments Ac, Ba, ..., et la triple relation (2) entraîne, comme conséquence nécessaire et unique, la suivante

$$(3) \qquad Ac . Ba . Cb = + Ab . Ca . Bc.$$

Or cette dernière relation exprime N.º [57] que les trois points a, b, c. sont en ligne droite, car les conventions sur les signes des segments sont les mêmes.

Mais si les points a, b, c, sont imaginaires, on ne peut plus affirmer que la relation (3) résulte nécessairement de l'égalité (1), ni conclure, par conséquent, que les trois points a, b, c, sont en ligne droite.

Cependant l'application du théorème des transversales nous conduit ici à cette conclusion importante, savoir que:

Une courbe du 3ème ordre n'a pas plus de 3 trois points d'inflexion réels. Car s'il y avait un 4ème point réel d, on prouverait, comme on vient de le faire, que les trois points b, c, d, sont en ligne droite; la droite a, b, c, d, rencontrerait alors la courbe du 3ème ordre en quatre points, ce qui est impossible.

Remarque. M. Mannheim a déduit du théorème de Carnot la propriété suivante, très-remarquable, sur les courbes du 3ème ordre.

Lorsqu'une courbe du 3ème ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle ABC, le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets A, B, C, est égal au cube du rayon du cercle

circonscrit au triangle ABC.
(Application d'Analyse et de Géométrie, par M. Poncelet, page 165).

V°

631. Si l'on coupe une courbe d'ordre m par une transversale quelconque, qui la rencontre en A_1, $A_2, \dots A_m$; cette transversale coupe les m asymptotes en m autres points $a_1, a_2, \dots, a_m$; ces deux systèmes de points ont le même centre des moyennes distances.

(Newton, Enumeratio....... anno 1706).

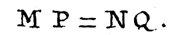
L'équation de la courbe et celle des m asymptotes ayant les mêmes termes du $m^{ème}$ ordre et du $(m-1)^{ème}$ degré N° [526], l'équation du diamètre, correspondant à la direction a, sera pour la courbe et le système des m asymptotes N° [548]

$$x\varphi'_{x\,m}(1,a)+y\varphi'_{y\,m}(1,a)+\varphi_{m-1}(1,a)=0;$$

le diamètre est donc le même pour la courbe et les asymptotes.

Or le point M, où la transversale coupe ce diamètre, est le centre des moyennes distances des points $A_1, A_2, \dots A_m$, et celui des points $a_1, a_2, \dots a_m$; donc .....

Dans les courbes du second ordre, par exemple, une transversale MN coupe la courbe en deux points M et N dont le centre des moyennes distances est le milieu I, et les asymptotes en P et Q; I sera le milieu de PQ; de là on conclut



$$MP = NQ.$$

VI°

632. Si par un point fixe, pris dans le plan d'une courbe d'ordre m, on mène une transversale, et les tangentes aux points où cette transversale rencontre la courbe; une sécante quelconque, menée par le point fixe, rencontrera la courbe en m points et le système des tangentes en m autres points; le centre harmonique de ces deux systèmes de points sera le même.
(Maclaurin, 1719).

On retrouve, comme cas particulier, le théorème précédent donné par Newton, en supposant que la transversale est la droite de l'infini.

Soit O le point de rencontre de la transversale OL avec la sécante OS; soient $A_1T_1, A_2T_2, \dots$ les tangentes aux points $A_1, A_2, \dots A_m$, où la transversale rencontre la courbe; cherchons la polaire PP' du point O par rapport à la courbe, puis par rapport au système des tangentes. Un point M de cette polaire sur la droite OL, sera défini par la relation N° [429]

$$\frac{m}{OM}=\Sigma\frac{1}{OA_i}.$$

Imaginons par le point O une sécante OL', et soient $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$ ses points d'intersection avec la courbe; on aura un second point, M', de la polaire du point O, par rapport à la courbe, en satisfaisant à une relation semblable; la droite MM' est donc la polaire du point O par rapport à la courbe.

Déterminons maintenant la polaire du même point O par rapport au système des tangentes.
Les points $A_1, A_2, \dots A_m$, appartenant à ces tangentes, le point M appartiendra aussi à la polaire cherchée; lorsque la sécante OL' tournera autour du point O de manière à venir se confondre avec OL, le point M' décrira la polaire relative à la courbe; mais lorsque cette sécante passera par les points infiniment voisins de $A_1, A_2, \dots A_m$, ces points seront sur la courbe et sur les tangentes; alors le point M' appartiendra à la polaire relative aux tangentes. Donc le point O a la même polaire, soit par rapport à la courbe, soit par rapport au système des tangent

Maintenant, soient $a_1, a_2, \dots a_m$ les points où la sécante OS rencontre la courbe; et $t_1, t_2, \dots t_m$, les points où elle rencontre les tangentes, les centres harmoniques par rapport au point O de ces deux systèmes de points N.° [429] doivent se trouver sur les polaires du point O; or ces deux polaires coïncidant, il en est donc de même des centres harmoniques; et l'on a la relation

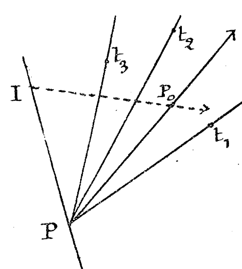
$$(1)\qquad \frac{1}{Oa_1}+\frac{1}{Oa_2}+\dots+\frac{1}{Oa_m}=\frac{1}{Ot_1}+\frac{1}{Ot_2}+\dots+\frac{1}{Ot_m}.$$

« Ainsi les deux systèmes de points, déterminés sur la courbe et sur le système des tangentes, ont même centre « harmonique par rapport au point d'intersection de la sécante OS avec la transversale fixe OL. »

633. Nous ajouterons la proposition suivante:

Par un point fixe P menons les tangentes à une courbe de classe n; soient $t_1, t_2, \dots t_n$ les points de contact; le point polaire d'une droite quelconque PI, passant par le point P, sera le même, soit par rapport à la courbe, soit par rapport au système des n points $t_1, t_2, \dots t_n$:

Soit P_o le point polaire de la droite PI par rapport à la courbe donnée (C), $Pt_1, Pt_2, \dots Pt_n$ étant les tangentes menées à la courbe par le point P, la droite PP_o satisfera à la relation N.° [460]



$$(1)\qquad \frac{n}{\tan g\,\widehat{P_oPI}}=\frac{1}{\tan g\,\widehat{t_1PI}}+\frac{1}{\tan g\,\widehat{t_2PI}}+\dots;$$

de même, si $It'_1, It'_2, \dots It'_n$, sont les tangentes menées à la courbe (C) par le point I, on devra avoir N.° [460]

$$(2)\qquad \frac{n}{\tan g\,\widehat{P_oIP}}=\frac{1}{\tan g\,\widehat{t'_1IP}}+\frac{1}{\tan g\,\widehat{t'_2IP}}+\dots$$

Déterminons maintenant le point polaire de la même droite IP par rapport au système (C') des n points $(t_1, t_2, \dots t_n)$. Les droites $Pt_1, Pt_2, \dots$ sont les tangentes menées du point P à ce système, et la droite qui joint le point P au point polaire cherché P'_o devra satisfaire à la relation (1); par suite, le point P'_o est situé sur la droite PP_o. Les droites $It_1, It_2, \dots$ sont également les tangentes menées du point I au système (C'), et la droite IP'_o devra vérifier la relation

$$(3)\qquad \frac{n}{\tan g\,\widehat{P'_oIP}}=\frac{1}{\tan g\,t_1IP}+\frac{1}{\tan g\,t_2IP}+\dots$$

Or si nous supposons que le point I se rapproche indéfiniment du point P, en restant sur la droite PI, les tangentes au système (C') viendront se confondre avec les tangentes à la courbe primitive (C), c.à.d. que les points $t'_1, t'_2, \dots$ tendent à se confondre avec $t_1, t_2, \dots$. Il résulte alors de la comparaison des relations (2) et (3) que les droites, passant respectivement par P_o et P'_o et infiniment voisines de la droite PP_o, se confondent. Donc le point P'_o coïncide avec P_o. Donc .....

VII.°

634. Quand on coupe une courbe d'ordre m par une droite quelconque et qu'aux m points d'intersection on mène les tangentes à la courbe, les autres points d'intersection de ces tangentes avec la courbe sont sur une courbe d'ordre $(m-2)$.

Soit $S=0$ l'équation de la sécante donnée; l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$(1)\qquad f(x,y)=\lambda.\ T_1T_2\dots T_m+S^2\varphi(x,y)=0,$$

$T_1, T_2, \dots T_m$ étant des fonctions linéaires; λ est une constante, et $\varphi(x,y)$ une fonction du degré $(m-2)$. En effet, cette équation renferme

$$\left[2m+1+\frac{(m-2)(m+1)}{2}\right] \text{ ou } \frac{m(m+3)}{2}$$

constantes arbitraires; nombre suffisant pour pouvoir identifier l'équation (1) avec l'équation de la courbe donnée.
Pour constater qu'on a effectivement ce nombre de constantes, remarquons, qu'on pourra diviser l'équation par un des coefficients de $\varphi(x, y)$, et $\varphi(x, y)$ renfermera alors $\frac{(m-2)(m-2+3)}{2}$ constantes arbitraires; dans le produit des fonctions linéaires, on pourra mettre en facteurs les coefficients de l'une des variables, y par exemple; chaque fonction linéaire sera alors de la forme $(y + ax + b)$ et renfermera deux constantes arbitraires; on a donc bien le nombre total indiqué.

Ceci posé, on voit que les droites $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, ... $T_m = 0$, sont tangentes à la courbe aux points où elles sont coupées par la sécante $S = 0$; les $m(m-2)$ autres points d'intersection de ces tangentes avec la courbe $f(x,y)=0$ sont évidemment situés sur la courbe $\varphi(x, y) = 0$; donc....

Corol. Si l'on suppose que la droite $S = 0$ soit la droite de l'infini, on en conclut le théorème suivant déjà démontré: N° [527]:

Les $m(m-2)$ points où une courbe de l'ordre m est coupée par ses m asymptotes sont sur une courbe de l'ordre $(m-2)$.

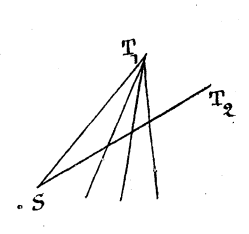
635. Les points d'inflexion d'une courbe du 3ème ordre sont trois à trois en ligne droite.

Soient A et B deux points d'inflexion de la courbe, et C le 3ème point où cette droite rencontre la courbe; menons les tangentes en A, B, et C; les trois autres points où ces tangentes rencontrent la courbe sont en ligne droite, d'après le théorème précédent. Or, les tangentes en A et B étant des tangentes d'inflexion, les points où elles coupent encore la courbe sont respectivement en A et B; donc le 3ème point où la tangente en C coupe la courbe doit se trouver sur AB; il coïncide donc avec le point C; c. à d. que la tangente en C coupe la courbe en trois points confondus avec le point C; le point C, est par conséquent, un point d'inflexion.

636. Si par un point fixe S, on mène les tangentes à une courbe de $n$ème classe, et que $T_1, T_2, \ldots T_n$ soient les points de contact de ces n tangentes; les $n(n-2)$ autres tangentes qu'on pourra mener à la courbe par ces n points, toucheront une courbe de la classe $(n-2)$.

En effet, si l'on désigne par $S, T_1, T_2, \ldots T_n$ des fonctions linéaires de u et v, l'équation générale d'une courbe de $n$ème classe pourra se mettre sous la forme

$$(1) \qquad f(u, v) = \lambda . T_1 T_2 \ldots . T_n + S^2 \varphi(u, v) = 0;$$



la démonstration est la même qu'au N° [634]. Or la droite qui joint les points $S = 0$, $T_1 = 0$, touche la courbe au point $T_1 = 0$; car elle est tangente, puisque les coordonnées de la droite qui passe par ces deux points vérifient l'équation de la courbe. D'ailleurs l'équation du point de contact est

$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0,$$

en désignant par u_0, v_0, w_0 les valeurs de u, v, w, qui annulent les fonctions S et T_1. Or, si l'on suppose

$$T_1 = au + bv + cw,$$

on trouve, en effectuant la substitution, que l'équation du point de contact est

$$au + bv + cw = 0.$$

Ainsi les droites ST_1, ST_2, ... ST_n touchent la courbe aux points T_1, T_2, ... T_n.

Mais, par le point T_1, on peut mener $(n-2)$ tangentes distinctes de $T_1 S$; leurs coordonnées devront vérifier les équations

$$T_1 = 0, \quad \varphi(u, v) = 0;$$

il en sera de même pour les autres points. Donc, les $n(n-2)$ tangentes qu'on peut mener à la courbe $f(u, v) = 0$ par les points $T_1, T_2, \ldots T_n$, touchent la courbe $\varphi(u, v) = 0$, laquelle est de la classe $(n-2)$.

Lorsque le point S est à l'infini, les tangentes $T_1 S$, $T_2 S$, ... deviennent parallèles.

636 Les tangentes de rebroussement d'une courbe de 3ème classe passent trois à trois par un même point.

Soient A et B deux points de rebroussement, SA, SB les tangentes de rebroussement. Les tangentes de rebroussement étant N.º (485) des tangentes simples, on peut mener par le point S, lequel est distinct des points de rebroussement, une troisième tangente SC; SC sera alors une tangente simple, puisque par un point on ne peut mener que trois tangentes. Les trois tangentes menées en A, B, C, et distinctes de AS, BS, CS, doivent passer par un même point, d'après le théorème précédent. Or, le point A étant un point de rebroussement, les trois tangentes menées à la courbe par le point A se confondent avec AS N.º (491); de même les tangentes, menées par le point B, se confondent avec BS; par conséquent, la troisième tangente, menée par le point C, laquelle doit passer par le point S, se confondra avec CS. Donc, les trois tangentes, menées par le point C, se confondent; d'ailleurs, la tangente CS est une tangente simple; par conséquent, le point C est un point de rebroussement.

VIII.

637. Lorsque les $(n+1)$ côtés d'un polygone de forme variable tournent autour de $(n+1)$ points fixes, tandis que n sommets décrivent n courbes d'ordres: $m_1, m_2, \ldots, m_n$; le $(n+1)^{ème}$ sommet décrit une courbe d'ordre $2m_1 m_2 \ldots m_n$.

Newton avait donné un cas très-particulier de ce théorème; c'est à Maclaurin qu'on doit l'énoncé général (Transactions philosophiques 1725).

Pour déterminer l'ordre de la courbe décrite, nous chercherons combien il y a de points de cette courbe sur une même droite, en tenant compte de l'ordre de multiplicité des points.

Prenons, pour fixer les idées, un polygone de 4 côtés; soient P_1, P_2, P_3, P_4, les quatre points fixes; et S_1, S_2, S_3, les trois courbes fixes. Nous allons chercher en combien de points la courbe est rencontrée par une droite passant par le point P_4. Cette droite rencontre la courbe S_1, d'ordre m_1; en m_1 points $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_1})$; en joignant ces points au point P_1 on aura un faisceau de m_1 droites. Chacune de ces droites rencontre la courbe S_2, d'ordre m_2, en m_2 points $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m_2})$; joignant tous ces points au point P_2, on aura un faisceau de $m_1 m_2$ droites. Chacune des droites de ce second faisceau rencontre la courbe S_3, d'ordre m_3, en m_3 points $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m_3})$; en joignant tous ces points au point fixe P_3, on aura un troisième faisceau composé de $m_1 m_2 m_3$ droites. Les droites de ce dernier faisceau rencontreront la droite choisie, chacune en un point; ces points sont les 4èmes sommets d'autant de polygones satisfaisant à la question. Or le faisceau de $m_1 m_2 m_3$ droites rencontrera la droite $P_4 D$ en $m_1 m_2 m_3$ points; nous avons donc déjà, sur cette droite, $m_1 m_2 m_3$ points du lieu.

Ce seront évidemment les seuls points distincts de P_4; il reste à savoir si le point P_4 fait partie du lieu, et quel est son ordre de multiplicité. Faisons la construction en sens inverse; c.à.d. joignons $P_4 P_3$; cette droite rencontrera la courbe S_3 en m_3 points; en joignant ces points au point P_2, on aura un faisceau de m_3 droites. Ce faisceau rencontrera la courbe S_2 en $m_2 m_3$ points; en joignant ces points au point P_1, on aura un faisceau de $m_2 m_3$ droites, lequel rencontrera la courbe S_1 en $m_1 m_2 m_3$ points. En joignant ces derniers points au point P_4, on aura tous les polygones satisfaisant à la question et dont le sommet est P_4. Les $m_1 m_2 m_3$ dernières droites rencontreront donc la droite $P_4 D$ en $m_1 m_2 m_3$ points confondus avec P_4; ainsi le point P_4 est un point multiple de l'ordre $m_1 m_2 m_3$.

Par conséquent, il y a, en définitive, sur la droite $P_4 D$, $2m_1 m_2 m_3$ points du lieu; l'ordre de la courbe, lieu du 4ème sommet, est donc $2m_1 m_2 m_3$.

Généralement, le lieu du $(n+1)^{ème}$ sommet sera de l'ordre $2m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$.

Remarque I. Lorsque les points fixes ou pôles sont en ligne droite, la courbe, lieu du sommet libre, est du degré $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Car, dans ce cas, le faisceau donné par la seconde construction se réduit à la droite elle-même $P_4 D$, et ne fournit plus de polygones satisfaisant à la question.

Remarque II. Lorsque les courbes directrices sont des lignes droites, on a les théorèmes suivants:

Si les $(n+1)$ côtés d'un polygone, de forme variable, tournent autour de $(n+1)$ points fixes, tandis que n sommets glissent sur n droites fixes; le sommet libre décrit une courbe du second ordre.

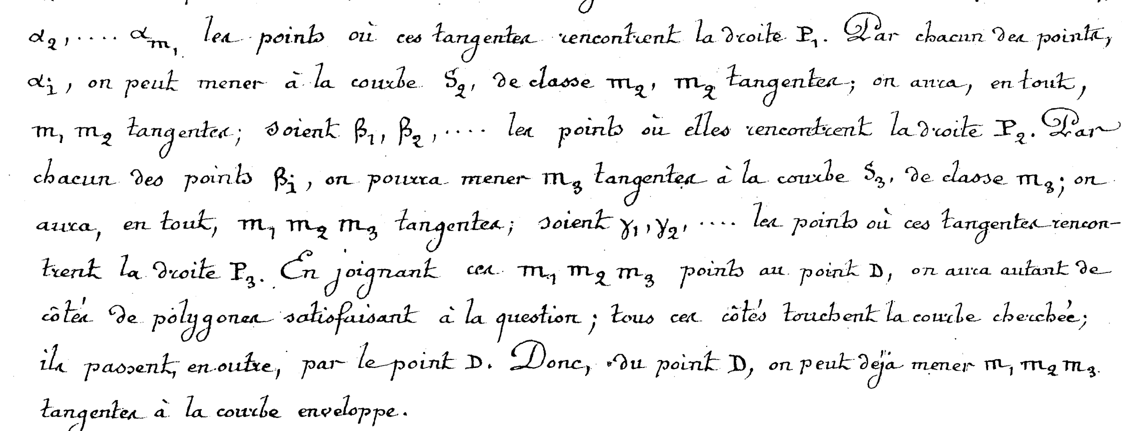
Lorsque les $(n+1)$ points fixes sont en ligne droite, le sommet libre décrit une ligne droite.

638. Nous appliquerons un raisonnement semblable à la démonstration du théorème suivant:

Lorsque les $(n+1)$ sommets d'un polygone de forme variable décrivent $(n+1)$ droites fixes, et que n côtés touchent n courbes fixes dont les classes respectives sont $m_1, m_2, \dots m_n$; le côté libre enveloppe une courbe de la classe $2m_1 m_2 \dots m_n$.

Pour déterminer la classe de la courbe enveloppée, nous chercherons combien on peut lui mener de tangentes par un point arbitrairement choisi, en tenant compte des tangentes multiples.

Prenons, pour fixer les idées, un polygone de quatre sommets; soient P_1, P_2, P_3, P_4, les quatre droites fixes; et S_1, S_2, S_3, les trois courbes fixes. Nous allons chercher combien on peut mener de tangentes à la courbe en question, par un point D pris sur la droite P_4. Par le point D, on peut mener m_1 tangentes à la courbe S_1, de classe m_1; soient α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_{m_1}$ les points où ces tangentes rencontrent la droite P_1. Par chacun des points α_i, on peut mener à la courbe S_2, de classe m_2, m_2 tangentes; on aura, en tout, $m_1 m_2$ tangentes; soient $\beta_1, \beta_2, \dots$ les points où elles rencontrent la droite P_2. Par chacun des points β_i, on pourra mener m_3 tangentes à la courbe S_3, de classe m_3; on aura, en tout, $m_1 m_2 m_3$ tangentes; soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les points où ces tangentes rencontrent la droite P_3. En joignant ces $m_1 m_2 m_3$ points au point D, on aura autant de côtés de polygones satisfaisant à la question; tous ces côtés touchent la courbe cherchée; ils passent, en outre, par le point D. Donc, du point D, on peut déjà mener $m_1 m_2 m_3$ tangentes à la courbe enveloppe.



Ce seront évidemment les seules tangentes distinctes de la droite P_4; il reste à savoir si cette droite P_4 fait partie des tangentes, et quel est son ordre de multiplicité. Faisons la construction en sens inverse; c.à.d. prenons l'intersection, I, de la droite P_4 avec la droite P_3; par le point I, menons les tangentes à S_3; on aura m_3 tangentes qui couperont la droite P_2 en m_3 points. Par chacun de ces points, menons les tangentes à la courbe S_2; on aura $m_3 m_2$ tangentes qui couperont la droite P_1 en $m_3 m_2$ points. Par chacun de ces points, menons les tangentes à la courbe S_1; on aura $m_3 m_2 m_1$ tangentes coupant la droite P_4 en $m_3 m_2 m_1$ points; ces points, joints au point I, donneront les derniers côtés d'autant de polygones satisfaisant à la question. Or tous ces côtés se confondent avec DI et passent par le point D; donc, par le point D, passent $m_1 m_2 m_3$ tangentes confondues avec P_4; la droite P_4 est une tangente multiple de l'ordre $m_1 m_2 m_3$.

Par conséquent, il y a, en définitive, $2m_1 m_2 m_3$ tangentes passant par le point D; la classe de la courbe, enveloppe du 4ème côté, est donc égale à $2m_1 m_2 m_3$.

Généralement, l'enveloppe du $(n+1)^{ème}$ côté libre sera de la classe $2m_1 m_2 m_3 \dots m_n$.

Remarque I. Lorsque les droites fixes sont concourantes, l'enveloppe du côté libre est de la classe $m_1 m_2 m_3$.

Car, dans ce cas, les sommets donnés par la seconde construction se confondent tous avec le point I, et cette construction ne fournit plus de polygones satisfaisant à l'énoncé.

Remarque II. Lorsque les courbes directrices se réduisent à des points, on a les théorèmes suivants:

Si les $(n+1)$ sommets d'un polygone de forme variable décrivent $(n+1)$ droites fixes, tandis que n côtés tournent autour de n points fixes, le côté libre enveloppe une courbe de 2ème class

Lorsque les $(n+1)$ droites fixes sont concourantes, le côté libre tourne autour d'un point fixe.

IX. Perspective des courbes du 3ème ordre.

639. Newton a énoncé sans démonstration (Enumeratio....) le théorème suivant:

1° Les cinq paraboles divergentes donnent par leur ombre toutes les courbes du 3ème ordre.

M. Chasles a indiqué l'origine de cette propriété en en donnant la démonstration et a ajouté cette autre proposition (Aperçu historique page 146):

2° Parmi toutes les courbes du 3ème ordre, il en est cinq qui ont un centre, et ces cinq courbes, par leur ombre projetée sur un plan, donnent naissance à toutes les autres.

Nous reproduirons, quant au fond, la démonstration de M. Chasles.

640. Constatons d'abord la propriété suivante:

Si par un point d'inflexion O d'une courbe du 3ème ordre, on mène des rayons vecteurs, ces rayons vecteurs rencontreront la courbe en deux autres points A et B; le lieu des centres harmoniques de A et B par rapport au point O, c.à.d. le lieu des points M tels que

$$\frac{2}{OM} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB},$$

est une droite; cette droite est dite **polaire harmonique** du point d'inflexion. (Maclaurin).

Prenons le point d'inflexion pour origine et la tangente d'inflexion pour axe des x; l'équation de la courbe du 3ème ordre sera alors de la forme

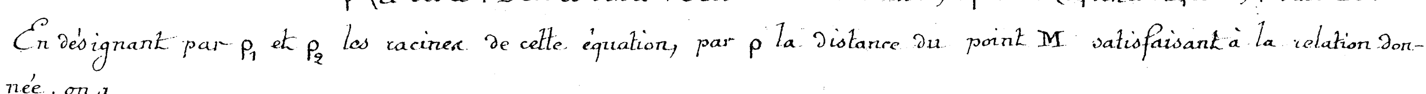
$$(1)\qquad a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 + a_1 y^2 + b_1 x y + y = 0.$$

Les coordonnées d'un point situé sur la sécante OA seront

$$(2)\qquad x = \rho \cos\omega,\quad y = \rho \sin\omega;$$

les distances à l'origine des points d'intersection avec la courbe seront données par l'équation

$$\rho^2(a\cos^3\omega + b\cos^2\omega\sin\omega + c\cos\omega\sin^2\omega + d\sin^3\omega) + \rho\sin\omega(a_1\sin\omega + b_1\cos\omega) + \sin\omega = 0.$$



En désignant par ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation, par ρ la distance du point M satisfaisant à la relation donnée, on a

$$(3)\qquad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -(a_1\sin\omega + b_1\cos\omega).$$

Eliminons $\cos\omega$ et $\sin\omega$ entre les équations (2) et (3), on trouve pour l'équation du lieu:

$$(4)\qquad a_1 y + b_1 x + 2 = 0;$$

telle est la polaire harmonique du point d'inflexion O.

Remarque I. Les droites, qui joignent les extrémités de deux rayons menés par le point d'inflexion, se coupent sur la polaire harmonique.

Remarque II. Les tangentes menées aux extrémités d'un rayon vecteur, passant par le point d'inflexion, se coupent sur la polaire harmonique.

641. Une courbe du 3ème ordre a au moins un point d'inflexion réel; soit I ce point, IT la tangente d'inflexion, et PP' la polaire harmonique du point d'inflexion I.

La polaire harmonique coupe chaque rayon vecteur en un point M, tel que (A et B étant les intersections de la courbe avec ce rayon vecteur)

$$\frac{2}{IM} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB};$$

cette relation peut s'écrire

$$\frac{MA}{IA} + \frac{MB}{IB} = 0.$$

Si le point I s'éloigne à l'infini, on a $\lim \frac{IA}{IB} = \lim \frac{IB - AB}{IB} = 1$; donc $MA = -MB$; c.à.d. que le point M est alors le milieu du segment AB.

Cela posé, faisons la perspective de la courbe, en projetant à l'infini le point d'inflexion I et la tangente d'inflexion; il suffira, si S est le point de vue, de projeter sur un plan parallèle au plan SIT.

Le point I étant projeté à l'infini en i, tous les rayons vecteurs projetés seront parallèles, et la droite perspective de la polaire divisera les segments ab en deux parties égales. De sorte que si l'on prend, sur le plan de projection, la perspective de la polaire harmonique pour axe des x; et, pour axe des y, une parallèle aux cordes iab; l'axe des x divisera en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y.

L'équation de la projection ne devra donc contenir que des puissances paires de y et sera de la forme

$$Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2 + Dy^2 + Ex + F = 0.$$

Mais la tangente d'inflexion a aussi été projetée à l'infini, c.à.d. que la droite de l'infini est une tangente d'inflexion; par conséquent, si, après avoir rendu l'équation homogène, on fait $z = 0$, les termes restants doivent former un cube parfait; ce qui exige que l'on ait $B = 0$.

L'équation de la projection a donc la forme définitive

$$\text{(I)} \qquad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

ce qui démontre la première proposition du N.° [639]; car nous constaterons tout-à-l'heure que l'équation (I) comprend cinq courbes distinctes.

642. Au lieu de projeter le point d'inflexion I à l'infini, projetons sa polaire harmonique P; il suffira, pour cela, de prendre le plan SPP' pour plan de perspective. Le point M étant à l'infini, la relation

$$\frac{2}{IM} = \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB},$$

donnera $IA = -IB$; c.à.d. que le point I deviendra le milieu des segments AB.

Ainsi la projection i du point d'inflexion partagera en deux parties égales les cordes qui passent par ce point, c.à.d. que ce point sera centre de la projection de la courbe. Par conséquent, si l'on prend pour origine le centre de la projection; et pour axe des x, la tangente d'inflexion, l'équation de la projection sera de la forme

$$\text{(II)} \qquad ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + y = 0;$$

ce qui démontre la seconde proposition du N.° [639], car nous allons voir que cette équation comprend cinq variétés de courbe.

643. ## Discussion de l'équation.

$$\text{(I)} \qquad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ces courbes n'ont pas d'asymptotes à distance finie; la droite de l'infini est tangente d'inflexion; l'axe des x est diamètre des cordes parallèles à l'axe des y. Cette courbe étant du 3.ème ordre, elle sera en général, de 6.ème classe.

Nous aurons donc à distinguer les trois cas suivants N.° [486]:

Courbes de 6.ème classe, s'il n'y a pas de point double;

Courbes de 4.ème classe, s'il y a un point double;

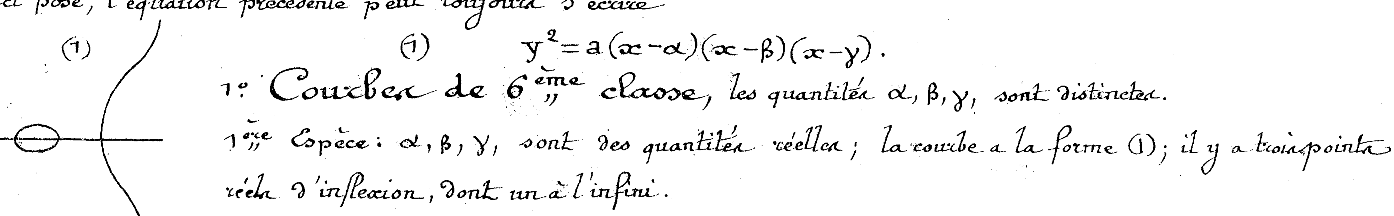
Courbes de 3.ème classe, s'il y a un point de rebroussement.

Rappelons que les coordonnées des points doubles doivent vérifier les relations

$$f(x, y) = 0, \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0.$$

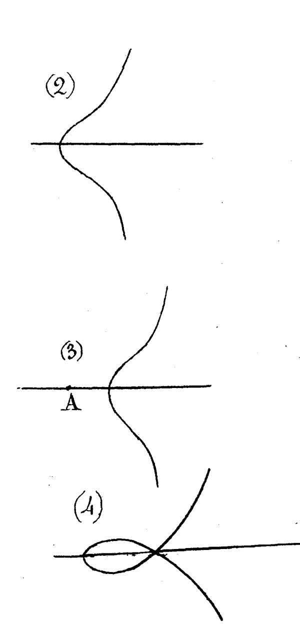
Ceci posé, l'équation précédente peut toujours s'écrire

$$\text{(1)} \qquad y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$



1.° **Courbes de 6.ème classe**, les quantités α, β, γ, sont distinctes.

1.ère Espèce: α, β, γ, sont des quantités réelles; la courbe a la forme (1); il y a trois points réels d'inflexion, dont un à l'infini.



2ème Espèce : α, β, imaginaires ; la courbe a la forme (2) ; il y a encore trois points réels d'inflexion, dont un à l'infini.

2° **Courbes de 4ème classe**, deux des quantités α, β, γ sont égales ; l'équation est

$$y^2 = a(x-\alpha)^2(x-\beta) ;$$

la courbe a un point double.

1ère Espèce : si $\alpha < \beta$; le point double est isolé ; il y a encore trois points d'inflexion réels ; on a la forme (3).

2ème Espèce : si $\alpha > \beta$, on a un point double ordinaire ; il y a un seul point d'inflexion réel, lequel est à l'infini ; la courbe présente la forme (4).

3° **Courbes de 3ème classe**, les trois quantités α, β, γ, sont égales ; l'équation est

$$y^2 = a(x-\alpha)^3 ;$$

la courbe possède un point de rebroussement ; il y a un seul point d'inflexion réel qui est à l'infini ; la courbe a la forme (5).

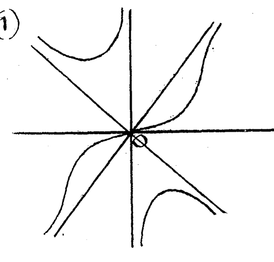
L'équation (I) présente donc cinq espèces de courbes.

644. **Discussion de l'équation**

$$\text{(II)} \qquad ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + y = 0.$$

Les variétés de cette courbe se distingueront par la nature des points à l'infini, et encore par la classe. Il n'y a pas de point double à distance finie ; mais il y peut y en avoir à l'infini.

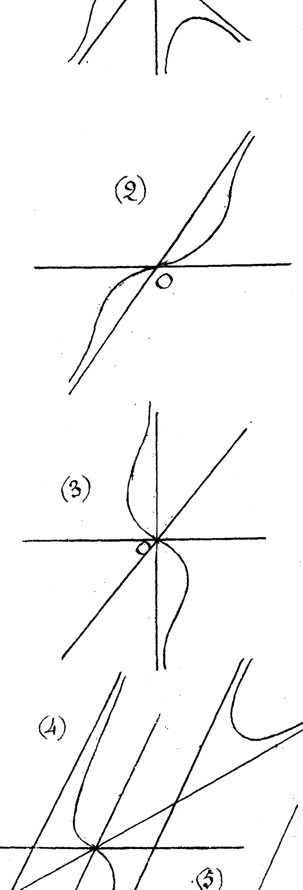
L'équation (II) peut s'écrire



$$(2) \qquad a(y-\alpha x)(y-\beta x)(y-\gamma x) + y = 0.$$

1° **Courbes de 6ème classe**, les quantités α, β, γ, sont distinctes, il n'y a pas de point double.

1ère Espèce : si α, β, γ, sont réels ; il y a trois asymptotes réelles, lesquelles passent par le centre ; elles ont avec la courbe un contact du 1er ordre ; le centre est un point d'inflexion ; il y a deux autres points d'inflexion réels aussi à distance finie ; la courbe a la forme (1).



2ème Espèce : les quantités α et β sont imaginaires ; il y a une seule asymptote réelle ; il y a encore trois points d'inflexion à distance finie ; la courbe a la forme (2).

2° **Courbes de 4ème classe**, deux des quantités α et β sont égales ; il y a un point double à l'infini ; l'équation est de la forme

$$a(y-\alpha x)^2(y-\beta x) + y = 0,$$

1ère Espèce : le point double à l'infini est isolé ; la direction asymptotique correspondant au point double est $y - \alpha x = 0$; le point double est isolé si $\alpha > \beta$, en admettant que a soit positif. Il y a trois points réels d'inflexion à distance finie. La courbe a la forme (3) :

2ème Espèce : on a à l'infini un point double ordinaire ; il y a un seul point d'inflexion réel, qui est le centre. La courbe a la forme (4).

3° **Courbes de 3ème classe**, les trois quantités α, β, γ, sont égales ; il y a un point de rebroussement à l'infini ; l'équation est de la forme

$$a(y-\alpha x)^3 + y = 0.$$

La courbe ne possède qu'un seul point réel d'inflexion ; elle a la forme (5). La tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

L'équation (II) présente donc aussi cinq espèces de courbes.

Chapitre IX

Recherche des équations de plusieurs courbes définies géométriquement.

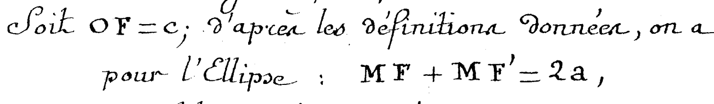
I.° Ellipse; hyperbole; Parabole.

615. L'Ellipse est le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points fixes est constante.*

L'hyperbole est le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux points fixes est constante.

Soient F et F' les deux points fixes, et M (x, y) un point du lieu; prenons FF' pour axe des x; pour origine, le milieu O de FF'; et pour axe des y, la perpendiculaire à FF' par le point O.

On voit, à priori, que la courbe est symétrique par rapport à ces deux droites.



Soit $OF = c$; d'après les définitions données, on a

pour l'Ellipse : $MF + MF' = 2a$,

pour l'hyperbole : $MF' - MF = 2a$.

Dans l'Ellipse, on a $a > c$; car, dans le triangle MFF' la somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté; c.à d. $MF + MF' > 2c$, ou $a > c$.

Dans l'hyperbole, on a $a < c$; car le côté FF' doit être plus grand que la différence des deux autres MF' et MF.

Ceci posé, x et y étant les coordonnées du point M, on a

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

les équations des deux courbes seront donc

$$(1) \qquad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \begin{cases} +, \text{ pour l'Ellipse}, \\ -, \text{ pour l'hyperbole}. \end{cases}$$

Pour rendre l'équation (1) rationnelle, nous poserons

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + t, \\ \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - t; \end{cases}$$

ajoutant et retranchant les carrés de ces deux relations, il vient

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + t^2, \\ cx = at; \end{cases}$$

nous obtiendrons l'équation du lieu en éliminant t entre ces deux équations.

On trouve ainsi, en ordonnant et divisant par $a^2(a^2 - c^2)$:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Cette équation est commune à l'Ellipse et à l'hyperbole; mais il y a ce caractère distinctif, que: dans l'Ellipse $a > c$; et dans l'hyperbole $a < c$.

Dans le premier cas, nous pourrons poser

$$(3) \qquad a^2 - c^2 = b^2,$$

et l'équation de l'Ellipse sera

$$(3\,bis)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

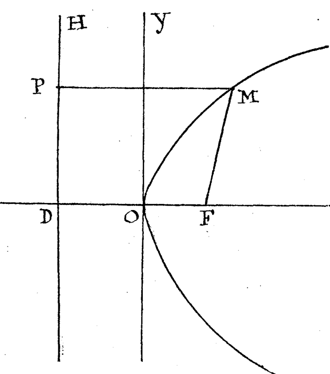
dans le second cas, nous poserons

$$(4)\qquad c^2-a^2=b^2,$$

et l'équation de l'hyperbole sera

$$(4\,bis)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

616. **La parabole est le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une droite fixe.**



Soient F le point fixe et DH la droite fixe; du point F abaissons une perpendiculaire sur DH, et prenons la pour axe des x; la perpendiculaire, élevée au milieu O de DF, sera l'axe des y; posons $DF=p$.

Si M est un point du lieu, on a d'après la définition géométrique de la courbe:

$$MF=MP;$$

$$MP=x+\frac{p}{2},\quad MF=\sqrt{(x-\tfrac{p}{2})^2+y^2};$$

on trouvera, en égalant ces valeurs et rendant rationnel:

$$(5)\qquad y^2=2px;$$

c'est l'équation de la parabole.

617 Les trois courbes que nous venons de trouver, auxquelles on donne le nom de coniques, peuvent être renfermées dans une définition commune:

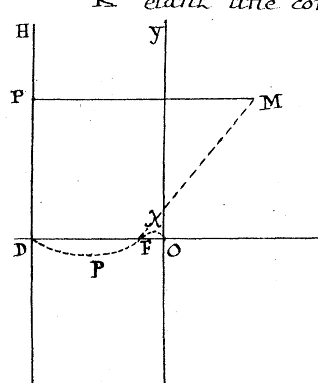
Une conique est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant.

Soient F le point fixe et DH la droite fixe; du point F, abaissons sur cette droite la perpendiculaire FD, que nous choisirons pour axe des x; pour axe des y, nous prendrons une perpendiculaire en un certain point O, en laissant indéterminée la position de ce point O; nous désignerons par λ la distance FO, λ étant regardé comme positif ou négatif suivant que O est à droite ou à gauche du point F.

Si M est un point quelconque du lieu, joignons MF et abaissons MP perpendiculaire sur la droite, on aura d'après la définition

$$(1)\qquad \frac{MF}{MP}=k;$$

k étant une constante positive. Mais, si x et y sont les coordonnées de M, on a



$$MF=\sqrt{(x+\lambda)^2+y^2};\ MP=x+\lambda+p;$$

l'équation du lieu sera donc, en substituant ces valeurs dans l'égalité (1), puis élevant au carré et ordonnant:

$$(2)\qquad y^2+x^2(1-k^2)+2\lambda x(1-k^2)-2pk^2x+\lambda^2(1-k^2)-2p\lambda k^2-p^2k^2=0.$$

Lorsqu'on suppose $k=1$, il vient

$$y^2-2px-p(2\lambda+p)=0;$$

en prenant pour λ la valeur

$$\lambda=-\frac{p}{2},$$

c.à.d. en prenant pour origine un point situé à gauche de F et également distant de D et de F, l'équation se réduit à

$$y^2-2px=0;$$

on retrouve ainsi l'équation de la parabole.

Supposons maintenant k différent de l'unité ; nous profiterons de l'indétermination de λ pour égaler à zéro le coefficient de x, c. à. d. que nous poserons

$$(3) \qquad \lambda(1-k^2) - pk^2 = 0, \text{ d'où } \lambda = \frac{pk^2}{1-k^2}.$$

Si l'on remplace λ par cette valeur, l'équation (2) devient

$$(4) \qquad x^2(1-k^2) + y^2 = \frac{p^2k^2}{1-k^2}.$$

Si $k<1$, nous obtenons l'équation de l'Ellipse, et nous pourrons disposer de p et de k de manière à mettre en évidence les axes a et b de cette Ellipse.

Si $k>1$, on a l'équation de l'hyperbole ; on pourra aussi disposer de p et k de manière à mettre en évidence les axes a et b de cette hyperbole.

II.° Description organique des Coniques.

618. Si l'on imagine deux angles, de grandeur déterminée, tournant autour de leurs sommets respectifs, et si deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe ; l'intersection des deux autres côtés décrira une conique.

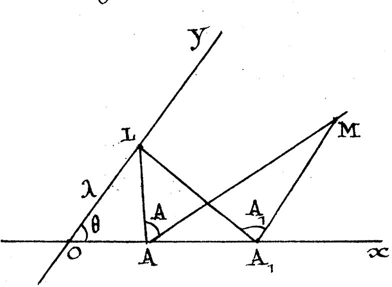
Cette description des coniques a été donnée par Newton.

Soient A et A_1 les sommets des deux angles ; nous prendrons la droite fixe pour axe des y, et la droite AA_1 pour axe des x ; soient L le point d'intersection, sur Oy, de deux des côtés des angles donnés, et M le point d'intersection des deux autres côtés. Nous poserons

$$OL = \lambda;\ OA = a,\ OA_1 = a_1;\ \widehat{LAM} = A,\ \widehat{LA_1M} = A_1;$$

λ est une indéterminée ; a, a_1, A, A_1, et l'angle θ des axes, sont des quantités connues.

Déterminons l'équation de la droite AM par la condition qu'elle fait avec la droite AL un angle égal à A. Soit



$$y = \mu(x-a),$$

l'équation de la droite AM ; son coefficient angulaire est μ, celui de la droite AL est $-\frac{\lambda}{a}$, on devra donc avoir

$$\operatorname{tang} A = \frac{\left(-\frac{\lambda}{a} - \mu\right)\sin\theta}{1 + \left(\mu - \frac{\lambda}{a}\right)\cos\theta - \frac{\lambda\mu}{a}}$$

Remplaçons, dans cette égalité, μ par $\frac{y}{x-a}$, on aura l'équation cherchée de la droite AM ; on trouve, en isolant les termes en λ :

$$y\sin(\theta + A) + (x-a)\sin A = \frac{\lambda}{a}\left[y\sin A + (x-a)\sin(A-\theta)\right].$$

On conclut du même calcul l'équation de la droite A_1M :

$$y\sin(\theta + A_1) + (x-a_1)\sin A_1 = \frac{\lambda}{a_1}\left[y\sin A_1 + (x-a_1)\sin(A_1-\theta)\right].$$

Nous poserons :

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{\sin(\pi - A)}{\sin[\theta - (\pi - A)]}, \\ n &= \frac{\sin A}{\sin(\theta - A)}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} m_1 &= \frac{\sin(\pi - A_1)}{\sin[\theta - (\pi - A_1)]}, \\ n_1 &= \frac{\sin A_1}{\sin(\theta - A_1)}. \end{aligned}\right.$$

Les équations des deux droites AM et A_1M s'écriront alors

$$(AM) \qquad y - m(x-a) = \frac{\lambda m}{a}\left[(x-a) - ny\right],$$

$$(A_1M) \qquad y - m_1(x-a_1) = \frac{\lambda m_1}{a_1}\left[(x-a_1) - n_1 y\right].$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ entre ces deux équations; on trouve ainsi

$$(2) \qquad \left[y - m(x-a)\right]\left[(x-a_1) - n_1 y\right] = \frac{m a_1}{m_1 a}\left[y - m_1(x-a_1)\right]\left[(x-a) - ny\right];$$

c'est l'équation d'une courbe du second ordre.

Cette courbe est circonscrite au quadrilatère formé par les quatre droites

$$(3) \quad \begin{cases} M = y - m(x-a) = 0, & N = (x-a) - ny = 0, \\ M_1 = y - m_1(x-a_1) = 0; & N_1 = (x-a_1) - n_1 y = 0; \end{cases}$$

les droites M et M_1 passent respectivement par les points A et A_1; et font, avec l'axe Ox, la 1ère l'angle $(\pi - A)$; la seconde l'angle $(\pi - A_1)$. Les droites N et N_1 passent aussi par les points A et A_1; et font, avec l'axe Oy, la 1ère, l'angle A; la seconde, l'angle A_1.

La courbe (2) passe par les points A et A_1; puis, par les intersections de M avec N, et de M_1 avec N_1.

Le quadrilatère devient un parallélogramme si $A_1 = A + k\pi$.

III°. Cissoïde de Dioclès.

649. Étant donné un cercle fixe et un point A pris sur ce cercle; par le point A, on mène une sécante quelconque qui coupe le cercle en H, et la tangente à l'extrémité du diamètre AB, en G; à partir du point A, on prend une longueur AM égale à HG; le lieu des points M est la cissoïde.

(Dioclès (vers 500 av. J.C.) imagina cette courbe pour résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles).

Désignons par R le rayon du cercle; prenons pour origine le point A, et pour axe des x, le diamètre AB passant par ce point; soit M un point du lieu, AP et MP son x et son y. On a, par hypothèse, AM = HG, d'où il résulte AP = DB. Dans le triangle rectangle AHB, on a

$$\overline{HD}^2 = AD.DB = x(2R-x).$$

Les triangles semblables AMP et AHD donnent en outre:

$$\frac{HD}{MP} = \frac{AD}{AP}, \text{ ou } \frac{HD}{y} = \frac{2R-x}{x}.$$

Remplaçant HD par cette valeur, dans l'égalité précédente, il vient

$$(1) \qquad (2R-x)\,y^2 = x^3;$$

c'est l'équation de la Cissoïde.

Équation de la Cissoïde en coordonnées polaires.

Prenons le point A pour pôle, et la droite AB comme axe polaire; désignons par ρ la distance AM; par ω, l'angle MAP; ρ et ω sont les coordonnées polaires du point M.

Le triangle rectangle AMP donne

$$AP = \rho \cos\omega;$$

mais on a, dans le triangle AHB:

$$\overline{HB}^2 = 2R.\overline{DB} = 2R.\overline{AP}, \text{ puisque } AP = BD;$$

on a aussi

$$HB = 2R\sin\omega; \text{ d'où } AP = 2R\sin^2\omega;$$

l'équation, en coordonnées polaires, de la courbe sera donc

$$(2) \qquad \rho = \frac{2R \sin^2 \omega}{\cos \omega}.$$

650. On pourra construire la Cissoïde, soit à l'aide de l'équation (1) résoluble par rapport à y, soit à l'aide de l'équation (2).

Reprenons l'équation en coordonnées rectilignes

$$(1) \qquad (2R-x)y^2 = x^3,$$

ou

$$(2) \qquad x^3 + xy^2 - 2Ry^2 = 0.$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. L'origine est un point de rebroussement de 1ère espèce; la cissoïde est donc une courbe de 3ème ordre et de 3ème classe.

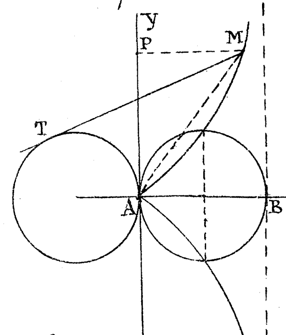
Les directions asymptotiques sont

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad x = 0;$$

il y a donc une seule branche infinie réelle, dont l'asymptote est la droite $x - 2R = 0$. La courbe passe par les points circulaires à l'infini; elle est, en outre, doublement tangente, en ces points, au cercle

$$x^2 + y^2 + 2Rx = 0;$$

c'est ce que l'on voit encore, en remarquant que l'équation de la courbe peut s'écrire



$$(3) \qquad (x^2+y^2+2Rx)x - 2R(x^2+y^2) = 0.$$

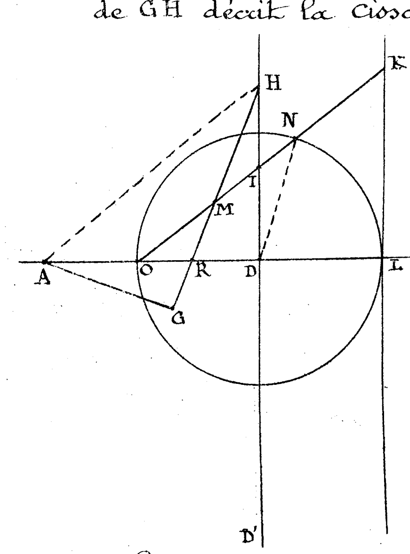
Cette dernière relation peut se traduire géométriquement et nous donne la propriété suivante des points de la cissoïde :

$$(4) \qquad 2R.\overline{MA}^2 = \overline{MT}^2.MP;$$

M est un point quelconque de la Cissoïde; MT est la tangente au cercle $x^2+y^2+2Rx=0$; MP est la distance à la tangente commune aux deux cercles; MA est la distance au point de rebroussement.

651. Newton a donné une description mécanique fort élégante de la cissoïde :

Soit un point fixe A et une droite fixe DD'; du point A on abaisse une perpendiculaire AD sur la droite fixe; puis on imagine un angle droit dont un des côtés passe par le point A et dont l'extrémité de l'autre côté, supposé égal à AD, s'appuie sur la droite fixe; si G est le sommet de l'angle droit et H l'extrémité de ce côté, le point milieu M de GH décrit la cissoïde.



En effet, prenons le milieu O de AD, et, du point D comme centre avec DO pour rayon, décrivons un cercle; puis joignons AH et OM, M étant le milieu de HG. Les droites AH et OM sont parallèles; car les deux triangles rectangles AGH et ADH sont égaux, puisque AH est un côté commun et que GH = AD, d'après l'énoncé. Par suite, AG = HD; et comme, les deux angles ARG et HRD sont égaux, il en résulte que les deux triangles rectangles AGR et HDR sont égaux. Donc

GR = RD; d'où OR = RM, puisque OD = GM.

D'ailleurs OA = HM; par conséquent, les droites OM et HM sont parallèles. Comme le point O est le milieu de AD, il suit du parallélisme de ces droites que OM coupe HD en un point I milieu de HD.

Les deux triangles HIM et DIN sont égaux; car HM = DO = DN; les angles en I sont égaux; de plus l'angle $\widehat{DNI} = \widehat{MOR} = \widehat{HAD} = \widehat{AHG} = \widehat{HMI}$; donc

IM = IN; et par suite, OM = NK, car évidemment OI = IK.

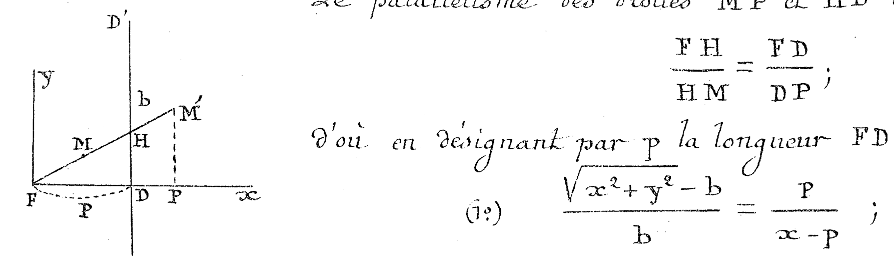
C. à d. que le point M engendre une Cissoïde ayant pour cercle directeur le cercle décrit sur la figure.
Nous laisserons à faire la démonstration analytique de cette proposition.

IV. Conchoïde de Nicomède.

652. Soit un point fixe F et une droite fixe DD'; menons par le point fixe une sécante quelconque qui coupe la droite fixe en H; à partir du point H, prenons sur cette sécante une longueur constante $HM = b$; le lieu des points M ainsi obtenus est la conchoïde.

« Nicomède (v. 150 av. J. C.) imagina cette courbe pour résoudre, par un procédé mécanique le pro-
« blème des deux moyennes proportionnelles et celui de la trisection de l'angle. Newton se servit
« de cette courbe pour construire les équations du 3ème degré.

Prenons pour axe des x la perpendiculaire abaissée du point F sur la droite D; pour origine le point F; et pour axe des y, une perpendiculaire à Fx.



Le parallélisme des droites MP et HD donne

$$\frac{FH}{HM} = \frac{FD}{DP};$$

d'où en désignant par p la longueur FD

$$(1°) \qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2}-b}{b} = \frac{p}{x-p};$$

ou, en rendant cette équation rationnelle:

$$(1) \qquad (x^2+y^2)(x-p)^2 = b^2x^2;$$

telle est l'équation de la conchoïde.

La constante b entre seulement au carré; on voit alors, d'après l'égalité analogue à (1°), que l'équation (1) représentera le lieu des points obtenus en portant à droite et à gauche de H une longueur égale à b.

L'équation de la conchoïde en coordonnées polaires s'obtient très-aisément.

Le point F étant le pôle, et Fx l'axe polaire; ρ et ω étant les coordonnées du point M, on a

$$FP = \rho \cos\omega; \quad FP = p + DP; \quad DP = b\cos\omega;$$

d'où l'on conclut l'équation en coordonnées polaires

$$(2) \qquad \rho = \frac{p}{\cos\omega} + b.$$

653. Revenons à l'équation en coordonnées cartésiennes

$$(1) \qquad (x^2+y^2)(x-p)^2 = b^2x^2;$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à y:

$$(1\,bis) \qquad y^2 = \frac{x^2[x+b-p][b+p-x]}{(x-p)^2}.$$

L'équation (1), développée et ordonnée, donne

$$(1\,ter) \qquad (x^2+y^2)x^2 - 2px(x^2+y^2) + p^2y^2 + (p^2-b^2)x^2 = 0.$$

La courbe est du quatrième ordre; l'origine est un point double: isolé si $b<p$; ordinaire, si $b>p$; de rebroussement, si $b=p$. La courbe passe par les points circulaires à l'infini; la droite de l'infini est une tangente double, ses points de contact sont les points circulaires à l'infini. Les autres directions asymptotiques se confondent avec l'axe des y; le point à l'infini sur l'axe des y est un point double de rebroussement, le contact est du second ordre; ou mieux a deux branches de courbe qui se touchent à l'infini.

Appliquant ici les formules du N° [497], on trouve pour la Conchoïde:

ordre : 4 ; classe, 7 ; nombre des points d'inflexion, 10 ; nombre des tangentes doubles, 4. car, nous venons de constater la présence d'un point double et d'un point de rebroussement ; ce sont les seuls points doubles. La 1ère polaire d'un point quelconque touche la courbe en son point de rebroussement et a avec la courbe un contact du 1er ordre ; le point de rebroussement ne diminue donc la classe que de 3 unités.

Dans le cas où $b = p$, la courbe n'est plus que de 6ème classe ; le nombre des points d'inflexion est 8 ; celui des tangentes doubles est 1.

654. Disons un mot du problème qui a conduit les géomètres anciens à l'invention de la Cissoïde et de la Conchoïde.

Il s'agissait de la duplication du cube, ou plus généralement de construire un cube qui soit à un autre cube dans un rapport donné.

Soit a le côté du cube donné, x celui du cube cherché, et m le rapport donné ; on aura

$$(1) \qquad x^3 = ma^3.$$

Si b est une ligne telle que $b = ma$; l'équation précédente deviendra

$$(2) \qquad x^3 = a^2 b, \text{ ou } x^4 = a^2 bx.$$

Or si l'on pose

$$x^2 = ay, \text{ on aura } y^2 = bx.$$

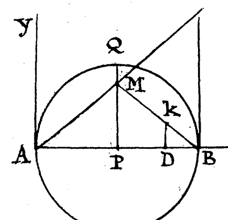
La question est donc ramenée à celle que traduisent les égalités suivantes :

$$(3) \qquad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

c.à.d. trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données a et b.

Voici comment la Cissoïde N° (649)

$$(4) \qquad y = \frac{x^2}{\sqrt{x(2R - x)}};$$



permet de résoudre la question. En appelant z l'ordonnée d'un point du cercle dont l'abscisse est x, on a

$$(5) \qquad z^2 = x(2R - x).$$

Comparant cette relation avec la précédente, on en conclut $yz = x^2$; d'où

$$(6) \qquad \frac{2R - x}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}.$$

Par conséquent, si $(2R - x)$ était égal à a, et y à b, z et x résoudraient le problème.

Multiplions par $\frac{b}{y}$ tous les termes de ces rapports, il vient

$$(7) \qquad \frac{\frac{(2R - x)b}{y}}{\frac{bz}{y}} = \frac{\frac{bz}{y}}{\frac{bx}{y}} = \frac{\frac{bx}{y}}{b}.$$

Donc, si maintenant nous prenons un point sur la Cissoïde tel que

$$(8) \qquad \frac{(2R - x)b}{y} = a, \quad \text{(équation d'une droite)}$$

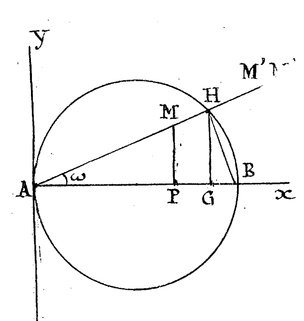
les quantités $\frac{bz}{y}$, $\frac{bx}{y}$ seront connues, eu égard à la valeur (5) ; on pourra les construire, et ce seront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre a et b.

Pour déterminer le point cherché, en supposant la Cissoïde construite, prenons $BD = a$; puis sur la perpendiculaire, $DK = b$; la droite BK coupera la Cissoïde au point cherché M. Alors $AP = x$, $MP = y$, $QP = z$.

V.° Limaçon de Pascal ou Conchoïde circulaire.

655. Supposons une circonférence fixe et un point A pris sur cette circonférence; par le point A, menons une sécante quelconque laquelle coupe la circonférence en H; à partir de ce point H prenons une longueur constante HM = b; le lieu des points M est la Limaçon de Pascal ou Conchoïde circulaire.

Prenons pour origine le point A; pour axe des x, le diamètre passant par A; pour axe des y, la tangente en A. Les coordonnées du point M sont AP = x, MP = y; nous désignerons par R le rayon du cercle directeur.



Dans le triangle AMP, on a

$$(1^\circ)\qquad (AH-b)^2 = x^2+y^2\,;$$

or, si HG est la perpendiculaire abaissée du point H sur Ox, on a successivement

$$\overline{AH}^2 = 2R.AG\,;\quad \frac{AH}{AG} = \frac{AH-b}{x},$$

d'où l'on conclut

$$(2^\circ)\qquad AH\,(AH-b) = 2Rx.$$

L'élimination de AH entre (1°) et (2°) nous conduit à l'équation de la conchoïde circulaire, savoir

$$(1)\qquad (x^2+y^2)^2 - 4Rx(x^2+y^2) + x^2(4R^2-b^2) - b^2y^2 = 0.$$

L'équation en coordonnées polaires s'obtient très-aisément. Soient A le pôle, Ax l'axe polaire, ρ et ω les coordonnées du point M; on a

$$AH - b = \rho,\ AH = 2R\cos\omega\,;$$

d'où l'on conclut l'équation en coordonnées polaires

$$(2)\qquad \rho = 2R\cos\omega - b.$$

Si l'on avait porté le point M à droite de H, on eût trouvé pour l'équation en coordonnées polaires

$$(2\,bis)\qquad \rho = 2R\cos\omega + b.$$

On peut construire la courbe, soit à l'aide de l'équation (1), soit à l'aide de l'équation (2).

Remarque I. L'équation (1) ne renferme la constante b qu'au carré; elle donne le lieu des points obtenus en portant la longueur b soit à gauche, soit à droite du point H.

Remarque II. Les équations (2) et (2 bis) représentent la même courbe, si l'on a égard à la convention faite sur les rayons vecteurs négatifs N.° [5].

En effet, soient ρ et ω les coordonnées d'un point appartenant à la courbe (2); remplaçons dans l'équation (2) ω par $(\pi+\omega)$, il vient

$$-\rho = 2R\cos\omega + b\,;$$

si l'on suppose que (ω,ρ) donnent le point M; $(\pi+\omega, -\rho)$ donneront le point M', c.à.d. un point appartenant à la courbe (2 bis).

656. D'après l'équation (1) on voit que la Conchoïde circulaire est une courbe du 4.ème ordre; les points circulaires à l'infini sont des points doubles; l'origine est également un point double.

Si $b > 2R$, l'origine est un point double isolé;

si $b < 2R$, l'origine est un point double ordinaire.

Dans ces deux cas, la courbe est de 6.ème classe; elle possède 6 points d'inflexion et 4 tangentes doubles; la droite de l'infini est une tangente double. N.° [497]

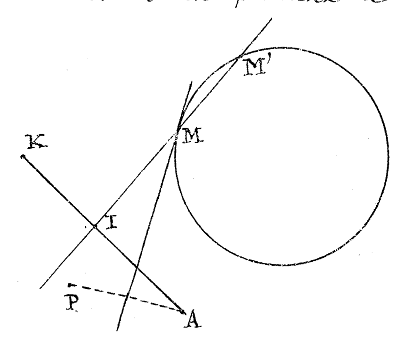
Lorsque $b = 2R$, l'origine est un point de rebroussement; la courbe porte alors le nom de Cardioïde; son équation en coordonnées polaires est

$$(3) \qquad \rho = 4R\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

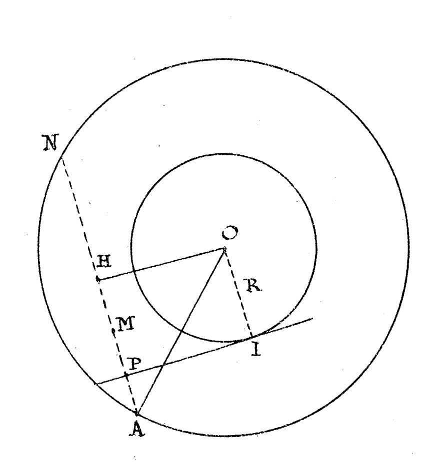
La cardioïde est de 5ème classe ; elle possède quatre points d'inflexion et deux tangentes doubles. N°s (497)

657. La Conchoïde circulaire est l'enveloppe des cercles passant par un point fixe et dont le centre se meut sur un cercle fixe.

Soit A le point fixe, M et M' deux points voisins pris sur le cercle fixe ; les deux circonférences ayant leurs centres en M et M' et passant par le point A se couperont en un 2ème point que l'on obtient en abaissant une perpendiculaire du point A sur MM' et en la prolongeant d'une quantité IK = IA, c. à. d. en prenant le symétrique du point A par rapport à MM'. Cette construction aura toujours lieu, lorsque le point M' se rapprochera indéfiniment du point M ; lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante devient la tangente en M ; et la position limite du point d'intersection des deux circonférences infiniment voisines s'obtiendra encore en prenant le symétrique du point A par rapport à la tangente en M. Soit P ce point symétrique ; le lieu des points P sera le lieu des intersections successives des circonférences ; or ce lieu est une conchoïde circulaire.



Pour démontrer cette proposition, étant donnés le cercle fixe OI et le point fixe A, décrivons un cercle concentrique au premier avec OA pour rayon ; en un point quelconque I du premier cercle, menons une tangente ; puis, du point A, abaissons une perpendiculaire AP sur cette tangente et prolongeons-la de PM = AP ; le lieu des points M sera le lieu des intersections successives des circonférences ayant leur centre sur le cercle OI et passant par le point A. Prolongeons la perpendiculaire AP jusqu'à sa rencontre en N avec le cercle OA ; et soit OH la perpendiculaire abaissée du point O sur AN ; on aura HN = HA, et PH = R, R étant le rayon du cercle OI.



Mais AH = AP + R ; d'où

$$2AH = 2AP + 2R, \text{ ou } AN = AM + 2R ;$$

ou enfin

$$AM = AN - 2R.$$

Par suite, le point M s'obtient en portant, à partir de N, une longueur égale à 2R ; le point M engendre donc une conchoïde circulaire ; le cercle directeur est OA, et l'on a ici $b' = 2R$.

Cette conchoïde possède un point double ordinaire, lorsque le point A est extérieur au cercle OI. On trouverait un point double isolé, en supposant le point A intérieur au cercle OI. On obtiendrait enfin la Cardioïde, en plaçant le point A sur le cercle OI.

VI°. Ovales de Descartes.

658. Le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points fixes respectivement multipliées par des nombres fixes est constante, est l'Ovale de Descartes.

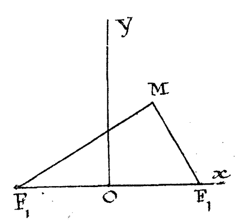
Soient F et F_1 les deux points fixes, et M un point du lieu ; si l'on désigne par ρ et ρ_1 les distances MF et MF_1, l'équation de la courbe sera, en coordonnées bi-polaires, d'après la définition même

$$(1) \qquad m\rho + m_1\rho_1 = 2a ;$$

m, m_1, et a étant des constantes.

Cette courbe devient l'Ellipse ou l'hyperbole lorsqu'on suppose $\frac{m}{m_1} = \pm 1$.

Si l'on prend la droite FF_1 pour axe des x, le milieu de FF_1 pour origine ; on a, en désignant par $2c$ la distance FF_1, par x et y les coordonnées d'un point quelconque M du lieu,



$$\rho = \sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,\quad \rho_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ;$$

l'équation de la courbe sera donc

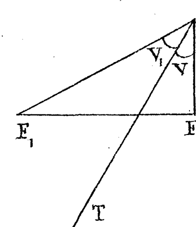
$$(2)\qquad m\sqrt{(x-c)^2+y^2} + m_1\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

En rendant cette équation rationnelle, on trouve une courbe du 4ème ordre, et au plus de 8ème classe, car les points circulaires à l'infini sont des points doubles.

659\. Nous verrons plus loin que, si

$$(1°)\qquad F(\rho,\ \rho_1) = 0\ ,$$

est l'équation d'une courbe en coordonnées bipolaires ; si V et V_1 sont les angles de la tangente, en un point M, avec les deux rayons vecteurs MF et MF_1, on a



$$(2°)\qquad \frac{\cos V}{\cos V_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_{\rho}}\ .$$

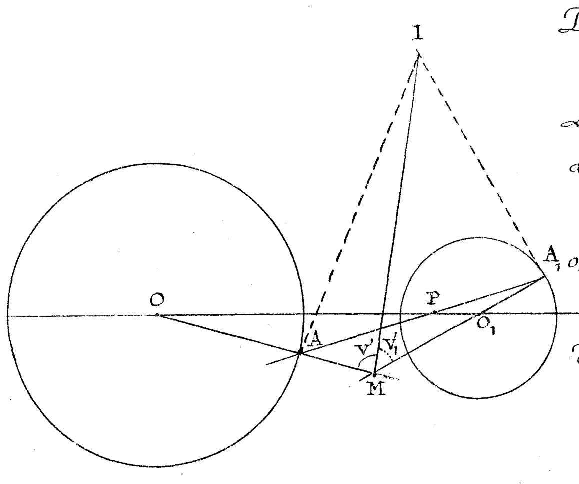
Appliquons cette formule aux ovales (1), on a

$$(3)\qquad \frac{\cos V}{\cos V_1} = -\frac{m_1}{m}\ ,$$

c. à. d. que la tangente en un point divise l'angle des deux rayons vecteurs en deux parties dont les cosinus sont dans le rapport $-\frac{m_1}{m}$.

660\. M. Chasles a donné la génération suivante des Ovales (Aperçu historique page 351).

Considérons deux cercles fixes O et O_1 et un point fixe P pris sur la ligne des centres ; si, par le point P, on mène une sécante quelconque rencontrant les cercles aux points A et A_1 par exemple ; si l'on joint les centres O et O_1 aux points respectivement situés sur ces cercles ; l'intersection des droites, telles que OA et O_1A_1, décrira un ovale de Descartes.



Désignons par R et R_1 les rayons des deux cercles, posons

$$(1)\qquad OP = c,\ O_1P = c_1\ ,\ c + c_1 = OO_1 = d\ ;\ OM = \rho,\ O_1M = \rho_1\ .$$

La droite AA_1 est une transversale par rapport au triangle OMO_1 ; appliquons à ce cas le théorème des transversales, on a

$$\overset{+}{OA}\,.\,\overset{+}{MA_1}\,.\,\overset{+}{O_1P} = \overset{-}{OP}\,.\,\overset{+}{O_1A_1}\,.\,\overset{-}{MA}\ ;$$

ou, en remplaçant ces lignes par leurs valeurs (1) :

$$R\,(\rho_1 + R_1)\,.\,c_1 = cR_1\,(\rho - R)\ ;$$

d'où l'on déduit, en divisant par RR_1 :

$$(2)\qquad \frac{c}{R}\,\rho - \frac{c_1}{R_1}\,\rho_1 = d\ ;$$

ce qui est la définition même de l'ovale.

M. Chasles a encore signalé la propriété suivante :

La tangente en M passe par le point de rencontre des tangentes aux cercles en A et A_1.

Soient, en effet, I le point de rencontre des tangentes en A et A_1 ; désignons par V' et V_1' les angles $\widehat{AMI}$ et $A_1\widehat{M}I$; les triangles rectangles MAI et MA_1I donnent

$$AM = MI\,.\,\cos V',\quad A_1M = MI\,.\,\cos V_1'\ ;$$

d'où l'on conclut, en remplaçant AM et A_1M par leurs valeurs

$$\frac{\rho - R}{\rho_1 + R_1} = \frac{\cos V'}{\cos V_1'}\ ;$$

l'équation (2) de la courbe nous donne aussi, en remplaçant d par $(c + c_1)$:

$$\frac{\rho - R}{\rho_1 + R_1} = \frac{c_1 R}{c\ R_1};$$

d'où l'on conclut

$$(3) \qquad \frac{\cos V'}{\cos V_1'} = \frac{c_1 R}{c\ R_1},\quad V' + V_1' = \widehat{OMO_1} = M.$$

Mais, si V et V_1 sont les angles de la tangente en M, avec les rayons MO et MO_1, et si l'on applique à l'équation (2) la formule (2°) du N° [659], on a

$$(4) \qquad \frac{\cos V}{\cos V_1} = \frac{c_1 R}{c\ R_1};\quad V + V_1 = \widehat{OMO_1} = M.$$

La comparaison des valeurs (3) et (4) conduit à l'égalité

$$(5) \qquad \frac{\cos V}{\cos V_1} = \frac{\cos V'}{\cos V_1'}.$$

Or cette égalité peut s'écrire

$$\cos V \cos(M - V') = \cos V' \cos(M - V);$$

d'où l'on déduit en développant:

$$\cos V \sin V' - \sin V \cos V' = 0, \text{ ou } \sin(V' - V) = 0;$$

c.à.d. $V' = V$, et par suite $V_1' = V_1$; car on peut toujours supposer les angles V inférieurs à π.

La proposition est donc démontrée.

VII° Podaire du Cercle.

661. On appelle Podaire d'un point fixe A, par rapport à une courbe, le lieu des projections de ce point sur les tangentes à la courbe.

La Podaire d'un point relative à un cercle est une conchoïde circulaire.

Soit, en effet, un cercle O et un point fixe A, et AM la perpendiculaire abaissée du point A sur une tangente IM. Sur OA décrivons un cercle qui coupe AM en H; OH sera perpendiculaire à AM; OI et HM sont également parallèles; par suite $HM = OI = R$; donc

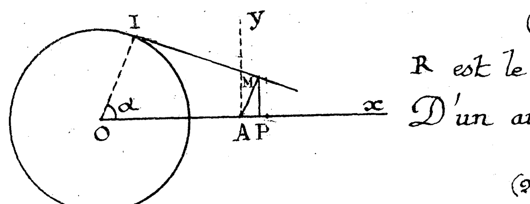
$$AM = AH + R;$$

c.à.d. que le lieu des points M est une Conchoïde.

Cherchons directement l'équation du lieu défini.

Nous prendrons la droite OA pour axe des x, et le point A pour origine; soit M un point quelconque du lieu, x et y ses coordonnées.

Projetons sur OI le contour OAMI; désignant par α l'angle IOx, remarquant que $AM = \sqrt{x^2+y^2}$ est parallèle à OI, et que MI est perpendiculaire à OI, on a



$$(1) \qquad R = a \cos\alpha + \sqrt{x^2+y^2};$$

R est le rayon du cercle, a désigne la distance OA.

D'un autre côté on a

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\widehat{MAx} = \frac{MP}{AP} = \frac{y}{x}.$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu en éliminant α entre les relations (1) et (2). On déduit d'abord de la dernière égalité

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

on aura, par suite, pour l'équation du lieu, en rendant rationnel :

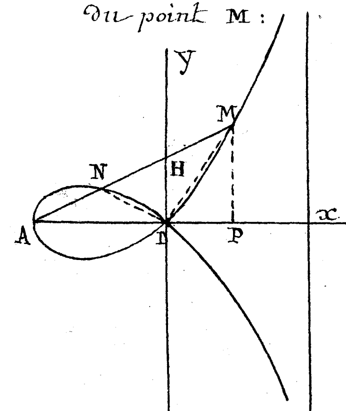
$$(3) \qquad (x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) + (a^2-R^2)x^2 - R^2y^2 = 0.$$

Le point A sera un point double isolé, lorsqu'il sera intérieur au cercle; ce sera un point double ordinaire, lorsqu'il sera extérieur; lorsqu'il sera sur le cercle, on aura un point de rebroussement, la courbe sera une Cardioïde.

VIII° Strophoïde ou Logocyclique.

662. Étant donnés une droite fixe Dy et un point fixe A, on mène une perpendiculaire AD à Dy; par le point A on mène une sécante quelconque AH, et, de chaque côté du point H, on prend HM = HN = HD; le lieu des points M et N est la logocyclique ou strophoïde.

Soient $AD = a$, $DH = \lambda$, a étant une constante, λ une indéterminée; on a, x et y étant les coordonnées du point M :



$$HM = HD = \lambda, \quad HM = \sqrt{x^2+(y-\lambda)^2} \; ;$$

il vient donc

$$x^2+y^2-2\lambda y = 0.$$

Les triangles semblables AHD et AMP donnent

$$\frac{HD}{AD} = \frac{MP}{AP}, \text{ ou } \frac{\lambda}{a} = \frac{y}{x+a}.$$

Remplaçons λ par cette valeur dans l'égalité précédente, on trouve pour l'équation de la strophoïde

$$(1) \qquad xy^2 + x^3 + a(x^2-y^2) = 0.$$

Cette courbe est du 3ème ordre; elle passe par les points circulaires à l'infini; l'origine est un point double dont les tangentes sont rectangulaires; cette courbe est de 4ème classe; elle a un point d'inflexion à l'infini.

Nous citerons les propriétés suivantes faciles à démontrer :

« Si par le sommet A on mène une sécante quelconque, rencontrant la courbe en M et N; l'angle MDN « est droit, et le produit AM.AN est constant et égal à a^2. Par suite, si l'on construit un cercle quel-« conque tangent en D à l'axe AD, les deux points d'intersection (distincts du point D et des points à l'infini) « de ce cercle avec la courbe, seront en ligne droite avec le point A. »

Remarque. On appelle Folium de Descartes la courbe représentée par l'équation

$$(2) \qquad x^3 + y^3 - 3bxy = 0.$$

Cette courbe a beaucoup d'analogie avec la précédente, cependant elle n'est pas identique avec la strophoïde. Pour faire la comparaison, rapportons cette dernière courbe aux deux bissectrices, c.à.d. posons

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}};$$

l'équation (2) devient, après la suppression des accents

$$(3) \qquad x^3 + 3xy^2 - \frac{3b}{2}(x^2-y^2) = 0.$$

Cette dernière courbe a également un point double à l'origine dont les tangentes sont rectangulaires; un point d'inflexion à l'infini; mais elle ne passe pas par les points circulaires à l'infini, ce qui constitue la différence caractéristique des courbes (1) et (2).

663. La strophoïde admet plusieurs modes de génération assez simples.

La Strophoïde est le lieu des projections du pied de la directrice d'une parabole sur les tangentes à la parabole; c'est la podaire du pied de la directrice.

Soit D le pied de la directrice, et M un des points du lieu; joignons MA; et, H étant l'intersection de AM avec la directrice, démontrons que

$$HM = DH.$$

Nous admettrons comme connue cette propriété de la parabole: « Si du foyer on abaisse une perpendiculaire FP sur une tangente, le « pied P de cette perpendiculaire se trouve sur la tangente au sommet A. »

D'après cela, si AI est une perpendiculaire sur la tangente, les deux triangles MAI et IAP sont égaux; car

DA = AF d'où MI = IP; de plus AI est commun.

Il résulte de là

$$\widehat{PAI} = \widehat{IAM}; \text{ or } \widehat{PAI} = \widehat{HDM} \text{ et } \widehat{IAM} = \widehat{HMD},$$

le triangle MHD est donc isocèle; par suite HM = HD.

La Strophoïde est aussi l'enveloppe des cercles passant par le pied de la directrice et ayant leurs centres sur la parabole.

Le point d'intersection de deux cercles infiniment voisins sera le symétrique du point D par rapport à la tangente au point où viennent se confondre les centres de ces deux cercles N° (657).

Soit F le foyer, TI une tangente, D le pied de la directrice, et L le symétrique du point F par rapport à la tangente TI; le point L se trouve sur la directrice, puisque le pied P de la perpendiculaire F se trouve sur la tangente au sommet, et que AD = AF.

Joignons LT, le triangle LTF est isocèle, puisque PF = PL; donc TF = TL, par conséquent, le symétrique M du point D, par rapport à la tangente TI, se trouvera sur LT.

Le trapèze MDFL est isocèle, et les diagonales MF et DL se coupent sur la droite TP qui joint les milieux des côtés parallèles, soit H le point de concours de ces trois droites. Le trapèze MDFL étant isocèle, il en résulte HM = HD; c. à d. que le lieu du point M est une Strophoïde. Le pied de la directrice en est le point double, et F le sommet.

IX°. Ovales de Cassini.

664. On appelle **Ovale de Cassini** la courbe lieu des points tels que le produit des distances de chacun d'eux à deux points fixes est constant.

Soient F et F_1 les deux points fixes, l'équation de la courbe en coordonnées bipolaires sera

$$(1) \qquad \rho\rho_1 = k^2.$$

Nous chercherons l'équation en coordonnées polaires, en prenant la droite FF_1 pour axe polaire, et le milieu O pour pôle.

Soient alors

$$FF_1 = 2c, \quad MO = \rho, \quad MOF = \omega,$$

on aura

$$\overline{FM}^2 = \rho^2 + c^2 - 2c\rho\cos\omega, \quad \overline{F_1M}^2 = \rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos\omega;$$

et, d'après la définition, l'équation de la courbe sera

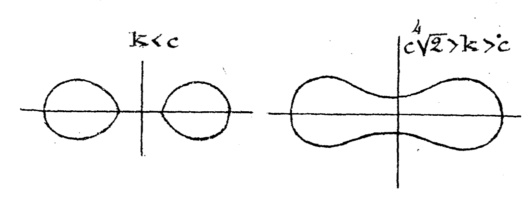
$$(\rho^2+c^2-2c\rho\cos\omega)(\rho^2+c^2+2c\rho\cos\omega)=k^4,$$

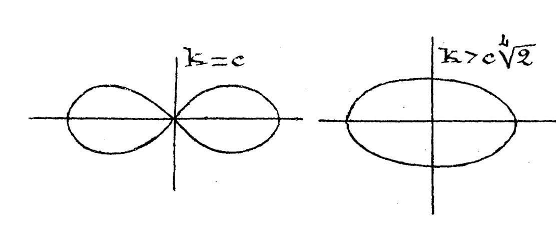
ou, en développant :

$$(2)\qquad \rho^4-2c^2\rho^2\cos 2\omega+c^4-k^4=0;$$

telle est l'équation de l'ovale de Cassini en coordonnées polaires.

Nous obtiendrons facilement l'équation en coordonnées rectilignes ; en prenant O comme origine, OF comme axe des x, on a





$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega;$$

on trouve alors, pour l'équation en coordonnées rectilignes

$$(3)\quad (x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)+c^4-k^4=0.$$

Cette courbe peut se construire soit à l'aide de l'équation (2), soit à l'aide de l'équation (3) résoluble par rapport à une des variables. Nous nous contenterons de résumer la discussion.

D'abord les points circulaires à l'infini sont des points doubles de la courbe, et les tangentes ont un contact du second ordre ; la courbe est au plus de 8ème classe.

Nous aurons à distinguer les cas suivants :

I°. $k<c$, la courbe se compose de 2 ovales séparés ;

II°. $k>c \begin{cases} k<c\sqrt[4]{2} \\ k=c\sqrt[4]{2} \\ k>c\sqrt[4]{2} \end{cases}$, la courbe présente un seul ovale dont la forme varie suivant l'une ou l'autre de ces trois hypothèses ;

III°. $k=c$ La courbe présente à l'origine un point double ordinaire.

Dans ce troisième cas, la courbe porte le nom de Lemniscate de Bernoulli.

La Lemniscate est une courbe de 6ème classe ; son équation est en coordonnées rectilignes :

$$(4)\qquad (x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=0;$$

en coordonnées polaires :

$$(5)\qquad \rho^2=2c^2\cos 2\omega.$$

X°. Généralisation des courbes précédentes.

665. Trouver le lieu des points dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est constant.

Soient $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ les m sommets d'un polygone régulier, prenons OA_0 comme axe polaire ; soit M un point du lieu : $OM=\rho$, $\widehat{MOA_0}=\omega$.

On a vu, en trigonométrie, que

$$\overline{MA}_0^2\cdot\overline{MA}_1^2\cdot\overline{MA}_2^2\cdots\cdots\overline{MA}_{m-1}^2=\rho^{2m}+R^{2m}-2R^m\rho^m\cos m\omega.$$

On arrive à cette relation en décomposant en facteurs du second degré l'équation que fournit le second membre égalé à zéro et en y regardant ρ comme inconnue ; on constate alors que ces facteurs du second degré sont précisément les carrés des distances $\overline{MA}_0$, MA_1, etc.....

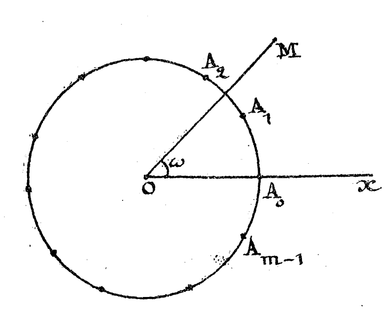
Si l'on exprime que le produit des distances est constant et égal à a^m, on aura immédiatement pour l'équation du lieu

$$(1)\qquad \rho^{2m}-2R^m\rho^m\cos m\omega+R^{2m}-a^{2m}=0.$$

Cherchons maintenant le lieu des points dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est proportionnel à la puissance $m$ème de la distance de ce point au centre du polygone.

L'équation du lieu sera

$$\rho^{2m}+R^{2m}-2R^m\rho^m \cos m\omega = k\rho^{2m}.$$



On peut poser $k=\frac{R^{2m}}{a^{2m}}$; cette relation détermine a lorsqu'on se donne k ; l'équation précédente devient alors

$$(2) \qquad \rho^{2m}+R^{2m}-2R^m\rho^m \cos m\omega = \frac{R^{2m}}{a^{2m}}\rho^{2m}.$$

Or cette équation (2) se déduit de l'équation (1) en y supposant m négatif ; en effet, en mettant en évidence cette hypothèse, l'équation (1) devient

$$\frac{1}{\rho^{2m}}-\frac{2}{R^m\rho^m}\cos m\omega+\frac{1}{R^{2m}}-\frac{1}{a^{2m}}=0;$$

on retrouve l'équation (2) en multipliant les deux membres par $R^{2m}\rho^{2m}$.

666. Nous citerons les cas particuliers suivants fournis par l'équation (1).

1° $m=2$, on a l'Ellipse ou Ovale de Cassini ;
2° $a=R$, $m=1$, on a une circonférence ;
3° $a=R$, $m=-1$, on a une droite ;
4° $a=R$, $m=2$, on a une Lemniscate de Bernoulli ;
5° $a=R$, $m=-2$, on a une hyperbole équilatère ;
6° $a=R$, $m=\frac{1}{2}$, on a une Cardioïde ;
7° $a=R$, $m=-\frac{1}{2}$, on a une Parabole.

XI° Scarabée.

667. Une droite AB de longueur constante $2l$ se meut sur deux droites rectangulaires OX et OY ; d'un point P pris sur la bissectrice de l'angle XOY on abaisse une perpendiculaire sur la droite AB ; le lieu du pied M de cette perpendiculaire est la Scarabée.

Soient α et β les coordonnées à l'origine de la droite AB, on a

$$(1°) \qquad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0$$

pour l'équation de cette droite ; de plus, on a la relation

$$(2°) \qquad \alpha^2+\beta^2=4l^2.$$

En désignant par a la distance PO, les coordonnées du point P seront toutes deux égales à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; l'équation de la perpendiculaire abaissée de P sur AB sera alors

$$(3°) \qquad y-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant α et β entre les trois équations (1°), (2°), (3°).

Nous transporterons de suite les axes au point P, c.à.d. que nous poserons

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}+x', \quad y=\frac{a}{\sqrt{2}}+y';$$

les trois équations deviennent, après la suppression des accents :

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=4l^2, \\ \dfrac{x+\frac{a}{\sqrt{2}}}{\alpha}+\dfrac{y+\frac{a}{\sqrt{2}}}{\beta}=1, \\ \alpha x=\beta y. \end{cases}$$

L'élimination de α et β s'effectue sans difficulté, on trouve pour l'équation de la courbe

$$(1)\qquad \left[x^2+y^2+\frac{a}{\sqrt{2}}(x+y)\right]^2(x^2+y^2)=4l^2x^2y^2.$$

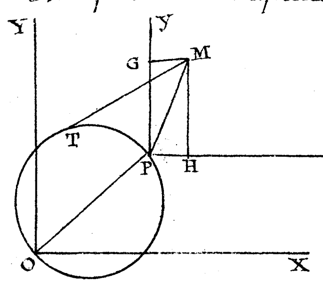
Il sera préférable, pour la construction, de rapporter la courbe aux deux bissectrices; les formules de transformation sont

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

L'équation de la courbe prend, après cette substitution, la forme suivante

$$(2)\qquad (x'^2+y'^2+ax')^2(x'^2+y'^2)=l^2(x'^2-y'^2)^2.$$

La forme de l'équation (1) permet une interprétation assez simple.



Si M est un point quelconque de la courbe; MP sa distance au point P; MT la longueur de la tangente menée au cercle décrit sur OP comme diamètre; MH et MG ses distances aux droites Px et Py respectivement parallèles à OX et OY; on a

$$\frac{\overline{MT}^2 . \overline{MP}}{\overline{MH}.\overline{MG}}=2l.$$

668. La courbe (2) possède un point quadruple à l'origine; la classe sera donc diminuée de 12 unités N.° [487]; la diminution équivaut à celle qui serait causée par 6 points doubles. La courbe passe par les points circulaires à l'infini, lesquels sont des points doubles; la classe est encore diminuée de 2 fois 2 unités; la courbe possède deux autres points doubles situés sur les droites Ox et Oy; ce qui donne une nouvelle diminution de 4 unités. Ces derniers points doubles ont pour coordonnées dans le système de l'équation (1)

$$\left(x=0,\ y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\ \left(x=-\frac{a}{\sqrt{2}},\ y=0\right).$$

La courbe étant de 6.ème ordre, la classe est, en général, 30; la diminution étant ici de 20 unités; la scarabée est une courbe de 6.ème ordre et de 10.ème classe.

La diminution causée par les points multiples est équivalente à celle qui résulterait de la présence de dix points doubles.

D'après cela, on constate à l'aide des formules du N.° [497], que la courbe a douze points d'inflexion, et qu'elle possède 24 tangentes doubles. La droite de l'infini est une tangente double.

La courbe présente la forme ci-jointe.

Pour construire cette courbe, on peut faire usage d'une variable auxiliaire, et poser, par exemple:

$$y'=tx';$$

et à l'aide de l'équation (2) on exprimera immédiatement x' et y' en fonction de t.

On peut encore se servir de l'équation en coordonnées polaires.

Si nous posons

$$x'=\rho\cos\omega,\ y'=\rho\sin\omega,$$

l'équation (2) donne

$$\rho=-a\cos\omega\pm l\cos 2\omega.$$

Nous pourrons choisir l'une ou l'autre de ces équations pour représenter la courbe. En effet, si ρ et ω sont les coordonnées d'un point M appartenant à la courbe

$$\rho = -a\cos\omega + l\cos 2\omega,$$

les coordonnées $(-\rho$ et $(\pi+\omega))$ détermineront le même point M ; or, en substituant ces valeurs dans la 1ère équation, nous retrouvons la seconde

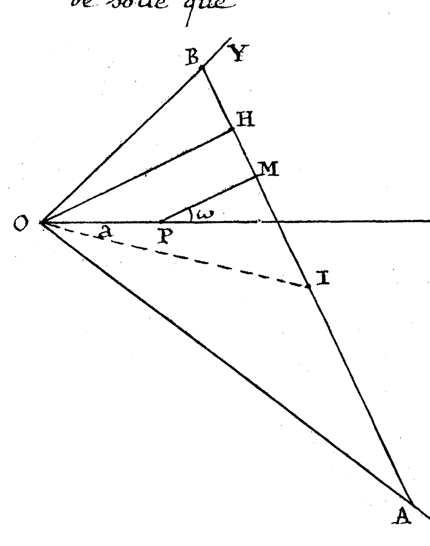
$$\rho = -a\cos\omega - l\cos 2\omega.$$

Ainsi l'équation, en coordonnées polaires, de la scarabée sera

$$(3) \qquad \rho = l\cos 2\omega - a\cos\omega;$$

la bissectrice est l'axe polaire ; le point P est le pôle.

On peut obtenir, directement comme il suit, cette équation. Soient OA et OB les deux droites rectangulaires ; OP la bissectrice, prise pour axe polaire ; P le point fixe, pris pour pôle ; AB une position quelconque de la droite mobile ; PM la perpendiculaire, abaissée du point P, et M un point du lieu, de sorte que



$$PM = \rho,\ \widehat{MPx} = \omega;\ OP = a,\ AB = 2l.$$

Si I est le milieu de AB, on a

$$OI = IA = IB = l. \quad (1°)$$

Soit OH perpendiculaire sur AB, on a

$$\widehat{HOx} = \omega;\ \widehat{IOA} = \widehat{IAO};\ \widehat{IAO} = \frac{\pi}{2} - B = BOH;$$

or la droite Ox est bissectrice de l'angle BOA ; donc

$$\widehat{HOx} = \widehat{IOx};\ \text{d'où}\ \widehat{HOI} = 2\omega.\ (2°)$$

Maintenant, on a visiblement

$$OH = a\cos\omega + \rho;\ OH = OI\cos 2\omega;$$

d'où résulte immédiatement l'équation en coordonnées polaires de la courbe

$$\rho = l\cos 2\omega - a\cos\omega.$$

XII. Conchoïdes en général.

669. Étant donnée une courbe fixe et un point fixe A ; si l'on joint le point A aux différents points de la courbe et qu'on prolonge les rayons vecteurs, à partir de la courbe, d'une longueur constante l ; le lieu des points ainsi obtenus est une conchoïde relative à la courbe proposée.

Prenons le point fixe pour origine ou pôle ; si l'équation de la courbe proposée, en coordonnées polaires, est

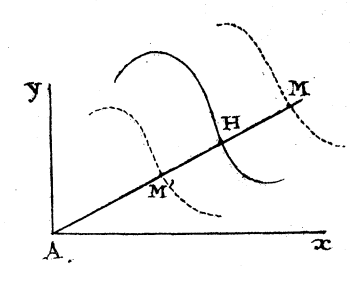
$$(1) \qquad \varphi(\rho, \omega) = 0,$$

l'équation de la conchoïde cherchée sera évidemment

$$(2) \qquad \varphi(\rho + l, \omega) = 0.$$

Donnons-nous l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes :

$$(3) \quad f(x, y) = 0.$$



Soit H un point quelconque de cette courbe, et x, y ses coordonnées ; prolongeons AH d'une quantité $HM = l$, et soient x', y', les coordonnées du point M.

On a visiblement

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x},\ \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + l;$$

d'où l'on déduit

$$(4)\quad \begin{cases} x = x' - \dfrac{lx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \\ y = y' - \dfrac{ly'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \end{cases}$$

L'équation de la conchoïde sera donc, après avoir supprimé les accents :

$$(5)\qquad f\left(x - \frac{lx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ y - \frac{ly}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$$

Remarquons que lorsqu'on rendra cette équation rationnelle, l'équation obtenue ne renfermera que le carré de l, puisque l n'y entre que par son rapport avec le radical $\sqrt{x^2+y^2}$; par suite, l'équation définira les points M et M' obtenus en portant à partir de H, dans l'un et l'autre sens, des longueurs HM et HM' égales à l.

L'équation (5) résout donc cette question :

Trouver l'équation d'une courbe telle, que toutes les cordes, passant par un point donné A, soient égales à une quantité donnée.

Toutes les cordes, comprises entre les branches de la courbe (5) et passant par le point A, seront, en effet, égales à 2l.

Si l'équation de la courbe (3) est

$$y - kx = 0,$$

l'équation de la conchoïde sera

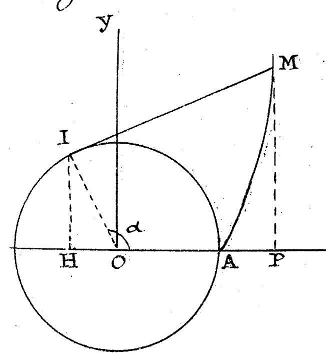
$$(y - kx)(\sqrt{x^2+y^2} - l) = 0 ;$$

c. à. d. la droite donnée est un cercle. Il est facile de se rendre raison, à priori, de ce double résultat.

XIII.e Développantes.

670. Si l'on suppose un fil enroulé autour d'une courbe, qu'on le coupe en un certain point, et qu'à partir de ce point on le déroule en ayant soin qu'il soit constamment dirigé suivant la tangente à la courbe ; l'extrémité libre du fil décrira une **développante** de la courbe proposée.

Cherchons la développante d'un cercle. Nous prendrons pour axe des x le diamètre passant par le point où l'on suppose le fil coupé ; soit IM une position de la tangente ; M sera un point de la développante, et on aura IM = arc. $\widehat{AI}$. Soient MP et OP les coordonnées x et y du point M, projetons le contour OPMI sur la résultante OI, on aura



$$(1)\qquad R = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

en désignant par α l'angle IOx, et par R le rayon du cercle.

Or

$$IA = R\alpha,\ \text{d'où}\ IM = R\alpha.$$

Les coordonnées du point I sont

$$R\cos\alpha,\ R\sin\alpha ;$$

on aura donc

$$(2)\qquad \overline{IM}^2\ \text{ou}\ R^2\alpha^2 = (R\cos\alpha - x)^2 + (R\sin\alpha - y)^2.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant α entre les deux équations (1) et (2). En tenant compte de la relation (1), l'équation (2) deviendra

$$R^2\alpha^2 = R^2 + y^2 + x^2 - 2R^2 = x^2 + y^2 - R^2.$$

Nous aurons donc pour l'équation du lieu, en tirant de là α et en substituant dans l'équation (1)

$$(3)\qquad R = x \cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{R} + y \sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{R};$$

c'est l'équation de la développante du Cercle.

Il sera plus simple d'introduire les coordonnées polaires; posons

$$x=\rho\cos\omega,\ y=\rho\sin\omega;$$

l'équation (3) devient

$$\frac{R}{\rho} = \cos\omega\cos\sqrt{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2-1} + \sin\omega\sin\sqrt{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2-1};$$

ou

$$\frac{R}{\rho} = \cos\left(\omega - \sqrt{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2-1}\right);$$

ou enfin

$$(4)\qquad \omega = \text{arc.}\cos.\frac{R}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2-1};$$

l'équation se trouve ainsi résolue par rapport à l'une des coordonnées.

XIV. Cycloïde.

670. On appelle **Cycloïde** la courbe engendrée par un point du plan d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite fixe.

Appelons **point décrivant** le point qui engendre la Cycloïde, et **rayon décrivant** le rayon du cercle qui passe par ce point.

Prenons pour origine le point O de la droite fixe où le rayon décrivant est perpendiculaire à cette droite, en même temps que le point décrivant se trouve avec la droite du même côté par rapport au centre.

Nous choisirons cette droite fixe pour axe des x; nous désignerons par R le rayon du cercle mobile, et par d la distance du point décrivant au centre. Considérons une position quelconque CI du cercle mobile; le rayon décrivant vient en CB, de sorte que

$$OI = \text{arc}\ \widehat{IGB};$$

le point A vient alors en M. Soient OP et MP les coordonnées x et y du point M; et désignons par α l'angle BCI du rayon décrivant avec le rayon qui passe par le point de contact du cercle avec la droite fixe, cet angle étant compté dans le sens de la flèche, c.à.d. de gauche à droite à partir de CI. On a

$$x = OI - CH,\ y = CI + HM;$$

or,

$$OI = \text{arc}\ \widehat{BI} = R\alpha;\ CI = R;\ \widehat{MCH} = \alpha - \frac{\pi}{2};$$
$$CH = CM.\cos\widehat{MCH} = d\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right);\ MH = CM\sin\widehat{MCH} = d\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$$

d'où l'on conclut

$$(1)\qquad \begin{cases} x = R\alpha - d\sin\alpha; \\ y = R - d\cos\alpha. \end{cases}$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant α entre les deux équations (1) mais il est préférable de définir la courbe à l'aide de ces deux équations; les équations (1) seront les équations de

la courbe cherchée.

Lorsque $d \gtrless R$, la courbe porte le nom de Trochoïde, ou Cycloïde allongée ou accourcie.

Lorsque $d = R$, on a la Cycloïde proprement dite; les équations de la Cycloïde sont donc

$$(2) \quad \begin{cases} x = R(\alpha - \sin\alpha) \\ y = R(1 - \cos\alpha). \end{cases}$$

On démontrera facilement, à l'aide de ces équations, les diverses propriétés de la Cycloïde.

1° La normale en un point passe par le point de contact du cercle générateur avec la droite fixe.

2° L'aire de la Cycloïde est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

3° Le rayon de courbure est double de la normale.

4° La développée de la Cycloïde est une Cycloïde égale.

XV. Epicycloïdes.

671. Lorsqu'une courbe mobile roule, sans glisser, sur une courbe fixe, un point du plan de la courbe mobile décrit une courbe qui porte le nom d'Epicycloïde.

La première découverte des Epicycloïdes remonte à Desargnes (v. 1600)

Cherchons l'équation des Epicycloïdes dans le cas où les courbes sont des cercles.

Nous prendrons pour axe des x la position de la ligne des centres des deux cercles, lorsque le point décrivant est sur la ligne des centres; nous choisirons pour origine le centre du cercle fixe ou cercle directeur. Soient R le rayon du cercle fixe; r le rayon du cercle mobile; d la distance du point décrivant au centre du cercle mobile. Il peut arriver que, sur l'axe des x, le point décrivant soit à gauche ou à droite du centre du cercle mobile; nous dirons que la position initiale du point décrivant est à gauche ou à droite du centre du cercle mobile. Nous chercherons, dans ces deux circonstances, les équations de l'Epicycloïde.

Supposons d'abord le cercle mobile tangent extérieurement au cercle directeur.

Considérons une position quelconque du cercle mobile; soit I le point de contact, C le centre, et M la position du point décrivant, en supposant la position initiale M_0 à gauche du centre du cercle mobile.

Comme le cercle C roule sans glisser, les longueurs d'arcs superposés doivent être égales; le point de contact initial A_0 vient en A, de manière que

$$\text{arc.}\,\widehat{IA} = \text{arc.}\,\widehat{IA_0}.$$

Nous désignerons par α l'angle de la ligne des centres avec l'axe positif des x; par β, l'angle du rayon décrivant avec la ligne des centres, cet angle étant compté dans le sens du mouvement du rayon décrivant.

Des points M et C abaissons les perpendiculaires MP et CH sur Ox; puis, par le point C, menons une parallèle à Ox, soit K le point où elle rencontre MP. On a

$$x = OP = OH + CK,$$
$$y = MP = CH - MK;$$

mais il est visible que

$$\widehat{KCM} = \pi - \alpha - \beta;$$

$$OH = (R + r)\cos\alpha, \quad CK = d\cos(\pi - \alpha - \beta),$$
$$CH = (R + r)\sin\alpha; \quad MK = d\sin(\pi - \alpha - \beta);$$

d'un autre côté l'égalité des arcs IA et IA_0 donne

$$R\alpha = r\beta.$$

Lorsque le point décrivant n'est pas sur le cercle mobile, et que le cercle mobile est tangent extérieurement,

on donne à la courbe le nom d'Epitrochoïde. D'après les calculs qui précèdent, on voit que :

Les équations de l'Epitrochoïde, lorsque la position initiale du point décrivant est à gauche du centre du cercle mobile, sont

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x=(R+r)\cos\alpha - d\cos(\alpha+\beta), \\ y=(R+r)\sin\alpha - d\sin(\alpha+\beta); \end{cases} \quad R\alpha = r\beta.$$

Les équations de l'Epitrochoïde, lorsque la position initiale du point décrivant est à droite du centre du cercle mobile, sont

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x=(R+r)\cos\alpha + d\cos(\alpha+\beta), \\ y=(R+r)\sin\alpha + d\sin(\alpha+\beta); \end{cases} \quad R\alpha = r\beta.$$

Car, dans ce second cas, le point décrivant se trouvera en M' (figure précédente); il est alors visible que

$$x = OH - CK, \quad y = CH + MK,$$

c.à.d. que les seconds termes changent de signe.

Supposons, en second lieu, le cercle mobile tangent intérieurement, et conservons les constructions et les notations précédentes. Le point décrivant viendra en M, si la position initiale M_0 est à gauche du centre du cercle mobile. On a :

$$\alpha = \widehat{IOA_0}, \quad \beta = \widehat{IA_1A}; \quad \text{arc } \widehat{IA_1A} = \text{arc } \widehat{IA_0};$$

$$x = OP = OH + CK;$$

$$y = MP = CH + MK;$$

$$\widehat{MCK} = \widehat{ICK} - \widehat{ICM} = \alpha - \beta + \pi.$$

$$OH = (R-r)\cos\alpha; \quad CK = d\cos(\pi+\alpha-\beta),$$

$$CH = (R-r)\sin\alpha; \quad MK = d\sin(\pi+\alpha-\beta).$$

Lorsque le point décrivant n'est pas sur le cercle mobile, et que le cercle mobile est tangent intérieurement, la courbe porte le nom d'hypotrochoïde.

Des calculs qui précèdent nous conclurons donc que

Les équations de l'hypotrochoïde, lorsque la position initiale du point décrivant est à gauche du centre du cercle mobile, sont

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x=(R-r)\cos\alpha - d\cos(\alpha-\beta), \\ y=(R-r)\sin\alpha - d\sin(\alpha-\beta); \end{cases} \quad R\alpha = r\beta.$$

Les équations de l'hypotrochoïde, lorsque la position initiale du point décrivant est à droite du centre du cercle mobile, sont

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x=(R-r)\cos\alpha + d\cos(\alpha-\beta), \\ y=(R-r)\sin\alpha + d\sin(\alpha-\beta); \end{cases} \quad R\alpha = r\beta.$$

Car, dans ce second cas le point décrivant se trouve en M'; les quantités CK et MK devront être retranchées, c.à.d. que les seconds termes changeront de signe.

Dans la recherche qui précède, on a supposé $r<R$; on se convaincra, sans difficulté, que les équations (III) & (IV) sont applicables au cas où $r>R$. La constante d est positive.

Remarque. Les équations de l'hypotrochoïde se déduisent de celles de l'Epitrochoïde par le changement de r en $-r$ et β en $-\beta$.

672. Lorsque le point décrivant est sur le cercle mobile, la courbe est appelée Epicycloïde ou hypocycloïde, suivant que le cercle mobile est tangent extérieurement ou intérieurement.

Les équations de ces dernières courbes se déduiront des précédentes en y faisant $d=r$; d'après cela nous aurons :

Epicycloïde, la position initiale du point décrivant est à gauche du centre du cercle directeur:

$$(\text{I bis})\quad \begin{cases} x=(R+r)\cos\alpha - r\cos(\alpha+\beta) \\ y=(R+r)\sin\alpha - r\sin(\alpha+\beta) \end{cases},\quad R\alpha=r\beta.$$

Epicycloïde, la position initiale du point décrivant est à droite du centre du cercle directeur:

$$(\text{II bis})\quad \begin{cases} x=(R+r)\cos\alpha + r\cos(\alpha+\beta) \\ y=(R+r)\sin\alpha + r\sin(\alpha+\beta) \end{cases},\quad R\alpha=r\beta.$$

Hypocycloïde, la position initiale du point décrivant est à gauche du centre du cercle directeur:

$$(\text{III bis})\quad \begin{cases} x=(R-r)\cos\alpha - r\cos(\alpha-\beta) \\ y=(R-r)\sin\alpha - r\sin(\alpha-\beta) \end{cases},\quad R\alpha=r\beta.$$

Hypocycloïde, la position initiale du point décrivant est à droite du centre du cercle directeur:

$$(\text{IV bis})\quad \begin{cases} x=(R-r)\cos\alpha + r\cos(\alpha-\beta) \\ y=(R-r)\sin\alpha + r\sin(\alpha-\beta) \end{cases},\quad R\alpha=r\beta.$$

Remarque. L'équation de l'hypocycloïde se déduit de celle de l'Epicycloïde en changeant r en $-r$ et β en $-\beta$; mais alors les positions initiales sont inverses.

673. Nous poserons

$$R+r=mr,\ \text{où}\ R=(m-1)r;\ \text{d'où}\ \beta=(m-1)\alpha;$$

les équations des Epitrochoïdes prendront alors la forme:

$$\text{Epitrochoïdes}\begin{cases} (\text{I}') \begin{cases} x=mr\cos\alpha - d\cos m\alpha, \\ y=mr\sin\alpha - d\sin m\alpha; \end{cases} \\ (\text{II}') \begin{cases} x=mr\cos\alpha + d\cos m\alpha, \\ y=mr\sin\alpha + d\sin m\alpha; \end{cases} \end{cases} R+r=mr.$$

$$\text{Hypotrochoïdes}\begin{cases} (\text{III}') \begin{cases} x=mr\cos\alpha - d\cos m\alpha, \\ y=mr\sin\alpha + d\sin m\alpha; \end{cases} \\ (\text{IV}') \begin{cases} x=mr\cos\alpha + d\cos m\alpha, \\ y=mr\sin\alpha - d\sin m\alpha; \end{cases} \end{cases} R-r=mr.$$

Pour les Epicycloïdes et hypocycloïdes nous aurons les équations:

Epicycloïdes $R+r=mr$.

$$(\text{I bis})'\quad \begin{cases} x=r[m\cos\alpha - \cos m\alpha], \\ y=r[m\sin\alpha - \sin m\alpha]. \end{cases}$$

$$(\text{II bis})'\quad \begin{cases} x=r[m\cos\alpha + \cos m\alpha] \\ y=r[m\sin\alpha + \sin m\alpha]. \end{cases}$$

Hypocycloïdes $R-r=mr$.

$$(\text{III bis})'\quad \begin{cases} x=r[m\cos\alpha - \cos m\alpha], \\ y=r[m\sin\alpha + \sin m\alpha]. \end{cases}$$

$$(\text{IV bis})'\quad \begin{cases} x=r[m\cos\alpha + \cos m\alpha], \\ y=r[m\sin\alpha - \sin m\alpha]. \end{cases}$$

674. Nous allons démontrer plusieurs propriétés relatives aux Epicycloïdes.

Nous commencerons par chercher les équations de la tangente et de la normale en un point quelconque (α sera le paramètre angulaire de ce point quelconque).

D'après la remarque faite au N.° [368], le coefficient angulaire de la tangente pour la courbe (I bis)', par exemple, sera

$$c=\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}=\frac{\cos\alpha-\cos m\alpha}{-\sin\alpha+\sin m\alpha}=+\frac{\sin\frac{m+1}{2}\alpha\sin\frac{m-1}{2}\alpha}{\sin\frac{m-1}{2}\alpha\cos\frac{m+1}{2}\alpha};$$

ainsi, on a pour le coefficient angulaire de la tangente

$$c = \tang \frac{m+1}{2}\alpha.$$

L'équation de la tangente, au point considéré, sera donc

$$y - r(m\sin\alpha - \sin m\alpha) = \frac{\sin\frac{m+1}{2}\alpha}{\cos\frac{m+1}{2}\alpha}\left[x - r(m\cos\alpha - \cos m\alpha)\right];$$

et, on aura pour l'équation de la normale

$$y - r(m\sin\alpha - \sin m\alpha) = -\frac{\cos\frac{m+1}{2}\alpha}{\sin\frac{m+1}{2}\alpha}\left[x - r(m\cos\alpha - \cos m\alpha)\right].$$

Chassant les dénominateurs et réduisant, on trouve pour:

La tangente et la normale en un point de la courbe (I bis)':

(1) tangente $\quad x\sin\frac{m+1}{2}\alpha - y\cos\frac{m+1}{2}\alpha = r(m+1)\sin\frac{m-1}{2}\alpha,$

(1 bis) normale $\quad x\cos\frac{m+1}{2}\alpha + y\sin\frac{m+1}{2}\alpha = r(m-1)\sin\frac{m-1}{2}\alpha.$

On trouvera, par un calcul semblable, pour:

La tangente et la normale en un point de la courbe (II bis)':

(2) tangente $\quad x\cos\frac{m+1}{2}\alpha + y\sin\frac{m+1}{2}\alpha = r(m+1)\cos\frac{m-1}{2}\alpha,$

(2 bis) normale $\quad x\sin\frac{m+1}{2}\alpha - y\cos\frac{m+1}{2}\alpha = r(m-1)\sin\frac{m-1}{2}\alpha.$

Nous n'indiquerons ces formules que pour les Epicycloïdes; les conséquences que nous en déduirons seront évidemment applicables aux Hypocycloïdes.

675. La normale en un point passe par le point de contact correspondant du cercle générateur.

En effet, pour le point correspondant au paramètre α, les coordonnées du point de contact du cercle générateur sont

$$x_0 = R\cos\alpha,\quad y_0 = R\sin\alpha,$$

ou, puisque $R + r = mr$, ou $R = (m-1)r$:

$$x_0 = (m-1)r\cos\alpha,\ y_0 = (m-1)r\sin\alpha$$

Or l'équation de la normale, (1 bis) par exemple, est vérifiée par les coordonnées de ce point, car il vient après la substitution

$$\cos\alpha\cos\frac{m+1}{2}\alpha + \sin\alpha\sin\frac{m+1}{2}\alpha = \cos\frac{m-1}{2}\alpha;$$

ce qui est une identité.

676. La développée d'une courbe est l'enveloppe des normales à cette courbe.

La développée d'une Epicycloïde est une Epicycloïde.

Considérons, par exemple, l'épicycloïde (I bis)', sa normale (1 bis) a pour équation

(1°) $\quad x\cos\frac{m+1}{2}\alpha + y\sin\frac{m+1}{2}\alpha = r(m-1)\cos\frac{m-1}{2}\alpha,$ où $R + r = mr.$

Or imaginons une épicycloïde dont r' est le rayon du cercle générateur, et R' le rayon du cercle fixe, et pour laquelle la position initiale du point décrivant est à droite du centre du cercle générateur, l'équation de la tangente à cette courbe sera, d'après la formule (2) N.º (674):

$$(2°)\qquad x\cos\frac{m'+1}{2}\alpha+y\sin\frac{m'+1}{2}\alpha=r'(m'+1)\cos\frac{m'-1}{2}\alpha,$$

où l'on a posé,

$$(3°)\qquad R'+r'=m'r'.$$

Or la normale (1°) coïncidera avec la tangente (2°), si l'on a à la fois

$$(4°)\qquad m'=m,\ r'(m+1)=r(m-1).$$

Les relations (3°) et (4°) déterminent R' et r', et l'on a

$$(3)\qquad R'=\frac{R^2}{R+2r},\ r'=\frac{Rr}{R+2r};\ \text{d'où}\ \frac{R'}{r'}=\frac{R}{r}.$$

« Ainsi, la développée d'une Epicycloïde, pour laquelle R et r sont les rayons du cercle fixe et du cercle « mobile, sera une autre Epicycloïde pour laquelle les rayons R' et r' du cercle fixe et du cercle mobile « auront les valeurs (3).

« La position initiale des points décrivants sera sur le même diamètre pour les deux courbes; mais, pour « l'une il se trouvera à gauche du centre du cercle mobile, pour l'autre il sera à droite.

677. Un diamètre du cercle mobile enveloppe une épicycloïde.

Un diamètre entraîné par le cercle sera déterminé par un point que nous pourrons regarder comme point décrivant; soit CM ce diamètre. L'équation du diamètre CM, passant par les deux points

$$C\begin{cases}x_1=(R+r)\cos\alpha=mr\cos\alpha,\\ y_1=(R+r)\sin\alpha=mr\sin\alpha,\end{cases}\quad \text{et}\ M\begin{cases}x_2=r(m\cos\alpha-\cos m\alpha)\\ y_2=r(m\sin\alpha-\sin m\alpha)\end{cases}\ \text{formules (1bis)};$$

sera

$$(4)\qquad x\sin m\alpha-y\cos m\alpha=mr\sin(m-1)\alpha.$$

Il faut trouver l'enveloppe de la droite (4). Désignons par R' et r' les rayons des cercles déterminant une certaine Epicycloïde; la tangente à cette courbe sera (équat. (1) N.º (674)).

$$(5)\qquad x\sin\frac{m'+1}{2}\alpha-y\cos\frac{m'+1}{2}\alpha=r'(m'+1)\sin\frac{m'-1}{2}\alpha,\ \text{où}\ R'+r'=m'r'.$$

Or la droite (4) coïncidera avec la droite (5), dans toutes ses positions, si l'on pose

$$(1°)\qquad \frac{m'+1}{2}=m,\ \text{d'où}\ \frac{m'-1}{2}=m-1;$$

$$(2°)\qquad r'(m'+1)=mr.$$

Des égalités (1°) et (2°) on tire, sachant que $m=\frac{R+r}{r}$

$$(7)\qquad r'=\frac{r}{2},\ R'=R.$$

« Le diamètre enveloppe donc une épicycloïde dont le cercle directeur a pour rayon R, et dont le cercle « mobile a pour rayon $\frac{r}{2}$.

678. Le lieu des sommets des angles de grandeur constante, circonscrits à une épicycloïde, est une épitrochoïde.

Soient deux tangentes à une épicycloïde (équat. (1) N.º (674))

$$(1)\qquad x\sin\frac{m+1}{2}\alpha-y\cos\frac{m+1}{2}\alpha=r(m+1)\sin\frac{m-1}{2}\alpha,$$

$$(2)\qquad x\sin\frac{m+1}{2}\alpha'-y\cos\frac{m+1}{2}\alpha'=r(m+1)\sin\frac{m-1}{2}\alpha'.$$

Les angles de ces tangentes avec l'axe Ox sont respectivement

$$\frac{m+1}{2}\alpha, \quad \frac{m+1}{2}\alpha';$$

de sorte que, si θ est l'angle fixe donné, on devra avoir

$$\theta = \frac{m+1}{2}\alpha' - \frac{m+1}{2}\alpha;$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha' = \alpha + \frac{2\theta}{m+1}.$$

Remplaçons α' par cette valeur dans l'équation (2), et posons

$$(4) \qquad \frac{m+1}{2}\alpha = \lambda, \quad \frac{m-1}{m+1} = n,$$

les équations des deux tangentes s'écrivent

$$(5) \quad \begin{cases} x \sin\lambda - y \cos\lambda = r(m+1)\sin n\lambda, \\ x \sin(\lambda+\theta) - y\cos(\lambda+\theta) = r(m+1)\sin(n\lambda+n\theta). \end{cases}$$

Les équations (5) résolues par rapport à x et y donnent

$$(6) \quad \begin{cases} x = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[\cos\lambda\sin(n\lambda+n\theta) - \cos(\lambda+\theta)\sin n\lambda\right], \\ y = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[\sin\lambda\sin(n\lambda+n\theta) - \sin(\lambda+\theta)\sin n\lambda\right]. \end{cases}$$

Les relations (6) déterminent les coordonnées x et y d'un point quelconque du lieu des sommets de l'angle fixe θ circonscrit à l'Épicycloïde; λ est une indéterminée.

Pour reconnaître dans ces équations celles d'une Épitrochoïde, nous allons transformer les quantités entre parenthèses.

Remplaçons d'abord les produits de lignes trigonométriques par des sommes; puis prenons les termes qui contiennent le même multiple de λ, et remplaçons les différences des lignes trigonométriques correspondantes par des produits; on trouve ainsi que les valeurs (6) peuvent s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} x = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cos\left((n-1)\lambda+\dfrac{n-1}{2}\theta\right) + \sin\dfrac{n-1}{2}\theta\cos\left((n+1)\lambda+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)\right], \\ y = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[-\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\sin\left((n-1)\lambda+\dfrac{n-1}{2}\theta\right) + \sin\dfrac{n-1}{2}\theta\sin\left((n+1)\lambda+\dfrac{n+1}{2}\theta\right)\right]. \end{cases}$$

Or posons

$$(1-n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right) = \varphi; \text{ d'où } (1+n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+n}{1-n}\varphi;$$

on aura, eu égard à la valeur (4) de n :

$$(1-n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right) = \varphi; \quad (1+n)\left(\lambda+\frac{\theta}{2}\right) = m\varphi;$$

$$\frac{n+1}{2}\theta = \frac{m}{m+1}\theta; \quad \frac{n-1}{2}\theta = -\frac{\theta}{m+1}.$$

Les coordonnées d'un point du lieu seront donc

$$(8) \quad \begin{cases} x = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[\sin\dfrac{m\theta}{m+1}\cdot\cos\varphi - \sin\dfrac{\theta}{m+1}\cdot\cos m\varphi\right], \\ y = \dfrac{r(m+1)}{\sin\theta}\left[\sin\dfrac{m\theta}{m+1}\cdot\sin\varphi - \sin\dfrac{\theta}{m+1}\cdot\sin m\varphi\right]. \end{cases}$$

Or ces équations représentent une Epitrochoïde; en effet, si R', r', d', sont les éléments d'une Epitrochoïde, ses équations seront (1)' N° [673]:

$$(9)\left\{\begin{array}{l} x = m'r'\cos\varphi - d'\cos m'\varphi. \\ y = m'r'\sin\varphi - d'\sin m'\varphi; \end{array}\right. \quad \text{où } R'+r'=m'r'$$

φ étant l'indéterminée. Les équations (8) et (9) représenteront la même courbe, si l'on a

$$m'=m\,,\quad m'r'=\frac{r(m+1)}{\sin\theta}\cdot\sin.\frac{m\theta}{m+1};\ d'=\frac{r(m+1)}{\sin\theta}\cdot\sin\frac{\theta}{m+1}.$$

Ces dernières relations peuvent être vérifiées, et on en déduit

$$(10)\left\{\begin{array}{l} r'=\dfrac{r(R+2r)}{(R+r)\sin\theta}\cdot\sin\dfrac{(R+r)\theta}{R+2r}; \\ R'=\dfrac{R(R+2r)}{(R+r)\sin\theta}\cdot\sin\dfrac{(R+r)\theta}{R+2r}; \\ d'=\dfrac{R+2r}{\sin\theta}\cdot\sin\dfrac{r\theta}{R+2r}. \end{array}\right.$$

« Ainsi le lieu des sommets des angles circonscrits est une Epitrochoïde, dont les éléments R', r', d', sont « déterminés par les égalités (10).

N. B. Cette proposition a été énoncée par M. Chasles (aperçu historique); mais nous ne pensons pas qu'on l'ait déjà démontrée par un calcul direct.

679. Les Epicycloïdes circulaires sont des courbes algébriques lorsque le rapport $\frac{R}{r}$ est commensurable; ce sont des courbes transcendantes, si le rapport $\frac{R}{r}$ est incommensurable.

Parmi les courbes, en nombre infini, qui sont engendrées à l'aide des cercles par un mouvement Epicycloïdal, nous citerons les suivantes:

1° L'Epicycloïde à trois rebroussements; elle est engendrée par un point d'un cercle mobile roulant intérieurement sur un cercle fixe dont le rayon est triple de celui du cercle mobile. C'est une courbe du 4ème ordre et de 3ème classe; elle possède un grand nombre de propriétés importantes. (Voir une étude remarquable sur cette courbe par M. Cremona, Journal de Crelle. Tome 64.)

2° Lorsque les deux cercles sont égaux, la courbe engendrée est une conchoïde circulaire ou une cardioïde, suivant que le point décrivant n'est pas ou est sur la circonférence du cercle mobile.

Soit, en effet, CI la position du cercle mobile, et CA le diamètre passant par le point décrivant; on a d'abord

$$\text{arc. } IA_0 = \text{arc } IA;$$

la droite A_0A sera parallèle à la ligne des centres OC. Menons, par le point décrivant M, une parallèle à CO; cette parallèle rencontrera le diamètre fixe OA_0 en un point D qui restera fixe pendant le mouvement, puisque $OD = CM = d$. Si l'on trace OH parallèle à CM jusqu'à sa rencontre avec MD, on aura $OH = CM = OD$. Donc la droite MD rencontre le cercle fixe de rayon OD en un deuxième point H; et l'on a

$$DH + DM = 2R;$$

ou

$$DM = DH - 2R;$$

c. à. d. que le lieu du point M est une conchoïde dont le cercle directeur est le cercle OD de rayon d. N° [655].

On aura évidemment une cardioïde lorsque le point décrivant sera sur la circonférence du cercle mobile.

3° Lorsque la circonférence mobile, intérieure au cercle fixe, a un rayon moitié de celui du cercle fixe; un point de la circonférence du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe.

Supposons que le point A soit le point de contact des deux cercles, lorsque le point décrivant coïncide avec le point de contact.

Soit CI une position du cercle mobile, et M l'intersection de sa circonférence avec le diamètre OA ; le point M sera la position du point décrivant, c. à d. qu'on a

$$\text{arc. } \widehat{IM} = \text{arc } \widehat{IA}.$$

En effet, C étant le centre du cercle mobile, joignons CM et considérons les deux angles

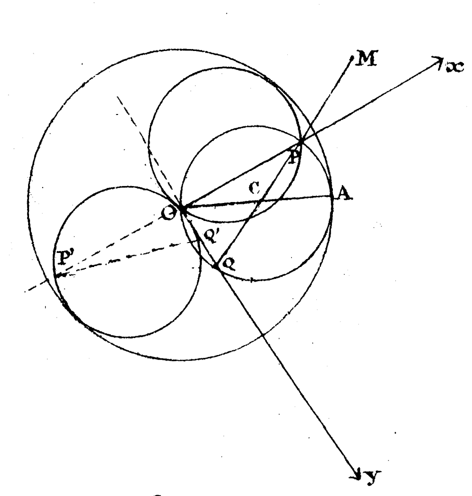
$$COM = \alpha, \quad ICM = \beta ;$$

on a $\beta = 2\alpha$, puisque β est l'angle extérieur du triangle isocèle COM. Or,

$$\text{arc. } \widehat{IA} = R\alpha, \quad \text{arc. } IM = r\beta = \frac{R}{2}\beta = R\alpha ;$$

donc etc.....

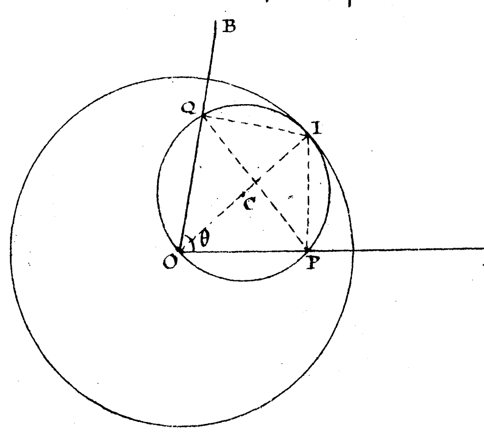
4° Lorsque la circonférence mobile, intérieure au cercle fixe, a un rayon moitié de celui du cercle fixe ; un point du plan du cercle mobile décrit une ellipse.



Soit OA la position initiale du cercle mobile C et M un point du plan de cercle ; joignons MC, et soient P et Q les points où la droite MC rencontre le cercle mobile dans sa position initiale. Lorsque le cercle mobile se mettra en mouvement, les points P et Q resteront respectivement (3°) sur les droites fixes Ox et Oy, et la distance PQ sera constante, car le cercle mobile interceptera toujours le même angle sur les droites Ox et Oy ; la corde P'Q' sous-tendant l'arc qui mesure cet angle conservera une longueur invariable. Ainsi, si l'on suppose la droite PQ invariablement lié au cercle mobile et entraîné dans son mouvement, les points P et Q, fixes sur cette droite, décriront respectivement les droites Ox et Oy ; donc le point M décrira une ellipse N° (337).

680. Les propositions qui précèdent permettent de résoudre la question suivante.

Quand deux points P et Q d'un plan mobile glissent sur deux droites OA et OB situées dans un plan fixe, un point quelconque du plan mobile décrit une ellipse.



Aux points P et Q élevons des perpendiculaires aux droites OA et OB, soit I le point de rencontre de ces perpendiculaires, et θ l'angle des deux droites fixes OA et OB. Le quadrilatère OPIQ est inscriptible. Or le cercle circonscrit à ce quadrilatère aura toujours le même rayon, quelle que soit la position des points P et Q. En effet, les points P et Q étant fixes dans le plan mobile, la distance PQ est invariable ; mais, si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle OPQ et, par suite, au quadrilatère OPIQ, on a

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta} = 2R, \text{ d'où } 2R = \text{constante}.$$

Ainsi, lorsqu'on fait passer un cercle par le point O et par les deux points mobiles P et Q, le rayon de ce cercle, également mobile, conservera la même grandeur. Maintenant, OI est le diamètre de ce cercle, puisque les angles P et Q sont droits ; donc si du point O, comme centre, avec 2R pour rayon on décrit un cercle, ce dernier cercle sera fixe ; le cercle mobile, entraîné par le mouvement du plan, sera constamment tangent et intérieur au cercle mobile ; d'ailleurs le rayon du cercle mobile est moitié de celui du cercle fixe ; donc (4° N° (679)), un point quelconque du plan mobile décrira une ellipse.

Remarque. Cette dernière question peut encore être résolue comme il suit, indépendamment de la

théorie des Épicycloïdes. Le problème revient à ceci :

Trouver le lieu décrit par un point M invariablement lié à une droite PQ qui glisse sur deux droites fixes Ox et Oy.

Joignons PM et menons par le point Q une droite QI faisant avec PM un angle $\widehat{QIP}$ supplémentaire de l'angle xOy, puis traçons la ligne OI. Le quadrilatère OPIQ étant inscriptible, l'angle $\widehat{QOI} = \widehat{QPI}$; donc l'angle $\widehat{QOI}$ est invariable, puisque la droite MP est invariablement liée à la ligne mobile PQ. Mais le triangle PQI est alors de forme invariable ; par conséquent la ligne IP a une longueur constante ; et, comme ses extrémités décrivent les deux droites fixes Ox et OI, il en résulte (N.° [337]) que le point M décrit une ellipse.

Exercices.

I.° Courbes à construire.

681. En général, il est bon de commencer par l'étude des directions asymptotiques ; on déterminera alors les asymptotes et la position des branches paraboliques, lesquelles ont leurs asymptotes à l'infini. On s'occupera ensuite du tracé de la courbe ; dans ce but, il faudra ou résoudre son équation par rapport à l'une des variables, ou introduire une variable auxiliaire ; dans la plupart des exemples indiqués, il suffira d'introduire une variable définie par la relation $y = tx$; mais ce sont des cas très-particuliers.
Lorsque le tracé de la courbe sera effectué, on s'occupera de la recherche plus complète des particularités de la courbe : points multiples, points d'inflexion, classe, tangentes doubles, etc. . . . .

Courbes algébriques.

$$x^3 - xy + y + 1 = 0;$$
$$x^2y - x^3 + y - 1 = 0;$$
$$(y-x)^2 + (x-a)^3 = 0;$$
$$xy^2 - x^2 - 1 = 0;$$
$$x^3 + y^3 - 6xy + 1 = 0;$$
$$y^2(x+2) - (x-1)(x^2+1) = 0;$$
$$x^2y + y^3 - 2xy + 1 = 0;$$
$$(3x^2 - 2x + 3)y - x^2 + 1 = 0;$$
$$2x^2y - x^3 + y = 0;$$
$$xy^2 - x - y = 0;$$
$$y(a-x) - x^2(a+x) = 0;$$
$$y^2x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0.$$

$$(y - 2x - 1)^2(x-1) - x^3 = 0;$$
$$y(x-1)(x-2) - x^2 = 0;$$
$$y(x-1)^2 - x^3 = 0;$$
$$yx^2 - x^3 - 2 = 0;$$
$$(x+1)(y-2x+1)^2 - x + 1 = 0;$$
$$3x^2y - x^3 + y + x = 0;$$
$$(x+y)(x^2+y^2+ax+ay) - axy = 0;$$
$$y^2x - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0;$$
$$3x^2y - x^3 + 3x - y = 0;$$
$$y(x^2-2x) - x^2 - 1 = 0;$$
$$y(x^2-2x) - x^3 - 1 = 0;$$
$$y^2 - x^3 + 3x - 2 = 0.$$

$$(y-x-1)^2(x-1)(x-2) - x^4 = 0;$$
$$y^2 - x^4 + 4x^2 - 5 = 0;$$
$$(ay - x^2)^2 - c(x-b)^3 = 0;$$
$$900y^2 - 30x^3 + x^4 = 0;$$
$$y^2 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0;$$
$$(y^2-1)^2 - x^4 + 2ax^2 - a = 0;$$

$$(y^2 - x)^2 - x^4 - 1 = 0;$$
$$x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0;$$
$$x^4 + y^4 - 4axy = 0;$$
$$y^3 + x^4 - ayx^3 = 0;$$
$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0;$$
$$(y^2+x^2)^2 + 2c^2(y^2-x^2) = 0;$$

$$y^4+x^4-2ay^3-2bx^2y=0;$$
$$(y^2-x^2)(x-1)(x-\tfrac{3}{2})-2[y^2+x(x-2)]^2\pm a=0;$$
$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0;$$
$$8x^2y^2-(x+y)^3=0;$$
$$(x^2+y^2)x^2-4x^2+1=0;$$
$$x^2y^4-2xy^2-x^2+2=0;$$
$$y^4+6x^2y^2-2y^2+x^4+2x^2=0;$$
$$2xy^3-y^2-x=0;$$
$$(x^2-y^2)^2+2xy-1=0;$$
$$xy^3-y^4-x^2-y^2-1=0;$$
$$x^4+y^4-2ay^3-2bx^2y=0.$$

$$(y^2+x^2)^2-6axy^2-2ax^3+2a^2=0;$$
$$y^4-16x^4+x^2y=0;$$
$$y^4-x^4+(y-2x)xy=0;$$
$$y^4=4p^2x^2+h^4;$$
$$(x^2-y^2)^2-x^2-y^2=0;$$
$$x^2y^3+x^3-y^2=0;$$
$$x^2y^2-x^2+xy-y^2=0;$$
$$(x^2-y^2)^2-x=0;$$
$$x^4-y^2+x=0;$$
$$4x^2y^2-4x^2+1=0;$$
$$y^2(x^2-1)-x=0.$$

$$y^5+4x^5+3x^4y-3a^2x^2y=0;$$
$$x^5+y^5-x^2-y^2=0;$$
$$y=x^5-20x^3+96x;$$
$$x^3(y-x)^2=x^2-2x+2;$$
$$x^3y^2+x^4-y^4=0;$$
$$y^5+4x^5+3x^4y-3a^2x^2y=0.$$

$$(y^2-x)^2(x-1)-x^5=0;$$
$$a^2y^2-2x^2y+x^5=0;$$
$$x^4(x+b)=a^3y^2;$$
$$x^5-ax^2y+y^3=0;$$
$$y^5-x^5+x^2y^2=0;$$
$$x^5+y^4+x^3+y^2+x=0.$$

$$y^3-x^7=0;$$
$$x^4y^4+(x^2-4)(y-x)^4=0;$$
$$y^2(1+x^4)=x;$$
$$y^6-x^6+(y-ax)^2(y-bx)^2=0;$$
$$y^7-x^7+(y-ax)^2(y-bx)^2=0;$$
$$x^2-\frac{1}{x^2}+y^2-\frac{1}{y^2}+2\left(xy-\frac{1}{xy}\right)=0.$$

$$y^{2p+1}\,x^{2q+1}=1;$$
$$(y^2-x^3)^2-x^4=0;$$
$$y^2(1+x^2)^3=1;$$
$$y^6-x^6+(y-ax)^3(y-bx)=0;$$
$$[y^2(x-2)-x]^2=x^2-2;$$
$$y^8+x^7+y^6=0.$$

$$y=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1\pm\sqrt{x}};$$
$$y=\pm\sqrt{x\pm\sqrt{x^4+1}};$$
$$y=\sqrt{x\pm\sqrt{\frac{x^5}{x-1}}};$$
$$y=x^3\pm(x-1)^{\frac{7}{2}}$$

$$y=x+1\pm\sqrt{\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}};$$
$$y^2=x^2\pm\sqrt{\frac{x^3}{x+1}};$$
$$y=\sqrt{x\pm\sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}};$$
$$y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Construire & comparer :

$$y^2-x^3=0;$$
$$x^3+y^3+1=0;$$
$$x^3+y^3+3xy=0;$$
$$xy^2+x^2+y=0;$$

$$Y^2Z-X^3=0;$$
$$X^3+Y^3+Z^3=0.$$
$$X^3+Y^3+3XYZ=0.$$
$$X^2Z+Y^2X+Z^2Y=0.$$

Construire les courbes données par leur équation tangentielle :

$$v^2-u^3=0;$$
$$v^3+u^3+1=0;$$
$$v^3+u^3+3uv=0.$$

$$uv^2-u-v=0;$$
$$u^5-v^5+u^2v^2=0;$$
$$(a-u)v^2-u^3=0.$$

Courbes transcendantes.

$y = e^{\frac{1}{x}}$; $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

$y = e^{x} - e^{-x}$; $y = x^{x}$;

$y = \dfrac{1}{\log x} + \dfrac{1}{\log (a-x)}$; $y = x^{\frac{1}{x}}$;

$y = x - a^{x}$; $y = \log \frac{1}{x}$;

$y = a^{x} - b^{x}$. $x^2 + y^2 = a^2 e^{2\,\text{arc.tang} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

$y = \sin \frac{1}{x}$; $y = x \sin x$;

$y = \dfrac{x}{\sin x}$; $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

$y = \dfrac{x}{\text{tang}\, x}$; $y = \dfrac{\text{tang}\, x}{x}$;

$y = x \sin \dfrac{1}{x}$; $y = x\, \text{arc.tang} \frac{1}{x}$;

$y = \dfrac{l x}{1 + l x}$; $y = \dfrac{1}{1 + e^{\text{tang}\, x}}$;

$y^{x} = x^{y}$; $y^2 = x \sin^2 x$;

$y = \frac{2}{x} + \frac{\sin x}{x}$; $y = x - \cos x$;

$y = x - \text{tang}\, x$; $\sin x + \sin y = m$;

$b = \text{arc.tang.} \dfrac{y}{x-c} - \text{arc.tang} \dfrac{y}{x+c}$; $a = \log \sqrt{\dfrac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}}$;

$y = l.x - \frac{1}{3} x + 1$; $y = x - \log x$;

$y = \dfrac{1}{a + e^{\text{tang}\, x}}$; $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$;

$\sin y = a \sin x$. $y = \sin x - a^2$.

N. B. La plupart des courbes, dont nous proposons la construction comme exercice, sont tirées des questions d'examen.

II°. Théorèmes.

682. 1° Si d'un point on mène les six tangentes à une courbe du 3ème ordre, les six points de contact sont sur une conique; et les six points restants où ces tangentes rencontrent la courbe sont sur une autre conique. Ces deux coniques sont doublement tangentes.

2° Toute courbe du 4ème ordre, ayant les deux points circulaires à l'infini pour points de rebroussement, est un Ovale de Descartes.

3° Si, par quatre points pris sur une courbe du 3ème ordre, on fait passer une conique; la droite, joignant les deux autres points où la conique coupe la courbe, passe par un point fixe situé sur la courbe du 3ème ordre.

4° Le produit des distances d'un point quelconque d'une courbe du 3ème ordre à ses trois asymptotes est dans un rapport constant avec sa distance à la droite qui passe par les trois points où les asymptotes rencontrent la courbe.

5° Par un point pris sur une courbe de 3ème ordre et de 3ème classe, on mène des sécantes; le lieu des

intersections des tangentes, aux points où ces sécantes rencontrent la courbe, est une conique.

6°. Soit une courbe de l'ordre m et un point fixe O; si une droite, passant par le point fixe O, coupe la courbe en $A_1, A_2, \dots A_m$, le lieu des points M tels que

$$\frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\overline{OA}_1^2} + \frac{1}{\overline{OA}_2^2} + \cdots + \frac{1}{\overline{OA}_m^2},$$

est une conique.

7°. La courbe telle, que la longueur d'une tangente quelconque comprise entre deux droites rectangulaires est constante, est une Epicycloïde dont le cercle mobile est intérieur au cercle fixe et dont le rayon est le quart de celui du cercle fixe; c'est aussi l'enveloppe des ellipses concentriques dont les axes ont la même direction et pour lesquelles la somme des longueurs des axes est constante.

8°. Si par un point M on mène trois droites, et si l'on prend deux points sur chaque droite, on pourra faire passer, par ces sept points, une infinité de courbes du 3ème ordre; si M est un point d'inflexion pour l'une d'elles, il le sera pour toutes.

9°. Si d'un point A, pris sur une courbe du 3ème ordre, on mène des tangentes à cette courbe; par les quatre points de contact a_1, a_2, a_3, a_4, passent trois couples de droites dont les centres c_1, c_2, c_3, sont sur la courbe, et les tangentes en ces trois points passent par le point C où la tangente en A rencontre la courbe.

10°. Si on projette un point fixe A sur les tangentes à une courbe donnée, si P est un de ces points et M le point de contact de la tangente à la courbe primitive, la tangente en P au lieu des points P sera également tangente à la circonférence décrite sur AM comme diamètre.

11°. Le lieu des points tels, que la somme des carrés des longueurs des normales menées à une courbe donnée soit constante, est une courbe ayant pour normale en chaque point une ligne dirigée vers le centre des moyennes distances des pieds des normales.

12°. Si, en un point donné et quelconque d'une courbe du troisième ordre, on mène la tangente relative à ce point, puis la tangente relative à la nouvelle intersection de la 1ère, puis enfin la transversale qui joint le point donné avec la nouvelle intersection de cette seconde tangente, elle ira à son tour rencontrer la courbe en un nouveau et dernier point qui appartiendra à la section conique osculatrice du quatrième ordre au point donné.

13°. Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe; d'un point $M(x_0, y_0)$, pris dans le plan de la courbe, on décrit un cercle quelconque; le produit des distances de ce point aux 2m points d'intersection du cercle et de la courbe est égal à $f(x_0, y_0) . R^m$, R étant le rayon du cercle.

14°. Si un cercle est tracé dans le plan d'une courbe plane, la demi-somme des angles que font, avec une direction fixe, les 2m rayons du cercle aboutissant aux points d'intersection, est égale, à un multiple près de π, à la somme des angles que font les m asymptotes avec cette même direction.

15°. L'enveloppe de la courbe $A \cos^m\theta + B \sin^m\theta = C$, où θ est un paramètre variable, et A, B, C des fonctions linéaires de x et y, est $A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}$.

16°. Si par quatre points fixes situés sur une courbe du 3ème ordre on fait passer une conique quelconque, la ligne, qui joint les deux autres points d'intersection de la conique avec la courbe, passe par un point fixe.

17°. L'enveloppe de tous les diamètres d'une courbe du 3ème ordre est aussi le lieu des centres des coniques diamétrales (c. à d. des premières polaires des points à l'infini).

18°. Lorsque plusieurs courbes de l'ordre m passent par les mêmes m^2 points, les polaires d'un point quelconque, par rapport à toutes les courbes du système, passent par un point fixe.

19°. Si une ligne quelconque rencontre un ovale Cartésien en quatre points, la somme de leurs distances à un foyer quelconque est constante.

20°. Un système de Cassinoïdes confocales est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères

concentriques passant par les foyers communs.

21° L'équation $l\rho_1 + m\rho_2 = c$, où l et m sont des constantes et c un paramètre arbitraire, représente une série d'ovales Cartésiens ayant mêmes foyers. Ces ovales sont coupés orthogonalement par les courbes $\left(\tang\frac{1}{2}\omega_1\right)^l = c'\left(\tang\frac{1}{2}\omega_2\right)^m$, c' étant une constante arbitraire; ω_1 et ω_2 désignent les angles à la base du triangle dont les côtés sont ρ_1 et ρ_2. (voir N° (731)).

22° Trouver la distance minimum d'un point donné à une courbe dont on connait l'équation.

23° Un quadrilatère complet étant inscrit à une ligne plane du troisième ordre, 1° les trois points de concours des couples de tangentes issues des sommets respectivement opposés de ce quadrilatère, sont situés en ligne droite et sur la courbe. 2° Chacun de ces couples de tangentes forme, par ses intersections avec l'un quelconque des deux autres couples, un nouveau quadrilatère circonscrit à la courbe proposée, et dont les trois diagonales contiennent respectivement, soit l'un des points de contact du dernier couple de tangentes, soit leur point de concours situé sur la courbe.

24° Tous les diamètres d'une courbe de l'ordre m, enveloppent une courbe de l'ordre $(m-1)(m-2)$ et de la classe $(m-1)$.

25° Toutes les coniques osculatrices du 3ème ordre en un point donné d'une courbe géométrique ont même diamètre conjugué de la tangente en ce point, et le paramètre relatif à ce diamètre est le même.

26° Dans une courbe du 3ème ordre, les trois sommets du triangle des asymptotes et les trois sommets du triangle des tangentes à trois points d'inflexion en ligne droite, sont sur une même conique.

27° Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de l'ordre $(n^2 - n)$, en général.

28° Soient F et F' les foyers d'une ellipse de Cassini, C son centre, et P un point quelconque de la courbe. La normale en P fait avec FP un angle égal à celui que fait la droite CP avec F'P.

29° Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle ABC; le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets A, B, C, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. (Mannheim).

30° Lorsqu'une courbe de troisième classe est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle, le produit des rayons de courbure, correspondant aux trois sommets, est égal à 64 fois le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle (Mannheim).

31° Le nombre maximum des points doubles d'une courbe d'ordre m est $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

32° Trouver l'équation générale des courbes telles, qu'en chaque point, la projection de l'ordonnée sur la normale en ce point soit une quantité constante. Construire la courbe.

33° Trouver l'équation générale des courbes telles, qu'en chaque point, la projection de l'ordonnée sur la tangente en ce point soit une quantité constante. Construire la courbe.

LIVRE CINQUIÈME

Étude particulière des Courbes du second ordre.

Formes réduites des équations du second degré.

683. Rappelons les formes réduites trouvées N° (333):

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

Parabole: $y^2-2px=0$.

Si les axes de coordonnées sont obliques, l'Ellipse et l'hyperbole se trouvent rapportées à deux diamètres conjugués; a et b sont les longueurs de ces deux diamètres. La parabole est rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre; 2p est le paramètre relatif à ce diamètre.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'Ellipse et l'hyperbole se trouvent rapportées à leurs axes; a et b sont les longueurs des axes. La parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet; 2p est le paramètre de la parabole.

Remarque: Si l'on rapporte l'Ellipse au sommet de gauche, et l'hyperbole au sommet de droite, les équations de ces courbes se présentent sous la forme

$$y^2=2px+qx^2;$$

où l'on a posé

$$p=\frac{b^2}{a^2}\quad\begin{cases} q=+\frac{b^2}{a^2}, \text{ Ellipse;}\\ q=-\frac{b^2}{a^2}, \text{ Hyperbole.}\end{cases}$$

La quantité p ou $\left(\frac{b^2}{a}\right)$ est appelée le **demi-paramètre** de la courbe; elle est égale à l'ordonnée du foyer, c.à.d. à l'ordonnée de la courbe dont le pied est au foyer. Nous verrons plus loin que, lorsqu'on suppose a et b infinis, la limite de $\left(\frac{b^2}{a}\right)$ est le demi-paramètre de la parabole.

684. D'après la méthode indiquée au N° (427), ou d'après les propriétés énoncées aux N^os (545) et (598), les équations tangentielles réduites (coordonnées bilatères) des courbes de 2ème classe, seront:

Ellipse: $a^2u^2+b^2v^2-1=0$;

Hyperbole: $a^2u^2-b^2v^2-1=0$;

Parabole: $pv^2+2u=0$.

Pour les deux premières courbes, les axes de coordonnées Ox et Oy sont deux diamètres conjugués ou les deux axes; a et b sont les longueurs de ces diamètres ou de ces axes. Pour la parabole, Ox est un diamètre; Oy est la tangente à l'extrémité de ce diamètre; 2p est le paramètre.

N. B. Les trois courbes du second ordre, Ellipse, hyperbole, Parabole, portent le nom de **Coniques**; nous en verrons plus loin la raison.

Chapitre I

Foyers.

§I. Définitions.

1°. Définition du Foyer dans les Coniques.

684. On appelle **Foyer** d'une courbe du second ordre un point F tel, que sa distance à un point quelconque M de la courbe est une fonction linéaire des coordonnées de ce point.

De sorte que, si α, β sont les coordonnées du point F, et si x, y, sont les coordonnées du point M, on devra avoir

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=(mx+ny+p)^2,$$

θ étant l'angle des axes de coordonnées. Lorsque, les axes de coordonnées sont rectangulaires, on a :

$$(1\text{bis}) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2.$$

L'équation (1) ou (1bis) représente la courbe elle-même, puisqu'elle est une relation entre les coordonnées x, y, d'un quelconque de ses points; d'ailleurs toute équation d'une courbe du second ordre peut se mettre sous la forme (1) ou (1bis), car cette dernière équation renferme cinq constantes arbitraires; et, de plus, il n'y a aucune relation entre les coefficients des différentes puissances des variables formés avec ces constantes. L'équation (1) ou (1bis) porte le nom d'équation aux foyers.

Les équations (1) et (1bis) peuvent s'écrire respectivement

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=\left(\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{(mx+ny+p)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}\right)^2,$$

et

$$(2\text{bis}) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(m^2+n^2)\left(\frac{mx+ny+p}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2.$$

Or, si DD' est la droite représentée par l'équation

$$(3) \qquad mx+ny+p=0,$$

et si MP est la distance du point M à cette droite, l'équation (2) ou (2bis) donnera lieu à la relation métrique

P M F

$$(4) \qquad \frac{MF}{MP}=\text{Constante}=\frac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}{\sin\theta};$$

ou

$$(4\text{bis}) \qquad \frac{MF}{MP}=\text{Constante}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

De là on conclut que :

Une conique est le lieu d'un point M tel que, le rapport de ses distances à un point fixe F et à une droite fixe D est constant; le point fixe F est un **foyer**; la droite fixe D est nommée **directrice** correspondant à ce foyer.

La proposition réciproque a été démontrée au N° [647].

685. Supposant les axes de coordonnées rectangulaires, l'équation aux foyers

$$(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=(mx+ny+p)^2,$$

pourra s'écrire

$$(5) \qquad (x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=\lambda^2\left[x\cos\omega+y\sin\omega-p\right]^2;$$

l'équation de la directrice correspondant au foyer (α,β) est

$$(6) \qquad x\cos\omega+y\sin\omega-p=0;$$

et le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice est

$$(7) \qquad \lambda=\frac{MF}{MP}.$$

Remarque I. Si l'on représente par X, Y, Z les fonctions linéaires

$$(x-\alpha),\ (y-\beta),\ (x\cos\omega+y\sin\omega-p),$$

l'équation aux foyers s'écrira

$$(8) \qquad X^2+Y^2-\lambda^2Z^2=0;$$

$X=0$, $Y=0$, sont deux droites rectangulaires passant par le foyer; Z est la directrice correspondant à ce foyer. Nous reviendrons avec plus de détails sur cette équation, au chapitre des coordonnées trilatères.

Remarque II. L'équation aux foyers représente une conique conjuguée par rapport au triangle formé par les trois droites

$$X=x-\alpha=0;\ Y=y-\beta=0;\ Z=x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

En effet, l'équation (5) ou (8) peut s'écrire:

$$X^2=(\lambda Z+Y)(\lambda Z-Y);$$

ou $$Y^2=(\lambda Z+X)(\lambda Z-X);$$

ou $$Z^2=(X+Y\sqrt{-1})(X-Y\sqrt{-1}).$$

La première forme nous montre que les deux droites $(\lambda Z+Y=0, \lambda Z-Y=0)$ sont tangentes aux points où la courbe est rencontrée par la droite $X=0$; la seconde, que les deux droites $(\lambda Z+X=0, \lambda Z-X=0)$ sont tangentes aux points où la courbe est rencontrée par la droite $Y=0$; la troisième, que les deux droites imaginaires $(X+Y\sqrt{-1}=0, X-Y\sqrt{-1}=0)$ sont tangentes aux points où la courbe est rencontrée par la droite $Z=0$; la conique est donc conjuguée par rapport au triangle formé par ces trois droites Nos [456], [441].

D'après cela $Z=0$ est la polaire du point d'intersection de $X=0, Y=0$, c.à.d. que

Le Foyer d'une conique est le pôle de la directrice correspondante.

L'intersection de $X=0$ avec $Z=0$ peut être regardée comme un point quelconque sur la directrice; la corde de contact est $Y=0$; donc

La polaire d'un point quelconque de la directrice passe par le foyer et est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au pôle.

II°. Transformation de la définition des Foyers.

686. L'équation aux foyers est

$$(1) \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2;$$

or, si l'on cherche les intersections de cette courbe avec le cercle de rayon nul

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0,$$

on trouve un carré parfait

$$(3) \qquad (mx+ny+p)^2=0;$$

c. à. d. que les quatre points d'intersection forment deux couples de points coïncidents, puisqu'on les obtiendra en cherchant les intersections de la courbe avec deux droites qui coïncident ; donc

On peut regarder le foyer (α, β) d'une conique comme le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la courbe ; la corde de contact est la directrice correspondant au foyer considéré.

687. L'équation aux foyers peut encore s'écrire, en prenant le foyer pour origine,

$$(4) \qquad x^2+y^2=(mx+ny+p)^2,$$

ou

$$(5) \qquad (y+x\sqrt{-1})(y-x\sqrt{-1})=(mx+ny+p)^2.$$

Sous cette forme, on voit que les deux droites imaginaires

$$(6) \qquad (y+x\sqrt{-1})(y-x\sqrt{-1})=0, \quad \text{ou } x^2+y^2=0,$$

ou les asymptotes du cercle, sont tangentes à la courbe ; mais ces tangentes, issues du foyer de la courbe, passent évidemment par les points circulaires à l'infini ; donc **On peut considérer les foyers d'une conique comme étant les intersections des tangentes menées à la courbe par les points circulaires à l'infini.**

Remarque. La corde de contact des asymptotes d'un cercle est la droite de l'infini, lorsque le rayon du cercle n'est pas nul ; mais, lorsque le rayon du cercle est nul, la corde de contact est indéterminée ; alors, la corde des contacts de ces droites avec la conique peut être regardée comme étant la corde des contacts des mêmes droites avec le cercle ; et, par suite, le cercle de rayon nul est doublement tangent à la conique.

688. Il y a deux points circulaires à l'infini ; de chacun de ces points, on peut mener deux tangentes à une conique, et ces tangentes se coupent en quatre points ; mais, comme les points circulaires à l'infini sont imaginaires conjugués, les tangentes imaginaires menées par l'un de ces points seront respectivement conjuguées imaginaires des tangentes menées par l'autre ; par suite, deux des points d'intersection seront réels, et les deux autres seront imaginaires. Donc

Une courbe du second ordre possède quatre foyers ; deux sont réels, et deux sont imaginaires.

La parabole touche la droite de l'infini sur laquelle sont situés les points circulaires à l'infini ; d'après cela :

Un foyer réel est à l'infini ; les deux foyers imaginaires sont les points circulaires à l'infini ; la parabole ne possède qu'un seul foyer à distance finie ; ce foyer est réel.

De ces considérations il résulte que :

1° **Deux coniques ayant un foyer commun ou coniques confocales** ont deux tangentes communes passant par ce foyer ; elles sont tangentes à deux droites fixes, qui sont les asymptotes d'un cercle de rayon nul dont le centre est le foyer commun ; les cordes de contact sont les directrices correspondant à ce foyer.

2° **Deux Coniques ayant deux foyers communs ou coniques homofocales** ont quatre tangentes communes ; elles sont inscrites dans un quadrilatère fixe.

Les côtés opposés de ce quadrilatère sont les tangentes (droites imaginaires) menées à la courbe de chacun des points circulaires à l'infini ; les sommets de ce quadrilatère sont les foyers de la conique ; deux de ces sommets sont réels, les deux autres sont imaginaires. Les diagonales du quadrilatère complet sont les axes de la conique et la droite de l'infini ; car nous verrons que les foyers d'une conique se trouvent sur les axes de la conique.

II. Définition générale des foyers.

689. La définition que nous venons de donner pour les foyers est très-importante au point de vue analytique; elle a, en outre, l'avantage de pouvoir se généraliser et s'étendre à une courbe d'ordre quelconque.

On appelle **Foyers** d'une courbe d'ordre quelconque les points d'intersection des tangentes menées à la courbe par les points circulaires à l'infini.

Cette conception des foyers est due à Plücker.

Si n est la classe de la courbe, on pourra mener n tangentes par chacun des points circulaires; ces deux faisceaux de n droites se couperont en n^2 points; donc une courbe de $n^{ème}$ classe a n^2 foyers. Toutefois, parmi ces n^2 foyers, n seulement sont réels; ce sont les points d'intersection des tangentes imaginaires conjuguées issues des points circulaires à l'infini.

Lorsque la droite de l'infini est tangente simple à la courbe, il y a deux tangentes issues de ce point de contact qui se confondent avec la droite de l'infini et passent, par conséquent, par les points circulaires à l'infini; ce point de contact à l'infini est un foyer réel, il n'y a donc plus que $(n-1)$ foyers réels à distance finie. Les points circulaires à l'infini sont eux mêmes des foyers imaginaires; de plus, on ne peut plus mener à la courbe, de chaque point circulaire, que $(n-1)$ tangentes non à l'infini; il y aura donc $(n-1)^2$ foyers à distance finie; et, par suite,

$$(n-1)^2-(n-1)=n(n-1)-2(n-1),$$

foyers imaginaires à distance finie; chaque point circulaire à l'infini compte pour $(n-1)$ foyers.

690. Pour déterminer les foyers, rappelons que les points circulaires à l'infini sont définis par les équations

$$x^2+y^2=0, \quad z=0;$$

les équations des tangentes, passant par l'un et l'autre point, seront de la forme

$$y=x\sqrt{-1}+hz, \quad y=-x\sqrt{-1}+kz;$$

h et k étant des quantités imaginaires. Si α et β sont les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, les équations pourront s'écrire:

$$(1) \qquad y-\beta=(x-\alpha)\sqrt{-1}, \quad y-\beta=-(x-\alpha)\sqrt{-1};$$

et α, β, seront les coordonnées d'un foyer de la courbe.

Mais les deux droites (1) sont les asymptotes du cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2;$$

la corde de contact est la droite de l'infini. Or, si l'on suppose le rayon nul, la corde de contact avec le cercle est indéterminée, et on peut la regarder comme coïncidant avec la corde des contacts des deux tangentes (1) avec la courbe proposée. Donc on peut dire encore:

Un foyer d'une courbe est le centre d'un cercle de rayon nul ayant un double contact avec cette courbe; la corde de contact avec la courbe serait la directrice correspondant à ce foyer.

---

§II. Détermination des foyers dans les coniques.

691. Rappelons-nous que, les axes étant rectangulaires, l'équation aux foyers est

$$(I) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2(x\cos\omega+y\sin\omega-r)^2;$$

ou, en développant

$$(II)\, x^2(1-\lambda^2\cos^2\omega)+y^2(1-\lambda^2\sin^2\omega)-2\lambda^2\sin\omega\cos\omega.\,xy-2x(\alpha-\lambda^2 r\cos\omega)-2y(\beta-\lambda^2 r\sin\omega)+\alpha^2+\beta^2-r^2\lambda^2=0;$$

α et β sont les coordonnées du foyer; l'équation de la directrice correspondant est

$$\text{(III)} \qquad x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0.$$

La distance d'un point de la courbe à la directrice est

$$\text{(IV)} \qquad \pm\lambda(x\cos\omega + y\sin\omega - r),$$

+ lorsque le foyer et l'origine des coordonnées sont de part et d'autre de la directrice; −, lorsque le foyer et l'origine sont du même côté de la directrice.

La constante λ est positive, du moins nous pouvons la regarder comme telle puisqu'elle n'entre qu'au carré dans l'équation (1); λ représente le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice, λ est l'excentricité

$$\text{(V)} \qquad \lambda = \frac{MF}{MP}.$$

1°. Ellipse.

692. L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

nous supposerons $a > b$. Pour déterminer les foyers, nous écrirons que l'équation (1) peut se mettre sous la forme (I); c. à. d. que nous exprimerons que les équations (I) et (II) représentent la même courbe. Identifiant ces deux équations, nous aurons:

1°. $\sin\omega . \cos\omega = 0;$

2°. $\alpha = \lambda^2 r\cos\omega;$

3°. $\beta = \lambda^2 r\sin\omega;$

4°. $a^2(1-\lambda^2\cos^2\omega) = b^2(1-\lambda^2\sin^2\omega) = \lambda^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2.$

Le produit $\sin\omega . \cos\omega$ étant nul, un des facteurs doit être nul.

Si l'on supposait $\cos\omega = 0$, la première des équations (4°) donnerait

$$a^2 - b^2 = -b^2\lambda^2\sin^2\omega;$$

égalité qui ne peut pas être vérifiée par des valeurs réelles de λ et ω; ainsi l'hypothèse $\cos\omega = 0$, c. à. d. $\omega = 90°$ ou $270°$, nous donne les foyers imaginaires; on voit qu'ils se trouvent sur le petit axe de l'ellipse.

Pour obtenir les foyers réels, il faut faire alors

$$\sin\omega = 0;$$

les relations précédentes deviennent:

$$\begin{cases} \text{(I°)} & \beta = 0, \ \cos\omega = \pm 1; \\ \text{(II°)} & \alpha = \lambda^2 r\cos\omega; \\ \text{(III°)} & a^2(1-\lambda^2) = b^2; \\ \text{(IV°)} & \lambda^2 r^2 - \alpha^2 = b^2. \end{cases}$$

La troisième de ces équations donne

$$(2) \qquad \lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \text{ ou } \lambda = +\frac{c}{a},$$

après avoir posé

$$(3) \qquad c^2 = a^2 - b^2; \quad \frac{c}{a} < 1;$$

nous avons dit No. [691] que λ est un nombre positif.

La seconde équation donne

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^2};$$

substituant cette valeur de r dans l'équation (IV°), il vient

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \alpha^2;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant λ par sa valeur (2)

$$(4) \qquad \alpha^2 = c^2;$$

puis

$$(5) \qquad r = + \frac{a^2}{c};$$

car r est une quantité essentiellement positive, d'après les conventions faites lorsqu'on met sous la forme $(x \cos\omega + y \sin\omega - p = 0)$ l'équation d'une ligne droite.

On voit, par l'équation (4), qu'il y a deux foyers réels :

$$(6) \quad \begin{cases} F & \alpha = +c, \ \beta = 0, \\ F' & \alpha = -c, \ \beta = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer la position de la directrice correspondant à ces foyers, et la distance d'un point de la courbe aux foyers, remarquons qu'on a (équation II°)

$$\alpha = \lambda^2 r \cos\omega;$$

par conséquent, puisque r est une quantité positive,

$$(7) \quad \begin{cases} \text{pour } \alpha = +c, \text{ on devra prendre } \cos\omega = +1, \text{ ou } \omega = 0; \\ \qquad \alpha = -c, \text{ on devra prendre } \cos\omega = -1, \text{ ou } \omega = 180°. \end{cases}$$

Nous avons ainsi deux foyers F et F' situés sur le grand axe à des distances $\pm c$ de l'origine; ces points, puisque $c < a$, sont dans l'intérieur de l'ellipse. Les directrices sont perpendiculaires à l'axe focal, car $\sin\omega = 0$; et d'après les valeurs trouvées (7) et (5) et l'équation (III) du N.° [691], les équations des directrices seront

$$(8) \quad \begin{cases} \text{pour le foyer F : } \beta = 0, \ \alpha = +c, \ \cos\omega = +1; \ r = +\frac{a^2}{c}; \text{ directrice } x - \frac{a^2}{c} = 0; \\ \text{pour le foyer F' : } \beta = 0, \ \alpha = -c, \ \cos\omega = -1; \ r = +\frac{a^2}{c}; \text{ directrice } x + \frac{a^2}{c} = 0. \end{cases}$$

La quantité $\frac{a^2}{c}$, ou $a.\frac{a}{c}$, est plus grande que a; les pieds D et D' des directrices sont donc en dehors de l'ellipse.

La formule (IV), N.° [691] nous donnera la distance d'un point de la courbe aux foyers. Pour le foyer F, un point quelconque M de l'ellipse et l'origine O sont du même côté par rapport à la directrice correspondante, donc

$$\text{MF ou } \delta = -\lambda(x \cos\omega + y \sin\omega - r);$$

ou, d'après les valeurs trouvées $\left(\lambda = +\frac{c}{a}, \ \cos\omega = +1, \ r = +\frac{a^2}{c}\right)$:

$$\text{MF ou } \delta = a - \frac{c}{a}x.$$

Pour le foyer F', un point quelconque M de l'ellipse et l'origine O sont du même côté par rapport à la directrice correspondante, donc

$$\text{MF' ou } \delta' = -\lambda(x \cos\omega + y \sin\omega - r);$$

ou, d'après les valeurs trouvées $\left(\lambda = +\frac{c}{a}, \ \cos\omega = -1, \ r = +\frac{a^2}{c}\right)$:

$$\text{MF' ou } \delta' = a + \frac{c}{a}x.$$

La constante λ ou $\frac{c}{a}$ est l'excentricité.

693. Résumons les résultats que nous venons d'obtenir :

Foyer de droite F : $\alpha = +c$; directrice corresp. $x - \frac{a^2}{c} = 0$; $\delta = MF = a - \frac{c}{a}x$;

Foyer de gauche F' : $\alpha = -c$; directrice corresp. $x + \frac{a^2}{c} = 0$; $\delta' = MF' = a + \frac{c}{a}x$;

$$c^2 = a^2 - b^2 \,;$$

$$\text{excentricité} = \frac{MF}{MP} = \frac{c}{a} < 1 \,;$$

δ et δ' sont les distances d'un point de la courbe aux foyers.

Remarque. On voit par là que la distance d'un point de la courbe à un foyer est une fonction linéaire de l'abscisse du point ; ceci tient à ce que l'axe des abscisses est le grand axe de la courbe.

En général, si les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de la courbe, la distance d'un point de la courbe aux foyers réels sera une fonction linéaire de l'abscisse ou de l'ordonnée du point, suivant que l'axe des x ou l'axe des y est parallèle au plus grand des axes de la courbe. En effet, les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de la courbe, l'équation ne renfermera pas le produit xy des variables ; par suite, lorsqu'on identifiera cette équation avec l'équation aux foyers (I) N.° (691), on devra avoir $\sin\omega . \cos\omega = 0$; alors $\sin\omega$ ou $\cos\omega$ sera nul ; et, dans l'expression

$$\lambda(x\cos\omega + y\sin\omega - r)$$

de la distance d'un point de la courbe au foyer, un des termes $x\cos\omega$ ou $y\sin\omega$ disparaîtra ; donc cette distance sera une fonction linéaire de l'abscisse ou de l'ordonnée du point ; de l'abscisse, quand l'axe des x sera parallèle au grand axe de la courbe ; de l'ordonnée, quand l'axe des y sera parallèle au grand axe de la courbe.

694. Nous avons trouvé pour :

la distance au foyer de droite, $\delta = a - \frac{c}{a}x$;

la distance au foyer de gauche, $\delta' = a + \frac{c}{a}x$.

On conclut de là

$$(9) \qquad \delta + \delta' = 2a \,;$$

c. à. d. que **dans l'ellipse la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers réels est constante et égale au grand axe.**

Réciproquement : **Le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points fixes est constante, est une Ellipse.** N.° (645).

Nous avons vu aussi que l'excentricité $\frac{c}{a}$ est plus petite que l'unité ; donc

Dans une Ellipse, le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe à un foyer et à la directrice correspondante est constant et plus petit que l'unité.

Réciproquement : **Le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe est constant et plus petit que un, est une ellipse.** N.° (647).

II.° Hyperbole.

695. Les résultats relatifs à l'hyperbole pourraient se déduire des calculs précédents, en changeant b^2 en $-b^2$. Nous effectuerons cependant la recherche directe des foyers. L'équation de l'hyperbole est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \,;$$

en identifiant cette équation avec l'équation aux foyers (II) N.° (691), on a

$$(1°)\quad \sin\omega.\cos\omega = 0\,;$$
$$(2°)\quad \alpha = \lambda^2 r \cos\omega\,;$$
$$(3°)\quad \beta = \lambda^2 r \sin\omega\,;$$
$$(4°)\quad a^2(1-\lambda^2\cos^2\omega) = -b^2(1-\lambda^2\sin^2\omega) = \lambda^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

L'hypothèse $\cos\omega = 0$ donnerait les foyers imaginaires ; on trouvera en effet, en poursuivant le calcul, des valeurs imaginaires pour β.

Supposons donc $\sin\omega = 0$, les relations précédentes deviennent

$$\begin{array}{l} (I°) \\ (II°) \\ (III°) \\ (IV°) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0, \quad \cos\omega = \pm 1\,; \\ \alpha = \lambda^2 r \cos\omega\,; \\ a^2(1-\lambda^2) = -b^2\,; \\ -b^2 = \lambda^2 r^2 - \alpha^2. \end{array} \right.$$

La troisième de ces équations donne

$$(2)\qquad \lambda^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}, \text{ ou } \lambda = +\frac{c}{a},$$

après avoir posé

$$(3)\qquad c^2 = a^2 + b^2\,;\ \frac{c}{a} > 1.$$

La seconde équation donne

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^4}\,;$$

substituant cette valeur dans l'équation (IV°), il vient

$$-b^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \alpha^2\,;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant λ par sa valeur (2) :

$$(4)\qquad \alpha^2 = c^2\,;$$

puis

$$(5)\qquad r = +\frac{a^2}{c},$$

car r est une quantité essentiellement positive.

On voit, par l'équation (4) qu'il y a deux foyers réels

$$(6)\qquad \left\{ \begin{array}{l} F\ :\quad \alpha = +c,\ \beta = 0\,; \\ F'\ :\quad \alpha = -c,\ \beta = 0. \end{array} \right.$$

Pour déterminer la position des directrices et les distances d'un point de la courbe aux foyers, remarquons qu'on a (équat. (IV°))

$$\alpha = \lambda^2 r \cos\omega\,;$$

par conséquent, puisque r est une quantité positive,

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \alpha = +c, \text{ on devra prendre } \cos\omega = +1, \text{ ou } \omega = 0, \\ \phantom{\text{pour }} \alpha = -c, \text{ on devra prendre } \cos\omega = -1, \text{ ou } \omega = 180°. \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi deux foyers F et F' situés sur le grand axe à des distances $\pm c$ de l'origine ; ces points, puisque $c > a$, sont dans l'intérieur de l'hyperbole. Les directrices sont perpendiculaires à l'axe focal, car $\sin\omega = 0$; et d'après les valeurs trouvées (7) et (5) et l'équation (III) du N.° (691), les équations des directrices seront

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour le foyer F} : \beta = 0,\ \alpha = +c\,;\ \cos\omega = +1,\ r = +\dfrac{a^2}{c}\,;\ \text{directrice } x - \dfrac{a^2}{c} = 0\,; \\ \text{pour le foyer F}' : \beta = 0,\ \alpha = -c\,;\ \cos\omega = -1,\ r = +\dfrac{a^2}{c}\,;\ \text{directrice } x + \dfrac{a^2}{c} = 0. \end{array} \right.$$

La quantité $\frac{a^2}{c}$, ou $a.\frac{a}{c}$, est moindre que a; les deux directrices ne rencontrent donc pas la courbe.

La formule (IV) Nº [691] nous donnera la distance d'un point de la courbe aux foyers. Nous aurons à considérer successivement la branche de droite et la branche de gauche.

Pour un point quelconque M situé sur la branche de droite, l'origine O et le point M seront de part et d'autre de la directrice, s'il s'agit du foyer F de droite; ils seront du même côté de la directrice s'il s'agit du foyer F' de gauche.

On aura donc

$$MF \text{ ou } \delta = +\lambda(x\cos\omega + y\sin\omega - r),$$

ou, d'après les valeurs trouvées ($\lambda = +\frac{c}{a}$, $\cos\omega = 1$, $r = +\frac{a^2}{c}$)

$$MF \text{ ou } \delta = \frac{c}{a}x - a.$$

Puis

$$MF' \text{ ou } \delta' = -\lambda(x\cos\omega + y\sin\omega - r),$$

ou d'après les valeurs trouvées ($\lambda = +\frac{c}{a}$, $\cos\omega = -1$, $r = +\frac{a^2}{c}$)

$$MF' \text{ ou } \delta' = \frac{c}{a}x + a.$$

Pour la branche de gauche, les conclusions sont inverses; si M_1 est un point situé sur cette branche, on aura

$$M_1F \text{ ou } \delta_1 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right);$$

$$M_1F' \text{ ou } \delta_1' = -\left(\frac{c}{a}x + a\right).$$

On voit que les valeurs absolues des distances d'un point de la branche de gauche aux foyers s'obtiennent en changeant le signe des expressions qui donnent les distances d'un point de la branche de droite à ces mêmes foyers.

La constante λ ou $\frac{c}{a}$ est l'excentricité.

696. Résumons les résultats que nous venons d'obtenir:

Foyer de droite: $\alpha = +c$; directrice corresp: $x - \frac{a^2}{c} = 0$;

Foyer de gauche: $\alpha = -c$; directrice corresp: $x + \frac{a^2}{c} = 0$;

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Distances d'un point de la branche de droite aux deux foyers: $\delta = \frac{c}{a}x - a$; $\delta' = \frac{c}{a}x + a$.

Distances d'un point de la branche de gauche aux deux foyers: $\delta_1 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right)$; $\delta_1' = -\left(\frac{c}{a}x + a\right)$.

697. Nous avons trouvé pour les distances d'un point de la courbe aux deux foyers

$$\delta' = \frac{c}{a}x + a, \quad \delta = \frac{c}{a}x - a;$$

on conclut de là en retranchant

$$\delta' - \delta = 2a;$$

c.à.d. **Dans l'hyperbole, la différence des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante et égale à l'axe réel.**

Réciproquement: **Le lieu des points tels, que la différence de leurs distances à deux points fixes est constante, est une hyperbole.** Nº [645].

Nous avons vu aussi que l'excentricité $\frac{c}{a}$ est plus grande que l'unité; donc

Dans une hyperbole, le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe à un foyer et à la directrice correspondante est constant et plus grand que l'unité.

Réciproquement: **Le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à un point fixe**

est constant et plus grand que un, est une hyperbole. N.° [647]

III: Parabole.

698. L'équation de la parabole est

$$(1)\qquad y^2-2px=0;$$

identifiant cette équation avec l'équation aux foyers (II) N.° [691], on a

$$(1°)\qquad \sin\omega.\cos\omega=0;$$
$$(2°)\qquad 1-\lambda^2\cos^2\omega=0;$$
$$(3°)\qquad \beta-\lambda^2 r\sin\omega=0;$$
$$(4°)\qquad \alpha+\beta^2-\lambda^2 r^2=0;$$
$$(5°)\qquad p=\frac{\alpha-\lambda^2 r\cos\omega}{1-\lambda^2\sin^2\omega}.$$

De la première relation, il résulte que l'une des lignes trigonométriques $\sin\omega$ ou $\cos\omega$ est nulle; la seconde relation montre que $\cos\omega$ ne peut être nul; nous aurons donc

$$(2)\qquad \sin\omega=0,\ \text{d'où}\ \cos\omega=\pm1;$$

et, par suite:

$$(3)\qquad \beta=0,\ \lambda=+1;$$

le foyer est sur l'axe de la parabole.

Les deux dernières relations deviennent

$$\lambda^2r^2=\alpha^2,\ \text{d'où}\ r=\alpha;\ \text{et}\ p=\alpha-r\cos\omega.$$

Eliminant la quantité r, il vient

$$\alpha=\frac{p}{1-\cos\omega};$$

équation qui donne, pour $\cos\omega=-1$;

$$(4)\qquad \alpha=\frac{p}{2};\ \text{où}\ r=+\frac{p}{2};$$

pour $\cos\omega=1$, on a $\alpha=\infty$.

Nous trouvons donc, dans la parabole, un seul foyer à distance finie; c'est un foyer réel; l'autre foyer réel et les deux foyers imaginaires sont à l'infini.

D'après l'équation (III) N.° [691], nous obtenons pour l'équation de la directrice

$$(5)\qquad x+\frac{p}{2}=0.$$

La distance d'un point de la courbe au foyer est

$$-\lambda(x\cos\omega+y\sin\omega-r);$$

d'où, eu égard aux valeurs trouvées:

$$(6)\qquad MF\ \text{ou}\ \delta=x+\frac{p}{2}.$$

699. En résumé; la parabole ne possède qu'un seul foyer à distance finie:

Foyer: F $\beta=0,\ \alpha=+\frac{p}{2}$;

Directrice: $x+\frac{p}{2}=0$;

distance d'un point de la courbe au foyer: $\delta=x+\frac{p}{2}$;

Excentricité: $\lambda=+1$.

L'excentricité étant égale à l'unité, on en conclut que:

Un point quelconque de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.

Réciproquement: Le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une droite fixe est une parabole. N.° [646].

IV°. Propriétés relatives aux rayons vecteurs des foyers.

700. ## Ellipse.

1° Point sur l'Ellipse.

Si M est un point quelconque de l'ellipse dont F et F' sont les foyers, on a

$$(1) \qquad FM + F'M = 2a.$$

Si l'on prolonge F'M d'une quantité $MH = MF$, on aura $F'H = 2a$; si, du point F' comme centre, avec un rayon égal à 2a, on décrit un cercle, MH est la plus courte distance du point M au cercle ; de là on conclut

L'ellipse est le lieu des points également distants d'un foyer F et du cercle décrit de l'autre foyer F' comme centre avec un rayon égal au grand axe. On a donné à ce cercle le nom de cercle directeur.

2° Point intérieur.

Soit N un point intérieur, c. à d. tel que le rayon vecteur F'N rencontre la courbe au delà du point N ; si M est ce point de rencontre, on a dans le triangle MNF :

$$FN < FM + MN ;$$

ajoutant F'N aux deux membres de l'inégalité :

$$FN + F'N < FM + F'N + NM,$$

ou

$$FN + F'N < FM + F'M ;$$

ou enfin

$$(2) \qquad FN + F'N < 2a ;$$

donc, lorsqu'un point est intérieur à une ellipse, la somme des rayons vecteurs est moindre que le grand axe.

3° Point extérieur.

Soit un point extérieur P, joignons-le au foyer F', ce rayon vecteur rencontrera la courbe en un point M situé entre F' et P. On a, dans le triangle FMP :

$$FM < FP + MP ;$$

ajoutons F'M aux deux membres de l'inégalité, on a successivement

$$FM + F'M < FP + F'M + MP ;$$

$$FP + F'P > FM + F'M ;$$

ou enfin

$$(3) \qquad FP + F'P > 2a ;$$

donc, lorsqu'un point est extérieur à une ellipse, la somme des rayons vecteurs est plus grande que le grand axe.

Les réciproques de ces propositions sont évidemment vraies.

701. ## Hyperbole.

1° Point sur l'hyperbole.

Si M est un point quelconque de l'hyperbole ayant pour foyers F et F', on a (M étant sur la branche de droite)

$$(1) \qquad F'M - FM = 2a.$$

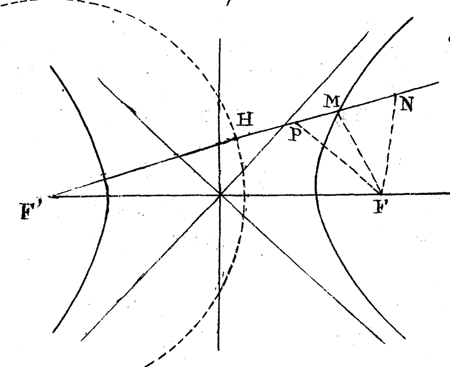
Si de M'F on retranche $MH = MF$, on aura $F'H = 2a$; et si, du point F' comme centre avec 2a pour rayon, on décrit un cercle ; MH est la plus courte distance du point M à ce cercle ; de là on conclut :

L'hyperbole est le lieu des points également distants d'un foyer F et du cercle décrit de l'autre foyer F' comme centre avec un rayon égal à l'axe réel ; on donne à ce cercle le nom de cercle directeur.

Dans l'ellipse, le foyer F est intérieur au cercle directeur ; dans l'hyperbole, le foyer F est extérieur.

2° Point intérieur.

Si N est un point intérieur à la branche de droite, F'N rencontre la courbe en un point M ; le triangle FMN donne



$$FN < MN + MF ;$$

ajoutons $(-F'N)$ aux deux membres ; on a successivement

$$-F'N + FN < FM + MN - F'N ;$$

$$F'N - FN > F'N - MN - FM ;$$

$$F'N - FN > F'M - FM ;$$

d'où

$$(2) \qquad F'N - FN > 2a ;$$

lorsqu'un point est intérieur, la différence des rayons vecteurs est plus grande que l'axe réel.

3° Point extérieur.

Si P est un point extérieur, le rayon F'P rencontrera la courbe en un point M situé au delà de P le triangle FMP donne

$$FM < FP + MP ;$$

ajoutons $(-F'P)$ aux deux membres de l'inégalité, il vient successivement

$$-F'P + FM < FP + MP - F'P ;$$

$$F'P - FP < F'P + MP - FM ;$$

$$F'P - FP < F'M - FM \qquad ;$$

d'où enfin

$$(3) \qquad F'P - FP < 2a ;$$

lorsqu'un point est extérieur, la différence des rayons vecteurs est moindre que l'axe réel.

N. B. Il faut toujours prendre les différences positives.

702. Parabole.

1° Point sur la parabole.

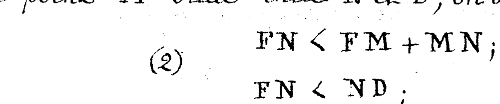
Si M est un point de la parabole, F le foyer et D la directrice, on a

$$(1) \qquad MF = MD.$$

Le cercle directeur est ici une droite, la directrice.

2° Point intérieur.

Si N est un point intérieur, la perpendiculaire ND abaissée sur la directrice rencontre la courbe e un point M situé entre N et D ; on a



$$(2) \qquad FN < FM + MN ;$$

$$FN < ND ;$$

lorsqu'un point est intérieur, sa distance au foyer est moindre que s distance à la directrice.

3° Point extérieur.

Si P est un point extérieur, la perpendiculaire PD rencontre la courbe en un point M situé au delà de P ; on a

$$FM < FP + MP;$$

$$(3) \qquad FP > FM - MP;$$

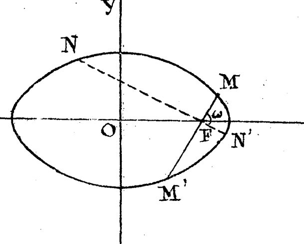
$$FP > PD.$$

Si le point P est à gauche de la directrice, l'inégalité est évidente.

Donc, lorsqu'un point est extérieur, sa distance au foyer est plus grande que sa distance à la directrice.

703. La somme des inverses des segments d'une corde focale est constante et égale à l'inverse du demi paramètre.

Prenons par exemple l'Ellipse et considérons le foyer de droite; soit MFM' une corde focale, ω l'angle, avec l'axe Fx, de la portion de corde dirigée du foyer vers le point de la courbe. On a N° [693]:



$$FM = a - \frac{c}{a}x, \text{ et } x - c = FM.\cos\omega;$$

d'où l'on conclut, en remplaçant x par cette valeur:

$$(1) \qquad FM\left[1 + \frac{c}{a}\cos\omega\right] = \frac{b^2}{a} = p;$$

la quantité $\frac{b^2}{a}$, qu'on désigne par p, porte le nom de demi-paramètre de la conique. L'angle du segment FM' est $(\omega + 180°)$; on aura donc

$$(2) \qquad FM'\left(1 - \frac{c}{a}\cos\omega\right) = p.$$

Des relations (1) et (2) on conclut

$$(3) \qquad \frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2}{p};$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Dans l'hyperbole on aurait la somme ou la différence.

704. La somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.

Soit MM' une corde focale; les égalités (1) et (2) du N° précédent donnent

$$(4) \qquad MM' = FM + FM' = \frac{2p}{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\omega}.$$

La longueur d'une corde focale perpendiculaire s'obtiendra en remplaçant ω par (ω + 90°); d'où résulte

$$(5) \qquad NN' = \frac{2p}{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\omega}.$$

On conclut de là

$$\frac{1}{MM'} + \frac{1}{NN'} = \frac{2 - \frac{c^2}{a^2}}{2p} = \frac{a^2 + b^2}{2ab^2};$$

ce qui démontre la proposition énoncée

V.° Conditions pour qu'un point donné soit foyer d'une Conique.

705. Soient α, β, les coordonnées du point donné, et

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

l'équation de la conique; nous exprimerons que le point donné est un foyer de cette conique en écrivant N° [686] que

le point (α,β) est le centre d'un cercle de rayon nul, doublement tangent à la conique.

Pour cela, nous prendrons d'abord l'équation des tangentes menées à la conique par le point (α,β); cette équation est N.º [378] équat. (10 bis)

$$(2) \qquad 4\,f(\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(x,y,z)=\left[x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma\right]^2.$$

L'équation (4) représente une courbe du second ordre (évanouissante) doublement tangente à la conique; pour obtenir un cercle de rayon nul, il suffira d'exprimer qu'elle représente un cercle.

Ainsi, en nous plaçant dans le cas des axes rectangulaires, et nous rappelant que

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F;$$

nous aurons les deux équations de condition

$$(3) \qquad \begin{cases} 4B\,f(\alpha,\beta)=f'_\alpha\cdot f'_\beta\,; \\ 4\,(A-C)\,f(\alpha,\beta)=(f'_\alpha)^2-(f'_\beta)^2. \end{cases}$$

On voit qu'assujettir un point à être foyer d'une conique revient à donner deux relations entre les coefficients de l'équation, ou deux conditions.

Si l'on élimine $f(\alpha,\beta)$ entre les relations (3), on trouve

$$(4) \qquad (f'_\alpha)^2+\frac{C-A}{B}\,f'_\alpha\cdot f'_\beta-(f'_\beta)^2=0.$$

Or cette équation est celle que l'on obtient en remplaçant m, dans l'équation aux coefficients angulaires des axes N.º [576], par $-\frac{f'_\alpha}{f'_\beta}$ c. à. d. par le coefficient angulaire de la polaire du point (α,β); mais la polaire d'un foyer est la directrice correspondante; la relation (4) nous montre donc que les directrices d'une conique sont parallèles aux axes de la courbe. Si l'on regarde α et β comme coordonnées courantes, l'équation (4) est également celle des axes de la conique.

N. B. Ce mode de calcul peut être utile dans les problèmes où l'on se propose de déterminer le lieu des foyers des coniques satisfaisant à certaines conditions; car, par cette méthode, on évite l'introduction dans les calculs des coefficients de la directrice.

VI.º Conditions pour qu'une droite donnée soit directrice d'une conique.

706. Soit l'équation de la droite donnée

$$(5) \qquad mx+ny+p=0;$$

nous exprimerons qu'elle est directrice en écrivant qu'elle est la corde de contact d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique

Pour cela, nous prendrons l'équation des tangentes ayant pour corde des contacts la droite donnée; cette équation est N.º [379] équat. (14)

$$(6) \qquad f(x,y,z)\cdot\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}(mx+ny+p)^2=0.$$

L'équation (6) détermine une courbe du second ordre (évanouissante) doublement tangent à la conique proposée; pour avoir un cercle de rayon nul, il suffira d'exprimer que l'équation (6) représente un cercle.

En nous plaçant dans le cas des axes rectangulaires, nous aurons les deux relations

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & B \begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & o \end{vmatrix} + mn \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = o, \\ & (A-C) \begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & o \end{vmatrix} + (m^2 - n^2) \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = o. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'assujettir une droite à être directrice revient à donner deux conditions.

La combinaison des équations (7) conduit à la relation suivante

$$(8)\qquad m^2 + \frac{C-A}{B}\,mn - n^2 = o;$$

relation qui exprime encore que les directrices sont parallèles aux axes, car c'est l'équation aux coefficients angulaires des axes.

VII.° Déduire l'équation de la Parabole de celle de l'Ellipse ou de l'Hyperbole

707. Nous ne ferons les calculs que dans le cas de l'Ellipse. Soient a et b les longueurs des axes de l'Ellipse:

L'Ellipse deviendra une parabole, lorsqu'on fera croître indéfiniment les axes a et b, en supposant 1.° qu'un des points de la courbe, un sommet par exemple, reste fixe; 2.° que le rapport $\frac{b^2}{a}$ a une limite finie.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes est

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o;$$

nous supposerons fixe le sommet A' de gauche, et nous désignerons par p la limite de $\frac{b^2}{a}$, de sorte que

$$(2)\qquad \lim \frac{b^2}{a} = p.$$

Le centre o de la courbe s'éloignant à l'infini lorsque a croît indéfiniment, nous ne pouvons pas conserver ce point pour origine; prenons pour origine le sommet A' supposé fixe; on aura, en désignant par x' et y' les nouvelles coordonnées

$$(3)\qquad x = x' - a, \quad y = y';$$

et l'équation de la courbe, rapportée à ces nouveaux axes, sera

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = o;$$

ou, développant et multipliant par b^2:

$$(4)\qquad \frac{b^2}{a^2}x'^2 + y'^2 - 2\frac{b^2}{a}x' = o.$$

Or, lorsque a et b croissent indéfiniment, on a d'après l'hypothèse

$$(5)\qquad \lim \frac{b^2}{a} = p, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{b^2}{a^2} = \lim \frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{a} = \lim \frac{b^2}{a}\cdot \lim \frac{1}{a} = o;$$

l'équation (4) devient à la limite:

$$(6)\qquad y'^2 - 2px' = o;$$

ce qui est bien l'équation de la parabole.

Remarque. Lorsque a et b croissent, la longueur A'F' varie, mais elle a une limite finie qui est $\frac{p}{2}$. En effet,

$$A'F' = a - c = a - \sqrt{a^2-b^2} = \frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}};$$

on a donc, en passant à la limite et en ayant égard aux relations (5):

$$(7) \qquad \lim. A'F = \frac{p}{2}; \text{ ou } \lim (a-c) = \frac{p}{2}.$$

Au lieu d'admettre la seconde hypothèse $\lim \frac{b^2}{a} = \text{constante} = p$, on pourrait supposer la distance A'F' invariable et égale à $\frac{p}{2}$ par exemple; on en déduirait alors $\lim \frac{b^2}{a} = p$. En effet, on aurait

$$\frac{p}{2} = a - c; \text{ ou } \frac{p}{2} = a - \sqrt{a^2-b^2},$$

ou, en isolant le radical, élevant au carré et divisant par a:

$$\frac{b^2}{a} = p + \frac{p^2}{4a};$$

on voit alors que $\lim \frac{b^2}{a} = p$.

708. Le calcul qui précède nous montre qu'on pourra déduire les propriétés de la parabole de celles de l'ellipse ou de l'hyperbole, en supposant que les axes a et b croissent indéfiniment et que $\lim \frac{b^2}{a}$ est une quantité finie. Lorsqu'on aura à opérer sur des équations où entrent les variables x et y, il faudra d'abord transformer cette équation en prenant pour origine le sommet supposé fixe.

Nous allons donner quelques exemples.

1° On a trouvé, dans l'ellipse, que l'excentricité, c.à.d. le rapport $\frac{MF}{MP}$ des distances d'un point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice correspondante, a pour valeur

$$\frac{c}{a}, \text{ ou } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \text{ ou } \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}};$$

d'après les relations (5), on a, à la limite:

$$(8) \qquad \lim. \frac{MF'}{MP'} = 1; \text{ ou } \lim \frac{c}{a} = 1.$$

2°. On a trouvé pour la distance d'un point de l'ellipse au foyer de gauche

$$MF = a + \frac{cx}{a};$$

expression qui devient, en ayant égard aux formules de transformation (3):

$$MF' = a + \frac{c(x'-a)}{a} = \frac{cx'}{a} + (a-c).$$

Or à la limite, c.à.d. dans le cas de la parabole, on a (7) et (8):

$$\lim \frac{c}{a} = 1, \lim (a-c) = \frac{p}{2},$$

d'où l'on conclut

$$(9) \qquad \lim MF' \text{ ou } \delta = x' + \frac{p}{2}.$$

On trouverait de la même manière l'équation de la directrice.

3° Dans l'ellipse, le cercle directeur No. [700], ayant son centre au foyer de droite, a pour équation

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Rapportant ce cercle aux nouveaux axes (3), il vient

$$(x'-c-a)^2+y'^2=4a^2;$$

ou

$$x'^2+y'^2-2(a+c)x'+(c-a)(c+3a)=0;$$

ou, divisant par $c+3a$:

$$\frac{x'^2+y'^2}{c+3a}-2x'\,\frac{a+c}{3a+c}+c-a=0;$$

or, lorsqu'on passe au cas limite, on a

$$\lim(c+3a)=\infty,\ \lim\frac{a+c}{3a+c}=\lim\frac{1+\frac{c}{a}}{3+\frac{c}{a}}=\frac{1}{2},\ \lim(a-c)=\frac{p}{2};$$

l'équation du cercle directeur devient alors

$$x'+\frac{p}{2}=0;$$

c'est l'équation de la directrice de la parabole.

---

§ III. Coordonnées trilatères.

1°. Un des sommets du triangle de référence est un foyer et le côté opposé est la directrice.

709. L'équation suivante:

$$(1)\qquad X^2+Y^2=e^2Z^2,$$

représente une conique ayant pour foyer le sommet A du triangle de référence et pour directrice le côté BC, lorsqu'on suppose le triangle de référence rectangle en A, et les paramètres de référence égaux à l'unité. N.° [685] remarque I.

En effet, si M est un point quelconque de la courbe, on a évidemment,

$$\overline{MA}^2=X^2+Y^2,\quad MP=Z,$$

MP étant la distance du point M au côté BC; l'équation (1) donne donc

$$\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MP}^2}=e^2;$$

c'est précisément la définition géométrique du foyer; e est l'excentricité.

Si l'angle A n'est pas droit, le point A ne sera pas foyer de la conique représentée par l'équation (1). En effet, la conique représentée par cette équation est conjuguée par rapport au triangle ABC N.° [456]; par suite, les deux droites AB et AC sont conjuguées, c.à.d. que le pôle de l'une se trouve sur l'autre; or, nous verrons plus loin que:

Deux droites conjuguées, c.à.d. telles que le pôle de l'une soit sur l'autre, et passant par un foyer, sont toujours rectangulaires, et réciproquement: si un point est tel, que deux droites conjuguées quelconques, et passant par ce point, sont rectangulaires, ce point est un foyer.

Cette propriété, caractéristique du foyer, peut servir à le déterminer dans certains cas.

Nous voyons, d'après l'équation (1), que:

Des coniques ayant un foyer commun et même directrice, sont conjuguées par rapport à un triangle fixe et rectangle; le sommet de l'angle droit est le foyer commun; l'hypoténuse est la directrice.

Remarque. Si les paramètres de référence, au lieu d'être égaux à l'unité, sont respectivement λ,μ,ν;

l'équation aux foyers (1) prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{X^2}{\lambda^2}, \ \frac{Y^2}{\mu^2} = e^2 \frac{Z^2}{\nu^2};$$

car, dans le cas actuel, les distances d'un point aux côtés du triangle de référence sont respectivement $\frac{X}{\lambda}, \frac{Y}{\mu}, \frac{Z}{\nu}$ N.° (89); l'angle du triangle de référence doit toujours être supposé droit.

II.° Détermination générale des foyers.

710. Nous pourrons déterminer les foyers en prenant pour point de départ la définition donnée au N.° (686): Un foyer est le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique.

Soient X_o, Y_o, Z_o, les coordonnées d'un foyer; nous prendrons d'abord l'équation des tangentes menées de ce point à la courbe, savoir N.° (407)

$$(1) \qquad 4f(X_o, Y_o, Z_o).f(X, Y, Z) = \left(X_o f'_X + Y_o f'_Y + Z_o f'_Z\right)^2;$$

puis nous exprimerons que l'équation (1) représente un cercle.

Pour cela, remarquons que, si les paramètres de référence sont égaux à l'unité, l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence est

$$YZ \sin A + ZX \sin B + XY \sin C = 0,$$

et celle de la droite à l'infini est

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0;$$

par suite, l'équation d'un cercle quelconque pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(X \sin A + Y \sin B + Z \sin C) = 0.$$

On identifiera alors les équations (1) et (2); et, en éliminant les indéterminées α, β, γ, on aura le nombre d'équations voulu pour déterminer les rapports des coordonnées du foyer (X_o, Y_o, Z_o).

Ces calculs seront, en général, fort compliqués. Voir une autre méthode au N.° (714). remarque II.

711. Nous appliquerons cette méthode à l'équation

$$(3) \qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0,$$

qui représente une conique conjuguée par rapport au triangle de référence; et nous supposerons, en outre, que cette conique est une parabole, c. à. d. qu'on a la relation N.° (592)

$$(4) \qquad \frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} = 0.$$

L'équation quadratique des tangentes est ici

$$(5) \quad X^2\left(\frac{Y_o^2}{p} + \frac{Z_o^2}{n}\right) + Y^2\left(\frac{X_o^2}{p} + \frac{Z_o^2}{m}\right) + Z^2\left(\frac{X_o^2}{n} + \frac{Y_o^2}{m}\right) - 2\frac{Y_o Z_o}{m} YZ - 2\frac{X_o Z_o}{n} XZ - 2\frac{X_o Y_o}{p} XY = 0.$$

Identifiant les équations (2) et (5), on trouve

$$\frac{\frac{Y_o^2}{p} + \frac{Z_o^2}{n}}{\alpha \sin A} = \frac{\frac{Z_o^2}{m} + \frac{X_o^2}{p}}{\beta \sin B} = \frac{\frac{X_o^2}{n} + \frac{Y_o^2}{m}}{\gamma \sin C} = \frac{-\frac{2 Y_o Z_o}{m}}{\sin A + \gamma \sin B + \beta \sin C} = \frac{-\frac{2 X_o Z_o}{n}}{\gamma \sin A + \sin B + \alpha \sin C} = \frac{-\frac{2 X_o Y_o}{p}}{\beta \sin A + \alpha \sin B + \sin C} = \frac{1}{\rho};$$

de là on déduit:

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &\alpha \sin A = \rho\left(\frac{Y_o^2}{p} + \frac{Z_o^2}{n}\right), \\ &\beta \sin B = \rho\left(\frac{Z_o^2}{m} + \frac{X_o^2}{p}\right), \\ &\gamma \sin C = \rho\left(\frac{X_o^2}{n} + \frac{Y_o^2}{m}\right); \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\sin A + \gamma \sin B + \beta \sin C + 2\rho \frac{Y_o Z_o}{m} = 0, \\ &\gamma \sin A + \sin B + \alpha \sin C + 2\rho \frac{Z_o X_o}{n} = 0, \\ &\beta \sin A + \alpha \sin B + \sin C + 2\rho \frac{X_o Y_o}{p} = 0. \end{aligned}\right.$$

Transportant dans les équations du second groupe les valeurs de α, β, γ, fournies par celles du premier, on trouve, en tenant compte de la relation (4) :

$$\frac{(Y\sin B + Z\sin C)^2 - X^2\sin^2 A}{m} = \frac{(Z\sin C + X\sin A)^2 - Y^2\sin^2 B}{n} = \frac{(X\sin A + Y\sin B)^2 - Z^2\sin^2 C}{p} = -\frac{\sin A\sin B\sin C}{\rho};$$

d'où, en laissant de côté le facteur $(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)$ qui donne les foyers à l'infini, il reste pour déterminer le foyer de la parabole

$$(7) \qquad \frac{-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C}{m} = \frac{X\sin A - Y\sin B + Z\sin C}{n} = \frac{X\sin A + Y\sin B - Z\sin C}{p}.$$

On peut conclure facilement de ces formules le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe; il suffit, pour cela, d'éliminer m, n, p, entre les relations (4) et (7); on trouve ainsi

$$\sin^2 A(-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C) + \sin^2 B(X\sin A - Y\sin B + Z\sin C) + \sin^2 C(X\sin A + Y\sin B - Z\sin C) = 0;$$

ou, en faisant les réductions

$$(8) \qquad X^2\sin 2A + Y^2\sin 2B + Z^2\sin 2C - 2(YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C) = 0;$$

c'est l'équation du cercle des neuf points du triangle de référence N.° [296].

---

§ IV. Équations tangentielles. (Coordonnées bilatères)

712 Nous n'avons à nous occuper des foyers que pour les courbes de 2.ème classe.

Nous prendrons, pour point de départ, la définition du N.° [687] : Les foyers sont les intersections des tangentes menées à la courbe par les points circulaires à l'infini.

Supposons les axes de coordonnées rectangulaires; l'équation des points circulaires à l'infini est N.° [284]

$$u^2 + v^2 = 0;$$

d'un autre côté l'équation d'une courbe quelconque de 2.ème classe peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad (\alpha u + \beta v - 1)(\alpha_1 u + \beta_1 v - 1) = b^2(u^2 + v^2);$$

car cette équation renferme cinq constantes $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, b$ complètement arbitraires; il sera donc possible d'identifier cette équation avec celle d'une courbe quelconque de 2.ème classe.

Or la courbe est touchée par les droites qui passent par les points circulaires à l'infini et par les deux points

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha u + \beta v - 1 = 0, & F \\ \alpha_1 u + \beta_1 v - 1 = 0; & F_1. \end{cases}$$

les points F et F_1 sont donc les foyers; les coordonnées du 1.er foyer F sont α et β; celles du second, sont α_1 et β_1 N.° [113].

L'interprétation géométrique de l'équation (1) est facile; soit une tangente quelconque (u, v) à la courbe (1); FP et F_1P_1, les perpendiculaires abaissées des points F et F_1 sur cette tangente, on aura N.° [129]

$$FP = \frac{\alpha u + \beta v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad FP_1 = \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}};$$

l'équation (1) donnera alors

$$(3) \qquad FP.\,FP_1 = \text{constante} = b^2;$$

c.à.d. que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est constant.

Cette constante, si l'on considère les foyers réels, est le carré du demi petit-axe dans l'ellipse; car, lorsque la tangente est parallèle à l'axe focal, les perpendiculaires FP et FP_1 sont évidemment égales à la moitié du petit axe.

L'équation (1) est l'équation aux foyers des courbes de 2.ème classe. Par cette première méthode nous avons

mis en évidence les deux foyers; nous allons aborder autrement cette même question et mettre en évidence un seul foyer et la directrice correspondante.

713. Pour cela, nous partirons de l'équation aux foyers en coordonnées-point N.° (685):

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\left[x\cos\omega+y\sin\omega-r\right]^2;$$

et nous chercherons l'équation tangentielle de cette courbe en suivant la marche indiquée au N.° (127).

Posons

$$X=x-\alpha,\quad Y=y-\beta,\quad Z=x\cos\omega+y\sin\omega-r;$$

l'équation (1) s'écrira:

$$(1°)\qquad X^2+Y^2=e^2Z^2.$$

Les coordonnées à l'origine de la tangente en un point (x,y) seront

$$-\frac{f'_z}{f'_x},\quad -\frac{f'_z}{f'_y};$$

on aura donc N.° [110]

$$u=-\frac{f'_x}{f'_z},\quad v=-\frac{f'_y}{f'_z};\ \text{ou}\ \frac{f'_x}{u}=\frac{f'_y}{v}=-f'_z;$$

ou, en effectuant les différentiations:

$$(2°)\qquad \frac{X-e^2\cos\omega.Z}{u}=\frac{Y-e^2\sin\omega.Z}{v}=\alpha X+\beta Y-e^2rZ$$

Résolvons les équations (2°) par rapport à X et Y, on trouve

$$X(1-\alpha u-\beta v)=e^2Z\left[\cos\omega-ru+\beta(u\sin\omega-v\cos\omega)\right]$$
$$Y(1-\alpha u-\beta v)=e^2Z\left[\sin\omega-rv-\alpha(u\sin\omega-v\cos\omega)\right].$$

Désignons par u_0, v_0, les coordonnées de la directrice correspondant au foyer α,β; l'équation de cette directrice étant

$$x\cos\omega+y\sin\omega-r=0,$$

les coordonnées u_0, v_0, auront pour valeurs N.° [110]

$$\frac{1}{u_0}=\frac{r}{\cos\omega},\ \frac{1}{v_0}=\frac{r}{\sin\omega};\ \text{d'où}\ \cos\omega=ru_0,\ \sin\omega=rv_0;$$

les valeurs de X, Y, pourront alors s'écrire

$$X\left[1-\alpha u-\beta v\right]=e^2rZ\left[u_0-u+\beta(uv_0-vu_0)\right],$$
$$Y\left[1-\alpha u-\beta v\right]=e^2rZ\left[v_0-v-\alpha(uv_0-vu_0)\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1°) on a définitivement:

$$(5)\qquad \left[u-u_0-\beta(uv_0-vu_0)\right]^2+\left[v-v_0+\alpha(uv_0-vu_0)\right]^2=\frac{1}{e^2r^2}\left[\alpha u+\beta v-1\right]^2;$$

telle est encore l'équation tangentielle aux foyers; α et β sont les coordonnées d'un foyer; u_0, v_0, sont les coordonnées de la directrice correspondante; e est l'excentricité; r est la distance de l'origine à la directrice.

714. Prenons pour origine le foyer (α,β), c.à.d. supposons α et β nuls; l'équation (1) devient alors

$$(6)\qquad (u-u_0)^2+(v-v_0)^2=\frac{1}{p^2},\quad p=\frac{b^2}{a},$$

p étant le demi-paramètre de la conique; en effet, $e=\frac{c}{a}$; et r, distance de l'origine (ou foyer) à la directrice correspondante, est égal à $\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$ ou $\frac{b^2}{c}$.

On arrive ainsi à cette conséquence remarquable et importante au point de vue de l'interprétation des équations tangentielles:

L'équation tangentielle d'une conique ayant pour foyer l'origine a la même forme que l'équation du cercle; les coordonnées du centre y sont remplacées par celles de la directrice, le rayon est

l'inverse du demi-paramètre.

De là une source féconde de propriétés relatives aux systèmes de coniques confocales. Nous n'indiquerons pas les résultats suivants.

1°. Tous les cercles passent par les points circulaires à l'infini

$$z=0,\quad x^2+y^2=0\,;$$

toutes les coniques confocales touchent les droites fixes

$$w=0,\quad u^2+v^2=0\,;$$

ces droites sont les asymptotes du cercle. Nous retrouvons ainsi la définition des foyers du N° (687).

2°. Si nous considérons deux coniques confocales

$$C=0,\quad C_1=0\,;$$

l'équation $C-C_1=0$ représente un point, lequel est le point de concours des tangentes communes aux deux coniques et ne passant pas par le foyer.

Si l'on considère les trois coniques confocales

$$C=0,\quad C_1=0,\quad C_2=0\,;$$

les trois points

$$C_1-C_2=0\,;\quad C_2-C=0\,;\quad C-C_1=0\,;$$

sont en ligne droite. Donc

Les trois points de concours des tangentes communes à trois coniques confocales, prises deux à deux, sont en ligne droite.

3°. Si dans l'équation (6) on suppose p fixe, et si l'on exprime que la courbe touche une droite fixe (u_1, v_1), on aura

$$(u_1-u_0)^2+(u_1-v_0)^2=\frac{1}{p^2}\,;$$

c. à d. une relation entre les coordonnées (u_0, v_0) de la directrice d'une conique quelconque ayant pour paramètre p, pour foyer l'origine, et touchant une droite fixe. Supprimant l'indice zéro, on a

$$(u-u_1)^2+(v-v_1)^2=\frac{1}{p^2}\,:$$

Donc les directrices des coniques confocales, ayant même paramètre et touchant une droite fixe, enveloppent une conique confocale avec les premières et ayant même paramètre.

Remarque I. Il est facile d'obtenir les équations des foyers, les coordonnées des directrices des coniques dont l'équation est prise sous la forme réduite N° (684)

$$\left\{\begin{array}{l} a^2u^2+b^2v^2-1=0\,; \\ a^2u^2-b^2v^2-1=0\,, \\ pv^2+2u\ =0. \end{array}\right.$$

Il suffit de prendre les résultats trouvés (693), (696), (699), et de passer aux équations tangentielles N^os (110), (113).

Remarque II. Les équations tangentielles permettent d'obtenir d'une manière beaucoup plus simple que celle qui a été indiquée au N° (710) les foyers d'une conique, et cela quel que soit le système de coordonnées employé.

Soit $S=0$ l'équation en coordonnées-point d'une conique, cherchons l'équation tangentielle $\Sigma=0$ de cette même conique N° (427); soit $\Omega=0$ l'équation tangentielle des points circulaires à l'infini N° (284) ou (297); l'équation

$$(1)\qquad \Sigma+k\,\Omega=0,$$

sera N° (898) l'équation générale des coniques touchant les tangentes qu'on peut mener à la conique proposée par les points circulaires à l'infini, c. à d. sera **l'équation générale des coniques ayant les mêmes foyers que la conique proposée** N° (953) ou N° (688).

Exprimons maintenant que l'équation (1) représente deux points N° (364), on aura une équation du second degré en k, car il y aura une racine infinie qui donne les points circulaires à l'infini. Pour chacune des racines de l'équation en k, l'équation (1) représentera deux points qui seront deux des foyers de la conique situés sur le même axe.

On pourra alors, des équations tangentielles de ces points, conclure leurs coordonnées; et résoudre ainsi complètement le problème de la détermination des foyers.
Cette méthode peut être très-avantageuse dans un grand nombre de questions relatives aux foyers.

Chapitre II
Tangentes et Normales.

§ I. Tangentes.

1° Équation de la tangente en un point.

715. L'équation de la tangente en un point (x_1, y_1) d'une courbe $f(x,y)=0$ est

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0;\quad f(x_1, y_1) = 0.$$

Appliquons cette formule aux courbes du second ordre, en prenant leurs équations sous la forme réduite N.° [683].

1° Ellipse.

L'équation de l'Ellipse est

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

l'équation de la tangente en un point (x_1, y_1) sera

$$(2)\qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0,$$

avec la condition

$$(2\,bis)\qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Il est souvent utile de déterminer le point (x_1, y_1) à l'aide d'un seul paramètre; on le fait en posant N.° [335]

$$x_1 = a\cos\varphi,\quad y_1 = b\sin\varphi;$$

l'équation (2 bis) se trouve alors vérifiée, et l'équation de la tangente prend la forme

$$(3)\qquad \frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi - 1 = 0.$$

Remarque. On constatera, sans difficulté, que l'équation d'une droite, passant par les deux points

$$\mathrm{M}\ \{x_1 = a\cos\varphi,\ y_1 = b\sin\varphi,$$
$$\mathrm{M}_1\ \{x_2 = a\cos\varphi_1,\ y_2 = b\sin\varphi_1,$$

est

$$(4)\qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}.$$

716. 2° Hyperbole.

L'équation de l'hyperbole est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

l'équation de la tangente en un point (x_1, y_1) sera

$$(2) \qquad \frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0,$$

avec la condition

$$(2\,\text{bis}) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

On peut aussi quelquefois définir le point (x_1, y_1) à l'aide d'un seul paramètre; on le fait en posant N.° [339]

$$x_1 = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y_1 = b \operatorname{tang}\varphi;$$

la relation (2 bis) est alors vérifiée et l'équation de la tangente devient

$$\frac{x}{a\cos\varphi} - \frac{y}{b}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - 1 = 0;$$

ou, en rendant homogène:

$$(3) \qquad z\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi - \frac{x}{a} = 0;$$

équation qui présente une forme analogue à celle de la tangente à l'ellipse.

Remarque. On peut déduire de là l'équation de l'asymptote, en se rappelant qu'une asymptote est la limite des positions d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment.

Divisons par x_1 et x_1^2 les équations (2) et (2 bis), on a

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{x_1} = 0;$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{1}{x_1^2} = 0.$$

Lorsqu'on fait croître x_1 indéfiniment, la première de ces équations devient

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\lim.\frac{y_1}{x_1} = 0;$$

la seconde donne

$$\lim\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}, \text{ ou } \lim.\frac{y_1}{x_1} = \pm\frac{b}{a}.$$

Les deux asymptotes ont donc pour équations

$$(4) \qquad \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

On voit que les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.

Car les axes de coordonnées étant supposés obliques, a et b sont les longueurs de deux diamètres conjugués; si H et G sont deux des sommets du parallélogramme construit sur les diamètres AA' et BB', l'asymptote

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

passe par le sommet H $(x = a, y = b)$; l'asymptote

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,$$

passe par le sommet $G(x=-a, y=+b)$.

717. 3° Parabole.

L'équation de la parabole est

$$(1) \qquad y^2-2px=0\,;$$

l'équation de la tangente au point (x_1, y_1) sera

$$(2) \qquad yy_1-p(x+x_1)=0,$$

avec la condition

$$(2\,bis) \qquad y_1^2-2px_1=0.$$

Vu la simplicité de l'équation de la parabole, l'introduction d'un paramètre angulaire est ici peu nécessaire. On pourrait cependant poser

$$y_1=2p\tang\varphi,\quad x_1=2p\tang^2\varphi\,;$$

l'équation de la tangente est alors

$$(3) \qquad y\tang\varphi-\frac{x}{2}-p\tang^2\varphi=0.$$

II° Sous-tangente.

718. On obtiendra la sous-tangente en cherchant l'intersection de la tangente avec l'axe des x, car on a ainsi l'abscisse du pied de la tangente.

1° Ellipse.

En faisant $y=0$ dans l'équation (2) de la tangente N° (715), on trouve

$$(1) \qquad xx_1=a^2,\ \text{d'où}\ x=\frac{a^2}{x_1}.$$

On voit que, si x_1 reste fixe, la distance x ou OP reste fixe; autrement, cette distance est indépendante de la longueur de l'axe b.

Par suite, si l'on considère les ellipses ayant même axe ou même diamètre $2a$, toutes les tangentes aux points M, M_1, M_2, ..., correspondant à une même abscisse et à des valeurs différentes de b, iront couper l'axe ou le diamètre $2a$ en un même point T.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, $2a$ et $2b$ sont les axes de la courbe; la propriété que nous venons d'indiquer aura encore lieu lorsqu'on fera $b=a$, c. à d. lorsque l'ellipse sera devenue un cercle. En d'autres termes, les tangentes en un point M de l'ellipse et au point correspondant M_1 du cercle homographique se coupent en un même point de l'axe. Cette propriété nous sera utile plus tard pour la construction de la tangente.

Dans le cas des axes obliques, nous remarquerons que la tangente en un point M de l'ellipse et la tangente au point correspondant M_1 N° (336) du cercle décrit sur le diamètre $2a$ se coupent en un même point de ce diamètre. En effet, le point correspondant au point M de l'ellipse étant M_1, la droite M_1P est perpendiculaire au diamètre AA'; or, si $x_1=OP$, nous venons de démontrer que

$$OT=\frac{a^2}{x_1}.$$

Mais, si T_1 est le pied, sur Ox, de la tangente au cercle M_1, on a, d'après

la propriété de la polaire,

$$OP.OT_1 = a^2, \text{ ou } OT_1 = \frac{a^2}{x_1};$$

donc $OT = OT_1$.

Cette propriété peut d'ailleurs se démontrer directement en remarquant que des droites correspondantes telles que MN et M_1N_1 se coupent sur le diamètre OA. Nous reviendrons sur cette question à l'occasion de la construction des tangentes.

2°. Hyperbole.

En faisant $y=0$ dans l'équation (2) de la tangente N° (716), on trouve

$$x = \frac{a^2}{x_1};$$

valeur encore indépendante de b. Nous concluons de là que les tangentes aux différents points, correspondant à une même abscisse et à des valeurs différentes de b, se coupent en un même point de l'axe Ox. Cette propriété aura encore lieu pour $b=a$, l'hyperbole correspondante sera alors équilatère.

719. 3°. Parabole.

En faisant $y=0$ dans l'équation (2) de la parabole N° (717), on trouve

$$x + x_1 = 0;$$

donc **la distance du pied de la tangente à l'origine** (ou au sommet, si les axes sont rectangulaires) **est égale et de signe contraire à celle du pied de l'ordonnée**; ainsi on a

$AT = AP$ (axes rectangulaires),

$A'T' = A'P'$ (axes obliques).

Cette propriété est caractéristique de la parabole.

Cherchons, en effet, l'équation générale des courbes jouissant de cette propriété.

L'équation d'une tangente quelconque est (X et Y étant les coordonnées courantes)

$$Y - y = y'_x (X - x).$$

En faisant $Y=0$, on aura X ou $A'T'$:

$$A'T' = x - \frac{y}{y'_x},$$

or $A'P' = x$, et on doit avoir $A'T' + A'P' = 0$; donc

$$2x - \frac{y}{y'_x} = 0; \text{ d'où } 2\frac{y'_x}{y} = \frac{1}{x}.$$

Remontant aux fonctions primitives, on trouve

$$2ly = lx + lc, \text{ ou } y^2 = cx;$$

équation d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité.

III°. Tangente parallèle à une droite donnée.

720. Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée, l'équation d'une droite parallèle sera de la forme

$$y = mx + n;$$

si l'équation de la courbe est $f(x, y) = 0$, nous chercherons l'intersection de la droite avec la courbe;

on aura, en éliminant y,

$$f(x, mx+n)=0;$$

et, on exprimera que la droite est tangente, en écrivant que cette équation a deux racines égales; on aura ainsi une relation entre m et n qui servira à déterminer la quantité inconnue n.

1° Ellipse.

L'équation de l'Ellipse est

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

l'équation en x sera

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+2\frac{mn}{b^2}x+\frac{n^2}{b^2}-1=0.$$

Exprimons que cette équation a deux racines égales, on a

$$\frac{m^2n^2}{b^4}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right);\ \text{d'où}\ n^2=a^2m^2+b^2.$$

L'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée est donc

$$(2)\qquad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2};$$

il y a deux tangentes parallèles à une droite donnée et toujours réelles.

Si l'on se donne l'équation de la droite sous la forme

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

(ce qui suppose les axes rectangulaires), on aura alors

$$m=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

par la substitution de cette valeur, l'équation (2) devient

$$(3)\qquad x\cos\alpha+y\sin\alpha=\pm\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha};$$

c'est une forme commode, dans certains cas, pour l'équation d'une tangente.

On pourrait aussi résoudre directement la question; pour cela, on rend homogènes l'équation de la droite et celle de l'ellipse, ce qui donne

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-pz=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0;$$

puis on élimine z entre ces deux équations, et on exprime que l'équation résultante (laquelle représente deux droites passant par l'origine) a deux racines égales. Ainsi dirigé, le calcul reste symétrique.

La distance du centre à la tangente a pour expression

$$(4)\qquad p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha.$$

On calculera, sans difficulté, la longueur du diamètre parallèle à la tangente (3); on trouvera

$$(5)\qquad a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin\alpha}.$$

La comparaison des valeurs (4) et (5) nous conduit à la relation

$$(6)\qquad a'p=ab;$$

relation facile à interpréter.

721. 2° Hyperbole.

Les mêmes calculs appliqués à l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

conduisent à l'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée, dans le cas de l'hyperbole, savoir :

$$(2) \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}\,;$$

il y a encore deux tangentes parallèles à une droite donnée, mais elles ne sont pas toujours réelles.

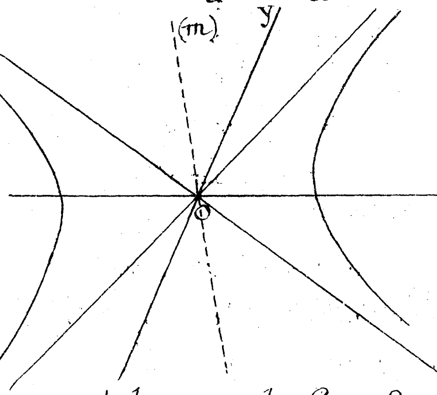
Pour que ces tangentes soient réelles, il faut que

$$a^2m^2 - b^2 > 0, \text{ ou } \left(m - \frac{b}{a}\right)\left(m + \frac{b}{a}\right) > 0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$m > \frac{b}{a}, \text{ ou } m < -\frac{b}{a}$$

Mais $\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$ sont les coefficients angulaires des asymptotes N.° [716].



« Il n'y aura donc deux tangentes réelles parallèles à une direction « donnée, que lorsque la droite, menée par le centre parallèlement à « cette direction, sera comprise dans l'angle des asymptotes où ne « se trouve pas la courbe. »

Si l'on se donne l'équation de la droite sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

on aura, en remplaçant m par $-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ dans l'équation (2) :

$$(3) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha = \pm\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}\,;$$

c'est une autre forme de l'équation d'une tangente.

La distance du centre à cette tangente est

$$(4) \qquad p^2 = a\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha.$$

722. 3.° Parabole.

L'équation de la parabole est

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0\,;$$

l'équation en x N.° [720] sera

$$m^2x^2 + 2x(mn - p) + n^2 = 0.$$

Exprimons que cette équation a deux racines égales, on trouve

$$(mn - p)^2 = m^2n^2, \text{ d'où } n = \frac{p}{2m}.$$

L'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée est donc

$$(2) \qquad y = mx + \frac{p}{2m}\,;$$

on ne peut donc mener à la parabole qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée.

C'est qu'en effet la parabole est tangente à la droite de l'infini ; et, comme une droite quelconque peut être regardée comme parallèle à la droite de l'infini, le système des deux tangentes parallèles se compose d'une tangente à distance finie et de la droite de l'infini.

Si l'on se donne l'équation de la droite sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - r = 0,$$

(ce qui suppose les axes rectangulaires) ; on aura, en remplaçant m par $-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ dans l'équation (2) :

$$(3) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha + p\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = 0\,;$$

c'est encore l'équation d'une tangente

Remarque. Lorsque la parabole est rapportée à son foyer; c.à.d. lorsque son équation a la forme

$$(4)\qquad y^2 = 2px + p^2, \quad ou \quad x^2+y^2=(x+p)^2;$$

l'équation d'une tangente parallèle à une droite donnée est

$$(5)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{p}{2\cos\alpha} = 0.$$

IV° Équation des tangentes menées par un point.

723. Si l'on exprime que la tangente

$$y = mx + \varphi(m),$$

passe par un point donné (α, β), l'équation ainsi obtenue déterminera les coefficients angulaires des tangentes passant par ce point.

Appliquons ce principe aux trois courbes du second ordre.

1° Ellipse.

En exprimant que la tangente N° [720]

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

passe par le point (α,β) et en rendant l'équation rationnelle, on trouve

$$(1)\qquad m^2(\alpha^2-a^2) - 2\alpha\beta m + \beta^2 - b^2 = 0;$$

l'équation (1) détermine les coefficients angulaires des tangentes menées à l'ellipse par le point (α,β).

2° Hyperbole.

On aura, de la même manière, pour l'hyperbole

$$(2)\qquad m^2(\alpha^2-a^2) - 2\alpha\beta m^2 + \beta^2 + b^2 = 0.$$

3° Parabole.

En opérant sur l'équation (2) du N° [722], on trouvera pour la parabole:

$$(3)\qquad \alpha m^2 - \beta m + \frac{p}{2} = 0;$$

l'équation (3) détermine les coefficients angulaires des tangentes menées à la parabole par le point (α,β).

Si le point choisi est un point quelconque de la directrice, on a $\alpha = -\frac{p}{2}$; le produit des racines de l'équation (3) est alors égal à -1; c.à.d. que

Les tangentes, menées d'un point quelconque de la directrice à une parabole, sont rectangulaires.

724. Nous pouvons de là déduire facilement l'équation des tangentes menées par un point (α,β). Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces tangentes, la valeur du coefficient angulaire m sera

$$(4)\qquad m = \frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

Cette valeur de m doit vérifier l'équation qui détermine les coefficients angulaires des tangentes; on obtiendra ainsi une relation entre les coordonnées d'un point quelconque d'une quelconque des tangentes, c.à.d. l'équation de ces tangentes. En substituant la valeur (4) de m dans les équations (1), (2), et (3), on a pour l'équation des tangentes menées par le point (α,β):

$$\text{Ellipse: } (y-\beta)^2(\alpha^2-a^2) - 2\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta) + (x-\alpha)^2(\beta^2-b^2) = 0.$$

$$\text{Hyperbole: } (y-\beta)^2(\alpha^2-a^2) - 2\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta) + (x-\alpha)^2(\beta^2+b^2) = 0.$$

$$\text{Parabole: } \alpha(y-\beta)^2 - \beta(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{p}{2}(x-\alpha)^2 = 0.$$

Remarque. Si dans la première de ces équations, par exemple, on fait $\alpha = c$, $\beta = 0$, on trouve

$$(x-c)^2 + y^2 = 0;$$

équation d'un cercle de rayon nul, ayant pour centre le foyer et doublement tangent à la conique.
On arrive à la même conséquence, en faisant dans la dernière équation $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$.

V°. Tangentes menées par un point donné.

725. 1° **Ellipse**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

L'équation d'une tangente est

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0,$$

x_1, y_1 étant les coordonnées du point de contact; exprimons que cette tangente passe par le point donné (α, β), il vient

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} - 1 = 0, \text{ avec } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Supprimant les indices, on aura pour déterminer les points de contact les deux équations

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0 \text{ (polaire du point } \alpha, \beta).$$

De la dernière équation on tire

$$(3) \qquad y = \frac{b^2}{\beta}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2}\right);$$

substituant cette valeur dans la première, il vient après avoir ordonné

$$(4) \qquad x^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2) - 2\alpha a^2 b^2 x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0.$$

A une valeur réelle de x correspondra une valeur réelle de y; et à une valeur imaginaire de x correspondra une valeur imaginaire de y.

Or, si l'on écrit que l'équation (4) a ses racines réelles, on trouve

$$(5) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 > 0.$$

L'inégalité (5) exprime que le point (α, β) est extérieur; car, elle indique que, pour une même abscisse α, le carré β^2 de l'ordonnée du point est plus grand que le carré de l'ordonnée correspondante de l'ellipse, savoir $\frac{b^2}{a^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)$. L'inégalité de sens contraire exprime que le point est intérieur; les tangentes sont alors imaginaires, mais elles sont imaginaires conjuguées. Enfin, lorsque le point est sur l'ellipse, les deux tangentes se confondent; par suite, la tangente en un point de la courbe est la réunion de deux tangentes menées par ce point.

726. 2° **Hyperbole**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Les coordonnées des points de contact des tangentes, menées par un point donné (α, β), sont déterminées par les deux équations

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0 \text{ (polaire du point } \alpha, \beta).$$

On tire de la dernière équation

$$(3)\qquad y = -\frac{b^2}{\beta}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2}\right);$$

substituant cette valeur dans la première il vient

$$(4)\qquad x^2(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) + 2\alpha a^2 b^2 x - a^4(b^2+\beta^2) = 0.$$

Les racines de l'équation (4) seront réelles, c.à.d. les deux tangentes seront réelles, si

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 < 0;$$

le point (α, β) est alors extérieur.

Les tangentes seront imaginaires, si le point est intérieur, ou si

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Elles seront coïncidentes, si le point est sur la courbe.

Nous avons ici, à résoudre cette question:

En supposant les tangentes réelles, quelle doit être la position du point (α, β) pour que les deux tangentes touchent la même branche de l'hyperbole.

Pour que les deux tangentes touchent la même branche, il faut et il suffit que les abscisses des points de contact soient toutes deux positives ou toutes deux négatives, c.à.d. que le produit des racines de l'équation (3) soit positif; il faut donc que

$$-\frac{a^4(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2} > 0;$$

et, comme le numérateur est négatif, il faut que

$$a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 < 0,\quad \text{ou}\quad \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{b}{a}\right) < 0.$$

Or $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient angulaire de la droite qui joint le point donné au centre; $\pm\frac{b}{a}$ sont les coefficients angulaires des asymptotes; on conclut de là:

Pour que les deux tangentes touchent la même branche, il faut que le point donné soit dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe.

Pour que les tangentes touchent l'une et l'autre branche, il faut que le point donné soit dans l'angle des asymptotes où ne se trouve pas la courbe.

727. 3° Parabole: $y^2 - 2px = 0$.

Les coordonnées des points de contact des tangentes seront déterminées par les équations

$$(1)\qquad y^2 - 2px = 0;$$

$$(2)\qquad \beta y - p(x+\alpha) = 0.$$

De l'équation (1) on tire

$$(3)\qquad x = \frac{y^2}{2p};$$

substituant cette valeur dans l'équation (2), on trouve

$$(4)\qquad y^2 - 2\beta y + 2p\alpha = 0.$$

Les deux tangentes seront réelles, si les deux racines de l'équation (4) sont réelles, c.à.d. si

$$\beta^2 - 2p\alpha > 0,$$

relation qui exprime que le point (α, β) est extérieur.

Elles seront imaginaires si le point (α, β) est intérieur, c.à.d. si

$$\beta^2 - 2p\alpha < 0.$$

Elles coïncideront, si le point (α, β) est sur la courbe.

VI°. Propriétés des tangentes relatives aux foyers.

728. Ellipse.

La tangente en un point d'une ellipse est également inclinée sur les rayons vecteurs qui joignent les foyers au point de contact.

Soient x_1, y_1, les coordonnées d'un point M, calculons la tangente trigonométrique de l'angle FMT.

En désignant par m le coefficient angulaire de la tangente, par n celui du rayon vecteur FM, on a

$$\text{tang}\, TMF = \frac{m-n}{1+mn};$$

le second membre représente exactement la tangente de TMF; car

$$\widehat{TMF} = \beta - \alpha, \text{ d'où } \text{tang}\,\widehat{TMF} = \frac{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} = \frac{m-n}{1+mn}.$$

Or, on a

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = -\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}; \quad n = \frac{y_1}{x_1 - c} = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi - c}.$$

On conclut de là, en remplaçant et réduisant :

$$(1) \qquad \text{tang}\, TMF = \frac{b}{c\sin\varphi}.$$

Calculons maintenant tang $\widehat{TMF'}$. On a

$$TMF' = \beta - \alpha';$$

d'où

$$\text{tang}\,\widehat{TMF'} = \frac{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha'}{1+\text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\beta} = \frac{m-n'}{1+mn'};$$

n' étant le coefficient angulaire du rayon vecteur F'M. Cette expression se déduit donc de la précédente en remplaçant n par n'; or

$$n' = \frac{y_1}{x_1 + c} = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi + c};$$

c.à.d. que n' se déduit de n en remplaçant c par $-c$; donc le résultat cherché se déduira de l'égalité (1) en y changeant c en $-c$; par suite

$$(2) \qquad \text{tang}\, TMF' = -\frac{b}{c\sin\varphi}.$$

Les angles $\widehat{TMF'}$ et $\widehat{TMF}$ sont donc supplémentaires; par conséquent

$$(3) \qquad \widehat{T'MF'} = \widehat{TMF}.$$

Corollaire. La normale en un point d'une ellipse est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui passent par le pied de la normale.

729. Hyperbole.

La tangente en un point d'une hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui joignent les foyers au point de contact.

Soient x_1, y_1, les coordonnées du point M; on a

$$\widehat{TMF} = \alpha - \beta;$$

d'où

$$\tan \widehat{TMF} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{n-m}{1+mn},$$

m étant le coefficient angulaire de la tangente MT, et n celui du rayon vecteur FM. Or

$$m = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \qquad n = \frac{y_1}{x_1 - c};$$

par suite, en substituant et réduisant

$$\tan \widehat{TMF} = \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + b^2 c x_1}{cy_1(cx_1 - a^2)}.$$

Mais le point (x_1, y_1) étant sur l'hyperbole, on a

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2;$$

en substituant cette valeur dans le numérateur, et supprimant le facteur commun $(cx_1 - a^2)$, il vient :

$$(1) \qquad \tan \widehat{TMF} = \frac{b^2}{cy_1}.$$

Calculons tang. TMF'; on a

$$\widehat{TMF'} = \beta - \alpha';$$

d'où

$$\tan \widehat{TMF'} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha'}{1+\tan\beta\tan\alpha'} = \frac{m-n'}{1+mn'} = -\frac{n'-m}{1+mn'}.$$

On voit que tang $\widehat{TMF'}$ se déduit de tang $\widehat{TMF}$ en remplaçant n par n', puis en changeant le signe du résultat; or

$$n' = \frac{y_1}{x_1 + c};$$

par conséquent, n' se déduit de n en changeant c en $-c$. Ainsi la valeur de tang $\widehat{TMF'}$ se déduit de celle de tang TMF en changeant c en $-c$, puis en prenant le résultat avec un signe contraire. Donc

$$(2) \qquad \tan TMF' = \frac{b^2}{cy_1};$$

et par suite

$$(3) \qquad \widehat{TMF} = \widehat{TMF'}.$$

Corollaire. La normale en un point d'une hyperbole est également inclinée sur les rayons vecteurs qui joignent les foyers au pied de la normale.

Remarque. Une ellipse et une hyperbole homofocales, c. à. d. ayant les mêmes foyers, se coupent orthogonalement.

Car les tangentes MT et MS à l'ellipse et à l'hyperbole sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs FM et F'M; elles sont donc perpendiculaires entre elles.

730. Parabole.

La tangente en un point d'une parabole est bissectrice de l'angle formé par le diamètre passant par le point de contact et le rayon vecteur joignant ce point au foyer.

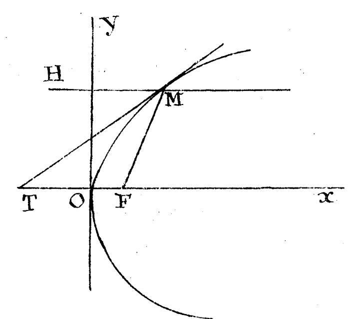
Si m est le coefficient angulaire de la tangente MT et n celui du rayon vecteur MF, on a

$$\tan \widehat{TMF} = \frac{n-m}{1+mn};$$

or, si x_1, y_1, sont les coordonnées du point M, on a

$$n = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}}, \quad m = \frac{p}{y_1}, \quad \text{et } y_1^2 = 2px_1;$$

remplaçant et réduisant, on trouve



$$(1) \qquad \operatorname{tang} \widehat{TMF} = \frac{p}{y_1}.$$

Mais

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \widehat{TMH} = \operatorname{tang} \widehat{MTF} = \frac{p}{y_1};$$

donc

$$(3) \qquad \widehat{TMH} = \widehat{TMF}.$$

Remarque. On peut encore remarquer que

$$FT = x + \frac{p}{2} \text{ N}^{\text{o}} [719]; \quad FM = x + \frac{p}{2} \text{ N}^{\text{o}} [699];$$

le triangle FMT est donc isocèle; par suite $\widehat{FMT} = \widehat{MTF} = \widehat{TMH}$.

731. Nous allons aborder par une autre méthode les théorèmes des N^os [728], [729], [730], et démontrer en même temps les propositions réciproques.

Pour cela, nous établirons deux formules ou lemmes qui pourront servir dans d'autres questions.

Lemme I. Une courbe étant définie par une relation entre les distances ρ et ρ_1 d'un quelconque de ses points à deux points fixes F et F_1,

$$f(\rho, \rho_1) = 0;$$

si MT est la tangente au point M défini par ρ et ρ_1, on a

$$(1) \qquad \frac{\cos \widehat{FMT}}{\cos \widehat{F_1MT}} = \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \rho'_{\rho_1}.$$

Considérons deux points voisins $M(\rho, \rho_1)$ et $M'(\rho + \Delta\rho, \rho_1 + \Delta\rho_1)$; nous aurons à examiner deux cas: 1° les accroissements $\Delta\rho$ et $\Delta\rho_1$ sont de même signe; 2° les accroissements $\Delta\rho$ et $\Delta\rho_1$ sont de signe contraire.

1er Cas. On peut supposer $\Delta\rho$ et $\Delta\rho_1$ positifs; rabattons FM en FH sur FM', puis F_1M en F_1H_1 sur F_1M'; le point H se trouvera entre F et M', le point H_1 entre F_1 et M'; et on aura

$$HM' = \Delta\rho, \quad H_1M' = \Delta\rho_1.$$

D'ailleurs, les triangles MHM', MH_1M', donnent:

$$\frac{M'H}{MM'} = \frac{\sin \widehat{M'MH}}{\sin \widehat{MHM'}}, \qquad \frac{M'H_1}{MM'} = \frac{\sin \widehat{M'MH_1}}{\sin \widehat{MH_1M'}};$$

d'où l'on déduit, en divisant membre à membre:

$$(1^\circ) \qquad \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin \widehat{M'MH}}{\sin \widehat{M'MH_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{MH_1M'}}{\sin \widehat{MHM'}}.$$

Prenons sur la sécante MM' un point I fixe et à distance finie de M; menons IK et IK_1 respectivement parallèles à MH et MH_1; l'égalité (1°) pourra s'écrire

$$(2^\circ) \qquad \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin \widehat{M'IK}}{\sin \widehat{M'IK_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{IK_1M'}}{\sin \widehat{IKM'}}.$$

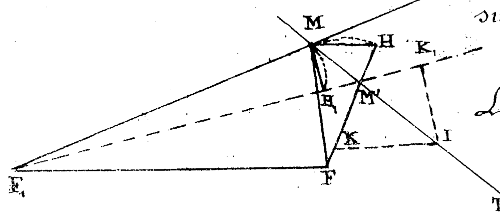
Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M en restant sur la courbe, la sécante MM' deviendra la tangente MT; mais la droite MH devient alors tangente en M au cercle FM, par suite, la parallèle IK devient, à la limite, perpendiculaire au rayon FM; de même IK_1 devient

perpendiculaire au rayon F_1M. L'égalité (2°) devient donc, à la limite:

$$\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - IMK\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - IMK_1\right)} = \frac{\cos FMT}{\cos F_1MT};$$

c'est la relation qu'il fallait démontrer.

2ème Cas. Supposons $\Delta\rho$ négatif et $\Delta\rho_1$ positif. Rabattons FM en FH sur FM', et F_1M en FH_1 sur F_1M'; on aura, en valeur absolue,



$$M'H = -\Delta\rho, \quad M'H_1 = +\Delta\rho_1.$$

Les triangles MHM' et MH_1M' donneront, comme dans le cas précédent:

$$(1°) \qquad \frac{-\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin \widehat{M'MH}}{\sin \widehat{M'MH_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{MH_1M'}}{\sin \widehat{MHM'}}.$$

Prenons sur la sécante MM' un point I fixe et à distance finie de M; soient IK et IK_1 respectivement parallèles à MH et MH_1, K et K_1 étant les intersections respectives de ces parallèles avec FM' et F_1M'; l'inégalité (1°) pourra s'écrire

$$(2°) \qquad \frac{-\Delta\rho}{\Delta\rho_1} = \frac{\sin \widehat{MIK}}{\sin \widehat{MIK}} \cdot \frac{\sin \widehat{IK_1M}}{\sin \widehat{IKM'}}.$$

Lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM' devient la tangente MT; IK et IK_1 deviennent respectivement perpendiculaires aux rayons FM et F_1M; l'inégalité (2°) donne donc, à la limite:

$$\lim \frac{-\Delta\rho}{\Delta\rho} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - IMK\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - IMK_1\right)} = \frac{\cos IMK}{\cos IMK_1};$$

mais l'angle IMK_1 est le supplément de TMF_1; on a donc

$$\frac{\cos \widehat{TMF}}{\cos \widehat{TMF_1}} = \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_1}.$$

C. Q. F. D.

Lemme II. Une courbe étant définie par une relation entre les distances ρ et δ d'un quelconque de ses points à un point fixe F et à une droite fixe D,

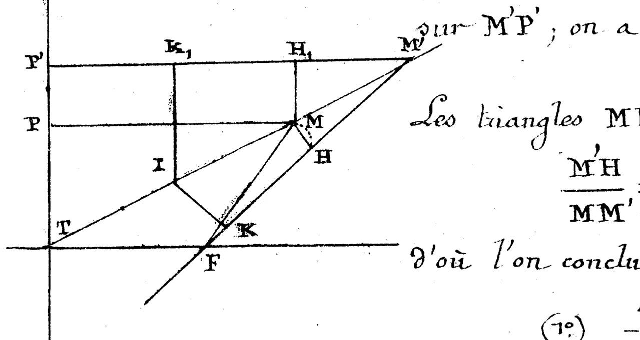
$$f(\rho, \delta) = 0;$$

si MT est la tangente au point M défini par ρ et δ, on a

$$(II) \qquad \frac{\cos \widehat{TMF}}{\cos \widehat{TMP}} = \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\delta} = \rho'_\delta,$$

MP étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite D.

Soient M et M' deux points voisins; rabattons FM en FH sur FM', et menons MH_1 perpendiculaire sur $M'P'$; on a



$$M'H = \Delta\rho, \quad M'H_1 = \Delta\delta.$$

Les triangles MHM' et MH_1M' donnent

$$\frac{M'H}{MM'} = \frac{\sin M'MH}{\sin MHM'}, \quad \frac{M'H_1}{MM'} = \frac{\sin M'MH_1}{1};$$

d'où l'on conclut

$$(1°) \qquad \frac{\Delta\rho}{\Delta\delta} = \frac{\sin \widehat{M'MH}}{\sin M'MH_1} \cdot \frac{1}{\sin MHM'}.$$

Par un point I, à distance finie sur MM', menons IK et IK_1 respectivement parallèles à MH et MH_1; l'égalité précédente s'écrira

$$(2°) \qquad \frac{\Delta\rho}{\Delta\delta} = \frac{\sin \widehat{M'IK}}{\sin \widehat{M'IK_1}} \cdot \frac{1}{\sin IKM'}.$$

En passant à la limite, et en reprenant les raisonnements déjà faits, on trouve

$$\frac{\cos \widehat{TMF}}{\cos TMP} = \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\delta};$$

c'est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

Remarque: Si l'équation d'une courbe est

$$f(\omega, \omega_1) = 0,$$

ω et ω_1 étant les angles des rayons vecteurs FM et F_1M avec l'axe polaire, on aura

$$\text{(III)} \quad \frac{\sin \widehat{TMF}}{\sin \widehat{TMF_1}} = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega} \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1} = \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega} \cdot \omega'_{\omega_1}$$

En effet, M' étant un point voisin de M, on a

$$\frac{MM'}{MF} = \frac{\sin \widehat{MFM'}}{\sin \widehat{TM'F}}; \quad \frac{MM'}{MF_1} = \frac{\sin \widehat{MF_1M'}}{\sin \widehat{TM'F_1}};$$

d'où $\dfrac{\sin \widehat{TM'F}}{\sin \widehat{TM'F_1}} = \dfrac{\rho \sin \Delta\omega}{\rho_1 \sin \Delta\omega_1}$, car $\widehat{MFM'} = \Delta\omega$, $\widehat{MF_1M'} = \Delta\omega_1$;

mais $\dfrac{\rho}{\rho_1} = \dfrac{\sin\omega_1}{\sin\omega}$; donc

$$\frac{\sin \widehat{TM'F}}{\sin \widehat{TM'F_1}} = \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega} \cdot \frac{\sin\Delta\omega}{\sin\Delta\omega_1} = \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega} \cdot \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right) \cdot \left(\frac{\sin\Delta\omega}{\Delta\omega}\right) \cdot \left(\frac{\Delta\omega_1}{\sin\Delta\omega_1}\right);$$

en passant à la limite, on obtient la formule (III) qu'il s'agissait de démontrer.

732. Nous allons appliquer ces formules aux courbes du second ordre.

1° **Ellipse.**

L'ellipse est définie par la relation N° [694]

$$\rho + \rho_1 = 2a.$$

d'où l'on conclut d'après la formule (I) N° [731]

$$\frac{\cos FMT}{\cos F_1MT} = -1;$$

c. à. d. que l'angle F_1MT est le supplément de FMT; donc

Dans l'ellipse, la tangente est également inclinée sur les rayons vecteurs qui passent par le point de contact.

Réciproque. Cette propriété est caractéristique de l'ellipse.

On a, en effet, d'après l'hypothèse

$$\cos \widehat{F_1MT} = -\cos \widehat{FMT};$$

par conséquent, d'après la formule (I) du N° [731]:

$$\rho'_{\rho_1} = -1;$$

et, en remontant aux fonctions primitives:

$$\rho = -\rho_1 + C, \text{ ou } \rho + \rho_1 = \text{constante};$$

C. Q. F. D.

2° **Hyperbole.**

L'hyperbole est définie par la relation N° [697]

$$\rho_1 - \rho = 2a$$

d'où l'on conclut, d'après la formule (I) N° [731]

$$\frac{\cos FMT}{\cos F_1MT} = +1;$$

les angles FMT et F_1MT sont donc égaux ; par conséquent.

Dans l'hyperbole, la tangente est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui passent par le point de contact.

Réciproque. Cette propriété est caractéristique de l'hyperbole.

On a, en effet, d'après l'hypothèse

$$\cos \widehat{F_1MT} = \cos \widehat{FMT} ;$$

ou, d'après la formule (I) du N.° [731]

$$\rho'_{\rho_1} = +1 ;$$

et, en remontant aux fonctions primitives :

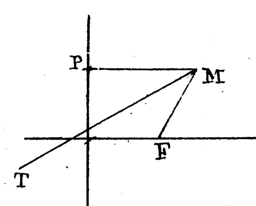
$$\rho = \rho_1 + C ; \text{ ou } \rho_1 - \rho = \text{constante}.$$

C.Q.F.D.

3.° Parabole.

La parabole est définie par la relation N.° [699]

$$\rho = \delta ;$$



d'où l'on conclut, d'après la formule (II) du N.° [731]

$$\cos \widehat{FMT} = \cos \widehat{TMP}.$$

Dans la parabole, la tangente est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur et la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la directrice.

Réciproque. Cette propriété est caractéristique de la parabole.

On a, en effet, d'après l'hypothèse

$$\cos \widehat{FMT} = \cos \widehat{PMT} ;$$

ou d'après la formule (II) du N.° [731]

$$\rho'_\delta = 1 ;$$

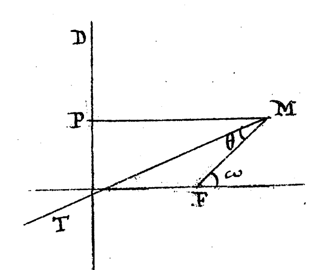
en remontant aux fonctions primitives, il vient

$$\rho = \delta + C ; \text{ ou, ce qui revient au même : } \rho = \delta .$$

C.Q.F.D.

Remarque. D'après la propriété des foyers, une conique peut se définir par l'équation

$$(1) \quad \rho = \frac{c}{a} . \delta ,$$



$\frac{c}{a}$ étant l'excentricité. On conclut de la formule (II) du N.° [731]

$$(2) \quad \frac{\cos \widehat{TMF}}{\cos \widehat{TMP}} = \frac{c}{a} ;$$

MT étant la tangente en un point M ; MF le rayon focal passant par ce point ; et MP la perpendiculaire abaissée sur la directrice correspondant au foyer F.

733 Les propriétés que nous venons de démontrer sont comprises dans la propriété générale suivante :

Les tangentes menées d'un point quelconque à une conique sont également inclinées sur les rayons focaux qui passent par le point considéré.

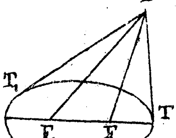
1.° Ellipse. Hyperbole.

Nous allons démontrer que les bissectrices du système des tangentes coïncident avec les bissectrices du système des rayons focaux.

L'équation des tangentes menées d'un point P (α, β) est N.° [724]

$$(x-\alpha)^2(\beta^2-b^2) - 2\alpha\beta\,(x-\alpha)(y-\beta) + (y-\beta)^2(\alpha^2-a^2)\, y^2 = 0 .$$

L'équation des parallèles à ces tangentes menées par l'origine s'obtiendra en égalant à zéro les termes du second degré, on trouve ainsi



$$(1)\qquad (\beta^2-b^2)x^2-2\alpha\beta xy+(\alpha^2-a^2)y^2=0.$$

Les parallèles aux rayons focaux FP, F'P, menées par l'origine, ont pour équations respectives

$$y-\frac{\beta}{\alpha-c}x=0,\qquad y-\frac{\beta}{\alpha+c}x=0;$$

l'équation des parallèles aux rayons focaux sera donc

$$(2)\qquad \beta^2x^2-2\alpha\beta xy+(\alpha^2-c^2)y^2=0.$$

Or rapellons que N.° [579] le système des bissectrices des deux droites

$$(3)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

a pour équation

$$(4)\qquad x^2+\frac{C-A}{B}xy-y^2=0.$$

D'après cela, le système des bissectrices pour les parallèles aux tangentes est

$$x^2+\frac{\beta^2-\alpha^2+c^2}{2\alpha\beta}xy-y^2=0;$$

c'est aussi celui des rayons focaux. Donc les angles TPT_1, FPF_1 ont mêmes bissectrices, c.à.d. que les tangentes sont également inclinées sur les rayons vecteurs.

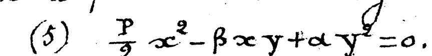
Le même calcul s'applique à l'hyperbole.

2.° Parabole.

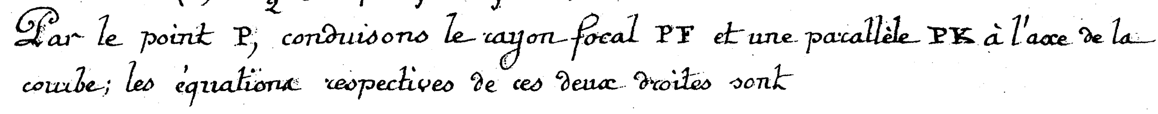
L'équation des tangentes menées par le point (α,β) est N.° [724]

$$\alpha(y-\beta)^2-\beta(x-\alpha)(y-\beta)+\frac{p}{2}(x-\alpha)^2=0;$$

L'équation des parallèles à ces tangentes menées par l'origine sera



$$(5)\qquad \frac{p}{2}x^2-\beta xy+\alpha y^2=0.$$



Par le point P, conduisons le rayon focal PF et une parallèle PK à l'axe de la courbe; les équations respectives de ces deux droites sont

$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-\frac{p}{2}}(x-\alpha),\quad y-\beta=0;$$

l'équation des parallèles à ces droites menées par l'origine sera

$$(6)\qquad -\beta xy+\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)y^2=0.$$

D'après les formules (3) et (4), le système des bissectrices pour ces deux couples de droites (5) et (6) aura la même équation

$$x^2+\frac{p-2\alpha}{\beta}xy-y^2=0.$$

Donc les tangentes, menées d'un point quelconque à une parabole, font des angles égaux avec le rayon focal et le diamètre qui passent par ce point.

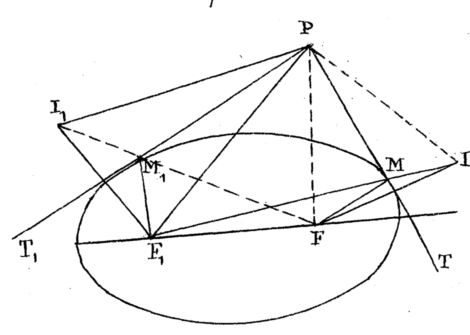
Remarque. On conclut de cette proposition générale les théorèmes des N.os [728], [729], [730].

734. En admettant ces théorèmes particuliers, on peut démontrer géométriquement la proposition générale que nous venons d'établir par un calcul direct.

1.° Ellipse.

Soit P le point de concours des tangentes, M et M_1 leurs points de contact; joignons le point M aux foyers, et prolongeons F_1M d'une quantité $MI=MF$; joignons de même le point M_1 aux foyers et prolongeons FM_1 d'une quantité $M_1I_1=M_1F_1$; joignons enfin PI, PI_1; PF, PF_1.

Puisque $MI = MF$, on aura $F_1I = 2a$; on aura de même $FI_1 = 2a$.



Les deux triangles PIF_1 et PI_1F ont leurs trois côtés égaux; car $IF_1 = I_1F = 2a$; la droite MT, tangente en M, est bissectrice de l'angle FMI; le triangle FMI étant isocèle, la droite MT est perpendiculaire sur le milieu de FI; donc $PI = PF$. De même $PI_1 = PF_1$.

Les deux triangles PIF_1 et PI_1F étant égaux, il en résulte l'égalité des angles $\widehat{IPF_1}$ et $\widehat{I_1PF}$; et, comme ils ont une partie commune $\widehat{FPF_1}$, on en conclut $\widehat{IPF} = \widehat{I_1PF_1}$; les moitiés de ces angles seront égales; donc $\widehat{MPF} = \widehat{M_1PF_1}$; c. à. d. que

Les tangentes sont également inclinées sur les droites qui joignent les foyers à leur point de concours.

L'égalité des triangles PFI_1 et PF_1I donne encore

$$\widehat{PFI_1} = \widehat{PIF_1}\;;\ \text{or}\ \widehat{PIF_1}\ \text{ou}\ \widehat{PIM} = \widehat{PFM},$$

comme différences d'angles égaux de triangles isocèles; donc $\widehat{PFM_1} = \widehat{PFM}$.

Donc la droite, qui joint un foyer au point de concours de deux tangentes, est bissectrice de l'angle formé par les droites qui joignent ce foyer aux points de contact de ces tangentes.

N. B. Cette démonstration est applicable mot pour mot à l'hyperbole.

2° Parabole.

Si du foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, le pied de cette perpendiculaire est sur la tangente au sommet; et le point où elle rencontre la directrice est sur le diamètre qui passe par le point de contact; ces propriétés résultent de ce fait que la tangente fait des angles égaux avec le diamètre et le rayon focal qui passent par le point de contact.

Ceci rappelé, soient PM, PM_1, les deux tangentes menées du point P; M et M_1 les points de contact; I et I_1 les points où les diamètres, passant par les points de contact, rencontrent la directrice.

D'après la propriété énoncée, les droites PM et PM_1 sont respectivement perpendiculaires aux droites IF et I_1F, et passent par leurs milieux. Par le point P, menons une parallèle PF_1 à l'axe de la parabole; il s'agit de démontrer l'égalité

$$(1)\qquad \widehat{MPF} = \widehat{M_1PF_1}.$$

D'après ce que nous venons de dire

$$PI = PF = PI_1\;;$$

le triangle IPI_1 est donc isocèle; et, comme PF_1 est perpendiculaire à la directrice, il s'ensuit que

$$\widehat{IPF_1} = \widehat{I_1PF_1}\;;$$

ou

$$2\widehat{MPF} + \widehat{FPF_1} = 2\widehat{M_1PF} - \widehat{FPF_1}\;;$$

ou encore

$$\widehat{MPF} = \widehat{M_1PF} - \widehat{FPF_1}\;;$$

donc enfin

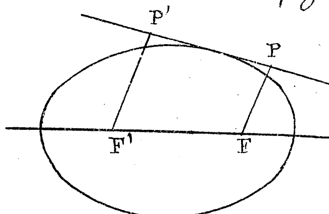
$$\widehat{MPF} = \widehat{M_1PF_1}\;;$$

C. Q. F. D.

735. Dans l'ellipse ou l'hyperbole, le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est constant et égal au carré du demi-axe non focal.

1° Ellipse.

La distance du foyer F (c, o) à une tangente



$$(1) \qquad y - mx - \sqrt{a^2m^2+b^2} = 0,$$

est, en valeur absolue,

$$FP = \frac{mc+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{+\sqrt{m^2+1}};$$

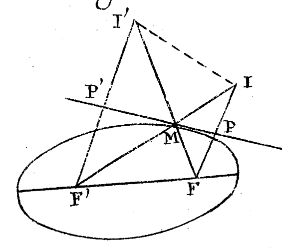
car, le point F étant au dessous de la tangente choisie et le coefficient de y étant positif, le premier membre de l'équation (1) devient positif lorsqu'on y substitue les coordonnées du point F. On a de même

$$F'P' = \frac{-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{+\sqrt{m^2+1}}.$$

De là nous concluons

$$(2) \qquad FP.\ F'P' = b^2.$$

Démonstration Géométrique. Joignons F'M et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre avec FP en I; prolongeons de même FM jusqu'à sa rencontre en I' avec F'P'; on aura, par suite de l'égalité des angles de la tangente avec les rayons focaux:



$$\begin{cases} MI = MF, \\ MI' = MF', \end{cases} \quad \begin{cases} F'I = 2a, \\ FI' = 2a, \end{cases} \quad \begin{cases} FP = PI; \\ F'P' = P'I'; \end{cases} \quad \text{et } II' = FF' = 2c.$$

Le trapèze isocèle étant inscriptible, on a

$$FI.\ F'I' + II'.\ FF' = IF'.\ I'F;$$

d'où

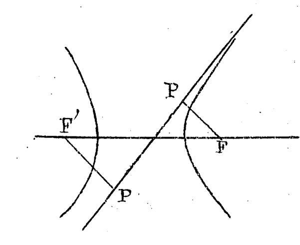
$$FP.\ F'P' = a^2 - c^2 = b^2.$$

2° Hyperbole.

La distance du foyer F (c, o) à la tangente

$$(3) \qquad y - mx - \sqrt{a^2m^2-b^2} = 0,$$

est, en valeur absolue



$$FP = \frac{mc+\sqrt{a^2m^2-b^2}}{+\sqrt{m^2+1}};$$

puisque le point F est au-dessous de la droite PP'; on trouve de même pour la valeur absolue de P'F' :

$$F'P' = \frac{+mc-\sqrt{a^2m^2-b^2}}{+\sqrt{m^2+1}};$$

d'où l'on conclut :

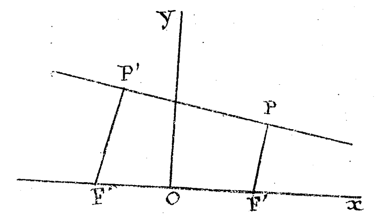
$$(4) \qquad FP.\ F'P' = b^2.$$

736. La propriété qu'on vient de démontrer est caractéristique des courbes du second ordre; car

Une courbe telle, que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes F et F' sur une tangente quelconque est constant, est une ellipse ou une hyperbole. voir N.° (712).

La courbe sera une ellipse, si les tangentes ne doivent pas rencontrer la droite FF' entre les points fixes F et F'; ce sera une hyperbole dans le cas contraire.

Prenons pour axe des x la droite FF', pour origine le milieu O de FF', et désignons FF' par 2c. Soit



$$(1) \qquad y = mx + n,$$

l'équation d'une tangente quelconque à la courbe cherchée; le point étant au dessous de cette droite, on aura pour la valeur absolue de FP

$$FP = \frac{mc+n}{+\sqrt{m^2+1}} ;$$

de même, le point F' sera au dessous de la droite (1) si l'on suppose que cette droite ne rencontre pas l'axe des x entre F et F', et l'on aura

$$F'P' = \frac{-mc+n}{+\sqrt{m^2+1}} .$$

Par hypothèse, le produit FP.F'P est constant; soit b^2 sa valeur, on aura

$$\frac{n^2 - m^2c^2}{m^2+1} = b^2 ;$$

d'où l'on conclut, en posant $b^2+c^2=a^2$:

$$n^2 = a^2m^2 + b^2 ;$$

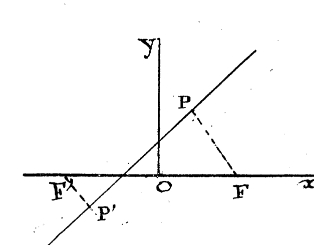
l'équation d'une quelconque des tangentes à la courbe cherchée est donc

$$(2) \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

En cherchant l'enveloppe de la droite (2), on trouve une ellipse ayant pour foyers F et F', et pour axes a et b. [Voir la fin du N.° (764)]

Si la tangente PP' coupe la droite FF' entre les deux points F et F', on aura pour la valeur absolue de FP (figure ci-contre)

$$FP = \frac{mc+n}{+\sqrt{m^2+1}} ,$$



car le point F est au-dessous de la droite PP'. Le point F' étant au-dessus de cette même droite, on aura pour la valeur absolue de F'P':

$$F'P' = \frac{+mc-n}{+\sqrt{m^2+1}} .$$

Le produit FP.F'P' est constant, par hypothèse; soit b^2 sa valeur, on aura

$$\frac{m^2c^2-n^2}{m^2+1} = b^2 ;$$

d'où l'on conclut

$$n^2 = m^2(c^2-b^2) - b^2 = a^2m^2 - b^2 ;$$

car $c > b$, puisqu'autrement n serait toujours imaginaire; on peut donc poser $c^2-b^2=a^2$, et a sera une quantité réelle. L'équation d'une quelconque des tangentes à la courbe cherchée est, par conséquent,

$$(3) \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

En cherchant l'enveloppe de cette droite, on trouvera une hyperbole ayant pour foyers F et F', et pour axes a et b. (Voir la fin du N.° (764))

VII.° Construction Géométrique des tangentes.

Première méthode.

737. 1.° Ellipse.

Cette méthode s'appuie sur cette propriété que les tangentes, en un point M de l'ellipse et au point correspondant M, du cercle homographique, se coupent sur le diamètre AA' commun à l'ellipse et au cercle homographique N.° (718).

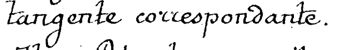
1.er Cas. La courbe est donnée par ses axes.

Mener une tangente à l'Ellipse en un point M donné sur la courbe.

Déterminons sur le cercle homographique le point M_1 correspondant au point M de l'ellipse; menant alors la tangente M_1T au cercle, cette droite coupe le grand axe AA' en T; TM sera la tangente à l'ellipse en M.

Mener une tangente à l'Ellipse parallèlement à une droite donnée GD.

Supposons, pour un moment, cette tangente déterminée, soit TM la tangente cherchée; M_1T sera la tangente correspondante.



Il suffit alors de déterminer M_1T ou sa parallèle GD_1.

Pour cela, soit une parallèle à l'axe OB rencontrant les droites TM, TM_1; GD, GD_1, respectivement en L, L_1; H, H_1; on a

$$\frac{KH}{KH_1}=\frac{KL}{KL_1},$$

puisque GH, GH_1 sont respectivement parallèles à TL, TL_1; par suite

$$\frac{KH}{KH_1}=\frac{NM}{NM_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{b}{a}.$$

Ainsi, si H est un point quelconque de GD et si H_1 est le point correspondant sur la droite cherchée GD_1, on a $\frac{KH}{KH_1}=\frac{b}{a}$. D'après cela, si nous joignons A'B qui rencontre GD en R, puis $A'B_1$ qui rencontre en R_1 la droite RS parallèle à OB, le point R_1 sera un point de la droite GD_1 que nous cherchons, puisque l'on aura la relation

$$\frac{SR}{SR_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{b}{a}.$$

La droite GD_1 est donc déterminée puisqu'on connait maintenant deux de ses points G et R_1.

Alors si nous menons M_1T parallèle à GR_1 et tangente au cercle homographique, la tangente à l'ellipse parallèle à GD sera MT; et le point de contact M se déterminera très exactement à l'aide de la perpendiculaire M_1N.

Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur P.

Supposons pour un instant cette tangente déterminée et soit PM; la tangente correspondante sera TM_1; déterminons TM_1. Pour cela remarquons que pour tout point L_1 pris sur cette droite on devra avoir la relation

$$\frac{LK}{L_1K}=\frac{MN}{M_1N}=\frac{b}{a};$$

donc si l'on mène PB qui coupe AA' en I et IB_1 qui coupe PQ en P_1, ce point P_1 appartient à TM_1; car on a

$$\frac{PQ}{P_1Q}=\frac{BO}{B_1O}=\frac{b}{a}.$$

Alors P_1 étant déterminé, on mène P_1M_1 tangente au cercle homographique; cette droite coupe AA' en T, et TP sera la tangente cherchée.

Le point de contact M s'obtient très exactement à l'aide de la perpendiculaire M_1N.

2ème Cas. La courbe est donnée par deux diamètres en grandeur et position.

On arrive à des constructions analogues en s'appuyant encore sur ce principe que la tangente à l'ellipse au point M et la tangente au cercle au point correspondant M_1 se coupent au même point T du diamètre AA' Nos (336), (718).

Tangente en un point M de la courbe.

On détermine le point correspondant M_1 du point M No (336) sur le cercle homographique; on mène

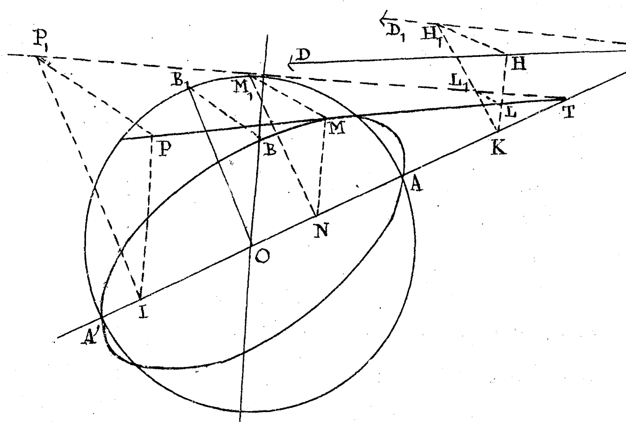
en M_1 la tangente au cercle, laquelle coupe le diamètre OA en T; la droite TM sera la tangente cherchée.

Tangente parallèle à une droite donnée GR.

Soit MT la tangente cherchée, et M_1T la tangente au cercle au point M_1 correspondant de M; il suffira évidemment de construire la droite GH_1 parallèle à TM_1. Pour cela, remarquons que l'on a

$$\frac{KH}{KH_1}=\frac{KL}{KL_1}=\frac{MN}{M_1N}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{b}{a},$$

en représentant par b et a les longueurs OB et OA. Ainsi, pour un point quelconque H, pris sur GD_1, on a



$$\frac{HK}{H_1K}=\frac{OB}{OB_1}.$$

Par conséquent, prenons un point quelconque H sur GD, menons HK parallèle à BO, puis KH_1 parallèle à OB_1, et enfin HH_1 parallèle à BB_1; l'intersection de ces deux dernières droites déterminera le point H_1. La droite GH_1 étant connue, on mènera au cercle, décrit sur AA' comme diamètre, une tangente M_1T parallèle à la droite GH_1; cette tangente rencontre AA' en un point T; et la droite TM, parallèle à GD, sera la tangente cherchée. Le point de contact M se déterminera directement en construisant le point correspondant du point M_1.

Tangente passant par un point extérieur P.

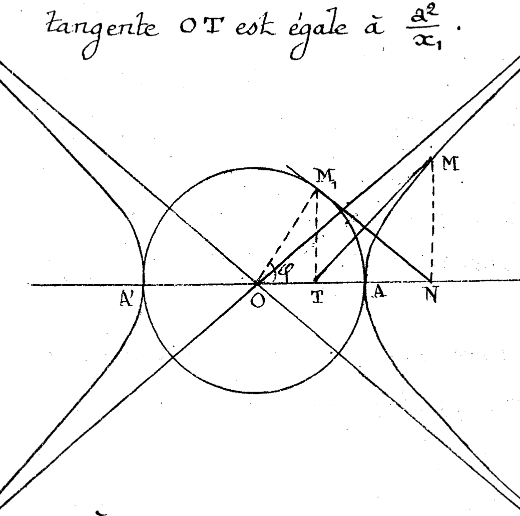
Soit PMT la tangente cherchée; PM rencontre OA en T, et M_1T est la tangente correspondante à MT; il nous suffit évidemment de déterminer M_1T. Pour cela remarquons que pour tout point L_1 pris sur cette droite, on doit avoir

$$\frac{L_1K}{LK}=\frac{M_1N}{MN}=\frac{B_1O}{BO}.$$

Par le point P donné menons PI parallèle à BO, puis IP_1 parallèle à OB_1, et enfin PP_1 parallèle à BB_1; l'intersection de ces deux dernières droites déterminera le point P_1. Le point P_1 étant connu, on mènera au cercle homographique la tangente P_1M_1, laquelle rencontre AA' au point T; TP sera la tangente demandée. Le point de contact M se déterminera en construisant le point correspondant du point M_1.

738. 2°. *Hyperbole*

Nous avons démontré que si (x_1, y_1) sont les coordonnées d'un point M de l'hyperbole, la sous-tangente OT est égale à $\frac{a^2}{x_1}$.



Or posant

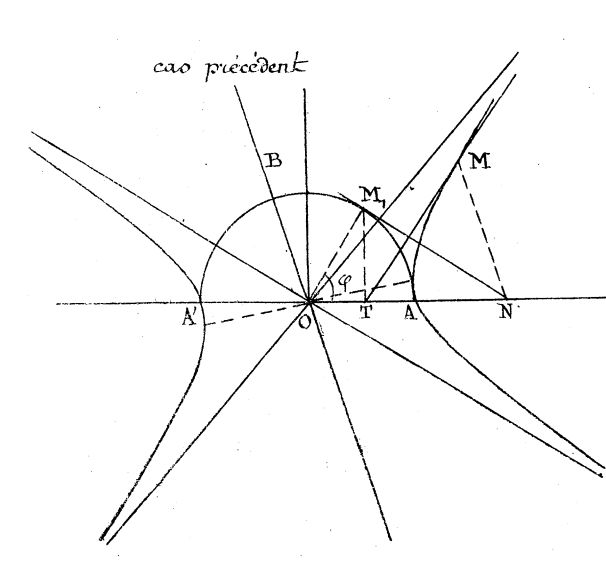
$$x=\frac{a}{\cos\varphi}\quad \text{N.° [339]},$$

nous avons vu que φ est l'angle M_1ON; donc

$$OT=\frac{a^2}{\frac{a}{\cos\varphi}}=a\cos M_1ON,$$

par conséquent OT est la projection de OM_1 sur AA'. Alors pour construire la tangente en un point M d'une hyperbole rapportée à ses axes, on abaisse la perpendiculaire MN sur AA'; on mène ensuite au cercle AA' la tangente NM_1; puis abaissant M_1T perpendiculaire sur AA', la tangente demandée sera TM.

2ème Cas. Si l'hyperbole était rapportée à deux diamètres conjugués, on aurait encore comme dans le



$$OT = \frac{a^2}{x_1},$$

a étant maintenant la longueur du diamètre OA.
Or posons

$$x_1 = \frac{a}{\cos\varphi},$$

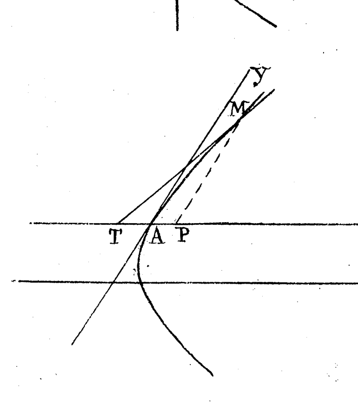
l'angle φ est l'angle M_1ON, on a, par suite,

$$OT = a\cos M_1ON\,;$$

donc OT est la projection de OM_1 sur AA'; d'où l'on conclut encore la construction de la tangente MT. — On mène MN parallèle à OB, puis la tangente NM_1 au cercle décrit sur AA'; on a le point T en projetant M_1 sur AA'.

3° Parabole.

1er Cas. Si la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet, la sous-normale est égale au demi-paramètre p ou 2AF; (nous le verrons plus loin); donc pour mener la tangente au point M, on abaisse la perpendiculaire MP sur AF, et prenant alors PN égal à 2.AF on aura la normale au point M en joignant MN; et par suite, la tangente MT pourra se construire immédiatement.



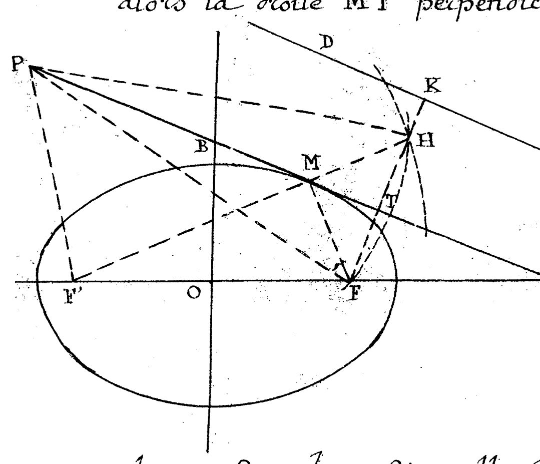
2ème Cas. La courbe est donnée par un de ses diamètres et la tangente à l'extrémité A de ce diamètre; alors on sait que si l'on mène par le point M une parallèle MP à Ay et que, si T est le point d'intersection de la tangente MT avec Ax, on a AP = AT. De là résulte une méthode évidente pour construire la tangente MT.

2ème Méthode.

710. Cette seconde méthode s'appuie sur les propriétés de la tangente relatives aux rayons vecteurs qui joignent le point de contact aux foyers de la courbe.

1° Ellipse. — Tangente en un point donné sur la courbe.

Supposons la tangente construite, soit MT; alors si l'on joint FM et F'M et si du point F on abaisse une perpendiculaire sur TM, le triangle HFM est isocèle; car les angles PMF' et FMT étant égaux, on en conclut l'égalité des angles MFH et MHF, et par suite celle des côtés MF et MH; de sorte que FM + F'M étant égal à 2a, il s'en suit que F'H est aussi égal à 2a; donc, pour construire la tangente au point M, on mène F'M qu'on prolonge jusqu'en H de telle sorte que l'on ait MH = MF; alors la droite MT perpendiculaire sur FH est la tangente à l'ellipse au point M.



Tangente parallèle à une droite donnée D.

On mène FK perpendiculaire sur la droite D, puis du point F' comme centre avec 2a pour rayon on décrit un cercle qui coupera FK en deux points. Considérons le point H; en joignant FH et en menant MT perpendiculaire au milieu de cette droite on aura la tangente demandée; le point de contact se détermine très exactement à l'aide de la droite F'H. Il existe une seconde solution, et il y en a toujours deux, car il suffit pour cela que le rayon 2a du cercle de centre F' soit plus grand que la perpendiculaire abaissée de F' sur FK; or la plus grande valeur de cette perpendiculaire est FF', et il est évident que FF' est < 2a.

Tangente par un point P extérieur.

Supposons que PM soit la tangente cherchée ; alors en menant FT perpendiculaire sur cette droite et prenant sur cette perpendiculaire TH = TF, on aura F'H = 2a et PH = PF. Donc, si du point F' comme centre avec 2a pour rayon, et si du point P comme centre avec PF pour rayon, nous décrivons deux cercles, ces cercles se couperont, en général, en deux points ; soit par exemple H un de ces points, alors en menant la droite FH, la tangente cherchée est la perpendiculaire TP abaissée du point P sur FH. Le point de contact M se détermine à l'aide de la droite F'H

Tant que le point P est extérieur à l'ellipse, il y a toujours deux solutions. En effet, pourqu'il y ait deux solutions, il faut que les deux cercles se coupent c.à.d. que la distance des centres F'P soit plus petite que la somme des rayons (FP + 2a) et plus grande que leur différence.

La 1ère de ces deux conditions est toujours remplie ; car on a évidemment

(1°) $$PF' < PF + FF' \text{ et à fortiori } PF' < PF + 2a.$$

Quant à la seconde condition, si PF > FF' on a

(2°) $$PF' > PF - FF', \text{ et à fortiori } PF' > PF - 2a.$$

Si PF < FF', alors le point P étant extérieur à l'ellipse, on en conclut

(3°) $$PF' + PF > 2a \text{ d'où } PF' > 2a - PF.$$

Par conséquent, tant que le point P est extérieur à l'ellipse, il existe toujours deux tangentes issues du point P.

741. 2° Hyperbole. — Tangente en un point M sur la courbe.

Supposons la tangente construite et abaissons FH perpendiculaire sur cette tangente ; alors comme les angles TMF et TMH sont égaux, il s'en suit qu'il en est de même des deux angles MHF et MFH, on a donc

$$HM = MF,$$
et par suite $$FH = 2a.$$

Donc pour construire la tangente MT, on décrit du point F' comme centre un cercle de rayon 2a qui coupera F'M en un point H, et MT perpendiculaire sur la droite FH sera la tangente demandée.

Tangente parallèle à une droite donnée D.

Par le point F on mène FK perpendiculairement à la droite donnée, et du point F' comme centre on décrit un cercle de rayon 2a qui coupera FK en un point H ; alors la tangente cherchée sera TM perpendiculaire au milieu de FH.

Le point de contact M est déterminé à l'aide de la droite F'H.

Pourque le problème admette une solution, il faut que le cercle rencontre la perpendiculaire FH, c.à.d. que la distance F'H soit plus grande que F'I ; or F'H = 2a, F'I = 2c cos α, en appelant α l'angle de la droite D avec Ox ; il faut donc qu'on ait

$$2a > 2c \cos\alpha \quad \text{ou} \quad \cos\alpha < \frac{a}{c}.$$

Or si l'on appelle φ l'angle de l'asymptote avec Ox, on a

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}, \text{ d'où } \cos\varphi = \frac{a}{c};$$

donc la condition $\cos\alpha < \frac{a}{c}$ revient à

$$\alpha > \varphi.$$

Donc, si la droite menée par le point O parallèlement à DG ne rencontre pas l'hyperbole, alors il y a deux solutions, puisque α est évidemment $> \varphi$. Dans le cas contraire il n'y a pas de solution.

Tangente par un point extérieur P.

En raisonnant comme dans le cas de l'ellipse, on démontre que le point H est à l'intersection de deux cercles décrits, l'un du point F' comme centre avec 2a pour rayon, et l'autre du point F comme centre et ayant pour rayon PF.

Le point H étant déterminé, on mène PM perpendiculaire sur FH, c'est la tangente demandée.

Si le point P est extérieur il y a toujours deux solutions.

En effet, le point P étant extérieur on a

$$(1^\circ)\quad F'P - FP < 2a, \quad \text{ou} \quad F'P < FP + 2a;$$

donc la distance des centres est plus petite que la somme des rayons (FP+2a).

Maintenant si PF < FF', on a dans le triangle F'PF

$$(2^\circ)\quad F'P > 2c - PF, \text{ et à fortiori } F'P > 2a - PF.$$

Si FP > FF', on a d'après la position du point P

$$(3^\circ)\quad F'P > FP, \text{ et à fortiori } F'P > FP - 2a;$$

(car on peut toujours prendre pour centre de rayon 2a le foyer qui ne se trouve pas du même côté que le point donné P).

Par conséquent, la distance des centres est plus grande que la différence des rayons : donc les deux cercles se coupent toujours tant que le point P est extérieur.

742. 3° Parabole.

La construction de la tangente à la parabole s'appuie sur ce que la tangente fait des angles égaux avec le rayon focal FM et le diamètre MH qui passe par le point de contact. On a HMT = TMF; donc, si du point F on abaisse la perpendiculaire FT sur TM, le triangle HFM ainsi déterminé sera isocèle et l'on aura MF = MH, par suite le point H est sur la directrice.

Tangente en un point donné sur la courbe.

De la remarque précédente on conclut que pour construire la tangente au point M il faut mener d'abord MH parallèle à l'axe AF, puis joindre le foyer au point d'intersection H de cette droite avec la directrice; la tangente en M est alors la perpendiculaire abaissée du point M sur FH.

Remarque. Le lieu des projections du point F sur les tangentes à la parabole est la tangente au sommet.

Car si T est le pied de la perpendiculaire, on a TF = TH; on a de même AF = AG. Donc .....

Tangente parallèle à une droite donnée D.

On abaisse du point F la perpendiculaire FK sur la droite D; cette droite FK rencontre la directrice au point H; la tangente demandée sera une perpendiculaire MT au milieu T de la ligne FH. Le point de contact M s'obtiendra en menant HM parallèlement à l'axe AF jusqu'à sa rencontre en M avec TM.

Il n'y a évidemment qu'une seule solution et toujours une.

Tangente par un point extérieur P.

Si l'on remarque que PF = PH, on voit que pour construire la tangente

cherchée il suffira de décrire le cercle de centre P et de rayon PF; ce cercle coupera la directrice en un point H, et la tangente s'obtiendra en abaissant du point P une perpendiculaire sur FH. En menant par le point H une parallèle à l'axe de la parabole, on détermine le point de contact.

Il y a toujours deux solutions quand le point P est extérieur à la courbe; car alors on a PF > PR, par suite le cercle coupe toujours la directrice en deux points. Si PF = PR, le cercle est tangent à la directrice, il n'y a plus qu'une solution, le point est, en effet, sur la courbe. Lorsque PF < PR, il n'y a plus de solution, le point est intérieur à la courbe.

---

§ II. Polaires.

1° Équation de la polaire. Propriétés.

743. L'équation de la polaire d'un point (α, β) par rapport à la courbe $f(x,y)=0$, est (N° 430)

$$x f'_\alpha + y f'_\beta + f'_\gamma = 0.$$

Appliquant cette formule aux formes réduites des coniques, on trouve:

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$:

Polaire: (1) $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0.$

Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$:

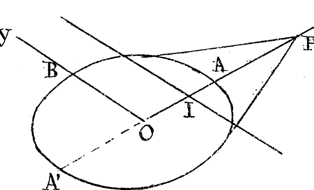
Polaire: (2) $\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}-1=0.$

Parabole: $y^2-2px=0$:

Polaire: (3) $\beta y - p(x+\alpha)=0.$

Le produit des distances du centre au pôle et à sa polaire, comptées sur le diamètre qui passe par le pôle, est égal au carré de ce diamètre.

Supposons la courbe rapportée à deux diamètres conjugués dont l'un passe par le point considéré P; l'équation de l'ellipse, par exemple, se présentera sous la forme



$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$

L'équation de la polaire du point $P(\alpha, 0)$ sera

$$\frac{\alpha x}{a'^2}-1=0;$$

elle est donc parallèle au diamètre OB conjugué de OA.

Or on a $\alpha = OP$, $x = OI$, $a' = OA$; donc

$$(1) \qquad OI.OP = \overline{OA}^2;$$

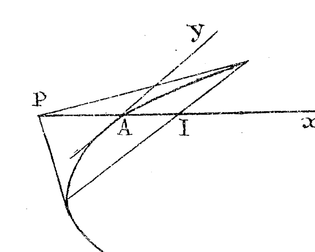
C.Q.F.D.

Cette relation est d'ailleurs une conséquence de celle qui définit la polaire; car on a pour le point I

$$\frac{2}{PI}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PA'};$$

on en déduit facilement la relation (1).

La même relation a lieu dans l'hyperbole.



Dans le cas de la parabole, en rapportant la courbe au diamètre qui passe par le point considéré, on a pour l'équation de la polaire

$$\alpha + x = 0, \text{ ou } AP = AI.$$

Donc, dans la parabole, la portion du diamètre, comprise entre un point et la polaire de ce point, est divisée par la courbe en deux parties égales.

743. Nous rappellerons la propriété fondamentale N.º [442]:

Les polaires des différents points d'une droite passent toutes par le pôle de cette droite.

Quand des droites passent par un même point, leurs pôles sont tous sur une droite qui est la polaire de ce point.

On appelle points conjugués par rapport à une conique deux points tels que la polaire de l'un passe par l'autre.

Deux points conjugués sont en même temps conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la conique et de la droite sur laquelle sont les deux points conjugués.

On appelle droites conjuguées par rapport à une conique deux droites telles que le pôle de l'une se trouve sur l'autre.

Deux droites conjuguées sont en même temps conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes menées à la conique par le point de concours des deux droites conjuguées.

Les deux interprétations de ces définitions résultent immédiatement des propriétés établies aux N.ºs [441], [442] et de la définition même de la polaire dans les courbes du second ordre.

744. Par un point pris dans le plan d'une conique passent toujours deux droites conjuguées rectangulaires.

Soit, par exemple, l'ellipse; les équations de deux droites pourront s'écrire

$$(1) \quad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0, \text{ polaire d'un point } (\alpha, \beta);$$

$$(2) \quad \frac{\alpha_1 x}{a^2} + \frac{\beta_1 y}{b^2} - 1 = 0, \text{ polaire d'un point } (\alpha_1, \beta_1).$$

Pour que le pôle de l'une soit sur l'autre, il faut et il suffit que

$$(3) \quad \frac{\alpha\alpha_1}{a^2} + \frac{\beta\beta_1}{b^2} - 1 = 0;$$

d'un autre côté, pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut que

$$(4) \quad \frac{\alpha\alpha_1}{a^4} + \frac{\beta\beta_1}{b^4} = 0.$$

Les deux équations (3) et (4) donnent

$$\alpha\alpha_1 = \frac{a^4}{c^2}, \quad \beta\beta_1 = -\frac{b^4}{c^2};$$

et les équations de deux droites conjuguées rectangulaires seront

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{a^2} + \dfrac{\beta y}{b^2} - 1 = 0, \\[2mm] \dfrac{a^2 x}{\alpha} - \dfrac{b^2 y}{\beta} - c^2 = 0. \end{cases}$$

Or on pourra disposer de α et β de manière à ce que ces deux droites passent par un point arbitrairement choisi; donc.....

745. Lorsque quatre points sont en ligne droite, leurs polaires forment un faisceau de quatre droites dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.

Soit le faisceau des quatre droites

$$y-y_0=a_1(x-x_0),\; y-y_0=b_1(x-x_0),\; y-y_0=c_1(x-x_0),\; y-y_0=d_1(x-x_0);$$

le rapport anharmonique R de ce faisceau a pour valeur:

$$(1)\qquad R=\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1}:\frac{d_1-a_1}{d_1-b_1}.$$

Si nous considérons la première de ces droites, son pôle α, β sera déterminé par

$$-\frac{\alpha}{a^2 a_1}=\frac{\beta}{b^2}=\frac{1}{y_0-a x_0};$$

c.à.d. que ce pôle sera sur la droite $y+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{a_1}=0$.

Ainsi le faisceau formé par les droites qui joignent l'origine aux pôles des quatre droites données sera

$$x+\frac{a^2}{b^2}a_1\cdot y=0,\quad x+\frac{a^2}{b^2}b_1 y=0,\quad x+\frac{a^2}{b^2}c_1 y=0,\quad x+\frac{a^2}{b^2}d_1 y=0;$$

or le rapport anharmonique de ce second faisceau, c.à.d. le rapport anharmonique des quatre pôles sera

$$(2)\qquad R=\frac{-\frac{a^2}{b^2}c_1+\frac{a^2}{b^2}a_1}{-\frac{a^2}{b^2}d_1+\frac{a^2}{b^2}b_1}:\frac{-\frac{a^2}{b^2}d_1+\frac{a^2}{b^2}a_1}{-\frac{a^2}{b^2}d_1+\frac{a^2}{b^2}b_1}=\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1}:\frac{d_1-a_1}{d_1-b_1};$$

donc.........

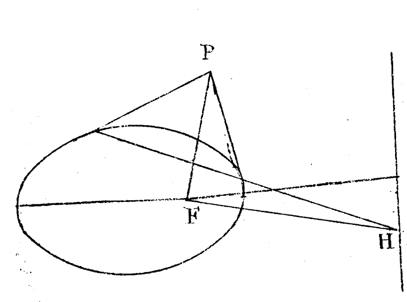
II°. Polaire du foyer, etc.

746. Les droites, qui joignent le foyer au pôle d'une droite et au point où cette droite rencontre la directrice, sont rectangulaires.

Soit P un point, H le point où sa polaire rencontre la directrice, les droites FP et FH sont perpendiculaires.

Ellipse. Les coordonnées du point P étant α, β, sa polaire est

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0;$$



le coefficient angulaire de FP est $\frac{\beta}{\alpha-c}$. Les coordonnées du point H sont $x_1=\frac{a^2}{c}$, $y_1=\left(1-\frac{\alpha}{c}\right)\frac{b^2}{\beta}$; le coefficient angulaire de FH est donc $\frac{\left(1-\frac{\alpha}{c}\right)\frac{b^2}{\beta}}{\frac{a^2}{c}-c}$. Le produit de ces coefficients angulaires est

$$\frac{\beta}{\alpha-c}\cdot\frac{(c-\alpha)\,b^2}{b^2.\beta},\ \text{ou } -1;$$

donc.....

Dans le cas particulier où le point P est sur la courbe, la polaire devient la tangente en ce point, alors les droites, qui joignent le foyer au point de contact et au point où la tangente rencontre la directrice, sont perpendiculaires.

Parabole. La polaire d'un point (α, β) est

$$\beta y-p(x+\alpha)=0;$$

le coefficient angulaire de FP est $\frac{\beta}{\alpha-\frac{p}{2}}$; celui de FH est $\frac{\frac{p(\alpha-\frac{p}{2})}{\beta}}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}$; le produit est

$$-\frac{\beta}{\alpha-\frac{p}{2}}\cdot\frac{\alpha-\frac{p}{2}}{\beta},\ \text{ou } -1;$$

donc.....

747. La polaire du foyer est la directrice; la polaire d'un point quelconque de la directrice passe par le foyer.

Ces propriétés résultent, comme nous l'avons vu, de l'équation aux foyers; nous allons les constater de nouveau à l'aide des équations réduites.

La polaire d'un point (α, β) est, pour l'ellipse

$$(1) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0;$$

les coordonnées du foyer sont $\alpha = c$, $\beta = 0$; cette équation devient $x - \frac{a^2}{c} = 0$; c'est l'équation de la directrice.

Si l'on prend un point quelconque sur la directrice $(\alpha = \frac{a^2}{c}, \beta)$, sa polaire sera

$$\frac{x}{c} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0;$$

droite passant évidemment par le foyer $(y = 0, x = c)$.

La polaire d'un point (α, β) est, pour la parabole

$$(2) \qquad \beta y - p(x + \alpha) = 0;$$

les coordonnées du foyer sont $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$; cette équation devient $x + \frac{p}{2} = 0$, ou l'équation de la direction.

Si l'on prend un point quelconque sur la directrice $(\alpha = -\frac{p}{2}, \beta)$, sa polaire sera

$$\beta y - p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0;$$

droite passant évidemment par le foyer $(y = 0, x = \frac{p}{2})$.

Il résulte d'ailleurs du théorème précédent, que la droite, qui joint au foyer un point quelconque de la directrice, est perpendiculaire à la polaire de ce point.

748. Toutes les droites conjuguées qui passent par le foyer sont rectangulaires; et réciproquement, un point tel, que toutes les droites conjuguées passant par ce point sont rectangulaires, est un foyer.

Prenons l'ellipse, par exemple; l'équation de deux droites passant par le foyer de droite seront

$$(1) \quad y = \lambda(x - c), \quad (2) \quad y = \mu(x - c);$$

le pôle de la 1ère droite sera défini par les équations

$$\frac{x}{\lambda a^2} = \frac{y}{-b^2} = \frac{1}{\lambda c};$$

si l'on exprime que ce point est sur la 2ème droite, on trouve

$$-\frac{b^2}{\lambda c} = \mu\left(\frac{a^2}{c} - c\right), \text{ ou } \lambda\mu = -1;$$

c'est la condition pour que les deux droites (1) et (2) soient conjuguées, c'est également la condition pour qu'elles soient perpendiculaires?

Réciproque. Considérons les deux droites passant par un point fixe x_0, y_0:

$$(3) \quad y - y_0 = \lambda(x - x_0); \quad (4) \quad y - y_0 = \mu(x - x_0);$$

exprimons qu'elles sont conjuguées et rectangulaires.

Le pôle de la droite (3) est défini par les égalités

$$\frac{x}{\lambda a^2} = \frac{y}{-b^2} = \frac{1}{\lambda x_0 - y_0};$$

substituons ces valeurs dans l'équation de la droite (4), on a

$$(5) \qquad \lambda\mu(x_0^2 - a^2) - (\lambda + \mu)x_0 y_0 + (y_0^2 - b^2) = 0;$$

c'est la condition pour les deux droites (3) et (4) soient conjuguées.

La condition d'orthogonalité est $\lambda\mu = -1$; éliminant μ, la relation (5) devient :

$$(6) \qquad (\lambda^2 - 1)x_0 y_0 + \lambda\{x_0^2 - y_0^2 - c^2\} = 0.$$

Ceci nous montre qu'il n'y a qu'un système de droites conjuguées rectangulaires passant par un point donné.

Pour qu'il y ait une infinité de systèmes rectangulaires, c.à.d. pour que la relation (6) soit vérifiée quelque soit λ, il faut que :

$$y_0 = 0, \text{ et } x_0 = \pm c;$$

ou

$$x_0 = 0, \text{ et } y_0 = \pm c\sqrt{-1};$$

c.à.d. que le point x_0, y_0, doit être un des foyers de la courbe.

Ce théorème se démontrera de la même manière pour le cas de la parabole.

III°. Puissance d'un point.

749. Étant donnée l'équation d'une courbe

$$(C) \qquad f(x, y) = 0,$$

on peut appeler par analogie avec le cercle N° [218], puissance d'un point x_0, y_0, par rapport à la courbe, le résultat de la substitution des coordonnées de ce point dans le premier membre de l'équation de la courbe, savoir $f(x_0, y_0)$. La relation établie au N° [435] permet de transformer de bien des manières la signification géométrique de l'expression $f(x, y)$. Nous ne nous occuperons ici que des courbes du second ordre, et nous indiquerons les significations suivantes du premier membre de l'équation.

1ère Signification.

Soit l'équation générale

$$(1) \qquad f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

et supposons que la courbe ait un centre; considérons un point $M(x_0, y_0)$ et cherchons la signification de l'expression $f(x_0, y_0)$.

La polaire du point M est

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0;$$

joignons le point M au centre O ou (a, b, c), et soit I le point où la droite OM rencontre la polaire; on a N° [55]

$$(2) \qquad \frac{MI}{IO} = -\frac{x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + f'_{z_0}}{x_0 f'_a + y_0 f'_b + f'_c}.$$

Or les coordonnées du centre annulent f'_x et f'_y; on a

$$\begin{cases} Aa + Bb + D = 0; \\ Ba + Cb + E = 0; \\ Da + Eb + F = \frac{1}{2} f'_c; \end{cases}$$

de ces trois égalités on conclut :

$$\begin{vmatrix} A & B & D+0 \\ B & C & E+0 \\ D & E & F - \frac{1}{2}f'_c \end{vmatrix} = 0;$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \frac{1}{2} f'_c \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0.$$

D'un autre côté, on sait que

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + f'_{z_0} = 2f(x_0, y_0).$$

Eu égard à ces valeurs, la relation (2) donne définitivement

$$(3) \qquad f(x_0, y_0) = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}} \cdot \frac{MI}{IO}.$$

Ainsi la puissance d'un point M est proportionnelle au rapport suivant lequel la droite qui joint le centre à ce point est divisée par la polaire du point. Ceci n'est plus applicable à la parabole; nous allons donner une autre interprétation indiquée par M. Transon, laquelle peut s'étendre à la parabole.

750. 2ème Signification

1° Ellipse ou hyperbole.

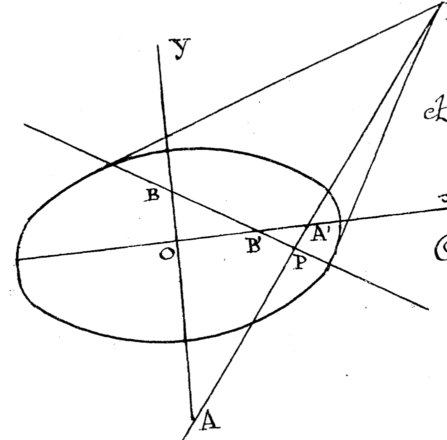
Du point M abaissons une perpendiculaire sur la polaire de ce point, soit P le pied de cette perpendiculaire et A la rencontre de cette perpendiculaire avec l'un des axes; la puissance du point M sera proportionnelle au produit MP.MA.

Prenons la courbe rapportée à ses axes:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

l'équation de la polaire du point (x_0, y_0) sera

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0;$$



et on aura pour l'équation de la droite MP

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0).$$

On conclut de là:

$$MP = \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}};$$

puis

$$\overline{MA}^2 = x_0^2 + \frac{a^4 y_0^2}{b^4} = a^4 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right).$$

Par conséquent

$$(2) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{a^2} \cdot MP.MA;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Si A' est l'intersection de la perpendiculaire MP avec l'autre axe, on trouvera

$$(2\,bis) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{b^2} \cdot MP.MA'.$$

N. B. Si B et A sont les intersections, avec l'axe non focal, de la polaire du point M et de la perpendiculaire MP à cette polaire, le cercle décrit sur AB comme diamètre passe par le point P et par les foyers réels de la courbe.

En effet, les équations de la polaire et de la perpendiculaire MP donnent immédiatement

$$OB = \frac{b^2}{y_0}, \quad OA = -\frac{c^2 y_0}{b^2}.$$

Si I est le point où le cercle, décrit sur AB, coupe l'axe focal, on a, en ne considérant que les valeurs absolues :

$$\overline{OI}^2 = OA . OB = c^2 ;$$

le cercle passe donc par les foyers.

Il résulte de là que la puissance du point M est proportionnelle à la puissance de ce point relative au cercle passant par les foyers et par le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur sa polaire.

2° Parabole.

Du point M abaissons une perpendiculaire sur la polaire de ce point, soit P le pied de cette perpendiculaire et A la rencontre de cette perpendiculaire avec l'axe focal; la puissance du point M est égale au produit MP . MA.

Nous prendrons l'équation de la parabole sous la forme réduite

$$(3) \qquad y^2 - 2px = 0;$$

l'équation de la polaire du point (x_0, y_0) et celle de la perpendiculaire MP seront respectivement

$$y y_0 - p(x + x_0) = 0,$$

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0).$$

On conclut de là :

$$MP = \frac{y_0^2 - 2px_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}} ;$$

$$\overline{MA}^2 = p^2 + y_0^2 ;$$

par conséquent

$$(4) \qquad y_0^2 - 2px_0 = MP . MA.$$

N. B. Le cercle décrit sur AA' a pour centre le foyer F; en effet

$$OA' = -x_0, \quad OA = x_0 + p ;$$

l'abscisse du centre du cercle sera, par conséquent,

$$\frac{OA + OA'}{2} \text{ ou } \frac{p}{2}.$$

Donc la puissance d'un point M est égale à celle du même point relative au cercle qui a pour centre le foyer et qui passe par le point où la polaire du point M rencontre l'axe focal.

---

§ III. Normales.

1° Équation de la normale en un point.

751. Nous supposerons les axes rectangulaires

1° Ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

La normale en un point (x_1, y_1) est perpendiculaire à la tangente, son équation sera, par conséquent :

$$(1) \qquad y-y_1=\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1),$$

avec la condition

$$(1\ bis) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.$$

Si l'on cherche l'intersection de la normale avec l'axe des x, on trouve

$$x-x_1=-\frac{b^2}{a^2}x_1, \text{ ou } x=ON=\frac{c^2 x_1}{a^2}.$$

L'abscisse x_1 varie de zéro à a ; donc la distance ON varie de zéro à $\frac{c^2}{a}$; et, comme $\frac{c^2}{a}$ est moindre que c, le point N se meut entre le point O et un point f tel que $Of=\frac{c^2}{a}$. Ainsi, lorsque le pied M de la normale se déplace sur l'ellipse, sa trace N, sur l'axe focal, se meut entre les points f et f'. Quand le pied est au sommet du petit axe, la normale passe par le centre ; quand le pied est le sommet du grand axe, la normale coïncide avec l'axe des x et a avec cet axe une infinité de points communs ; mais il y en a un qui est l'intersection, avec Ox, de la normale infiniment voisine ; son abscisse est $\frac{c^2}{a}$.

Remarque. Il y a quelquefois avantage à introduire le paramètre angulaire ; posons

$$x_1=a\cos\varphi, \quad y_1=b\sin\varphi ;$$

la relation (1 bis) se trouve vérifiée, et l'équation (1) de la normale prend, après avoir divisé par $\sin\varphi\cos\varphi$, la forme suivante :

$$(2) \qquad \frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2 ; \quad c^2=a^2-b^2.$$

2° Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

L'équation de la normale en un point (x_1, y_1) est

$$(3) \qquad y-y_1=-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1),$$

avec la condition

$$(3\ bis) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.$$

Si l'on cherche l'intersection de la normale avec l'axe des x, on trouve

$$x-x_1=\frac{b^2 x_1}{a^2}, \text{ ou } x=ON=\frac{c^2 x_1}{a^2}.$$

L'abscisse x variant de a à $+\infty$, la distance ON varie de $\frac{c^2}{a}$, quantité plus grande que c, jusqu'à l'infini ; le point N est toujours au delà des foyers.

Remarque. Si l'on introduit un paramètre angulaire en posant

$$x_1=\frac{a}{\cos\varphi}, \quad y_1=b\tan\varphi,$$

l'équation de la normale prendra la forme

$$(4)\qquad \frac{by}{\sin\varphi}+ax-\frac{c^2}{\cos\varphi}=0,\ \text{où } c^2=a^2+b^2.$$

3.° Parabole: $y^2-2px=0$.

L'équation de la normale en un point (x_1, y_1) sera

$$(5)\qquad y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1),$$

avec la condition

$$(5\ bis)\qquad y_1^2-2px_1=0.$$

Si l'on cherche l'intersection de la normale avec l'axe des x, on trouve

$$x-x_1=p,\ \text{ou } PN=p;$$

c. à. d. que dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre p.

Réciproque: Une courbe, pour laquelle la sous-normale est constante, est une parabole.

En effet, si x et y sont les coordonnées d'un point de la courbe, la sous-normale a pour expression yy'_x N.° [370]; on aura, d'après l'hypothèse:

$$yy'_x=p.$$

prenant les fonctions primitives des deux membres, il vient

$$y^2=2px+\mathcal{C};$$

$\mathcal{C}$ est une constante arbitraire; c'est l'équation d'une parabole ayant pour axe l'axe des x.

752. Dans l'ellipse et l'hyperbole, la tangente et la normale en un point forment un faisceau harmonique avec les rayons focaux qui passent par ce point.

D'où: Les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe focal sont conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers.

L'une de ces propositions est une conséquence évidente de l'autre; démontrons la seconde, en prenant, par exemple, l'ellipse.

Les abscisses des points d'intersection de la tangente et de la normale avec l'axe focal, sont

$$x'=\frac{a^2}{x_1},\quad x''=\frac{c^2x_1}{a^2};\ \text{pour les foyers: } x'''=+c,\ x^{IV}=-c.$$

Le rapport anharmonique de ces quatre points a pour expression

$$R=\frac{x'''-x'}{x'''-x''}:\frac{x^{IV}-x'}{x^{IV}-x''}=\frac{c-\dfrac{a^2}{x_1}}{c-\dfrac{c^2x_1}{a^2}}:\frac{-c-\dfrac{a^2}{x_1}}{-c-\dfrac{c^2x_1}{a^2}}=\frac{(cx_1-a^2)a^2}{(a^2-cx_1)cx_1}:\frac{(cx_1+a^2)a^2}{(a^2+cx_1)cx_1},$$

d'où enfin

$$R=-1;$$

C. Q. F. D.

Dans la parabole, la tangente et la normale en un point forment un faisceau harmonique avec le rayon focal et le diamètre qui passe par ce point.

D'où: La tangente et la normale rencontrent l'axe focal en deux points équidistants du foyer.

Nous démontrerons la première partie de cette proposition. Les équations des droites, menées par l'origine parallèlement à la tangente, à la normale, au diamètre et au rayon focal sont

$$y=\frac{p}{y_1}x,\quad y=-\frac{y_1}{p}x\ ;\quad y=0,\quad y=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}\cdot x.$$

Le rapport anharmonique de ces quatre droites, c.à.d. le rapport anharmonique cherché, a pour expression N° [170] :

$$R=\frac{0-\frac{p}{y_1}}{0+\frac{y_1}{p}}:\frac{\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}-\frac{p}{y_1}}{\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}+\frac{y_1}{p}}=-\frac{p^2}{y_1^2}:\frac{\left(y_1^2-px_1+\frac{p^2}{2}\right)p}{y_1^2\left(x_1+\frac{p}{2}\right)},$$

valeur qui, eu égard à la relation $y_1^2=2px_1$, se réduit à -1. Donc.....

Remarque. Les intersections, avec l'axe focal, de la polaire d'un point et de la perpendiculaire abaissée du point sur la polaire, donnent deux points équidistants du foyer.

La polaire d'un point (x_0, y_0) est

$$yy_0-p(x+x_0)=0\ ;$$

l'équation de la perpendiculaire à cette droite menée par le point considéré est

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0).$$

Si x' et x'' sont les abscisses des points d'intersection de ces deux droites avec l'axe focal, on trouve

$$x'=-x_0,\quad x''=x_0+p\ ;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{p}{2},$$

Donc......

II° Équation d'une normale parallèle à une droite donnée.

753. Nous supposerons les axes rectangulaires ; soit m le coefficient angulaire de la direction donnée.

1° Ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

L'équation

$$(1)\qquad y=mx+n,$$

représente une parallèle à la direction donnée ; nous déterminerons n en identifiant cette équation avec celle d'une normale. Or la normale en un point (x_1, y_1) sera

$$(2)\qquad y-y_1=+\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

avec la condition

$$(2\ bis)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.$$

Exprimons que les équations (1) et (2) représentent la même droite, on obtient les relations :

$$\left\{\begin{aligned}&m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1},\\&n=y_1-\frac{a^2y_1}{b^2},\\&\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.\end{aligned}\right.$$

Tirant x_1, y_1, des deux premières relations et transportant dans la 3ème, il vient

$$n^2 = \frac{c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2}.$$

Par conséquent, l'équation d'une normale parallèle à une droite donnée sera

$$(3) \qquad y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}; \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Donc, dans l'ellipse, il y a toujours deux normales parallèles à une droite donnée et deux seulement à distance finie.

2° Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Par un calcul identique, nous trouverons pour l'équation d'une normale parallèle à une droite donnée

$$(4) \qquad y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 - b^2 m^2}}, \; c^2 = a^2 + b^2.$$

Il y a donc deux normales parallèles à une direction donnée ; mais, pour que ces normales soient réelles, il faut que l'on ait

$$a^2 - b^2 m^2 > 0, \quad \text{ou} \; (a - bm)(a + bm) > 0;$$

c.à.d. que pour que les deux normales soient réelles, il faut que la droite $y = mx$ soit comprise dans l'angle des droites menées par l'origine perpendiculairement aux asymptotes et comprenant la courbe.

3° Parabole : $y^2 - 2px = 0.$

L'équation de la normale en un point (x_1, y_1) est

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

avec la condition

$$y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

La droite $y = mx + n$ représentera une normale parallèle à la direction donnée, si l'on a :

$$m = -\frac{y_1}{p}, \quad x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad y_1^2 = 2px_1.$$

Éliminant x_1 et y_1 entre ces trois équations, on trouve

$$n = -\frac{mp}{2}(2 + m^2).$$

L'équation d'une normale parallèle à une droite donnée est

$$(5) \qquad y = mx - \frac{mp}{2}(2 + m^2).$$

Il n'y a donc qu'une seule normale parallèle à une direction donnée, et à distance finie ; ceci résulte de ce que la droite de l'infini est tangente à la courbe ; la perpendiculaire au point de contact à l'infini est elle-même à l'infini, et peut être considérée comme une normale parallèle à la direction donnée.

Exercice. Déduire l'équation (5) de l'équation (3) ou (4) d'après la règle exposée au N° [707].

754. Équation aux coefficients angulaires des normales passant par un point donné.

Prenons d'abord l'ellipse ; exprimons que la droite (1) passe par un point donné (α, β), on a

$$\beta - m\alpha = \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}};$$

rendons cette équation rationnelle, il vient

$$(6)\qquad (a^2+b^2m^2)(\beta-m\alpha)^2-c^4m^2=0,\ \text{où}\ c^2=a^2-b^2;$$

cette équation détermine les coefficients angulaires m des normales passant par le point donné. On trouvera de même pour l'hyperbole

$$(7)\qquad (a^2-b^2m^2)(\beta-m\alpha)^2-c^4m^2=0,\ \text{ou}\ c^2=a^2+b^2.$$

Les équations (6) et (7) sont du 4ème degré; donc

Par un point on peut toujours mener, à l'ellipse ou à l'hyperbole quatre normales.

Exprimons de même que la droite (5) passe par un point (α,β), il vient

$$(8)\qquad (\beta-m\alpha)+\frac{pm}{2}(2+m^2)=0;$$

cette équation est du 3ème degré; donc, par un point donné, on peut mener trois normales seulement à une parabole.

Remarque. Si l'on cherche à déduire l'équation (8) de l'équation (6), par exemple, d'après la règle exposée au N.° [707], on trouve l'équation

$$\frac{p}{2}m^4+(p-\alpha)m^2+\beta m=0;$$

c. à. d. que l'équation aux coefficients angulaires des normales se réduit au troisième degré, dans le cas de la parabole, par la suppression de la racine nulle $m=0$; c'est qu'en effet, la droite de l'infini touchant la parabole en un point à l'infini sur la direction de l'axe, une parallèle à l'axe peut être regardée comme une normale passant par un point à distance finie et correspondant à cette tangente.

III.° Normales menées par un point.

1.° Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

755. Si $x_1\ y_1$ sont les coordonnées du pied d'une normale, l'équation de cette normale sera

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

avec la condition

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.$$

En exprimant que cette normale passe par un point donné (α,β), on aura deux équations qui détermineront les coordonnées (x_1, y_1) des pieds des normales menées par le point $(\alpha.\beta)$; en supprimant les indices, ces deux équations seront

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0.$$

La première équation, si l'on regarde x et y comme des coordonnées courantes, est celle de l'ellipse; la seconde est celle d'une hyperbole. On conclut de là que:

Les pieds des normales menées à l'ellipse par un point (α,β), sont les intersections de l'ellipse avec une hyperbole équilatère; les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux axes de l'ellipse; l'hyperbole passe par le centre de l'ellipse et par le point donné (α,β); les équations des deux asymptotes sont

$$x = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \quad y = -\frac{b^2\beta}{c^2}.$$

L'hyperbole, passant par le centre de l'ellipse, rencontrera cette dernière courbe en deux points réels, quelle que soit la position du point (α, β).

Donc, par un point donné, on peut toujours mener deux normales réelles à une ellipse.

Remarque. L'hyperbole que nous venons de considérer est aussi le lieu des milieux des cordes que des cercles décrits du point donné, comme centre, interceptent dans la conique proposée. (Proposition applicable aux trois courbes).

756. Pour discuter complètement la question posée, nous remarquerons que l'équation (2) provient de l'équation

$$y - \beta = \frac{a^2 y}{b^2 x}(x - \alpha),$$

et peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{x-\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{y}{b^2}} = \lambda,$$

en désignant par λ la valeur commune de ces rapports ; on déduit de là

$$(4) \qquad x = \frac{a^2\alpha}{a^2-\lambda}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2-\lambda}.$$

Lorsqu'on connaîtra λ, x et y seront déterminés ; et à une valeur réelle de λ correspond pour x et y une valeur réelle et unique ; si λ est imaginaire, les valeurs de x et y seront imaginaires.

Exprimons que les valeurs (4) de x et y vérifient l'équation (1), on aura ainsi l'équation en λ

$$(5) \qquad f(\lambda) = \frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^2} - 1 = 0 ;$$

cette équation est du 4ème degré ; on peut donc par un point mener quatre normales.

Pour discuter l'équation (5), prenons la dérivée du premier membre, on a

$$(6) \qquad f'(\lambda) = 2\left[\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^3} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^3}\right].$$

En égalant cette dérivée à zéro, et en chassant le dénominateur, on obtient l'équation binôme

$$a^2\alpha^2(b^2-\lambda)^3 + b^2\beta^2(a^2-\lambda)^3 = 0,$$

laquelle devient

$$(7) \qquad b^2\beta^2 u^3 + a^2\alpha^2 = 0,$$

après avoir posé

$$(8) \qquad u = \frac{a^2-\lambda}{b^2-\lambda}.$$

L'équation (7) n'a qu'une seule racine réelle, laquelle est négative ; on a

$$u_1 = -\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

pour la valeur réelle de u ; la valeur réelle λ_1 de λ sera donnée par l'équation

$$(9) \qquad \frac{a^2-\lambda_1}{b^2-\lambda_1} = -\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}} ; \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \frac{b^2(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + a^2(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}}}.$$

Puisque le second membre de l'égalité (9) est négatif, on voit que la valeur λ_1 est comprise entre a^2 et b^2; de sorte que si a est le grand axe de l'ellipse, on a

$$b^2 < \lambda_1 < a^2.$$

Maintenant faisons varier λ de $-\infty$ à $+\infty$, en passant par les valeurs b^2, λ_1, et a^2; étudions les signes de la dérivée $f'(\lambda)$ (6), et concluons-en les variations de la fonction $f(\lambda)$ (5). Cette discussion est résumée dans le tableau suivant:

λ	$f'(\lambda)$	$f(\lambda)$	
$-\infty$	$+$	-1	une racine
	$+$	croissante	
$+b^2-\varepsilon$	$+\infty$	$+\infty$	
$+b^2+\varepsilon$	$-\infty$	$+\infty$	
	$-$	décroissante	
$+\lambda_1$	0	minimum	
	$+$	croissante	
$+a^2-\varepsilon$	$+\infty$	$+\infty$	
$+a^2+\varepsilon$	$-\infty$	$+\infty$	
	$-$	décroissante	une racine
$+\infty$	$-$	-1	

On voit que l'équation (5) a toujours deux racines réelles: l'une comprise entre $-\infty$ et $+b^2$, l'autre comprise entre $+a^2$ et $+\infty$. Cette équation aura deux autres racines réelles si le minimum est négatif, c. à d. si $f(\lambda_1) < 0$; il n'y aura que deux racines réelles si $f(\lambda_1) > 0$; enfin, si $f(\lambda_1) = 0$, les deux dernières racines seront égales. Donc

On pourra mener quatre normales réelles, si $f(\lambda_1) < 0$,
.... deux normales réelles seulement, si $f(\lambda_1) > 0$,
.... trois normales réelles, si $f(\lambda_1) = 0$;

dans ce dernier cas, il y a deux normales confondues.

Il résulte de là que l'équation $f(\lambda_1) = 0$ nous donne une relation entre α et β, c. à d. une courbe qui sépare le lieu des points d'où l'on peut mener quatre normales réelles de celui d'où l'on n'en peut mener que deux; ce sera le lieu des points d'où on pourra mener trois normales. Or ce lieu est évidemment celui des intersections successives des normales, c. à d. la développée N° (400).

Les normales menées à l'ellipse par un point donné seront donc les tangentes menées par ce point à la développée de l'ellipse.

Déduisons l'équation de la développée des calculs qui précèdent, c. à d. cherchons la relation entre α et β pour que deux des normales coïncident.

D'après ce qu'on vient de dire, on doit avoir $f(\lambda_1) = 0$, ou

$$(10) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda_1)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda_1)^2} = 1.$$

Or la valeur (9) de λ_1 donne

$$\left\{ \begin{aligned} a^2-\lambda_1 &= \frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} c^2}{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}}}, \\ b^2-\lambda_1 &= -\frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}} c^2}{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned} \right.$$

Substituons ces valeurs dans la relation (10), remplaçons α et β par x et y, on trouve définitivement:

$$(11)\qquad \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{c^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}} = 1;$$

c'est l'équation de la développée déjà obtenue au N° [400].
On aura quatre normales réelles si le point donné est dans l'intérieur de la développée; deux normales seulement, si le point est extérieur à la développée; trois normales, c. à. d. qu'il y aura deux normales coïncidentes, si le point est sur la développée.

Remarque. La développée est une courbe du 6ème ordre; une courbe du 6ème ordre est en général de 30ème classe; or, ici, la courbe n'est que de 4ème classe, puisque les tangentes menées d'un point à la développée sont normales à l'ellipse, et que, d'un autre côté, on ne peut mener par un point que quatre normales à l'ellipse.
Voici les causes de cette diminution considérable dans la classe de la courbe (11): Cette courbe possède six points de rebroussement, dont deux à l'infini; chaque point de rebroussement à l'infini diminue la classe de trois unités; et chacun des points de rebroussement à distance finie diminue la classe de cinq unités; nous laissons à constater ce résultat, ce qui se fera facilement à l'aide de la première polaire.
La diminution de la classe causée par l'ensemble des points de rebroussement équivaut donc à celle que causerait la présence de treize points doubles.

2° Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

757. Dans le cas de l'hyperbole, les pieds des normales, menées par le point (α, β) seront déterminés à l'aide des équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(2)\qquad c^2 xy - b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

La seconde équation représente une hyperbole équilatère, passant par le centre de l'hyperbole donnée et par le point (α, β); les asymptotes sont parallèles aux axes de la courbe, et ont pour équation

$$x = \frac{a^2 \alpha}{c^2},\quad y = \frac{b^2 \beta}{c^2}.$$

La courbe (2), ayant pour asymptotes des parallèles aux axes, rencontrera la courbe proposée (1) en deux points toujours réels; donc, par un point donné, on pourra toujours mener deux normales réelles.
On pourra reproduire, dans le même ordre, la discussion faite au N° [756] à l'occasion de l'ellipse.
3° Parabole: $y^2 - 2px = 0.$

758. Si x_1, y_1 sont les coordonnées du pied d'une normale, l'équation de cette normale sera

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

avec la condition

$$y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

Exprimons que cette droite passe par un point donné (α, β), on aura deux équations qui détermineront les coordonnées x_1, y_1, des pieds des normales menées par le point (α, β). Ces équations sont, après la suppression des indices,

$$(1)\quad y^2-2px=0,$$
$$(2)\quad xy+(p-\alpha)y-p\beta=0.$$

Si l'on regarde x et y comme des coordonnées courantes, la première équation représente la courbe elle-même; et la seconde, une hyperbole équilatère. On conclut de là que :

Les pieds des normales, menées à la parabole par un point (α,β), sont les intersections de cette courbe avec une hyperbole équilatère, dont l'une des asymptotes est l'axe même de la parabole; cette hyperbole passe par le point (α,β) et par le point de la parabole situé à l'infini sur l'axe.

On voit par là qu'il y a une normale parallèle à l'axe, comme nous l'avons reconnu par un autre calcul N.° [754]; laissant de côté cette solution singulière, il reste trois normales dont une est toujours réelle.

759. Les pieds des trois normales, qu'on peut mener à la parabole par un point donné, sont sur un cercle passant par le sommet.

Pour le démontrer, résolvons les équations (1) et (2) en laissant de côté la solution infinie; on a, en tirant x de la première équation,

$$(3)\qquad x=\frac{y^2}{2p},$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (2):

$$(4)\qquad y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0.$$

Désignons par y_1, y_2, y_3, les trois racines de l'équation (4); par x_1, x_2, x_3, les valeurs correspondantes de x; l'équation du cercle passant par ces trois points sera

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Le terme indépendant de l'équation (5) est

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3\end{vmatrix};$$

ou, en remplaçant x par $\frac{y^2}{2p}$:

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1^4}{4p^2}+y_1^2 & \frac{y_1^2}{2p} & y_1\\ \frac{y_2^4}{4p^2}+y_2^2 & \frac{y_2^2}{2p} & y_2\\ \frac{y_3^4}{4p^2}+y_3^2 & \frac{y_3^2}{2p} & y_3\end{vmatrix} = y_1y_2y_3\begin{vmatrix} \frac{y_1^3}{4p^2}+y_1 & \frac{y_1}{2p} & 1\\ \frac{y_2^3}{4p^2}+y_2 & \frac{y_2}{2p} & 1\\ \frac{y_3^3}{4p^2}+y_3 & \frac{y_3}{2p} & 1\end{vmatrix};$$

en retranchant de la première colonne la seconde multipliée par $2p$, il vient

$$\frac{y_1y_2y_3}{8p^3}\begin{vmatrix} y_1^3 & y_1 & 1\\ y_2^3 & y_2 & 1\\ y_3^3 & y_3 & 1\end{vmatrix};$$

expression qui peut s'écrire en développant

$$\frac{y_1y_2y_3}{8p^3}\Big\{y_2y_3(y_2-y_3)(y_2+y_3)+y_3y_1(y_3-y_1)(y_3+y_1)+y_1y_2(y_1-y_2)(y_1+y_2)\Big\}.$$

Si maintenant on a égard à la relation suivante entre les coefficients et les racines de l'équation (4), savoir

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

l'expression écrite ci-dessus devient successivement :

$$\frac{y_1\, y_2\, y_3}{8p^3}\left[-y_1 y_2 y_3 (y_2 - y_3) - y_2 y_3 y_1 (y_3 - y_1) - y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2)\right],$$

ou

$$-\frac{y_1^2 y_2^2 y_3^2}{8p^3}\left\{y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2\right\},$$

quantité visiblement nulle ; donc le terme indépendant de l'équation (5) est nul, c. à. d. que le cercle passe par le sommet.

Autre démonstration.

Les pieds des normales sont déterminés à l'aide des deux équations

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Regardons x et y comme des inconnues, et multiplions la seconde équation par y ; les solutions cherchées vérifieront les deux équations

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ y^4 + 2p(p-\alpha)y^2 - 2p^2\beta y = 0 ; \end{cases}$$

ou encore les deux suivantes, dont la seconde est obtenue en remplaçant y^2 par $2px$:

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ 4p^2x^2 + 4p^2(p-\alpha)x - 2p^2\beta y = 0 \end{cases}$$

ou enfin

$$(6) \qquad \begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ x^2 + (p-\alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0. \end{cases}$$

Regardons, dans ces deux dernières équations x et y comme les coordonnées courantes, nous en concluons que les pieds des normales seront les intersections des deux courbes (6). Si l'on ajoute ces deux équations, on trouve

$$(7) \qquad \begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0. \end{cases}$$

Or la première équation est celle de la parabole elle-même ; la seconde représente un cercle passant par le sommet ; donc.....

760. Pour discuter la condition de réalité des normales à la parabole, reprenons les équations

$$(8) \qquad x = \frac{y^2}{2p},$$

$$(9) \qquad y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0 ;$$

à une valeur réelle de y, correspondra une valeur réelle et unique pour x ; pour que les trois normales soient réelles, il faut donc que les trois racines de l'équation (9) soient réelles, c. à. d. que

$$8(p-\alpha)^3 + 27p\beta^2 < 0 ;$$

une seule normale sera réelle, si

$$8(p-\alpha)^3 + 27p\beta^2 > 0 ;$$

deux des normales seront confondues, si

$$(10) \qquad 8(p-\alpha)^3 + 27p\beta^2 = 0.$$

La relation (10) déterminera le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales, c. à. d. le lieu des intersections successives des normales ou la développée de la parabole. Cette courbe sépare les points d'où l'on peut mener trois normales réelles de ceux d'où l'on n'en peut mener qu'une.

En remplaçant α et β par x et y, on a l'équation de la développée

$$(11) \qquad y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3;$$

c'est la parabole semi-cubique, cette courbe est de 3ème ordre et de 3ème classe.

Les normales, menées à la parabole par un point donné, sont les tangentes menées à la courbe (11) par ce point; il y en aura trois réelles ou une seule, suivant que le point sera intérieur ou extérieur à la développée.

761. Si autour d'un point, pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite; ces perpendiculaires successives enveloppent une parabole qui est tangente à la polaire du point fixe et aux tangentes à la conique menées par les pieds des normales abaissées de ce point.

Considérons par exemple l'ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit (α, β) le point donné et λ, μ, les coordonnées du pôle d'une transversale passant par le point (α, β); l'équation de cette transversale sera

$$\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} - 1 = 0;$$

comme elle doit passer par le point donné, on a la condition

$$(1) \qquad \frac{\lambda\alpha}{a^2} + \frac{\mu\beta}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation d'une droite, passant par le point (λ, μ) et perpendiculaire à la transversale, sera

$$y - \mu = \frac{a^2\mu}{b^2\lambda}(x - \lambda),$$

ou

$$(2) \qquad c^2\lambda\mu + b^2y\lambda - a^2x\mu = 0.$$

Il s'agit de trouver l'enveloppe des droites (2), en ayant égard à la relation (1). Éliminons d'abord la quantité μ, l'équation de la droite (2) deviendra alors

$$(3) \qquad \lambda^2 . \frac{c^2\alpha}{a^2} - \lambda(\alpha x + \beta y + c^2) + a^2 x = 0.$$

Prenons la dérivée par rapport à λ, on a

$$2\frac{c^2\alpha}{a^2}\lambda = \alpha x + \beta y + c^2;$$

l'élimination de λ conduit immédiatement à l'équation cherchée; on trouve ainsi

$$(\alpha x + \beta y + c^2)^2 - 4c^2\alpha x = 0;$$

ou enfin

$$(4) \qquad (\alpha x + \beta y)^2 + 2c^2(\beta y - \alpha x) + c^4 = 0.$$

1° L'enveloppe définie par l'énoncé est donc une parabole.

2° Cette parabole touche les deux axes de la courbe, et les points de contact sont respectivement $x = \frac{c^2}{\alpha}$, $y = -\frac{c^2}{\beta}$.

3° La parabole (4) touche la polaire du point (α, β) par rapport à l'ellipse.

En effet, l'équation (3) représente une tangente quelconque à la courbe (4), puisque cette courbe est l'enveloppe des droites (3). Cette équation peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{a^2}{\lambda c^2}x + \frac{a^2\beta}{c^2(\lambda\alpha - a^2)}y - 1 = 0;$$

or si l'on fait $\lambda = \frac{a^4}{c^2\alpha}$, on trouve

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0;$$

c'est précisément la polaire du point (α, β).

4° La parabole est inscrite dans le triangle formé par les axes et la polaire, par rapport à l'ellipse, du point (α, β); ceci résulte des propriétés 3° et 4°.

5° La direction des diamètres de la parabole est conjuguée harmonique, par rapport aux axes de l'ellipse, de la droite qui joint le centre au point donné (α, β).

Car les diamètres sont parallèles à la droite $\alpha x + \beta y = 0$; et la droite qui joint le centre au point (α, β) est $\alpha x - \beta y = 0$.

6° Cette parabole touche les tangentes à la conique aux pieds des normales menées à cette conique par le point (α, β).

En effet, lorsque la transversale deviendra normale à l'ellipse, son pôle se trouvera sur la tangente au pied de cette normale; cette tangente est alors perpendiculaire à la transversale, et est, par conséquent, une des droites enveloppant la parabole (4).

Remarque. Dans le cas de la parabole

$$y^2 - 2px = 0,$$

on trouvera pour l'enveloppe définie par l'énoncée N° [761] :

$$(6) \qquad (x + \alpha - p)^2 + 4\beta y = 0.$$

Les propriétés et la situation de la parabole enveloppe par rapport à la courbe proposée sont visibles d'après cette équation.

---

§IV. Usages de l'équation aux foyers. Diverses propriétés relatives aux foyers; etc.

I° Equation aux foyers.

762. En prenant le foyer pour origine, l'équation générale des trois courbes du second ordre est de la forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = \lambda^2 (x \cos\alpha + y \sin\alpha - r)^2;$$

λ est l'excentricité et on a $\lambda < 1$, $\lambda > 1$, ou $\lambda = 1$ suivant que la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Posons

$$(2) \qquad z = x\cos\alpha + y\sin\alpha - r;$$

$z = 0$ est l'équation de la directrice correspondant au foyer pris pour origine.

On peut regarder la conique comme rapportée au triangle formé par les axes Ox, Oy, et par la directrice.

Un point M situé sur la conique pourra être défini par les relations

$$(3) \qquad x = \lambda z . \cos\varphi, \quad y = \lambda z \sin\varphi;$$

car, en ajoutant la somme des carrés, il vient

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2.$$

L'angle φ est l'angle, avec Ox, du rayon focal passant par le point M.

On a en effet

$$(4)\quad \tang \widehat{MOx} = \frac{y}{x} = \frac{\lambda z \sin\varphi}{\lambda z \cos\varphi} = \tang\varphi ;\ \text{d'où}\ \widehat{MOx} = \varphi.$$

763. Équation d'une droite passant par deux points dont les paramètres sont φ_1 et φ_2.

Soient les deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, où

$$\begin{cases} x_1 = \lambda z_1 \cos\varphi_1, & x_2 = \lambda z_2 \cos\varphi_2, \\ y_1 = \lambda z_1 \sin\varphi_1 ; & y_2 = \lambda z_2 \sin\varphi_2 . \end{cases}$$

L'équation d'une droite passant par ces deux points est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ou, en remplaçant les x_i, y_i par leurs valeurs

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \frac{1}{\lambda} \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Développant et remplaçant les différences de sinus et cosinus par des produits, on trouve, après avoir supprimé le facteur $\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$:

$$(5)\quad x\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + y\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} - \lambda z\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = 0 ;$$

c'est l'équation d'une droite passant par les deux points dont les paramètres angulaires sont φ_1 et φ_2.

En supposant $\varphi_2 = \varphi_1$, on aura l'équation de la tangente au point dont le paramètre est φ_1 :

$$(6)\quad x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - \lambda z = 0.$$

Cette dernière équation se déduit immédiatement de l'équation générale

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0 ;$$

laquelle donne ici

$$x x_1 + y y_1 - \lambda^2 z z_1 = 0 ;$$

ou, en ayant égard aux relations (3) $[x_1 = \lambda z_1 \cos\varphi_1,\ y_1 = \lambda z_1 \sin\varphi_1]$:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - \lambda z = 0.$$

Nous verrons plus loin quelques applications de ces formules.

II°. Lieu des projections des foyers sur les tangentes.

764. 1° Ellipse. Hyperbole.

Nous prendrons l'équation de la tangente sous la forme

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

L'équation d'une droite, passant par un foyer et perpendiculaire à cette tangente, sera

$$y = -\frac{1}{m}(x-c) ;$$

on obtiendra l'équation du lieu en éliminant m entre ces deux équations.

Pour faire cette élimination, nous écrirons les deux équations comme il suit :

$$\begin{cases} y - mx = \sqrt{a^2m^2+b^2}, \\ my + x = c. \end{cases}$$

Élevons au carré et ajoutons, il vient

$$(x^2+y^2)(1+m^2) = a^2(1+m^2) ;$$

ou

$$(1+m^2)(x^2+y^2-a^2) = 0 ;$$

ou enfin, en remplaçant m par $-\frac{x-c}{y}$:

$$[y^2+(x-c)^2][x^2+y^2-a^2]=0.$$

Cette équation se décompose en les deux suivantes :

$$(1)\qquad (x-c)^2+y^2=0,$$

$$(2)\qquad x^2+y^2-a^2=0.$$

La première donne le foyer ; ce point devait faire partie du lieu, puisqu'il y a deux tangentes à la conique qui passent par le foyer.

La seconde équation représente un cercle construit sur le grand axe ; donc

Le lieu des projections des foyers sur les tangentes est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

Le même calcul et la même conclusion sont applicables à l'hyperbole.

Réciproquement. La courbe telle, que les projections d'un point fixe sur ses tangentes se trouvent sur un cercle, est une ellipse ou une hyperbole.

Rapportons le cercle à son centre et prenons pour axe des x une droite passant par le point fixe ; soient a le rayon du cercle et c la distance du centre au point fixe. L'équation du cercle est

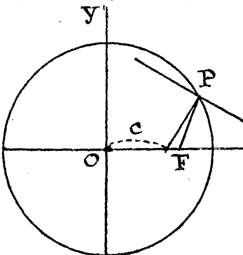
$$(1)\qquad x^2+y^2-a^2=0.$$

L'équation d'une tangente à la courbe cherchée peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad y=mx+n ;$$

et l'équation de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur cette tangente sera

$$(3)\qquad y=-\frac{1}{m}(x-c).$$



Il faut exprimer que le pied de cette perpendiculaire ou le point d'intersection des droites (2) et (3) se trouve sur le cercle (1) ; on arrive ainsi à la relation

$$(c-mn)^2+(mc+n)^2=a^2(m^2+1)^2 ;$$

d'où l'on déduit

$$(4)\qquad n^2=a^2m^2+a^2-c^2.$$

Nous poserons

$$(5)\qquad \begin{cases} a^2-c^2=b^2, & \text{si } a>c ; \\ a^2-c^2=-b^2, & \text{si } a<c ; \end{cases}$$

et l'équation d'une tangente quelconque à la courbe cherchée sera

$$(6)\qquad \begin{cases} y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}, & \text{si } a>c, \\ \text{ou} \\ y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} & \text{si } a<c. \end{cases}$$

On aura l'équation de la courbe en cherchant l'enveloppe de l'une ou l'autre de ces droites. Prenons la première :

$$(1^\circ)\qquad y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} ;$$

la dérivée par rapport à m donne

$$(2^\circ)\qquad 0=x+\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

De la relation (2°) on tire la valeur du radical qu'on substitue dans l'équation (1°), on aura alors les deux équations

$$\begin{cases} y=mx-\dfrac{a^2m}{x}, \\ a^2m=-x\sqrt{a^2m^2+b^2}. \end{cases}$$

Rendons la seconde équation rationnelle et substituons-y la valeur de m fournie par la première on trouve, toutes réductions faites,

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad a > c.$$

c'est l'équation d'une ellipse.

En prenant la seconde des équations (6), on arriverait à

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a < c;$$

c'est l'équation d'une hyperbole.

765. 2° Parabole.

L'équation de la tangente à la parabole est

$$y = mx + \frac{p}{2m};$$

et nous aurons pour l'équation de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette tangente:

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

On obtiendra le lieu des projections du foyer en éliminant m entre ces deux équations; pour cela, retranchons-les membre à membre, il vient:

$$mx + \frac{x}{m} = 0, \quad \text{ou } x(m^2+1) = 0;$$

ou enfin, en remplaçant m par $-\frac{x-\frac{p}{2}}{y}$:

$$x\left[y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right] = 0;$$

équation qui représente le foyer et la tangente au sommet. Donc

Le lieu des projections du foyer sur les tangentes à la parabole est la tangente au sommet de cette courbe.

Réciproquement: La courbe telle que le lieu des projections d'un point fixe sur les tangentes se trouvent sur une ligne droite, est une parabole.

Prenons la droite fixe pour axe des y et la perpendiculaire abaissée du point fixe pour axe des x. L'équation de la tangente à la courbe cherchée peut se mettre sous la forme

$$y = mx + n;$$

la perpendiculaire abaissée du point fixe sera

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

L'intersection de ces deux droites doit être sur l'axe des y; par suite, si l'on fait $x = 0$ dans ces deux équations, on doit trouver la même valeur de y; ce qui donne

$$n = \frac{p}{2m}.$$

L'équation de la tangente est alors

$$y = mx + \frac{p}{2m};$$

on obtient facilement l'enveloppe de cette droite, laquelle est

$$y^2 - 2px = 0;$$

c'est l'équation d'une parabole ayant pour foyer le point fixe, et la droite fixe pour tangente au sommet.

766. Le lieu des pieds des obliques, qui menées par les foyers rencontrent les tangentes à une

conique sous un angle constant, est un cercle.

Cette proposition peut se conclure de la précédente N° [764]; soit une tangente quelconque, FP la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette tangente, FI l'oblique rencontrant la même tangente sous l'angle constant θ; on a

$$FP = FI.\sin\theta,\ \text{d'où}\ \frac{FI}{FP} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{Constante.}$$

Le lieu du point I est, par conséquent, une courbe semblable à la courbe lieu du point P; car en faisant tourner la première courbe autour du point O d'un angle égal à $(90°-\theta)$ ou $\widehat{IFP}$, on aura une courbe homothétique de celle qui est le lieu du point P; mais le lieu du point P est un cercle, le lieu du point I sera donc également un cercle.

Pour aborder cette même question par un calcul direct, nous prendrons l'équation de la courbe sous la forme

$$(1) \qquad x^2+y^2=\lambda^2(x-r)^2;$$

l'origine est alors le foyer F; r est la distance à l'origine de la directrice correspondante à ce foyer; λ est l'excentricité; la droite Fx est l'axe focal.

Si l'on pose

$$(P) \qquad (2) \qquad x_1=\lambda(x_1-r)\cos\varphi,\quad y_1=\lambda(x_1-r)\sin\varphi;$$

la tangente au point P, dont le paramètre angulaire est φ, sera

$$(3) \qquad x\cos\varphi+y\sin\varphi-\lambda(x-r)=0;$$

et, si FP est le rayon focal passant par le point de contact de cette tangente, on a N° [762]

$$(4) \qquad \varphi=\widehat{PFx}.$$

Pour démontrer que l'équation (3) est celle de la tangente, on peut partir de la formule

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+f'_{z_1}=0,$$

laquelle, appliquée à l'équation (1), donne

$$xx_1+yy_1-\lambda^2(x_1-r)(x-r)=0;$$

et on trouve l'équation (3) en remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs (2).

Cherchons maintenant l'équation de la droite FM faisant l'angle θ avec la tangente considérée. L'équation d'une droite passant par l'origine est

$$y=kx;$$

si m est le coefficient angulaire de la tangente PM ou (3), on doit avoir

$$\tang\theta=\frac{k-m}{1+mk};$$

or, d'après l'équation (3)

$$m=\frac{\lambda-\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

il vient donc

$$\tang\theta=\frac{k\sin\varphi-\lambda+\cos\varphi}{\sin\varphi+\lambda k-k\cos\varphi}.$$

En remplaçant k par $\frac{y}{x}$ on aura l'équation de la droite FM, savoir:

$$(5) \qquad \tang\theta\,[x\sin\varphi-y\cos\varphi+\lambda y]=x\cos\varphi+y\sin\varphi-\lambda x;$$

cette droite passe par le foyer et fait l'angle θ avec la tangente (3) considérée.

Pour obtenir l'équation du lieu, il faudra éliminer φ entre les équations (3) et (5). Auparavant, remarquons que, d'après l'équation (3), le second membre de l'équation (5) pourra se simplifier, et l'on aura

$$(6)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = -\lambda\left(y + \frac{r}{\tan\theta}\right).$$

Ajoutons les égalités (3) et (6), après avoir élevé au carré, il vient

$$(7)\qquad x^2+y^2 = \lambda^2(x-r)^2 + \lambda^2\left[y + \frac{r}{\tan\theta}\right]^2,$$

ou

$$(7\,bis)\qquad (x^2+y^2)(\lambda^2-1) - 2\lambda^2 r.x + \frac{2\lambda^2 r}{\tan\theta}\,y + \frac{\lambda^2 r^2}{\sin^2\theta} = 0;$$

telle est l'équation du lieu des points M ; on voit que ce lieu est un cercle.

Dans le cas de la parabole, où $\lambda = 1$, cette équation devient

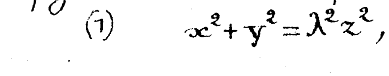
$$(8)\qquad y - x\tan\theta + \frac{r}{\sin 2\theta} = 0;$$

le lieu des points M est alors une ligne droite.

III. Démonstration de plusieurs propriétés relatives aux foyers.

767. La droite qui joint un foyer au point de concours de deux tangentes est bissectrice de l'angle des rayons qui joignent ce foyer aux points de contact.

Rapportant la conique au foyer considéré, son équation sera



$$(1)\qquad x^2+y^2 = \lambda^2 z^2,$$

où

$$(1\,bis)\qquad z = x\cos\alpha + y\sin\alpha - r.$$

Soient φ et φ_1 les paramètres angulaires de deux points M et M_1, les équations des tangentes en M et M_1 sont No. [766]

$$MT:\quad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \lambda z,$$

$$M_1T:\quad x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 = \lambda z.$$

En retranchant ces équations membre à membre, nous aurons l'équation d'une droite passant par le point T ; on trouve ainsi

$$x(\cos\varphi - \cos\varphi_1) + y(\sin\varphi - \sin\varphi_1) = 0;$$

cette droite passe évidemment par l'origine, c'est l'équation de la droite FT. Or l'équation précédente peut s'écrire, en remplaçant les différences des lignes trigonométriques par des produits

$$(2)\qquad x\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} - y\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = 0,\ \text{ou}\ y = x\tan\frac{\varphi+\varphi_1}{2}.$$

L'angle de cette droite avec Fx est $\frac{\varphi+\varphi_1}{2}$; mais No. [762]

$$\varphi = \widehat{MFx},\quad \varphi_1 = \widehat{M_1Fx};$$

donc la droite FT est bissectrice de l'angle $\widehat{M_1FM}$; C. Q. F. D.

768. Si l'on prolonge la corde MM_1 jusqu'à sa rencontre en H avec la directrice, la droite FH sera perpendiculaire à FT.

En effet, l'équation de la droite MM_1 est No. [763] :

$$(3)\qquad x\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + y\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} - \lambda z\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2} = 0.$$

Si l'on cherche l'intersection de cette droite avec la directrice $z=0$, on trouve

$$(4)\qquad x\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}+y\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}=0;$$

cette droite passe par l'origine et le point H, c'est l'équation de la droite FH. Or elle est visiblement perpendiculaire à la droite FT représentée par l'équation (2), car le produit des coefficients angulaires est égal à -1 ; donc......

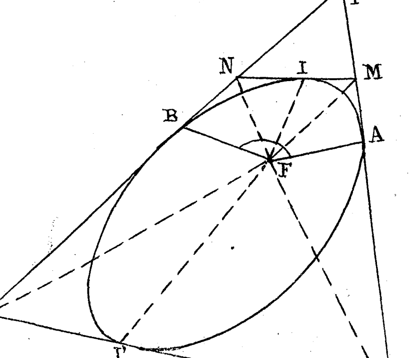
Cette proposition peut s'énoncer dans les termes suivants, si l'on remarque que FT et FH sont les bissectrices de l'angle MFM_1 :

Si l'on joint un foyer F à deux points M et M_1 d'une conique, la directrice correspondant à ce foyer passe par l'un des deux points où les bissectrices de l'angle $\widehat{MFM_1}$ des rayons focaux rencontrent la droite MM_1 qui joint ces deux points.

769. L'angle, qui a son sommet au foyer d'une conique et qui sous-tend la partie d'une tangente comprise entre deux tangentes fixes, est constant quelle que soit cette tangente; dans le cas de la parabole, cet angle est le supplément de l'angle des tangentes.

Cette proposition est une conséquence du théorème du N.º [767].

Soient F le foyer; AT et BT les deux tangentes fixes; MN la tangente variable et I son point de contact. La droite FM est bissectrice de l'angle AFI; la droite FN est bissectrice de l'angle BFI;



on a donc

$$\widehat{MFI}=\tfrac{1}{2}\,\widehat{AFI},\ \widehat{IFN}=\tfrac{1}{2}\,\widehat{IFB};$$

d'où

$$(1)\qquad \widehat{MFN}=\tfrac{1}{2}\,\widehat{AFB};\quad C.Q.F.D.$$

Si la tangente touchait l'arc non situé dans le triangle ATB, soit par exemple M'N' cette tangente; on aurait

$$\widehat{M'FI'}=\tfrac{1}{2}\,\widehat{AFI'},\quad \widehat{N'FI'}=\tfrac{1}{2}\,I'FB;$$

d'où

$$(2)\qquad \widehat{M'FN'}=\tfrac{1}{2}\left(2\pi-\widehat{AFB}\right)=\pi-\tfrac{1}{2}\,\widehat{AFB}.$$

Pour le cas de la parabole, nous évaluerons cet angle en prenant, pour la tangente variable, la tangente au sommet; les droites FM et FN sont alors respectivement perpendiculaires aux tangentes AT et BT N.º [765]; on a donc

$$\widehat{MFT}=\frac{\pi}{2}-\widehat{MTF};\quad \widehat{NFT}=\frac{\pi}{2}-\widehat{FTN};$$

d'où l'on conclut

$$\widehat{MFN}=\pi-\widehat{ATB};$$

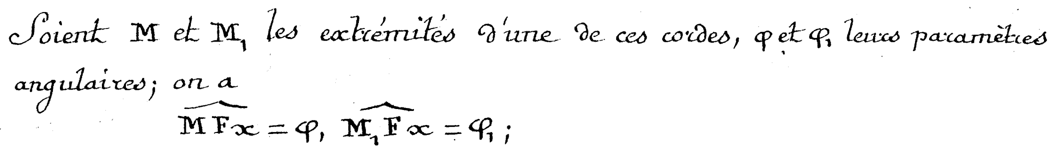
C.Q.F.D.

770. L'enveloppe des cordes, vues d'un foyer sous un angle constant, est une conique ayant même foyer et même directrice.

Soient M et M_1 les extrémités d'une de ces cordes, φ et φ_1 leurs paramètres angulaires; on a

$$\widehat{MFx}=\varphi,\ \widehat{M_1Fx}=\varphi_1;$$

et, d'après l'hypothèse



$$(1)\qquad \varphi_1-\varphi=2\gamma,$$

γ étant une constante.

L'équation de la droite MM_1 est N.º [763] :

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}+y\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}=\lambda z\cos\frac{\varphi_1-\varphi}{2}.$$

Introduisons l'hypothèse (1), et représentons par ω l'indéterminée $\frac{\varphi+\varphi_1}{2}$ ou $(\varphi+\gamma)$; cette équation s'écrira

$$(2) \qquad x \cos\omega + y \sin\omega = \lambda z \cos\gamma;$$

telle est l'équation de la corde variable MM_1 vue du foyer sous l'angle constant 2γ.

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, il faut prendre la dérivée par rapport à ω, ce qui donne

$$(3) \qquad -x \sin\omega + y \cos\omega = 0;$$

et éliminer ω entre les équations (2) et (3), ce qui se fera en ajoutant la somme des carrés; on obtient ainsi

$$(4) \qquad x^2+y^2 = \lambda^2 \cos^2\gamma . z^2.$$

C'est l'équation d'une conique ayant pour foyer le point F; pour directrice, la droite $z=0$; pour excentricité, $\lambda \cos\gamma$.

771. **Le lieu des intersections des tangentes aux extrémités d'une corde vue du foyer sous un angle constant est une conique ayant même foyer et même directrice.**

D'après les calculs du numéro précédent, l'équation de la corde MM_1 sera

$$(5) \qquad x\cos\omega + y \sin\omega - \lambda z \cos\gamma = 0;$$

le lieu des points P sera le lieu des pôles de la droite (5). Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées trilatères du point P par rapport au triangle de référence formé par les axes Fx, Fy et la directrice; la polaire du point P aura pour équation

$$(6) \qquad x x_0 + y y_0 - \lambda^2 z z_0 = 0;$$

en identifiant cette équation avec celle de la corde MM_1 (5), on a

$$\frac{x_0}{\cos\omega} = \frac{y_0}{\sin\omega} = \frac{\lambda z_0}{\cos\gamma};$$

éliminant ω entre ces dernières relations et supprimant les indices, on trouve pour l'équation du lieu des points P:

$$(7) \qquad x^2+y^2 = \frac{\lambda^2}{\cos^2\gamma} . z^2.$$

C'est l'équation d'une conique ayant pour foyer le point F; pour directrice, la droite $z=0$; pour excentricité, $\frac{\lambda}{\cos\gamma}$.

772. **Si autour d'un point fixe P on fait tourner une corde MM_1, et que d'un foyer on mène les cordes FM, FM_1, on aura**

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\widehat{PFM} . \operatorname{tang}\frac{1}{2}\widehat{PFM_1} = \text{constante}.$$

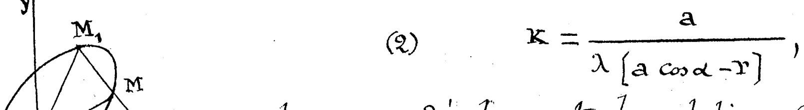
L'équation de la corde MM_1 est No. [763]

$$x \cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + y \sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \lambda z \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}.$$

Faisons passer l'axe des x par le point P, soient a et o les coordonnées de ce point; la sécante MM_1 devant passer par le point P, on aura

$$(1) \qquad a \cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \lambda \left[a\cos\alpha - r\right] \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2},$$

puisque $z = x\cos\alpha + y \sin\alpha - r$. Posant



$$(2) \qquad k = \frac{a}{\lambda\left[a\cos\alpha - r\right]},$$

on trouve en développant la relation (1) et divisant par $\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}$:

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{k-1}{k+1} = \text{constante}.$$

Or, on a N° [762] :

$$\varphi = \widehat{PFM}\,; \quad \varphi_1 = \widehat{PFM_1}\,;$$

donc.....

773. Si autour d'un point A on fait tourner une transversale MM_1 qui rencontre une conique en deux points M et M_1, la somme algébrique des distances de ces points à un foyer F divisées respectivement par leurs distances MP, M_1P_1 à la polaire du point fixe A, est constante; ainsi

$$\frac{FM}{MP} + \frac{FM_1}{M_1P_1} = \text{Constante}.$$

Rapportons la conique à son foyer F, de sorte que son équation sera

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$$

où

$$(1\,\text{bis}) \qquad z = x\cos\alpha + y\sin\alpha - r\,;$$

prenons pour axe des x une droite passant par le point fixe A ; les coordonnées de ce point seront a et o.

Pour fixer les idées, nous supposerons l'angle α plus grand que π, c.à.d. $\sin\alpha < 0$. Soient φ et φ_1 les paramètres angulaires des points M et M_1 ; désignons par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du premier ; par x_2, y_2, z_2, celles du second. On a d'abord, d'après la relation (1 bis)

$$z_1 = \lambda z_1 \cos\alpha\cos\varphi + \lambda z_1 \sin\alpha\sin\varphi - r, \quad \text{car} \begin{cases} x_1 = \lambda z_1 \cos\varphi, \\ y_1 = \lambda z_1 \sin\varphi; \end{cases}$$

égalité qui s'écrira

$$(2) \qquad z_1 = \lambda z_1 \cos(\alpha - \varphi) - r.$$

On a de même

$$(2\,\text{bis}) \qquad z_2 = \lambda z_2 \cos(\alpha - \varphi_1) - r.$$

L'équation de la corde MM_1 est N° [763] :

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + y\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \lambda z\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\,;$$

exprimons qu'elle passe par le point fixe A (a, o), on a

$$a\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \lambda(a\cos\alpha - r)\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}.$$

Si l'on développe cette égalité, et qu'on pose

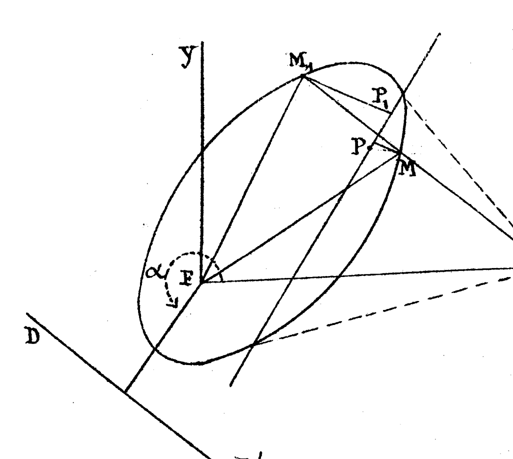
$$(3) \qquad k = \frac{a}{\lambda(a\cos\alpha - r)},$$

il vient, après avoir divisé par $\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}$:

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{k-1}{k+1}.$$

Evaluons maintenant les distances FM, FM_1 ; MP, M_1P_1.

La distance FM est, d'après l'équation (1), égale à λz_1, λ est un nombre positif, et z_1 est la distance du point (x_1, y_1) à la directrice $z = 0$ ou (1 bis). Les deux points M et M_1 étant, avec l'origine F, du même côté de la directrice DD', les valeurs absolues des distances FM et FM_1 seront



$$(5)\qquad FM = -\lambda z_1\ ,\ FM_1 = -\lambda z_2 .$$

(Dans le cas d'une hyperbole, les valeurs absolues de FM et FM_1 seraient représentées par λz_1 et $-\lambda z_2$, si les deux points M et M_1 se trouvaient sur la branche à gauche de la directrice DD').

L'équation de la polaire d'un point (x', y', z') est

$$xx' + yy' = \lambda^2 zz' ;$$

par suite la polaire du point A sera

$$ax = \lambda^2 [a \cos\alpha - r][x \cos\alpha + y \sin\alpha - r],$$

ou, d'après la notation (3) :

$$(6)\qquad x[\lambda \cos\alpha - K] + y\lambda \sin\alpha - \lambda r = 0.$$

Il faut évaluer les distances MP, M_1P_1, des points M et M_1 à cette droite.

Posons

$$(7)\qquad h = +\sqrt{(\lambda\cos\alpha - K)^2 + \lambda^2 \sin^2\alpha},$$

et remarquons que le coefficient de y, $(\lambda \sin\alpha)$ est négatif.

Si le point A est extérieur à la conique, un des points M ou M_1 se trouvera au-dessous de la polaire et l'autre au-dessus, en marchant parallèlement à l'axe Fy. On aura donc, pour la valeur absolue de MP :

$$MP = \frac{x_1(\lambda\cos\alpha - K) + y_1 \lambda \sin\alpha - \lambda r}{+h} ;$$

$$\text{ou}\qquad MP = \frac{\lambda z_1(\lambda\cos\alpha - K)\cos\varphi + \lambda^2 z_1 \sin\alpha \sin\varphi - \lambda r}{+h},$$

$$\text{ou}\qquad MP = \frac{\lambda[\lambda z_1 \cos(\alpha - \varphi) - r] - \lambda K z_1 \cos\varphi}{h} ;$$

et, d'après la relation (2)

$$MP = \frac{\lambda z_1 - \lambda K z_1 \cos\varphi}{h} ;$$

et enfin, d'après la première des valeurs (5)

$$-h\,\frac{MP}{MF} = 1 - K\cos\varphi .$$

Remplaçant $\cos\varphi$ par sa valeur en fonction de $\tan\frac{\varphi}{2}$ $\left(\cos\varphi = \dfrac{1 - \tan^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}}\right)$, on a définitivement

$$(8)\qquad -\frac{1}{h}\,\frac{MF}{MP} = \frac{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}}{(K+1)\tan^2\frac{\varphi}{2} - (K-1)} .$$

La valeur absolue de M_1P_1 est

$$M_1P_1 = \frac{x_2(\lambda\cos\alpha - K) + y_2 \lambda\sin\alpha - \lambda r}{-h} ;$$

en transformant cette expression, comme il vient d'être fait, on trouve

$$+\frac{1}{h}\,\frac{M_1F}{M_1P_1} = \frac{1 + \tan^2\frac{\varphi_1}{2}}{(K+1)\tan^2\frac{\varphi_1}{2} - (K-1)} .$$

Dans cette dernière expression, remplaçons $\tan\frac{\varphi_1}{2}$ par sa valeur déduite de la relation (4), il vient

$$(8\ bis)\qquad -\frac{1}{h}\,\frac{M_1F}{M_1P_1} = \frac{1}{K^2 - 1}\cdot\frac{(K+1)^2\tan^2\frac{\varphi}{2} + (K-1)^2}{(K+1)\tan^2\frac{\varphi}{2} - (K-1)} .$$

Si le point A est intérieur à la conique, les deux points M et M_1 seront tous deux au-dessus ou au-dessous de la polaire du point A; par suite, on devra, pour représenter la valeur absolue des distances, changer le signe du second membre de l'une des égalités (8) ou (8 bis).

Maintenant, on constate immédiatement que:

Si le point A est extérieur à la conique

$$\frac{M_1F}{M_1P_1}-\frac{MF}{MP}=\frac{2h}{1-K^2}=\text{constante},$$

si le point A est intérieur à la conique

$$\frac{M_1F}{M_1P_1}+\frac{MF}{MP}=\text{constante}.$$

Dans ces relations ne figurent que les longueurs absolues des droites; il est facile de voir à l'aide de quelles conventions on peut ramener ces différentes formules à une seule.

IV.° Lieu des sommets des angles constants circonscrits à une conique.

774. 1° Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

Prenant l'équation d'une tangente sous la forme

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

et rendant cette équation rationnelle, on aura

$$(1)\qquad m^2(a^2-x^2)+2mxy+b^2-y^2=0;$$

cette équation donne les coefficients angulaires des tangentes passant par le point (x, y), si l'on regarde ce point comme fixe.

Si m_1 et m_2 sont les racines de cette équation, et si θ est l'angle des deux tangentes passant par le point (x, y), on a

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

Substituant dans cette relation les valeurs de m_1m_2 et (m_1-m_2) que fournit immédiatement l'équation (1), on trouve

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2-b^2};$$

ou, en rendant rationnel:

$$(2)\qquad (x^2+y^2-a^2-b^2)^2-\frac{4}{\tan^2\theta}(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0;$$

le lieu des sommets des angles constants, θ, circonscrits à l'ellipse est donc une courbe du 4ème ordre.

Lorsque $\theta=0$, on retrouve l'équation de l'ellipse; résultat évident à priori.

Lorsque $\theta=90°$, on trouve le cercle

$$(3)\qquad x^2+y^2=a^2+b^2;$$

donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse est un cercle concentrique à la courbe ayant pour diamètre la diagonale du rectangle construit sur les axes.

Remarque. On peut démontrer comme il suit cette dernière proposition.

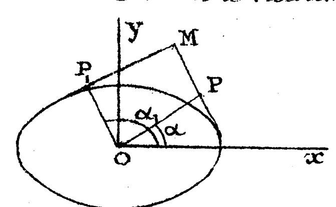
Soient MP et MP_1 deux tangentes rectangulaires; OP et OP_1 les perpendiculaires abaissées du centre

sur ces tangentes ; on a N.° [720]

$$\overline{OP}^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$
$$\overline{OP_1}^2 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\sin^2\alpha_1,$$

α et α_1 étant les angles de OP et OP_1 avec Ox.

Or on a visiblement



$$\alpha_1 - \alpha = 90^\circ, \text{ d'où } \alpha_1 = 90^\circ + \alpha;$$

par suite :

$$\overline{OP_1}^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha,$$

d'où l'on conclut

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP_1}^2 = a^2 + b^2; \text{ ou } \overline{OM}^2 = a^2 + b^2;$$

le lieu du point M est donc un cercle dont le rayon est $\sqrt{a^2+b^2}$ et dont le centre est celui de l'ellipse.

775. 2.° Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

L'équation, qui détermine les coefficients angulaires des tangentes passant par un point (x, y), est ici :

$$(4) \qquad m^2(a^2 - x^2) + 2mxy - b^2 - y^2 = 0;$$

il en résulte, d'après un calcul identique au précédent, que le lieu des sommets des angles constants, θ, circonscrits à l'hyperbole a pour équation :

$$(5) \qquad (x^2+y^2-a^2+b^2)^2 - \frac{4}{\operatorname{tang}^2\theta}(-b^2x + a^2y^2 + a^2b^2) = 0.$$

Lorsque $\theta = 90^\circ$, on trouve

$$(6) \qquad x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Ainsi le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est un cercle concentrique à la courbe ayant pour rayon $\sqrt{a^2-b^2}$.

Ce cercle est réel ou imaginaire suivant que a est supérieur ou inférieur à b. Si $a = b$, c.à.d. si l'hyperbole est équilatère, le cercle se réduit à un point ; les deux tangentes rectangulaires sont alors les asymptotes.

776. 3.° Parabole : $y^2 - 2px = 0$.

L'équation d'une tangente étant prise sous la forme

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

on en déduit

$$(7) \qquad m^2x - my + \frac{p}{2} = 0;$$

cette équation détermine les coefficients angulaires des deux tangentes passant par un point (x, y). Si m_1 et m_2 sont les racines de l'équation (7) et que θ soit l'angle de ces deux tangentes on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

Substituant dans cette relation les valeurs de $m_1 m_2$ et $(m_1 - m_2)$ que fournit immédiatement l'équation (7), on trouve

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x + \frac{p}{2}};$$

ou, en rendant rationnel :

$$(8) \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \operatorname{tang}^2\theta = y^2 - 2px.$$

Le lieu des sommets des angles constants, θ, circonscrits à la parabole est une hyperbole.
Lorsque $\theta = 90°$, on a

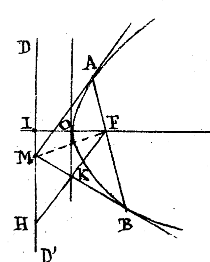
$$x + \frac{p}{2} = 0;$$

c.à.d. que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice de cette parabole.

Cette dernière proposition résulte immédiatement de la propriété de la tangente et de la directrice.

Soient MA et MB les deux tangentes menées à la parabole d'un point M de la directrice; remarquons d'abord que

La droite MB est bissectrice de l'angle FMD'. En effet, la corde de contact AB passe par le foyer, et le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente MB se trouve en K sur la tangente au sommet; comme OF = OI, il en résulte FK = KH. Le triangle FMH est donc isocèle, par suite



$$\widehat{FMB} = \widehat{BMD'}.$$

On prouvera de même que

$$\widehat{FMA} = \widehat{AMD}.$$

Les deux tangentes MA et MB, étant les bissectrices des angles supplémentaires FMD' et FMD, sont donc perpendiculaires entre elles.

777. Les propriétés que nous venons de constater sont comprises dans la proposition suivante:

Le lieu du sommet d'un angle circonscrit à une conique, les côtés de l'angle étant parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique à centre donnée, est une conique concentrique à la première et homothétique de la seconde.

1° Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Nous pouvons supposer que la conique directrice ait son centre à l'origine, puisque ceci ne change en rien la direction des diamètres; son équation sera alors

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H.$$

Or cette équation peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme

$$(2) \qquad m(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + m_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1)^2 = H;$$

car il suffit, pour cela, de satisfaire aux trois relations

$$(3) \qquad \begin{cases} m\cos^2\alpha + m_1\cos^2\alpha_1 = A, \\ m\sin^2\alpha + m_1\sin^2\alpha_1 = C, \\ m\sin\alpha\cos\alpha + m_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = B; \end{cases}$$

relations où entrent quatre indéterminées. Le premier membre de l'équation (1) est alors identiquement égal au premier membre de l'équation (2); les équations (1) et (2) représentent donc la même courbe.

Remarquons maintenant que les deux droites

$$(4) \qquad \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0, \\ x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

sont deux diamètres conjugués de la conique directrice (1); car, si l'on prend ces deux droites pour nouveaux axes de coordonnées, les formules de transformation seront No. [344]:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = hx',$$
$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = Ky';$$

et l'équation (2) deviendra

$$mh^2x'^2 + m_1K^2y'^2 = H;$$

il est alors visible que les nouveaux axes Ox', Oy' sont deux diamètres conjugués.

Cela posé, les tangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

respectivement parallèles aux droites (1), auront pour équations N.º (720)

$$(5)\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}\,, \\ x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1=\sqrt{a^2\cos^2\alpha_1+b^2\sin^2\alpha_1}\,. \end{cases}$$

Si nous regardons x et y comme les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes, x et y seront les coordonnées d'un point du lieu; on obtiendra alors l'équation cherchée en éliminant m, m_1, α, α_1 entre les équations (3) et (5).

Pour cela, élevons au carré les équations (5), puis ajoutons après avoir multiplié respectivement par m et m_1; il vient, en ayant égard aux relations (3)

$$(6)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=Aa^2+Cb^2;$$

c'est l'équation du lieu. On voit que c'est une conique concentrique à l'ellipse proposée et homothétique de la conique directrice.

Lorsque la conique directrice est un cercle, on a $A=C$, $B=0$, et l'équation précédente se réduit à

$$(7)\qquad x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Or les diamètres conjugués d'un cercle sont rectangulaires, l'équation (7) représente alors le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

Remarque. Les résultats obtenus s'appliqueront à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

en changeant b^2 en $-b^2$; on trouve ainsi

$$(8)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=Aa^2-Cb^2.$$

On aura deux droites si $Aa^2-Cb^2=0$; c.à.d; si les deux diamètres rectangulaires de la courbe directrice dirigés suivant les axes de l'hyperbole sont proportionnels aux axes de cette hyperbole.

2.º Parabole: $y^2-2px=0$.

La mise en équation est la même que dans le cas précédent.

Les tangentes à la parabole, respectivement parallèles aux droites (1), ont pour équations N.º (722).

$$(9)\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\dfrac{p}{2}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=0, \\ x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+\dfrac{p}{2}\dfrac{\sin^2\alpha_1}{\cos\alpha_1}=0. \end{cases}$$

Les coordonnées x et y du point d'intersection de ces deux tangentes seront celles d'un point du lieu cherché.

Pour éliminer les indéterminées α, α_1, m, m_1, multiplions la première des équations (9) par $m\cos\alpha$, la seconde par $m_1\cos\alpha_1$, et ajoutons; il vient, eu égard aux relations (3):

$$(10)\qquad Ax+By+C\frac{p}{2}=0;$$

c'est l'équation du lieu; ce lieu est une ligne droite.

La droite (10) est parallèle au diamètre $f'_x=0$ (de la conique directrice) conjugué des cordes parallèles à l'axe des x, c.à.d. à l'axe de la parabole.

Lorsque la conique directrice est un cercle, $A=C$, $B=0$, l'équation (10) devient

$$x+\frac{p}{2}=0;$$

on a alors le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole N.º (776).

V°. Lieu des sommets des angles droits normaux à une conique.

778. 1°. Ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Les coefficients angulaires des normales passant par un point (x, y) sont donnés par l'équation N° [774]

$$(1) \qquad b^2x^2m^4-2b^2xy.m^3+(b^2y^2+a^2x^2-c^4)m^2-2a^2xym+a^2y^2=0.$$

Or deux de ces normales doivent être rectangulaires, c.à.d. que le produit de deux des racines de cette équation doit être égal à -1. Si α est une de ces racines, l'autre sera $-\frac{1}{\alpha}$; le premier membre de l'équation (1) devra donc être divisible par une expression de la forme

$$(m-\alpha)(m+\tfrac{1}{\alpha}), \text{ ou } m^2+\lambda m-1;$$

en d'autres termes, le premier membre de l'équation (1) devra pouvoir se mettre sous la forme

$$(m^2+\lambda m-1)(Am^2+\mu m+B).$$

Comme le produit des premiers termes et celui des derniers termes doit donner exactement le premier et le dernier terme de l'expression (1), nous pouvons prendre $A=b^2x^2$, $B=-a^2y^2$; et alors, le premier membre de l'équation (1) devra être reproduit identiquement par le produit

$$(2) \qquad (m^2+\lambda m-1)(b^2x^2.m^2+\mu m-a^2y^2).$$

En identifiant les deux expressions (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \lambda b^2x^2+\mu=-2b^2xy, \\ \lambda a^2y^2+\mu=2a^2xy, \\ \lambda\mu=(a^2+b^2)(x^2+y^2)-c^4. \end{cases}$$

Tirons des deux premières équations les valeurs de λ et μ et substituons dans la troisième, on trouve immédiatement

$$(3) \qquad (a^2+b^2)(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2-c^4(a^2y^2-b^2x^2)^2=0.$$

C'est l'équation du lieu des sommets des angles droits normaux à l'ellipse ; la courbe est du 6ème ordre.

Cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes ; elle passe par les points circulaires à l'infini ; elle a un point quadruple à l'origine dont les tangentes sont données par l'équation

$$(a^2y^2-b^2x^2)^2=0,$$

ces quatre tangentes forment deux couples de tangentes confondues ; on voit que ce sont les asymptotes d'une hyperbole ayant les mêmes axes que l'ellipse ; ces tangentes sont en même temps des tangentes d'inflexion.

Pour construire la courbe, prenons les coordonnées polaires, c.à.d. posons

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega;$$

l'équation (3) devient alors

$$(4) \qquad \pm\rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2\sin^2\omega-b^2\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}.$$

La construction n'offre pas de difficulté ; on fera varier ω de 0 à 90°, le reste de la courbe se construira par symétrie.

Signalons la propriété suivante :

Soit $\rho=OM$ un rayon vecteur de la courbe, A' et A'' ses intersections avec l'ellipse et l'hyperbole ; et posons $OA'=a'$, $OA''=a''$; on a N°s [793], [796]

$$\frac{1}{a'^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}, \quad \frac{1}{a''^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2};$$

ou

$$\frac{a^2b^2}{a'^2}=b^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega\,;\quad \frac{a^2b^2}{a''^2}=b^2\cos^2\omega-a^2\sin^2\omega.$$

L'équation (4) de la courbe deviendra alors

$$(4\,bis)\qquad \rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a'^2}{a''^2}\,;$$

c. à d. que les rayons vecteurs de la courbe sont proportionnels au rapport des carrés des diamètres qu'ils déterminent dans l'ellipse et dans l'hyperbole ayant les mêmes longueurs d'axes que l'ellipse.

779. 2°. Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$

Les résultats qui précèdent s'appliqueront à l'hyperbole en changeant b^2 en $-b^2$; ainsi le lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole aura pour équation

$$(5)\qquad (x^2+y^2)(a^2y^2-b^2x^2)^2-\frac{c^4}{a^2-b^2}(a^2y^2+b^2x^2)^2=0\,;$$

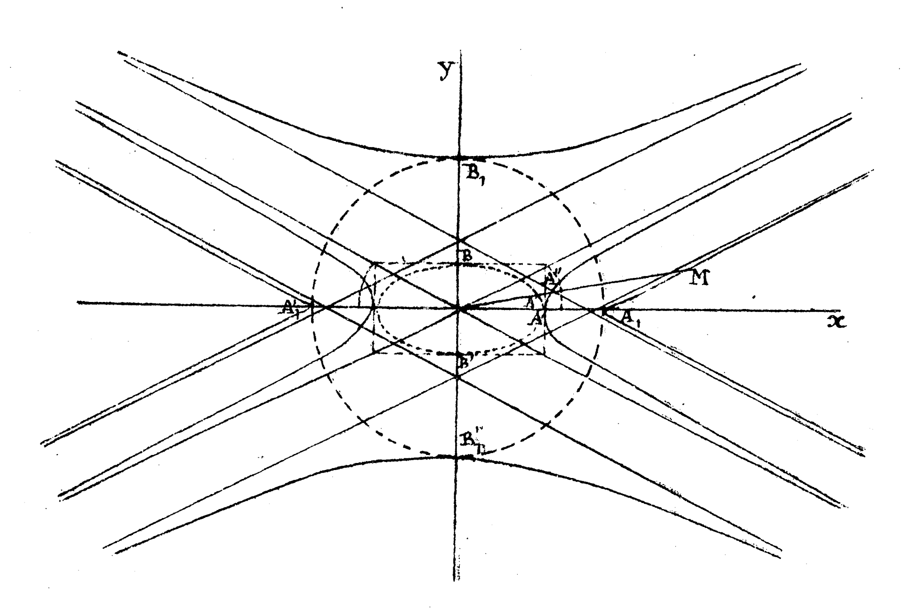
ou, en coordonnées polaires

$$(6)\qquad \pm\rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega-b^2\cos^2\omega}.$$

L'origine est un point quadruple isolé, car les tangentes sont imaginaires.
Il y a des branches infinies réelles, dont les asymptotes sont parallèles à celles de l'hyperbole; il y a un point double infini sur chacune de ces directions asymptotiques. La courbe touche le cercle

$$x^2+y^2=\frac{c^4}{a^2-b^2},$$

en six points, qui sont les quatre sommets A_1, A'_1; B_1, B'_1, et les deux points circulaires à l'infini.



Si OM est un rayon vecteur de la courbe; si A'' et A' sont ses intersections avec l'hyperbole et avec l'ellipse ayant les mêmes axes que l'hyperbole, et que l'on désigne par a' et a'' les longueurs OA' et OA'' nous trouverons, comme dans le cas précédent

$$(6)\qquad \rho=\frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a''^2}{a'^2}.$$

Cette relation donne lieu à un énoncé analogue à celui du numéro qui précède.

Remarquons que la courbe ne sera réelle que si $a > b$, c.à.d. si l'axe tranverse est plus grand que l'axe imaginaire.

Lorsque $a = b$, la courbe se réduit à un point.

780. 3° Parabole : $y^2 - 2px = 0$.

Les coefficients angulaires des normales, passant par un point (x, y), seront donnés par l'équation N.° [754]:

$$(7) \qquad m^3 + \frac{2}{p}(p - x)m + \frac{2y}{p} = 0.$$

Si m_1, m_2, m_3, sont les racines de cette équation, on a

$$m_1 m_2 m_3 = -\frac{2y}{p};$$

or deux de ces normales doivent être rectangulaires; on aura, par exemple, $m_2 m_3 = -1$, et la relation qui précède donnera

$$m_1 = \frac{2y}{p}.$$

Cette valeur doit vérifier l'équation (7); le résultat de la substitution est

$$(1°) \qquad \frac{8y^3}{p^3} + \frac{4}{p^2}(p - x)y + \frac{2y}{p} = 0.$$

On a ainsi l'équation du lieu; supprimant la solution $y = 0$, il reste

$$(8) \qquad y^2 + \frac{p}{2}(p - x) + \frac{p^2}{4} = 0, \quad \text{ou } y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3p}{2}\right).$$

Ainsi le lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole est une parabole dont le paramètre est le quart de celui de la parabole donnée; les deux paraboles sont asymptotiques l'une à l'autre.

N. B. La solution $y = 0$ ne convient pas à la question; parceque, si le dernier terme de l'équation (7) devient nul, la relation écrite (1°) n'exprime plus que l'équation (7) a deux racines dont le produit est égal à -1.

§V. Equations tangentielles.

1°. Formes réduites – Tangentes – Normales.

781. Nous avons vu N.° [684] que les formes réduites pour les équations tangentielles des trois courbes sont

$$\begin{cases} a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0, & \text{Ellipse :} \quad (I) \\ a^2u^2 - b^2v^2 - 1 = 0, & \text{Hyperbole :} \quad (II) \\ pv^2 + 2u = 0, & \text{Parabole :} \quad (III) \end{cases}$$

Les coordonnées d'une tangente sont les valeurs de u et v vérifiant l'équation de la courbe. Dans le cas de l'ellipse, une tangente peut se déterminer simplement à l'aide d'un seul paramètre; ainsi nous pourrons poser

$$(1) \qquad u_0 = \frac{\cos\varphi}{a}, \quad v_0 = \frac{\sin\varphi}{b},$$

φ sera le paramètre angulaire de la tangente u_0, v_0.

L'équation du point de contact d'une tangente (u_0, v_0) est

$$(2) \qquad a^2u_0u + b^2v_0v - 1 = 0, \text{ avec la condition } a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - 1 = 0.$$

Si l'on introduit le paramètre angulaire φ, l'équation du point de contact d'une tangente, au paramètre φ, sera

$$(3) \qquad au \cos\varphi + bv \sin\varphi - 1 = 0;$$

les coordonnées cartésiennes de ce point sont

$$x_0 = a \cos\varphi, \; y_0 = b \sin\varphi;$$

le paramètre φ de la tangente (u_0, v_0) est donc aussi le paramètre angulaire de son point de contact.

782. Coordonnées d'une normale.

Soient u_0, v_0, les coordonnées d'une tangente, et u_1, v_1 les coordonnées de la normale correspondante; la normale doit passer par le point de contact de la tangente, on a donc

$$a^2u_0u_1 + b^2v_0v_1 = 1, \quad a^2u_0^2 + b^2v_0^2 = 1;$$

de plus, ces deux droites sont rectangulaires, par suite N.° [131] :

$$u_0u_1 + v_0v_1 = 0,$$

en supposant les axes de coordonnées rectangulaires.

Résolvant ces deux équations par rapport à u_1, v_1, nous en conclurons pour les coordonnées (u_1, v_1) d'une normale correspondant à la tangente (u_0, v_0) :

$$(4) \qquad u_0u_1 = \frac{1}{c^2}, \; v_0v_1 = -\frac{1}{c^2},$$

avec la condition

$$(4 \text{ bis}) \qquad a^2u_0^2 + b^2v_0^2 = 1.$$

Ces formules s'appliquent à l'hyperbole par le changement de b^2 en $-b^2$.

Si, dans le cas de l'ellipse, on introduit le paramètre angulaire φ, on aura

$$(5) \qquad \frac{1}{u_1} = \frac{c^2}{a}\cos\varphi, \; \frac{1}{v_1} = -\frac{c^2}{b}\sin\varphi;$$

u_1, v_1, seront les coordonnées d'une normale quelconque à l'ellipse; les coordonnées du pied de la normale seront $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = b\sin\varphi$.

On aurait pu déduire les valeurs (5) de l'équation de la normale N.° [751].

Parabole : $pv^2 + 2u = 0$.

L'équation du point de contact d'une tangente (u_0, v_0) sera

$$(6) \qquad pv_0v + u + u_0 = 0,$$

avec la condition

$$(6 \text{ bis}) \qquad pv_0^2 + 2u_0 = 0.$$

En raisonnant, comme dans le cas de l'ellipse, on trouvera pour les coordonnées u_1, v_1, de la normale correspondant à la tangente (u_0, v_0) :

$$(7) \qquad u_1 = \frac{u_0}{pu_0 - 1}, \; v_1 = -\frac{u_0^2}{v_0(pu_0 - 1)},$$

avec la condition

$$(7 \text{ bis}) \qquad pv_0^2 + 2u_0 = 0.$$

II.° Point polaire d'une droite.

783. Dans les courbes de deuxième classe, le point polaire d'une droite est le pôle de cette droite.

Le point polaire d'une droite (u_0, v_0) a pour équation :

Dans l'Ellipse : $a^2u_0u+b^2v_0v-1=0$;
Dans l'Hyperbole : $a^2u_0u-b^2v_0v-1=0$;
Dans la Parabole : $pv_0v+u+u_0=0$.

1° Deux points seront dits conjugués lorsque l'un sera le point polaire d'une droite passant par l'autre. Soient deux points

$$(1)\quad \begin{cases} Au+Bv+C=0, \\ A_1u+B_1v+C_1=0; \end{cases}$$

cherchons la droite dont le premier, par exemple, est le point polaire, et exprimons que cette droite passe par le second, on aura la condition pour que ces deux points soient conjugués. On trouve ainsi :

$$\text{Dans le cas de l'Ellipse : } \frac{AA_1}{a^2}+\frac{BB_1}{b^2}-CC_1=0;$$

$$\text{Dans le cas de l'Hyperbole : } \frac{AA_1}{a^2}-\frac{BB_1}{b^2}-CC_1=0;$$

$$\text{Dans le cas de la Parabole : } A_1C+AC_1+\frac{BB_1}{p}=0.$$

2° Deux droites seront conjuguées lorsque l'une passera par le point polaire de l'autre.
Soient les deux droites (u_0, v_0), (u_1, v_1), la condition pour que ces deux droites soient conjuguées est :

Dans le cas de l'Ellipse : $a^2u_0u_1+b^2v_0v_1-1=0$;
Dans le cas de l'Hyperbole : $a^2u_0u_1-b^2v_0v_1-1=0$;
Dans le cas de la Parabole : $u_0+u_1+pv_0v_1=0$.

Ces formules mettent en évidence les propriétés suivantes déjà démontrées plusieurs fois :
« Le point conjugué d'un point fixe décrit une droite qui est la polaire du point.
« La droite conjuguée d'une droite fixe tourne autour d'un point fixe qui est le point polaire de la droite.

III°. Développées.

784. L'équation tangentielle de la développée d'une courbe est une relation entre les coordonnées d'une quelconque des normales à cette courbe.

1° Ellipse.

Les coordonnées d'une normale quelconque sont N° (782) :

$$\frac{1}{u}=\frac{c^2}{a}\cos\varphi,\ \frac{1}{v}=-\frac{c^2}{b^2}\sin\varphi;$$

éliminons φ entre ces deux relations, et nous aurons pour l'équation tangentielle de la développée de l'ellipse

$$(1)\quad \frac{a^2}{u^2}+\frac{b^2}{v^2}=c^4,\quad \text{ou } u^2v^2c^4=a^2v^2+b^2u^2;\ (1\,bis)$$

c'est une courbe de 4ème classe.

Les coordonnées des tangentes doubles s'obtiennent en égalant à zéro, les dérivées par rapport à u, v, w ; on trouve ainsi trois tangentes doubles, qui sont les deux axes et la droite de l'infini.

L'équation (1) donne une relation remarquable entre les segments $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ que les tangentes à la développée déterminent sur les axes.

2° Hyperbole.

L'équation tangentielle de la développée de l'hyperbole sera

$$(2)\quad \frac{a^2}{u^2}-\frac{b^2}{v^2}=c^4,\quad c^2=a^2+b^2.$$

3° Parabole.

Les coordonnées d'une normale quelconque à la parabole sont N° [782]

$$u = \frac{u_o}{pu_o - 1}, \quad v = -\frac{u_o^2}{v_o(pu_o - 1)},$$

avec la condition

$$pv_o^2 + 2u_o = o.$$

Eliminant u_o et v_o entre ces trois équations, on trouve pour l'équation tangentielle de la dévelop-pée de la parabole

$$(3) \qquad pu^3 + 2puv^2 - 2v^2 = o, \text{ ou } v^2 = \frac{pu^3}{2(pu-1)};$$

c'est une courbe de 3ème classe touchant la droite de l'infini, laquelle est la seule tangente double. Ainsi, on ne peut mener à cette courbe qu'une seule tangente parallèle à une droite donnée.

IV°. Remarques sur l'équation aux foyers.

785. Nous avons vu N° [714] que

l'équation tangentielle d'une conique ayant pour foyer l'origine est

$$(I) \qquad (u - u_o)^2 + (v - v_o)^2 = \frac{1}{p^2},$$

u_o, v_o sont les coordonnées de la directrice correspondant au foyer origine; p est le demi-paramètre de la conique.

Cette équation a la même forme que l'équation en coordonnées-point d'un cercle; u_o, v_o, sont alors les coordonnées de son centre, et $\frac{1}{p}$ son rayon.

L'équation en coordonnées-point d'une conique ayant pour foyer l'origine, est N° [762]

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 [x \cos\alpha + y \sin\alpha - r]^2.$$

Une équation de même forme, en coordonnées tangentielles, savoir

$$(II) \qquad u^2 + v^2 = \lambda^2 [u \cos\alpha + v \sin\alpha - r]^2$$

représente un cercle, dont le centre a pour équation

$$u \cos\alpha + v \sin\alpha - r = o,$$

et dont le rayon est $\frac{1}{\lambda r}$ N° [278]; α est l'angle avec l'axe des x de la droite qui joint l'origine au centre.

Ces rapprochements sont importants pour l'interprétation des équations tangentielles.

786. Il faut remarquer que, dans le cas de l'équation (II), les coordonnées u_o, v_o, d'une tangente, peuvent se représenter par

$$(3) \qquad u_o = \lambda w_o \cos\varphi, \; v_o = \lambda w_o \sin\varphi, \text{ en posant } w = u\cos\alpha + v\sin\alpha - r.$$

Pour avoir la signification du paramètre φ, rappelons-nous que N° [130] la tangente trigonométrique de l'angle ω que fait la tangente (u_o, v_o) avec l'axe des x est $-\frac{u_o}{v_o}$; on a donc

$$\text{tang}\,\omega = -\frac{u_o}{v_o} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

ou

$$(4) \qquad \text{tang}\,\omega \cdot \text{tang}\,\varphi = -1.$$

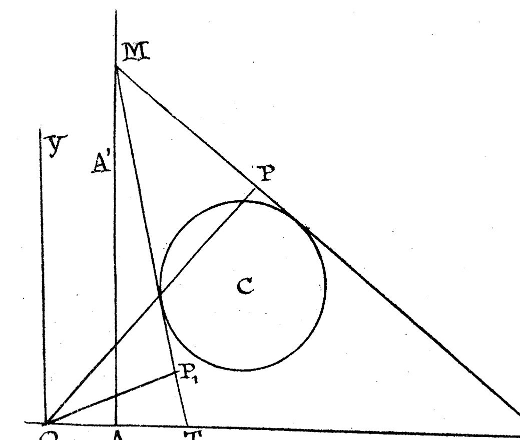
L'équation

$$(5) \qquad u \cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} + v \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \lambda w \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2},$$

sera l'équation du point d'intersection de deux tangentes dont les paramètres angulaires sont φ et φ_1.

Prenons, par exemple, la propriété du N° [772], et appliquons les calculs faits dans ce numéro à l'équation (II), c.à.d. interprétons ces calculs dans le système des équations tangentielles.

Les coordonnées $u = a$, $v = 0$, sont celles d'une droite perpendiculaire à l'axe Ox; la courbe est alors un cercle, et la relation (1) N° [772] exprime que le point de concours des deux tangentes φ et φ_1 décrit la ligne AA'; on a



$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} = \text{constante}.$$

Si du point O on abaisse les perpendiculaires OP et OP₁ sur les tangentes MT et MT₁, on aura, d'après la relation (4) ci-dessus

$$\varphi = \widehat{POx}, \quad \varphi_1 = \widehat{P_1Ox};$$

par suite,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\widehat{POA}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\widehat{P_1OA} = \text{Constante}.$$

Donc : étant donnés un cercle fixe C, une droite fixe AA', et un point fixe O ; si d'un point quelconque de la droite fixe on mène deux tangentes, et que du point fixe O on abaisse des perpendiculaires sur ces tangentes, on aura

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\widehat{POA}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}P_1OA = \text{Constante},$$

OA étant la perpendiculaire fixe abaissée du point O sur la droite fixe AA'.

Chapitre III.
Diamètres.

§1. Diamètres conjugués.

1°. Équation des diamètres.

789. Dans les courbes du second ordre, l'équation du diamètre, correspondant aux cordes de coefficient angulaire m, est N° [563]

$$f'_x + m f'_y = 0;$$

tous les diamètres passent par le centre; et réciproquement, toute droite passant par le centre est un diamètre. Nous allons compléter ici l'étude des diamètres commencée au Chap. VI du Livre précédent.

Dans le cas des formes réduites, l'équation des diamètres sera :

Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,

L'équation du diamètre correspondant aux cordes $y = mx$:

$$(1) \qquad \frac{x}{a^2} + \frac{my}{b^2} = 0, \text{ ou } y = -\frac{b^2}{a^2 m}x.$$

Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;

équation du diamètre correspondant aux cordes $y = mx$:

$$(2) \qquad \frac{x}{a^2} - \frac{my}{b^2} = 0, \text{ ou } y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Parabole: $y^2 - 2px = 0$;

équation du diamètre correspondant aux cordes $y = mx$:

$$(3) \qquad my - p = 0, \text{ ou } y = \frac{p}{m}.$$

788. Directions conjuguées.

Si m' est le coefficient angulaire du diamètre, on a, d'après les équations précédentes:

Pour l'Ellipse: $\qquad (4) \quad mm' = -\frac{b^2}{a^2}$,

Pour l'Hyperbole: $(5) \quad mm' = +\frac{b^2}{a^2}$;

Deux directions, dont les coefficients angulaires m et m' vérifient soit la relation (4), soit la relation (5), sont appelées directions conjuguées.

Les relations précédentes se déduisent de la relation générale N° (564):

$$(6) \qquad A + B(m + m') + C mm' = 0.$$

Les directions conjuguées sont un cas particulier de deux droites conjuguées N^os (443), (444); ce cas particulier se présente lorsque le pôle de l'une des droites est à l'infini.

Nous signalerons comme directions conjuguées.

1° Un diamètre et la direction de ses cordes;

2° Un diamètre et la tangente à l'extrémité;

3° Une polaire et le diamètre qui passe par le pôle.

La première proposition résulte de la définition même. La seconde proposition est une conséquence de la troisième que nous allons démontrer.

La polaire d'un point (x_1, y_1) a pour équation, dans le cas de l'ellipse

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0;$$

le coefficient angulaire m de cette polaire et celui m' du diamètre qui passe par le pôle, ont respectivement pour valeurs

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad m' = \frac{y_1}{x_1};$$

d'où l'on conclut

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Cette même démonstration s'applique à l'hyperbole.

Remarque. Dans la parabole, les cordes parallèles sont dites conjuguées par rapport au diamètre qui passe par leurs milieux N° (565).

789. On appelle diamètres conjugués, deux diamètres dont les coefficients angulaires m et m' vérifient les relations (4), dans l'ellipse; la relation (5), dans l'hyperbole.

Deux diamètres conjugués sont tels que l'un divise en deux parties les cordes parallèles à l'autre N° (564).

Le pôle d'un diamètre est à l'infini sur la direction parallèle à ses cordes N.° [560].

Deux diamètres conjugués sont tels que le pôle de l'un se trouve sur l'autre; réciproquement, deux droites conjuguées, dont les pôles sont à l'infini, sont deux diamètres conjugués.

Toutes ces propositions sont extrêmement faciles à démontrer; prenons par exemple, la dernière. Deux droites, dont les pôles sont à l'infini, passent par le centre; leurs équations seront donc

$$y = mx, \quad y = m'x;$$

soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du pôle de la première, on devra avoir

$$\frac{x_1}{a^2 m} = \frac{y_1}{+b^2} = \frac{z_1}{0}; \text{ d'où } z_1 = 0, y_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} x_1.$$

Si l'on exprime que ce pôle est sur la seconde droite, on trouve

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$

donc.....

Il n'y a qu'un seul système de diamètres conjugués rectangulaires; ce sont les axes de la courbe.

En effet, pour l'ellipse par exemple, on doit avoir à la fois

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad mm' = -1;$$

ou, en représentant les quantités m et m' par des rapports, c.à.d. en posant

$$m = \frac{n}{p}, \quad m' = \frac{n'}{p'},$$

les deux relations précédentes deviennent

$$nn' + \frac{b^2}{a^2} pp' = 0, \quad nn' + pp' = 0.$$

De là on conclut

$$pp'\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0; \text{ ou } pp' = 0, nn' = 0;$$

c. à. d.

$$p = 0 \text{ et } n' = 0, \text{ ou } m = 0 \text{ et } m' = \infty.$$

C. Q. F. D.

II.° Position des diamètres conjugués – Théorèmes

790. Position des diamètres conjugués.

1.° Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

On a, entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués, la relation

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$

or, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, et que α et α' soient les angles de deux diamètres conjugués OA et OB, on aura

$$(1) \qquad \tang\alpha . \tang\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

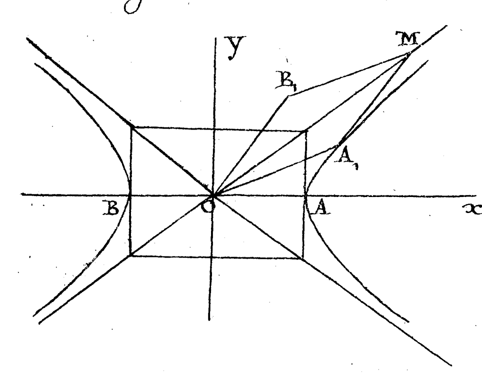
Il résulte de là que, si l'un des demi-diamètres est dans l'angle yOx, le diamètre conjugué sera dans l'angle adjacent.

2° Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Dans le cas actuel on a

$$(2) \qquad \tang\alpha \cdot \tang\alpha' = +\frac{b^2}{a^2};$$

$\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$ sont de même signe, les deux demi-diamètres doivent se trouver dans le même angle des coordonnées. De plus, si pour le diamètre OA_1, par exemple, on a $\tang\alpha < \frac{b}{a}$; pour le diamètre conjugué OB_1, on aura $\tang\alpha' > \frac{b}{a}$. Or $\frac{b}{a}$ est le coefficient angulaire de l'asymptote OM; donc l'un des deux diamètres conjugués doit être dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe, et l'autre, dans l'angle des asymptotes où n'est pas la courbe. Par conséquent, dans un système de deux diamètres conjugués de l'hyperbole, l'un est nécessairement réel, et l'autre imaginaire.



Si, sur les deux diamètres conjugués OA_1 et OB_1, on construit un parallélogramme, les asymptotes seront les diagonales de ce parallélogramme. N° [716].

Si on mène la tangente à l'hyperbole à l'extrémité A_1 d'un diamètre réel, cette tangente sera parallèle au diamètre OB_1 conjugué de OA_1 N° [788]. Il résulte de là une construction facile du diamètre imaginaire conjugué d'un diamètre réel choisi arbitrairement.

Le lieu des extrémités des diamètres imaginaires est une hyperbole dont l'équation est

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0;$$

on l'appelle hyperbole conjuguée de la première. N° [562].

Si OA_1 est un diamètre réel de l'hyperbole primitive et OB_1 le diamètre conjugué, l'extrémité B_1 se trouvera sur l'hyperbole conjuguée; la tangente en B_1 à l'hyperbole conjuguée sera parallèle au diamètre OA_1.

En effet, α étant l'angle du diamètre réel OA_1, l'équation du diamètre conjugué OB_1 sera, d'après la relation (2):

$$y=\frac{b^2}{a^2\tang\alpha}x.$$

Si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point B_1, on devra avoir

$$y_1=\frac{b^2}{a^2\tang\alpha}x_1, \text{ d'où } \frac{b^2x_1}{a^2y_1}=\tang\alpha;$$

or $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ est le coefficient angulaire de la tangente en (x_1, y_1) à l'hyperbole (3); donc .....

17. Le produit des segments d'une tangente compris entre le point de contact et deux diamètres conjugués quelconques est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

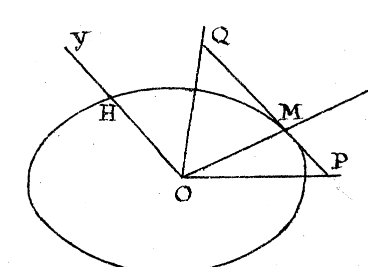
Soit M le point de contact de la tangente et OH le diamètre parallèle à cette tangente, OM et OH seront deux diamètres conjugués; en y rapportant la courbe, on aura l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0,$$

où a' et b' sont les longueurs des deux diamètres OM et OH.

Soient deux diamètres conjugués quelconques, OP et OQ; m et m' leurs coefficients angulaires, on a

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$



et $x - a' = o$ est l'équation de la tangente.

Les équations des diamètres OP et OQ étant

$$OP:\ y - mx = o;\quad OQ:\ y - m'x = o,$$

on aura

$$MP = ma',\ MQ = m'a;$$

d'où l'on conclut:

$$(1)\qquad MP.MQ = mm'.a'^2 = -b'^2;$$

c'est l'égalité qu'il fallait démontrer; les segments MP et MQ doivent être portés en sens contraire à partir du point M.

On verra, dans l'hyperbole, que les segments MP et MQ sont portés dans le même sens.

792. Le rapport anharmonique de quatre diamètres est égal à celui de leurs conjugués.

1° Ellipse. Hyperbole.

Si α, β, γ, sont les coefficients angulaires de quatre diamètres, leurs équations seront

$$y - \alpha x = o,\ y - \beta x = o,\ y - \gamma x = o,\ y - \delta x = o;$$

le rapport anharmonique de ce faisceau a pour valeur

$$R = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} : \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta}.$$

Si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, sont les coefficients angulaires de quatre diamètres respectivement conjugués des quatre premiers, la valeur de leur rapport anharmonique sera

$$R_1 = \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1 - \beta_1} : \frac{\delta_1 - \alpha_1}{\delta_1 - \beta_1}.$$

Or, ces directions étant respectivement conjuguées, on a

$$\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1 = \gamma\gamma_1 = \delta\delta_1 = k,$$

la constante k étant égale à $-\frac{b^2}{a^2}$ dans le cas de l'ellipse; à $+\frac{b^2}{a^2}$, dans le cas de l'hyperbole.

De ces relations, il résulte évidemment

$$R_1 = R.$$

2° Parabole.

Quatre cordes quelconques d'une parabole ont leur fonction anharmonique égale au rapport anharmonique des quatre diamètres respectivement conjugués à ces cordes.

M. Chasles appelle fonction anharmonique de quatre droites qui ne passent pas par un même point, le rapport anharmonique de quatre droites menées par un même point parallèlement aux premières.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les coefficients angulaires des quatre cordes considérées, la fonction anharmonique aura pour expression

$$R = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} : \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta}.$$

Les équations des diamètres correspondants seront N° (787):

$$y = \frac{p}{\alpha},\ y = \frac{p}{\beta},\ y = \frac{p}{\gamma},\ y = \frac{p}{\delta};$$

leur rapport anharmonique, qui est égal à celui des points que ces droites parallèles déterminent

sur l'axe des y, a pour valeur

$$\frac{\frac{p}{\gamma}-\frac{p}{\alpha}}{\frac{p}{\gamma}-\frac{p}{\beta}} : \frac{\frac{p}{\delta}-\frac{p}{\alpha}}{\frac{p}{\delta}-\frac{p}{\beta}}, \quad ou \quad \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} : \frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}.$$

C. Q. F. D.

III: Diverses expressions de la longueur d'un diamètre.

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. (Axes rectangulaires)

793. **Longueur d'un diamètre faisant l'angle α avec l'axe des x.**

Si a' est la longueur d'un diamètre; α son angle avec Ox; x_1, y_1, les coordonnées de son extrémité; on a

$$OA_1: \quad (1) \qquad x_1 = a'\cos\alpha, \; y_1 = a'\sin\alpha.$$

On aura de même, pour un second diamètre, faisant l'angle β avec Ox, et dont la longueur est b':

$$OB_1: \quad (1 \text{ bis}) \qquad x_2 = b'\cos\beta, \; y_2 = b'\sin\beta.$$

Les points (x_1, y_1), et (x_2, y_2) se trouvent sur l'ellipse, on en conclut

$$\begin{cases} OA_1: \; (2) \; \frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}, \\ OB_1: \; (2 \text{ bis}) \; \frac{1}{b'^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}. \end{cases}$$

Si les deux diamètres sont conjugués, on devra avoir la relation N° (788)

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Remarque. Si les deux diamètres OA_1 et OB_1 sont rectangulaires, on a $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, ou $\cos\beta=-\sin\alpha$, $\sin\beta=\cos\alpha$; d'où il résulte

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2};$$

d'où: la somme des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.

794. **Longueur d'un diamètre en fonction du paramètre angulaire de son extrémité.**

Soient φ et φ_1 les paramètres angulaires des extrémités A_1 et B_1 des deux diamètres OA_1 et OB_1, on a

$$(4) \begin{cases} x_1 = a\cos\varphi, \\ y_1 = b\sin\varphi; \end{cases} \quad (4 \text{ bis}) \begin{cases} x_2 = a\cos\varphi_1, \\ y_2 = b\sin\varphi_1. \end{cases}$$

Si l'on compare ces valeurs avec les valeurs (1) et (1 bis) du numéro précédent, on en conclut

$$(5) \quad OA_1: \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a\cos\varphi}{a'}, \\ \sin\alpha = \frac{b\sin\varphi}{a'}; \end{cases} \quad (5 \text{ bis}) \; OB_1: \begin{cases} \cos\beta = \frac{a\cos\varphi_1}{b'}, \\ \sin\beta = \frac{b\sin\varphi_1}{b'}. \end{cases}$$

Les longueurs a' et b' s'obtiennent immédiatement, en remarquant que

$$a'^2 = x_1^2 + y_1^2, \; b'^2 = x_2^2 + y_2^2;$$

d'où il résulte

$$\begin{cases} (6) & a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \\ (6\ bis) & b'^2 = a^2\cos^2\varphi_1 + b^2\sin^2\varphi_1 \end{cases}$$

795. Deux diamètres sont conjugués, lorsque les paramètres angulaires de leurs extrémités vérifient la relation

$$(7) \qquad \varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Les coefficients angulaires m et m', ou $\frac{y_1}{x_1}$ et $\frac{y_2}{x_2}$, doivent vérifier la relation

$$\frac{y_1\,y_2}{x_1\,x_2} = -\frac{b^2}{a^2};$$

d'où l'on déduit, eu égard aux valeurs (4)

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1 = 0,\ \text{ou}\ \cos(\varphi_1 - \varphi) = 0,\ \text{ou}\ \varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

De là résulte pour :

Les longueurs de deux diamètres conjugués

$$\begin{cases} OA_1: & (8) & a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \\ OB_1: & (8\ bis) & b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Les angles de deux diamètres conjugués avec l'axe Ox, sont

$$\begin{cases} OA_1: & (9) & \cos\alpha = \dfrac{a\cos\varphi}{a'}, & \sin\alpha = \dfrac{b\sin\varphi}{a'}, \\ OB_1: & (9\ bis) & \cos\beta = -\dfrac{a\sin\varphi}{b'}, & \sin\beta = \dfrac{b\cos\varphi}{b'}. \end{cases}$$

Il en résulte encore que (x_1, y_1) étant les coordonnées de l'extrémité d'un diamètre, et φ le paramètre angulaire de cette extrémité, on a

$$OA_1: \quad (10) \qquad x_1 = a\cos\varphi,\ y_1 = b\sin\varphi;$$

les coordonnées de l'extrémité du diamètre conjugué seront

$$OB_1: \quad (10\ bis) \qquad x_2 = -a\sin\varphi,\ y_2 = b\cos\varphi.$$

Ces formules sont utiles dans un grand nombre de questions relatives aux diamètres conjugués.

Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; (Axes rectangulaires).

796. **Longueur d'un diamètre faisant l'angle α avec l'axe des x.**

Si a' est la longueur d'un diamètre réel OA_1 ; α, son angle avec Ox ; x_1, y_1, les coordonnées de son extrémité ; on aura

$$OA_1: \quad (1) \qquad x_1 = a'\cos\alpha,\ y_1 = a'\sin\alpha.$$

Si b' est la longueur d'un diamètre imaginaire OB_1 ; β son angle avec Ox ; x_2, y_2, les coordonnées de son extrémité, on aura

$$OB_1: \quad (1\ bis) \qquad x_2 = b'\sqrt{-1}\cos\beta,\ y_2 = b'\sqrt{-1}\sin\beta.$$

Les points (x_1, y_1) et $(x_2\ y_2)$ se trouvant sur l'hyperbole, on en conclut

$$\begin{cases} OA_1: & (2) & \dfrac{1}{a'^2} = \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2}; \\ OB_1: & (2\ bis) & -\dfrac{1}{b'^2} = \dfrac{\cos^2\beta}{a^2} - \dfrac{\sin^2\beta}{b^2}. \end{cases}$$

Si les deux diamètres sont conjugués, on devra avoir la relation N° [788] :

$$(3) \qquad \tang\alpha . \tang\beta = + \frac{b^2}{a^2}.$$

Remarque. Si l'on suppose $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, on déduit des relations qui précèdent

$$\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2};$$

c-à-d. que la différence des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.

797. Longueur d'un diamètre en fonction du paramètre angulaire de son extrémité.

Soit φ le paramètre angulaire de l'extrémité A_1 d'un diamètre réel OA_1; x_1, y_1, les coordonnées de ce point, on peut poser

$$OA_1: (4) \quad x_1 = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y_1 = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Si x_2, y_2, sont les coordonnées de l'extrémité B_1 d'un diamètre imaginaire OB_1, nous pourrons poser

$$OB_1: (4\,\text{bis}) \quad x_2 = \frac{a\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\sqrt{-1}, \quad y_2 = \frac{b}{\cos\varphi_1}\sqrt{-1};$$

l'équation de l'hyperbole sera évidemment vérifiée; nous dirons que φ_1 est le paramètre angulaire du diamètre imaginaire OB_1.

Si l'on compare les valeurs (4) & (4 bis) avec les valeurs (1) & (1 bis) du numéro précédent, on en conclut

$$OA_1: (5) \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{a'\cos\varphi}, \\ \sin\alpha = \dfrac{b\sin\varphi}{a'\cos\varphi}; \end{cases} \qquad OB_1: (5\,\text{bis}) \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{a\sin\varphi_1}{b'\cos\varphi_1}, \\ \sin\beta = \dfrac{b}{b'\cos\varphi_1}. \end{cases}$$

Les longueurs a' et b' s'obtiendront en remarquant que

$$a'^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad -b'^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

car la longueur d'un diamètre imaginaire est le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'expression algébrique de la longueur de ce diamètre; d'où il résulte

$$\begin{cases} OA_1: \quad (6) \quad a'^2 = \dfrac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \\ OB_1: \quad (6\,\text{bis}) \quad b'^2 = \dfrac{a^2\sin^2\varphi_1 + b^2}{\cos^2\varphi_1}. \end{cases}$$

N. B. Je crois que l'introduction d'un paramètre angulaire pour les points imaginaires de l'hyperbole n'a pas encore été tentée; on constatera cependant, dans les développements qui suivent, que cette introduction peut présenter de nombreux avantages.

798. Deux diamètres sont conjugués, lorsque leurs paramètres angulaires φ et φ_1 vérifient la relation

$$(7) \qquad \varphi_1 - \varphi = 0.$$

En effet, les coefficients angulaires m et m', ou $\tan\alpha$ et $\tan\beta$, doivent vérifier la relation

$$m\,m' = +\frac{b^2}{a^2};$$

or, des relations (5) et (5 bis) on déduit

$$\tan\alpha = \frac{b\sin\varphi}{a}, \quad \tan\beta = \frac{b}{a\sin\varphi_1};$$

on doit donc avoir

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ ou } \sin\varphi = \sin\varphi_1, \text{ ou } \varphi_1 = \varphi.$$

De là résulte pour:

Les longueurs de deux diamètres conjugués:

$$\begin{cases} OA_1 \text{ réel} \quad (8) \quad a'^2 = \dfrac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \\ OB_1 \text{ imaginaire} \quad (8\,\text{bis}) \quad b'^2 = \dfrac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi}. \end{cases}$$

Les angles de deux diamètres conjugués avec l'axe Ox, sont

$$\begin{cases} OA_1 : \ (9) \quad \cos\alpha = \dfrac{a}{a'\cos\varphi}, \quad \sin\alpha = \dfrac{b\sin\varphi}{a'\cos\varphi}, \\ OB_1 : \ (9\ bis) \quad \cos\beta = \dfrac{a\sin\varphi}{b'\cos\varphi}, \quad \sin\beta = \dfrac{b}{b'\cos\varphi}. \end{cases}$$

Enfin, si x_1 et y_1 sont les coordonnées de l'extrémité du diamètre réel dont le paramètre angulaire est φ, on a

$$OA_1 : \quad (10) \quad x_1 = \frac{a}{\cos\varphi}, \ y_1 = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi};$$

les coordonnées x_2, y_2, de l'extrémité du diamètre conjugué, sont

$$OB_1 : \quad (10\ bis) \quad x_2 = \frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{-1}, \ y_2 = \frac{b}{\cos\varphi}\sqrt{-1}.$$

IV°. Diamètres maximum et minimum. Diamètres conjugués égaux.

Ellipse.

799. D'après la formule (6) du N° [794], on a

$$a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

expression qu'on peut écrire

$$a'^2 = a^2 - c^2\sin^2\varphi = c^2\cos^2\varphi + b^2.$$

Il est alors visible que le diamètre maximum correspond à $\varphi = 0$, c'est le grand axe de l'ellipse; et que le diamètre minimum correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est le petit axe.

Pour déterminer les diamètres conjugués égaux, égalons les valeurs de a' et b', (8) et (8 bis) N° [795], on a

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi;$$

d'où l'on conclut

$$(a^2 - b^2)\cos 2\varphi = 0.$$

Si a est différent de b, il faut que

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ d'où } \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi les diamètres conjugués égaux sont les diagonales du rectangle construit sur les axes.

Hyperbole.

800. D'après la formule (6) du N° [797], on a

$$a'^2 = \frac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi};$$

expression qu'on peut écrire

$$a'^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi} - b^2.$$

La valeur minimum correspond à $\varphi = 0$, ou $x_1 = a$, c'est l'axe transverse; le maximum est infini et correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a alors

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{b\tan\varphi}{\frac{a}{\cos\varphi}} = \frac{b}{a}\sin\varphi; \ \lim\frac{y_1}{x_1} = \tan\alpha = \frac{b}{a};$$

le diamètre infini n'est autre que l'asymptote.

Pour reconnaître s'il y a des diamètres conjugués égaux, égalons les valeurs de a' et b', (8) et (8 bis) N° [798], on a

$$a^2+b^2\sin^2\varphi=a^2\sin^2\varphi+b^2;$$

d'où

$$(a^2-b^2)\cos^2\varphi=0.$$

De là résulte que, si l'hyperbole est équilatère, tous les diamètres conjugués sont égaux; si l'hyperbole n'est pas équilatère, les diamètres conjugués égaux sont infinis et se confondent avec une même asymptote.

V.° Longueur d'une corde focale.

Ellipse.

801. Soit MM' une corde, passant par le foyer F, et f sa longueur, on a

$$f=FM+FM'.$$

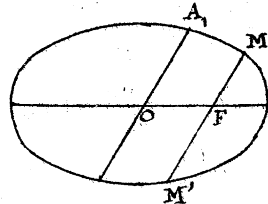
Or, si le point F est le foyer de droite, par exemple; et si x_1 et x_2 sont les abscisses des points M et M', on a N° [693]

$$FM=a-\frac{c}{a}x_1,\ FM'=a-\frac{c}{a}x_2;$$

d'où

$$(1)\qquad f=2a-\frac{c}{a}(x_1+x_2).$$

Désignons par φ le paramètre angulaire de l'extrémité du diamètre OA_1 parallèle à la corde MM', et par a' la longueur de ce diamètre; on sait que N° [794]:



$$(2)\qquad a'^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi,\ \text{et}\ \frac{y_1}{x_1}=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}.$$

L'équation de la corde FM, parallèle à ce diamètre, sera

$$y=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}(x-c).$$

Les abscisses des points d'intersection de cette corde avec l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

seront données par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}(x-c)^2-1=0.$$

De là on conclut

$$x_1+x_2=+\frac{\dfrac{2c\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}}=+2c\sin^2\varphi.$$

Nous aurons donc pour la longueur de la corde f,

$$f=2a-\frac{2c^2}{a}\sin^2\varphi=\frac{2}{a}(a^2-c^2\sin^2\varphi)=\frac{2}{a}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi);$$

ou, en ayant égard à la valeur (2) de a':

$$(3)\qquad f=\frac{2a'^2}{a};$$

c.à.d. que la moitié d'une corde focale est troisième proportionnelle entre le demi-diamètre parallèle et le demi-axe focal.

Si l'on considère une seconde corde focale parallèle à un diamètre b′, on aura

$$f = \frac{2b'^2}{a};$$

d'où il suit

$$(4) \qquad f + f' = \frac{2(a'^2 + b'^2)}{a}.$$

Par conséquent, la somme de deux cordes focales menées parallèlement à deux diamètres conjugués est constante.

Car nous avons vu et nous verrons encore que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

Hyperbole.

802. Soit MM′ une corde passant par le foyer F, et f sa longueur; nous aurons à examiner les deux cas suivants : 1° Les points M et M′ se trouvent sur la même branche; 2° ou les points M et M′ se trouvent sur des branches différentes. On a

dans le 1er cas : $f = FM + FM'$,

dans le 2ème cas : $f = FM'_1 - FM_1$.

Soit OB_1 ou OA_1 le diamètre parallèle à la corde MM′ ou $M_1M'_1$; dans le 1er cas, le diamètre OA_1 est imaginaire; il est réel, dans le second.

1er Cas.

En désignant par x_1 et x_2 les abscisses des points M et M′, on a N° (696)

$$FM = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad FM' = \frac{c}{a}x_2 - a;$$

d'où

$$(1) \qquad f = \frac{c}{a}(x_1 + x_2) - 2a.$$

D'après les formules (6 bis) et (5 bis) N° [797], on aura pour la longueur et la direction du diamètre imaginaire OB_1

$$(2) \qquad b'^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi_1 + b^2}{\cos^2\varphi_1}, \quad \tang\beta' = \frac{b}{a\sin\varphi_1}.$$

L'équation de la corde FM, parallèle à ce diamètre, sera

$$y = \frac{b}{a\sin\varphi_1}(x - c), \text{ où } c^2 = a^2 + b^2.$$

Les abscisses des points d'intersection de cette corde avec l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

seront données par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(x-c)^2}{a^2\sin^2\varphi_1} - 1 = 0.$$

De là on conclut

$$x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2c}{a^2\sin^2\varphi_1}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2\sin^2\varphi_1}} = \frac{2c}{\cos^2\varphi_1}.$$

Nous avons donc pour la longueur de la corde f (1):

$$f = \frac{2c^2}{a\cos^2\varphi_1} - 2a = 2\,\frac{c^2 - a^2\cos^2\varphi_1}{a\cos^2\varphi_1} = \frac{2}{a}\,\frac{a^2\sin^2\varphi_1 + b^2}{\cos^2\varphi_1},$$

ou, en ayant égard à la valeur (2) de b':

$$(3) \qquad f = \frac{2b'^2}{a}.$$

2ème Cas.

En désignant par x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M'_1, on a N° [696]

$$FM_1 = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad FM'_1 = -\left(\frac{c}{a}x_2 - a\right);$$

d'où

$$(4) \qquad f = FM'_1 - FM_1 = -\frac{c}{a}(x_1 + x_2) + 2a.$$

D'après les formules (6) et (5) du N° [797], on aura pour la longueur et la direction du diamètre réel OA_1:

$$(5) \qquad a'^2 = \frac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \tan\alpha = \frac{b\sin\varphi}{a}.$$

L'équation de la droite FM_1, parallèle à ce diamètre, sera

$$y = \frac{b\sin\varphi}{a}(x - c), \quad \text{où } c^2 = a^2 + b^2;$$

les abscisses des points d'intersection de la corde avec l'hyperbole seront données par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{a^2}(x - c)^2 - 1 = 0.$$

De là, on conclut

$$x_1 + x_2 = -\frac{\dfrac{2c\sin^2\varphi}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{\sin^2\varphi}{a^2}} = -\frac{2c\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Nous aurons alors pour la longueur de la corde f ou (4)

$$f = \frac{2c^2\sin^2\varphi}{a\cos^2\varphi} + 2a = \frac{2}{a}\cdot\frac{c^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{2}{a}\cdot\frac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi};$$

ou, en ayant égard à la valeur (5) de a':

$$(6) \qquad f = \frac{2a'^2}{a}.$$

Ainsi, dans tous les cas, la moitié d'une corde focale est troisième proportionnelle entre la longueur réelle du demi-diamètre parallèle et le demi-axe transverse.

On conclura aussi de cette proposition que:

La différence de deux cordes focales respectivement parallèles à deux diamètres conjugués est constante.

VI. Longueur d'une corde quelconque.

Ellipse.

803. Soient φ_1 et φ_2 les paramètres angulaires des extrémités d'une corde M_1M_2 de l'ellipse, et D la longueur de cette corde; on a:

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 ;$$

or

$$\begin{cases} x_1 = a \cos\varphi_1 , & x_2 = a \cos\varphi_2 , \\ y_1 = b \sin\varphi_1 ; & y_2 = b \sin\varphi_2 ; \end{cases}$$

d'où

$$(1) \qquad D^2 = a^2 (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2 + b^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2).$$

Si a' est la longueur du diamètre parallèle à cette corde et que φ soit le paramètre angulaire de l'extrémité de ce diamètre, on a d'abord N° [794] :

$$(2) \qquad a'^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin\varphi .$$

Mais le diamètre D étant parallèle à la corde $M_1 M_2$, on devra avoir

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x} , \quad \text{ou} \quad \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} ;$$

relation que nous écrirons

$$(3) \qquad \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\sin\varphi} = \lambda .$$

De là nous tirons

$$(4) \qquad \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 = \lambda \cos\varphi ; \quad \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 = \lambda \sin\varphi .$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (1) de D, et ayant égard à la relation (2), on trouve d'abord

$$(5) \qquad D^2 = \lambda^2 (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi) = \lambda^2 a'^2 .$$

Pour calculer λ, ajoutons membre à membre les carrés des relations (4), il vient

$$\lambda^2 = 2 - 2(\cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1) = 2\left[1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] = 4 \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} .$$

On a donc la formule définitive

$$(6) \qquad D = 2a' \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} ;$$

la différence $(\varphi_2 - \varphi_1)$ devra être prise de manière à rendre positif le second membre de cette expression ; a' est la longueur du demi-diamètre parallèle à la corde.

Hyperbole.

804. Soient φ_1 et φ_2 les paramètres angulaires des extrémités d'une corde $M_1 M_2$, de sorte que

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\cos\varphi_1} , & x_2 = \dfrac{a}{\cos\varphi_2} , \\ y_1 = \dfrac{b \sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} , & y_2 = \dfrac{b \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} ; \end{cases}$$

la longueur D de cette corde sera

$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 ,$$

ou

$$(1) \qquad D^2 = a^2 \left(\frac{1}{\cos\varphi_1} - \frac{1}{\cos\varphi_2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} - \frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}\right)^2 .$$

1° Si les deux points M_1 et M_2 sont sur une même branche de la courbe, le diamètre parallèle est imaginaire ; on aura pour la longueur et la direction de ce diamètre (6 bis), (5 bis) N° [797] :

$$(2) \qquad b'^2 = \frac{a^2 \sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi} , \quad \tang \beta = \frac{b}{a \sin\varphi} .$$

Ce diamètre étant parallèle à la corde $M_1 M_2$, on a

$$\frac{\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{\dfrac{1}{\cos\varphi_2}-\dfrac{1}{\cos\varphi_1}}=\frac{1}{\sin\varphi};$$

relation que nous écrirons

$$(3)\qquad \frac{\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{1}=\frac{\dfrac{1}{\cos\varphi_2}-\dfrac{1}{\cos\varphi_1}}{\sin\varphi}=\lambda.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de D, et ayant égard à la relation (2), il vient

$$(4)\qquad D^2=\lambda^2(a^2\sin^2\varphi+b^2)=\lambda^2 b'^2\cos^2\varphi.$$

Or, on tirera des égalités (3):

$$\lambda^2=\left(\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\right)^2;\quad \lambda^2\sin^2\varphi=\left(\frac{1}{\cos\varphi_2}-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right)^2;$$

d'où en retranchant:

$$\lambda^2\cos^2\varphi=-2-\frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}+\frac{2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}=2\,\frac{1-\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}=\frac{4\sin^2\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}.$$

On a donc définitivement

$$(5)\qquad D=\frac{2b'\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sqrt{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}.$$

2° Si les deux points M_1 et M_2 sont sur des branches différentes, le diamètre parallèle est réel; on aura pour la longueur et la direction de ce diamètre (6) et (5) N° [797]

$$(6)\qquad a'^2=\frac{a^2+b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \tang\alpha=\frac{b\sin\varphi}{a}.$$

Ce diamètre étant parallèle à la corde M_1M_2, on a

$$\frac{\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{\dfrac{1}{\cos\varphi_2}-\dfrac{1}{\cos\varphi_1}}=\frac{\sin\varphi}{1};$$

relation que nous écrirons

$$(7)\qquad \frac{\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{\sin\varphi}=\frac{\dfrac{1}{\cos\varphi_2}-\dfrac{1}{\cos\varphi_1}}{1}=\lambda.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de D, et ayant égard à la relation (6), il vient

$$(8)\qquad D^2=\lambda^2[a^2+b^2\sin^2\varphi]=\lambda^2a'^2\cos^2\varphi.$$

Or, on tirera des égalités (7):

$$\lambda^2=\left(\frac{1}{\cos\varphi_2}-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right)^2,\quad \lambda^2\sin^2\varphi=\left(\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}-\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\right)^2;$$

d'où on déduit, en retranchant:

$$\lambda^2\cos^2\varphi=2-\frac{2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}+\frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}=2\,\frac{\cos(\varphi_2-\varphi_1)-1}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}=\frac{4\sin^2\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{-\cos\varphi_1\cos\varphi_2}.$$

On a donc définitivement

$$(9)\qquad D=\frac{2a'\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}.$$

Dans la formule (5), les angles φ_1 et φ_2 sont de même espèce, c.à.d. tous les deux aigus ou tous les deux obtus; dans la formule (9), les angles φ_1 et φ_2 sont d'espèce différente; ou mieux, dans le cas auquel correspond la formule (5), $\cos\varphi_1$ et $\cos\varphi_2$ sont de même signe; dans le cas auquel correspond la formule (9), ces cosinus sont de signes contraires.

§ II. Théorèmes d'Appollonius.

Ellipse.

805. Si a' et b' sont les longueurs de deux diamètres conjugués; α et β les angles de ces deux diamètres avec l'axe Ox, on a N° [795]:

$$\begin{cases} a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \\ b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a\cos\varphi}{a'}, \quad \sin\alpha = \dfrac{b\sin\varphi}{a'}, \\ \cos\beta = \dfrac{a\sin\varphi}{b'}, \quad \sin\beta = \dfrac{b\cos\varphi}{b'}. \end{cases}$$

Or, en ajoutant les deux premières relations, on trouve immédiatement

$$(1) \qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Si θ est l'angle des deux diamètres, on a $\beta - \alpha = \theta$; d'où

$$\sin\theta = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta;$$

et, en ayant égard aux secondes relations, il vient

$$(2) \qquad a'b'\sin\theta = ab.$$

c.à.d. que:

La somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle des axes.

806. Autrement.

Lemme. Si ρ est le rayon qui joint le centre à un point de l'ellipse, V l'angle que fait la tangente en ce point avec le rayon vecteur, on a

$$(I) \qquad \rho^4 - (a^2+b^2)\rho^2 + \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

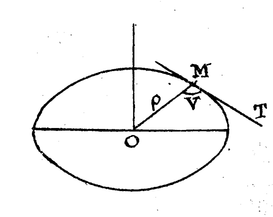
En effet, φ étant le paramètre angulaire du point M, on a

$$\rho^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi;$$

le coefficient angulaire de OM est $\dfrac{y}{x}$ ou $\dfrac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}$;

le coefficient angulaire de la tangente est $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ ou $-\dfrac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}$.

D'après cela



$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{-b\cos\varphi}{a\sin\varphi} - \dfrac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}}{1 - \dfrac{b^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin\varphi\cos\varphi}} = -\frac{ab}{c^2\sin\varphi\cos\varphi}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho^2 = c^2\cos^2\varphi + b^2, \quad \rho^2 = a^2 - c^2\sin^2\varphi;$$

par conséquent

$$(\rho^2-b^2)(a^2-\rho^2)=\frac{a^2b^2\cos^2 V}{\sin^2 V};$$

ou

$$(1)\qquad \rho^4-(a^2+b^2)\rho^2+\frac{a^2b^2}{\sin^2 V}=0.$$

Voir une autre démonstration N° (1044).

807. D'après cela, si a' et b' sont deux diamètres conjugués et que θ soit leur angle, la tangente à l'extrémité de l'un est parallèle à l'autre; c. à d. que les longueurs de l'un et l'autre diamètre seront données par l'équation (I) où l'on supposera $V=\theta$; on aura donc

$$(1)\qquad a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$
$$(2)\qquad a'^2b'^2\sin^2\theta=a^2b^2.$$

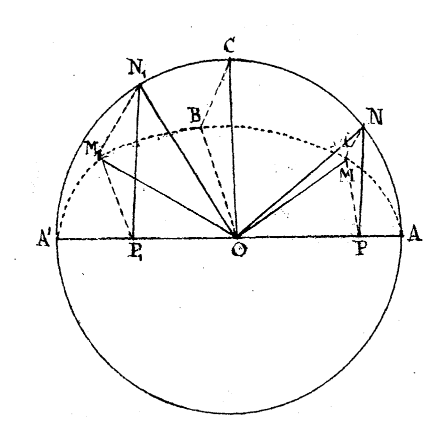
C. Q. F. D.

808. Autrement.

Lemme. L'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle dont le plan passe par le grand axe de l'ellipse, le cosinus de l'angle des deux plans étant égal à $\frac{b}{a}$.

Soit AA' le grand axe de l'ellipse, et ACA' le cercle décrit dans un plan passant par AA' et faisant avec le plan de l'ellipse un angle V tel que

$$\cos V=\frac{b}{a}.$$



Le cercle rapporté aux deux droites OA et OC situées dans son plan, aura pour équation

$$x^2+y^2=a^2.$$

Soit N un point du cercle, et M sa projection sur le plan ABA'; rapportons le point M aux deux droites rectangulaires OA et OB; si X et Y sont les coordonnées du point M, on aura

$$(1)\qquad X=x,\ Y=y\cos V=\frac{b}{a}y.$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation du cercle, nous trouverons

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0;$$

c'est l'équation de la projection du cercle; on reconnait une ellipse ayant pour axes a et b.

Si l'on imagine dans le cercle une série de cordes parallèles, elles se projettent suivant des cordes parallèles dans l'ellipse; les points milieux se projettent aux points milieux de ces cordes; et, puisque dans le cercle le diamètre de ces cordes est une ligne droite, il en est de même dans l'ellipse.

Deux diamètres rectangulaires du cercle sont tels que l'un d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; leurs projections jouissent donc de la même propriété et forment dans l'ellipse un système de diamètres conjugués.

809. Ceci démontré, soient ON et ON_1 deux diamètres rectangulaires du cercle; soient $OM=a'$, $OM_1=b'$, leurs projections; on a

$$a'^2=\overline{ON}^2-\overline{MN}^2;\quad b'^2=\overline{ON_1}^2-\overline{M_1N_1}^2;$$

mais

$$MN=NP\sin V,\ M_1N_1=N_1P_1\sin V;$$

par suite

$$a'^2 = \overline{ON}^2 - \overline{NP}^2 + \overline{NP}^2 \cos^2 V,\; b'^2 = \overline{ON_1}^2 - \overline{N_1P_1}^2 + \overline{N_1P_1}^2 \cos^2 V.$$

Il vient, en ajoutant

$$a'^2 + b'^2 = \overline{ON}^2 + \overline{ON_1}^2 - (\overline{NP}^2 + \overline{N_1P_1}^2) + (\overline{NP}^2 + \overline{N_1P_1}^2) \cos^2 V.$$

Les triangles ONP et ON_1P_1 étant égaux, on a

$$OP = N_1P_1;\ \text{d'où}\ \overline{NP}^2 + \overline{N_1P_1}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{OP}^2 = a^2;$$

l'égalité précédente devient donc, en remarquant que $\cos V = \frac{b}{a}$,

$$(1) \qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Le carré construit sur deux diamètres rectangulaires du cercle se projette suivant le parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Or la projection de l'aire d'une figure plane est égale à l'aire projetée multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.

L'aire du carré est égale a^2, celle du parallélogramme est $a'b' \sin\theta$; donc

$$(2) \qquad a'b' \sin\theta = a^2 \cos V = ab.$$

C. Q. F. D.

810. **Réciproques.**

Les réciproques des théorèmes d'Appollonius ne sont pas vraies toutes deux.

« Ainsi, de ce que la somme des carrés de deux diamètres a' et b' est égale à la somme des carrés « des axes, il n'en résulte pas que ces deux diamètres soient conjugués.

Prenons le diamètre OC conjugué de $OD = a'$, la longueur du diamètre OC sera égale à b', puisque par hypothèse

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2;$$

les deux diamètres conjugués OC et OD seront dans des angles différents.

Mais le diamètre OD_1, symétrique de OD par rapport à l'axe OB, sera égal à OD et satisfera à la relation précédente; or les deux diamètres OD_1 et OC ne sont pas conjugués, puisqu'ils se trouvent dans le même quadrant de l'ellipse No [790] donc......

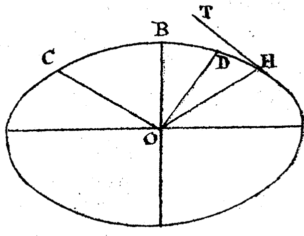
« Lorsque deux diamètres OC et OD sont tels, que l'aire du parallélogramme construit sur ces deux «diamètres est égale à celle du rectangle des axes, ces deux diamètres sont conjugués. »

Ainsi, on a, d'après l'hypothèse:

$$OC.\ OD.\ \sin \widehat{COD} = ab.$$

Si ces deux diamètres n'étaient pas conjugués, soit OH le conjugué de OC, on aurait aussi

$$OC.\ OH\ \sin \widehat{COH} = ab;$$



c. à d. que le parallélogramme construit sur les deux droites OC et OD serait équivalent au parallélogramme construit sur les deux droites OC et OH. Or cette conséquence est inadmissible, car les deux triangles COD et COH, moitiés respectives de ces deux parallélogrammes, ont pour base commune OC, et les hauteurs sont nécessairement différentes.

En effet, la tangente en H sera parallèle au diamètre OC, conjugué de OH; le point D se trouvera donc au dessous de cette tangente; et, par suite, la distance du point D à OC sera moindre que la distance du point H à cette même droite. Donc...

Hyperbole.

811. Si a' et b' sont les longueurs de deux diamètres conjugués; α et β les angles de ces deux diamètres avec l'axe Ox, on a No [798]

$$\left\{\begin{array}{l} a'^2 = \dfrac{a^2 + b^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \\ b'^2 = \dfrac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos\alpha = \dfrac{a}{a'\cos\varphi}, & \sin\alpha = \dfrac{b\sin\varphi}{a'\cos\varphi}; \\ \cos\beta = \dfrac{a\sin\varphi}{b'\cos\varphi}, & \sin\beta = \dfrac{b}{b'\cos\varphi}. \end{array}\right.$$

Or, en retranchant les deux premières relations, on trouve immédiatement

$$(1) \qquad a'^2 - b'^2 = a - b^2.$$

Si θ est l'angle des deux diamètres, on a $\beta - \alpha = \theta$; d'où

$$\sin\theta = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta;$$

et, en ayant égard aux secondes relations, il vient

$$(2) \qquad a'b'\sin\theta = ab.$$

C. à. d. que

La différence des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des axes.

Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle des axes.

812. Autrement.

Lemme. Si ρ est le rayon qui joint le centre à un point de l'hyperbole, V l'angle que fait la tangente en ce point avec le rayon vecteur, on a

$$(\text{I}) \qquad \rho^4 - (a^2 - b^2)\rho^2 - \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

En effet, φ étant le paramètre angulaire du point M réel, on a N° [797]

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}; \quad x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi};$$

le coefficient angulaire de OM est $\frac{y}{x}$, ou $\frac{b\sin\varphi}{a}$;
le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{b^2x}{a^2y}$, ou $\frac{b}{a\sin\varphi}$.

D'après cela,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{b}{a\sin\varphi} - \dfrac{b\sin\varphi}{a}}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{ab\cos^2\varphi}{c^2\sin\varphi}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi} - b^2, \quad \text{et} \quad \rho^2 = \frac{a^2 + b^2\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi};$$

tirant de là $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, et substituant dans la valeur de tang V, il vient

$$\frac{\sin^2 V}{\cos^2 V}\,\frac{(\rho^2 - a^2)}{(\rho^2 + b^2)} = a^2b^2\frac{1}{(\rho^2 + b^2)^2};$$

ou, simplifiant et développant:

$$(\text{I}) \qquad \rho^4 - (a^2 - b^2)\rho^2 - \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation, V par θ, nous aurons

$$\rho^4-(a^2-b^2)\rho^2-\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}=0.$$

Cette équation donnera les carrés des longueurs de deux diamètres faisant l'angle θ avec la tangente à leur extrémité ; un de ces diamètres sera réel et l'autre imaginaire. Or si nous considérons deux diamètres conjugués faisant l'angle θ, la tangente à l'extrémité de l'un sera parallèle à l'autre et fera, par suite, l'angle θ avec le rayon vecteur ; les carrés des valeurs algébriques, a' et $b'\sqrt{-1}$, de ces deux diamètres seront donc fournies par l'équation ci-dessus ; de là on conclut

$$(1)\qquad a'^2-b'^2=a^2-b^2,$$

$$(2)\qquad a'^2\,b'^2\sin^2\theta=a^2b^2.$$

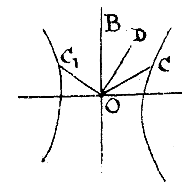
C. Q. F. D.

813. **Réciproques.**

« De ce que la différence des carrés de deux diamètres a' et b' est égale à la différence des carrés des axes, « il n'en résulte pas que ces deux diamètres soient conjugués. »

Soit, en effet, $OC=a'$ le diamètre réel, et OD le diamètre conjugué, on aura

$$a'^2-\overline{OD}^2=a^2-b^2;$$



donc $OD=b'$. Prenons le diamètre OC_1, symétrique de OC par rapport à OB, on aura $OC_1=OC=a'$; de sorte que les deux diamètres OC_1 et OD vérifieront la relation imposée ; or ces diamètres ne peuvent pas être conjugués, puisque, dans l'hyperbole, deux demi-diamètres conjugués doivent se trouver dans le même angle des axes.

« Lorsque deux diamètres OC et OD sont tels que l'aire du parallélogramme construit sur ces « deux diamètres est égale à celle du rectangle des axes, ces deux diamètres sont conjugués. »

Ainsi, on a d'après l'hypothèse

$$OC.\,OD\sin\widehat{COD}=ab.$$

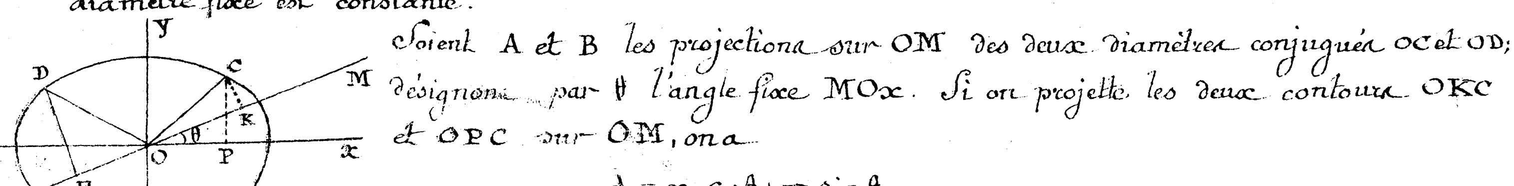
Si ces deux diamètres n'étaient pas conjugués, soit OH le conjugué de OD, on aurait aussi

$$OC.\,OH\sin\widehat{COH}=ab,$$

c.à.d. que le parallélogramme construit sur OC et OD serait équivalent au parallélogramme construit sur les deux droites OC et OH. Or cette conséquence est inadmissible, car les deux triangles COD et COH, moitiés respectives de ces deux parallélogrammes, ont pour base commune OC, et les hauteurs sont nécessairement différentes. En effet, la tangente en H sera parallèle au diamètre OC conjugué de OH ; le point D se trouvera donc au dessus de cette tangente, et, par suite, la distance du point D à OC sera supérieure à la distance du point H à cette même droite ; donc....

Cette démonstration suppose que, des deux diamètres donnés, l'un est réel et l'autre imaginaire ; c'est qu'en effet l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres réels peut être égale à ab, et ces deux diamètres ne sont évidemment pas conjugués.

814. La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur un diamètre fixe est constante.



Soient A et B les projections sur OM des deux diamètres conjugués OC et OD ; désignons par θ l'angle fixe MOx. Si on projette les deux contours OKC et OPC sur OM, on a

$$A=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta\,;$$

on trouvera de même

$$B=x_2\cos\theta+y_2\sin\theta\,;$$

x_1, y_1 ; x_2, y_2, sont les coordonnées respectives des points C et D. Or, si φ est le paramètre angulaire du point C, $(\varphi + \frac{\pi}{2})$ sera le paramètre angulaire du point D ; on aura, par suite :

$$x_1 = a \cos\varphi,\ y_1 = b \sin\varphi ;\ x_2 = -a \sin\varphi,\ y_2 = b \cos\varphi.$$

Les valeurs de A et B se présenteront donc sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} A = a \cos\theta \cos\varphi + b \sin\theta \sin\varphi \\ B = -a \cos\theta \sin\varphi + b \sin\theta \cos\varphi. \end{cases}$$

On trouvera, en ajoutant la somme des carrés,

$$(2)\qquad A^2 + B^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta.$$

« Donc la somme des carrés des projections est constante et égale au carré du demi diamètre correspon-
« dant au paramètre angulaire θ. »

N. B. On peut conclure de là le premier des théorèmes d'Apollonius.

---

815. Longueur d'une corde dans le système des coordonnées tétraédriques.

Cette recherche complète celle qui a été faite aux Nos [803] et [804].

1° Soient les équations des trois droites

$$(1)\quad \begin{cases} LX + MY + NZ = 0, & (D) \\ a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0, & (D_1) \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0, & (D_2) \end{cases}$$

cherchons la distance des deux points où la première de ces droites rencontre les deux autres. Si l'on désigne par Σ l'aire du triangle formé par ces trois droites, on a, d'après la formule (8) du No [103] :

$$(2)\qquad 2\Sigma = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \cdot \frac{P^2}{P_1 P_2 P_3},$$

relation dans laquelle on a posé :

$$(2\,bis)\quad P = \begin{vmatrix} L & M & N \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} ; P_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} \end{vmatrix} ;\ P_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ L & M & N \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} \end{vmatrix} ;\ P_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ L & M & N \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} \end{vmatrix}.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par δ la distance cherchée $M_1 M_2$, par h la perpendiculaire abaissée du point d'intersection (X_o, Y_o, Z_o) des deux droites D_1 et D_2 sur la droite D, on a aussi d'après la formule (4) du No [98] :

$$(3)\qquad 2\Sigma = \delta . \frac{LX_o + MY_o + NZ_o}{K},$$

après avoir posé

$$(4)\qquad K = \sqrt{\lambda^2 L^2 + \mu^2 M^2 + \nu^2 N^2 - 2\mu\nu MN \cos A - 2\lambda\nu LM \cos B - 2\lambda\mu LM \cos C}.$$

Pour évaluer la quantité $(LX_o + MY_o + NZ_o)$ que nous désignerons par F, remarquons qu'on a les égalités :

$$LX_o + MY_o + NZ_o = F,$$
$$a_1 X_o + b_1 Y_o + c_1 Z_o = 0,$$
$$a^2 X_o + b_2 Y_o + c_2 Z_o = 0,$$
$$\frac{\sin A}{\lambda} X_o + \frac{\sin B}{\mu} Y_o + \frac{\sin C}{\nu} Z_o = \frac{S}{R}.$$

Éliminons X_o, Y_o, Z_o, entre ces quatre équations, il vient

$$\begin{vmatrix} L & M & N & F \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & \frac{S}{R} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou } F \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} \end{vmatrix} - \frac{S}{R} \begin{vmatrix} L & M & N \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

ou enfin, d'après les notations (2 bis):

$$(5) \qquad LX_0 + MY_0 + NZ_0 = \frac{S}{R} \cdot \frac{P}{P_3}.$$

La comparaison des valeurs (2) et (3) nous donne définitivement, en ayant égard à la relation (5):

$$(I) \qquad \overline{M_1 M_2} \text{ ou } \delta = \frac{K}{\lambda\mu\nu} \cdot \frac{S}{R} \cdot \frac{P}{P_1 P_2};$$

K, P, P_1, P_2, sont des quantités définies par les égalités (4) et (2 bis).

2° Supposons maintenant que les deux droites D_1 et D_2 soient données par l'équation du second degré:

$$(6) \qquad F(X,Y,Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0;$$

de sorte qu'on aura l'identité

$$(a_1X + b_1Y + c_1Z)(a_2X + b_2Y + c_2Z) = A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ.$$

De cette identité on conclut

$$(7) \begin{cases} a_1 a_2 = A_{11}, & b_1 b_2 = A_{22}, & c_1 c_2 = A_{33}; \\ b_1 c_2 + b_2 c_1 = 2A_{23}, & c_1 a_2 + c_2 a_1 = 2A_{13}, & a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2A_{12}. \end{cases}$$

De ces égalités résultent encore les suivantes

$$(7 \text{ bis}) \quad (b_1c_2 - b_2c_1)^2 = -4(A_{22}A_{33} - A_{23}^2); \ (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = -4(A_{33}A_{11} - A_{13}^2); \ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = -4(A_{11}A_{22} - A_{12}^2).$$

Ceci admis, on a, d'après les valeurs (2 bis):

$$P_1 = a_1\left(M\frac{\sin C}{\nu} - N\frac{\sin B}{\mu}\right) + b_1\left(N\frac{\sin A}{\lambda} - L\frac{\sin C}{\nu}\right) + c_1\left(L\frac{\sin B}{\mu} - M\frac{\sin A}{\lambda}\right);$$

$$P_2 = a_2\left(M\frac{\sin C}{\nu} - N\frac{\sin B}{\mu}\right) + b_2\left(N\frac{\sin A}{\lambda} - L\frac{\sin C}{\nu}\right) + c_2\left(L\frac{\sin B}{\mu} - M\frac{\sin A}{\lambda}\right).$$

On déduit de là, en multipliant membre à membre et en ayant égard aux relations (7):

$$(8) \qquad P_1P_2 = \left\{ \begin{aligned} & A_{11}\left(M\frac{\sin C}{\nu} - N\frac{\sin B}{\mu}\right)^2 + A_{22}\left(N\frac{\sin A}{\lambda} - L\frac{\sin C}{\nu}\right)^2 + A_{33}\left(L\frac{\sin B}{\mu} - M\frac{\sin A}{\lambda}\right)^2 \\ & + 2A_{12}\left(M\frac{\sin C}{\nu} - N\frac{\sin B}{\mu}\right)\left(N\frac{\sin A}{\lambda} - L\frac{\sin C}{\nu}\right) + 2A_{13}\left(M\frac{\sin C}{\nu} - N\frac{\sin B}{\mu}\right)\left(L\frac{\sin B}{\mu} - M\frac{\sin A}{\lambda}\right) \\ & + 2A_{23}\left(N\frac{\sin A}{\lambda} - L\frac{\sin C}{\nu}\right)\left(L\frac{\sin B}{\mu} - M\frac{\sin A}{\lambda}\right) \end{aligned} \right\}.$$

On constate alors, sans difficulté que

$$(9) \qquad P_1P_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L & \frac{\sin A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & M & \frac{\sin B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & N & \frac{\sin C}{\nu} \\ L & M & N & 0 & 0 \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Maintenant nous avons, d'après la première des valeurs (2 bis):

$$P = L(b_1c_2 - b_2c_1) + M(c_1a_2 - c_2a_1) + N(a_1b_2 - a_2b_1);$$

d'où il résulte en élevant au carré :

$$(10)\quad P^2 = \left\{ \begin{array}{l} L^2(b_1c_2-b_2c_1)^2 + M^2(c_1a_2-c_2a_1)^2 + N^2(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\ +2LM(b_1c_2-b_2c_1)(c_1a_2-c_2a_1) + 2LN(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1) + 2MN(c_1a_2-c_2a_1)(a_1b_2-a_2b_1) \end{array} \right\}.$$

Les coefficients de L^2, M^2, N^2, sont donnés par les relations (7bis). Quant aux coefficients des doubles produits, nous remarquons que :

$$(b_1c_2-b_2c_1)(c_1a_2-c_2a_1) = c_1c_2(a_2b_1+a_1b_2) - c_1^2a_2b_2 - c_2^2a_1b_1 = 2c_1c_2(a_2b_1+a_1b_2) - (c_1a_2+c_2a_1)(c_1b_2+c_2b_1);$$

d'où

$$(b_1c_2-b_2c_1)(c_1a_2-c_2a_1) = -4(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33});$$

et de même pour les autres. Donc

$$(11)\quad -\frac{P^2}{4} = \left\{ \begin{array}{l} (A_{22}A_{33}-A_{23}^2)L^2 + (A_{33}A_{11}-A_{13}^2)M^2 + (A_{11}A_{22}-A_{12}^2)N^2 \\ +2LM(A_{13}A_{23}-A_{12}A_{33}) + 2LN(A_{22}A_{32}-A_{13}A_{22}) + 2MN(A_{21}A_{31}-A_{23}A_{11}) \end{array} \right\}.$$

On constate alors que

$$(12)\quad P^2 = 4\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & M \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & N \\ L & M & N & 0 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant, dans la formule (I), P et (P_1P_2) par leurs valeurs (12) et (9), on a définitivement la formule suivante :

$$(II)\quad \delta = \frac{2S}{R.\lambda\mu\nu} \cdot \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & M \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & N \\ L & M & N & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\lambda^2L^2+\mu^2M^2+\nu^2N^2-2\mu\nu MN\cos A-2\lambda\nu LN\cos B-2\lambda\mu LM\cos C}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L & \frac{\sin A}{\lambda} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & M & \frac{\sin B}{\mu} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & N & \frac{\sin C}{\nu} \\ L & M & N & 0 & 0 \\ \frac{\sin A}{\lambda} & \frac{\sin B}{\mu} & \frac{\sin C}{\nu} & 0 & 0 \end{vmatrix}}.$$

« Cette formule détermine la distance δ des deux points où la droite

$$(III)\quad LX + MY + NZ = 0,$$

« rencontre le système des deux droites

$$(IV)\quad A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0.$$

« La formule (II) ne conservant aucune trace de la condition qui exprime que l'équation (IV) représente un système « de deux droites, nous pouvons regarder l'équation (IV) comme représentant une conique proprement dite, et la for- « mule (II) donnera l'expression de la longueur de la corde déterminée par cette conique sur la droite (III) (Nouvelles Annales, 1863, page 292).

Les déterminants qui entrent dans l'expression de δ ont une signification géométrique bien connue : le déterminant du numérateur, égalé à zéro, exprime que la droite (III) est tangente à la conique. Le déterminant du dénominateur, égalé à zéro, exprime que le point à l'infini situé sur la droite (III) appartient à la conique.

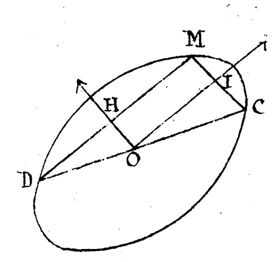
§ III. Cordes supplémentaires.

1.° Définition.

816. On appelle cordes supplémentaires, dans l'ellipse ou l'hyperbole, les cordes joignant un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre.

Deux cordes supplémentaires forment un système de directions conjuguées.

Soit un diamètre CD et les deux cordes supplémentaires MC et MD; ces deux cordes seront parallèles à un système de diamètres conjugués.



Joignons, en effet, le centre au milieu I de CM; le diamètre OI divisera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à MC; il sera, de plus, parallèle à MD, puisqu'il passe par les milieux O et I de CD et CM. De même, si nous joignons le centre au milieu H de DM, le diamètre OH divisera en deux parties égales les cordes parallèles à DM et sera, en outre, parallèle à MC.

Les deux diamètres OI et OH sont donc conjugués; et par suite, les cordes MC et MD, qui leur sont respectivement parallèles, sont deux directions conjuguées.

Autrement.

Soient x_1, y_1, les coordonnées du point C, celles du point D seront $(-x_1, -y_1)$; si m et m' sont les coefficients angulaires des cordes MC et MD et que x, y, soient les coordonnées du point M, on a

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad m' = \frac{y + y_1}{x + x_1};$$

d'où l'on conclut

$$m\,m' = \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2}.$$

Mais les points (x, y) et (x_1, y_1) étant sur l'ellipse, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0;$$

d'où l'on déduit, en retranchant membre à membre

$$\frac{x^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y^2 - y_1^2}{b^2} = 0, \text{ ou } \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2};$$

par conséquent

$$(1) \qquad m\,m' = -\frac{b^2}{a^2};$$

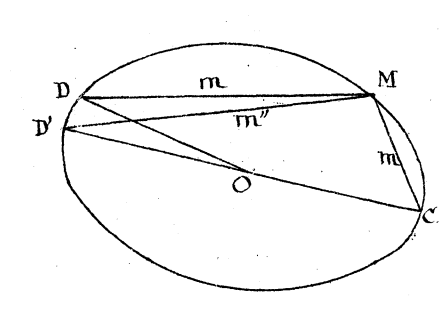
c.à.d. que les deux cordes MC et MD sont deux directions conjuguées.

Le même raisonnement et le même calcul sont applicables à l'hyperbole.

Cor. I. « Si les coefficients angulaires m et m' de deux cordes, menées par les extrémités d'un même « diamètre vérifient la relation (1), ces deux cordes se coupent sur la courbe. »

Car soit CD un diamètre, et M le point où la corde menée par le point C rencontre la courbe, joignons MD; si m'' est le coefficient angulaire de MD, on aura $m\,m'' = -\frac{b^2}{a^2}$; d'où, $m'' = m$, par suite, la corde menée par le point D se confond avec MD.

Cor. II. « Si les coefficients angulaires m et m' de deux cordes issues d'un même point de l'ellipse vérifient « la relation $m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}$, les extrémités de ces cordes sont sur un même diamètre. »



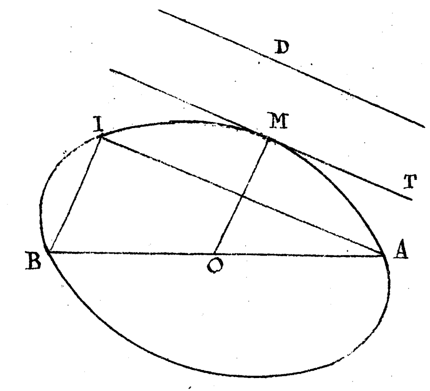
Soient MC, MD deux cordes dont les coefficients angulaires m, m' vérifient la relation $m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}$; leurs extrémités C et D seront sur un diamètre. En effet, joignons CO et prolongeons CO jusqu'à sa rencontre en D' avec l'ellipse ; joignons MD', et soit m'' le coefficient angulaire de cette droite, on a $m\,m'' = -\frac{b^2}{a^2}$; et par suite $m' = m''$. Donc les deux droites MD, MD' coïncident ; il en est, par conséquent, de même des points D, D'. C. Q. F. D.

II° Construction de la tangente dans l'ellipse et l'hyperbole.

817. De ce qui précède nous pouvons déduire une autre manière de construire la tangente dans l'ellipse et l'hyperbole.



Ellipse.



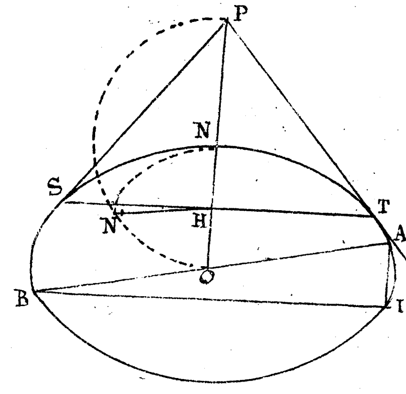
1° Mener la tangente en un point M de l'ellipse.

Soit MT cette tangente ; elle forme avec le diamètre OM deux directions conjuguées, qui sont, par suite, parallèles à un système de cordes supplémentaires. Soit AB un diamètre quelconque ; par le point B menons une parallèle à OM et joignons IA ; la tangente cherchée doit être parallèle à IA. Donc par le point M il suffira de mener une droite parallèle à la corde IA.

2° Mener une tangente parallèle à une droite donnée.

Soit M le point de contact et MT la tangente ; d'après ce qu'on vient de dire, MT et OM sont deux directions conjuguées parallèles à un système de cordes supplémentaires ; donc si par A on mène une parallèle à MT ou à la droite donnée D, la corde IB sera parallèle à OM. Par suite, par le point A on mène une parallèle à la droite donnée D ; par le centre O, on mène une parallèle à IB, son intersection M avec la courbe, donne le point de contact ; par ce point on construira une parallèle à la droite D, ce sera la tangente.

3° Construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur.



Soit P le point extérieur, ST la corde de contact c. à. d. la polaire de ce point, joignons OP, nous savons que ces deux droites ST, OP sont deux directions conjuguées qui seront, par suite, parallèles à un système de cordes supplémentaires. — Soit un diamètre quelconque AB, par le point A menons une parallèle à OP, soit I son intersection avec l'ellipse ; joignons BI, la corde de contact sera parallèle à BI ; il suffit alors d'en déterminer un point.

Soit H l'intersection de OP avec cette corde ST, et N l'intersection de OP avec l'ellipse ; nous avons vu précédemment qu'on avait la relation

$$OH \cdot OP = \overline{ON}^2.$$

Par suite pour obtenir le point H sur OP on décrit une demi-circonférence ; on rabat ON en ON' et on projette N sur OP ; on obtient ainsi le point H, par lequel on conduira une parallèle à BI.

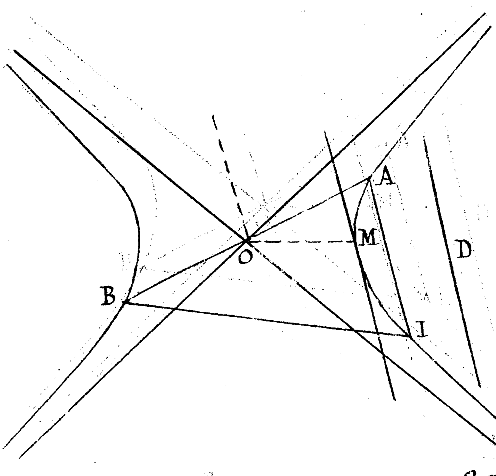
Cette parallèle coupe l'ellipse en S et T ; en les joignant au point P on aura les tangentes cherchées.

Plus simplement, on pourra déterminer un point de la polaire à l'aide de deux sécantes quelconques menées par le point P.

Hyperbole.

1° Tangente en un point M de l'hyperbole.

818. Pour avoir la tangente en un point M, prenons un diamètre quelconque AB ; par le point B menons une parallèle à OM, joignons IA ; la tangente s'obtient en menant par M une parallèle à IA



2° Tangente parallèle à une droite donnée.

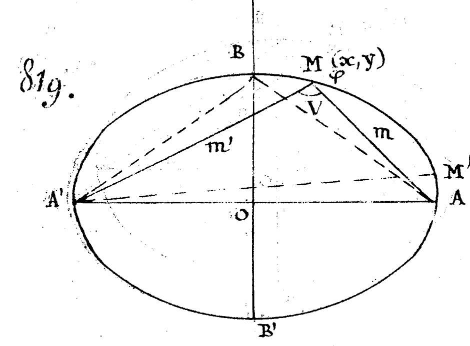
Pour construire la tangente parallèle à une direction donnée, on mènera par le point A une parallèle à la direction donnée; on joindra IB, et par le centre on mènera une parallèle à cette corde IB; son intersection M avec la courbe donne le point de contact; en menant par ce point une parallèle à la direction donnée, on aura la tangente. D'après ce que nous avons vu, pour qu'il y ait une solution, il faudra que, si par l'origine, on mène une parallèle à la direction donnée, cette parallèle soit dans l'angle des asymptotes où ne se trouve pas la courbe.

3° Tangentes par un point extérieur.

Enfin, pour mener les tangentes par un point extérieur, on suit encore la même marche que dans le cas de l'ellipse; mais ici lorsque le point donné est dans l'angle des asymptotes où n'est pas la courbe, le diamètre correspondant est imaginaire; pour avoir son extrémité il faut avoir recours à l'hyperbole conjuguée; ou bien, on opérera d'après la deuxième méthode indiquée N.° [817] (3°).

III.° Variation de l'angle de deux diamètres conjugués.

Ellipse.

819. 

Remarquons que deux diamètres conjugués sont toujours parallèles à un système de cordes supplémentaires; si nous prenons le grand axe, il nous suffira donc d'étudier les variations de l'angle formé par les cordes supplémentaires passant par ses extrémités.

Soit V cet angle, si l'on désigne par m et m' les coefficients angulaires des deux cordes supplémentaires, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{m - m'}{1 + m m'}.$$

Soit φ le paramètre angulaire du point M.(x, y) intersection des deux cordes supplémentaires,

$$m = \frac{y}{x-a} = \frac{b \sin\varphi}{a(\cos\varphi - 1)},$$

$$m' = \frac{y}{x+a} = \frac{b \sin\varphi}{a(\cos\varphi + 1)};$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi-1)} - \dfrac{b\sin\varphi}{a(\cos\varphi+1)}}{1 + \dfrac{b^2\sin^2\varphi}{a^2(\cos^2\varphi - 1)}},$$

$$(1) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{2ab\sin\varphi}{c^2\sin^2\varphi} = -\frac{2ab}{c^2\sin\varphi}.$$

La valeur tang V est négative, car on a désigné par V l'angle obtus formé par les cordes supplémentaires.

Dans cette formule φ peut varier de 0 à 90°. Lorsque φ=0, c.à.d. pour le point A, tang V=∞; on a un angle droit, c'est la valeur minimum de l'angle obtus V. Nous avons alors les axes; car si nous considérons un point M' voisin de A, pour ce point la corde A'M' est très voisine de l'axe

AA', et l'autre M'A tend à être parallèle à BB' et l'est à la limite lorsque A'M' est confondu avec AA'.

Pour $\varphi = 90°$ (2) $\operatorname{tang} V = -\frac{2ab}{c^2}$;

nous avons alors le point B, et nous voyons que l'angle V y prend sa valeur maximum.

Si nous considérons l'angle aigu formé par les cordes supplémentaires, c.à.d. l'angle $(180° - V)$ il serait maximum au point A et minimum au point B.

Il résulte donc de là que les diamètres conjugués faisant le plus grand angle ou le plus petit, suivant que l'on considère les angles obtus ou aigus, sont parallèles aux cordes BA, BA'; ce sont précisément les diamètres conjugués égaux. En effet, ils sont parallèles aux cordes BA et BA'; or les coefficients angulaires de ces cordes sont $-\frac{b}{a}$ et $+\frac{b}{a}$; et nous avons vu que ce sont précisément les coefficients des diamètres égaux. Ou encore, ces diamètres sont symétriques par rapport à l'axe OB.

On peut aussi déduire ces conséquences des théorèmes d'Apollonius.

Si à l'aide des relations

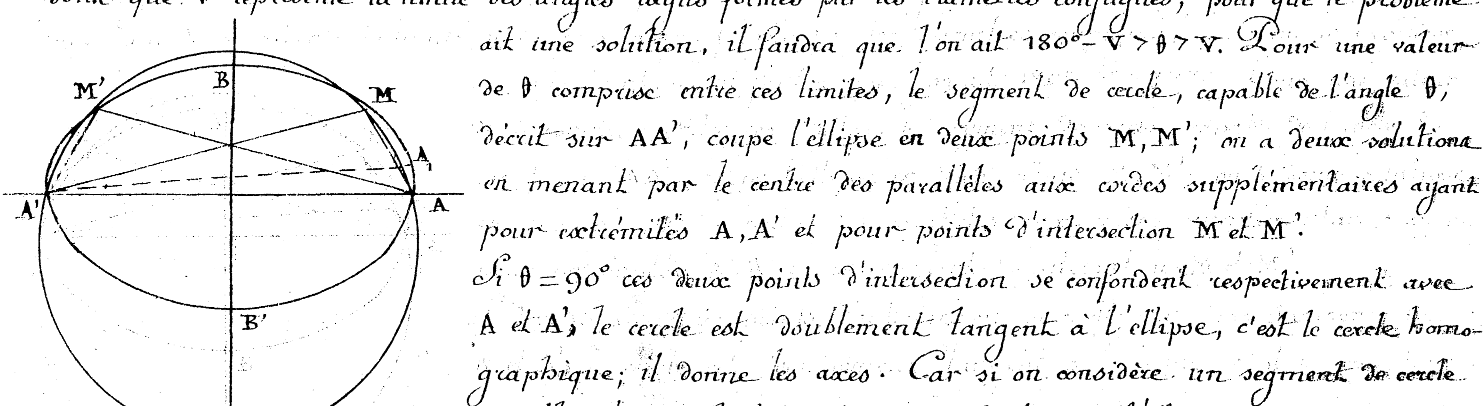
$$\begin{cases} a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \\ a'\,b'\sin\theta = ab, \end{cases}$$

on cherche la condition pour que l'angle θ soit maximum, on trouve qu'il faut que les diamètres conjugués a', b', soient égaux. Car la somme des carrés $(a'^2 + b'^2)$ étant constante, le produit $a'^2 b'^2$ sera maximum lorsqu'on aura $a'^2 = b'^2$.

820. Construction de deux diamètres conjugués faisant un angle donné.

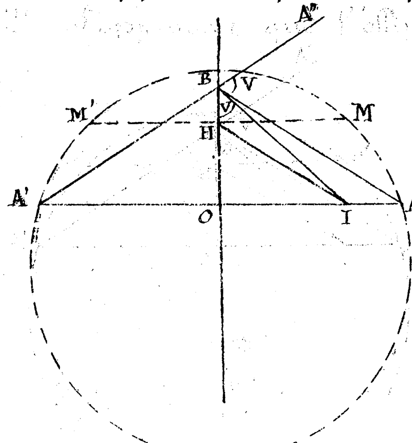
1° Supposons l'ellipse rapportée à ses axes et tracée.

Il suffit alors de décrire sur AA' un segment capable de l'angle donné; soit θ l'angle donné, et supposons que V représente la limite des angles aigus formés par les diamètres conjugués, pour que le problème ait une solution, il faudra que l'on ait $180° - V > \theta > V$. Pour une valeur de θ comprise entre ces limites, le segment de cercle, capable de l'angle θ, décrit sur AA', coupe l'ellipse en deux points M, M'; on a deux solutions en menant par le centre des parallèles aux cordes supplémentaires ayant pour extrémités A, A' et pour points d'intersection M et M'.



Si $\theta = 90°$ ces deux points d'intersection se confondent respectivement avec A et A', le cercle est doublement tangent à l'ellipse, c'est le cercle homographique; il donne les axes. Car si on considère un segment de cercle capable d'un angle très voisin de 90°, il coupe l'ellipse en deux points très voisins de A et A', la corde A'A, est très voisine de l'axe A'A, tandis que l'autre AA' est presque parallèle à BB', et l'est à la limite, lorsque le cercle devient doublement tangent. — Si $\theta = V$, la circonférence est tangente en B à l'ellipse, les deux points d'intersection sont venus se confondre en ce point; il n'y a qu'une solution, on trouve alors les diamètres conjugués égaux.

2° Supposons que l'ellipse ne soit pas tracée et que l'on ait seulement les axes.



Il faut déterminer le point où viennent se couper deux cordes supplémentaires parallèles aux diamètres conjugués cherchés.

Soit θ l'angle donné, nous considérons dans cette question les angles aigus; on a alors $\operatorname{tang}\theta = \frac{2ab}{c^2 \sin\varphi} = \frac{2ab^2}{c^2 y}$.

Si V est l'angle minimum, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{2ab}{c^2},$$

par suite $\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang} V . \frac{b}{y}$.

On connait V, θ et b; il faut déterminer y. Soit OH cette valeur de y; alors par le point H on mènera une parallèle au grand axe, et les intersections de cette droite avec le segment de cercle décrit sur cet axe AA' et capable de l'angle donné θ, donneront les points cherchés où le cercle coupe l'ellipse.

Pour construire la longueur OH, on remarque que l'angle V est ABA"; faisons en B, avec OB, un angle égal à ABA", on aura OI = b tang V; au point I, faisons avec IA' un angle égal au complément de l'angle θ, on aura

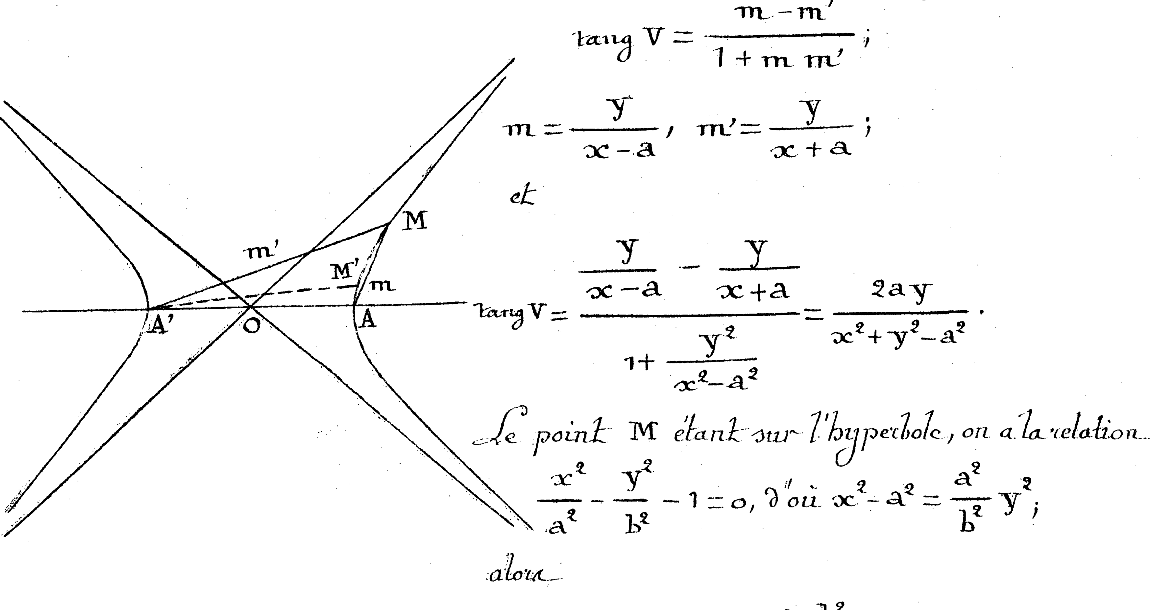
$$OH = \frac{OI}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{b \operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta} = y.$$

821. Variation de l'angle de deux diamètres conjugués. (Hyperbole)

Nous considérons encore l'angle de deux cordes supplémentaires parallèles aux diamètres conjugués.

Soient AM, A'M deux cordes supplémentaires; m, m' leurs coefficients angulaires; alors

$$\operatorname{tang} V = \frac{m - m'}{1 + m m'};$$



$$m = \frac{y}{x-a}, \quad m' = \frac{y}{x+a};$$

et

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

Le point M étant sur l'hyperbole, on a la relation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ d'où } x^2 - a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2;$$

alors

$$\operatorname{tang} V = \frac{2ab^2}{c^2 y}.$$

Nous considérons ici l'angle aigu formé par les diamètres conjugués; dans cette formule, y peut varier de 0 à +∞.

Pour y = 0, tang V = ∞; l'angle V est maximum, il donne alors l'angle des axes comme on le verrait en considérant un point M' voisin de A. — Si y croît, tang. V décroît; l'angle des deux diamètres devient de plus en plus petit, et pour y = ∞, les deux diamètres se confondent avec les asymptotes.

Donc, dans l'hyperbole, l'angle de deux diamètres conjugués peut varier de 0 à 90°. Lorsque l'angle est nul, les deux diamètres conjugués se confondent avec le même asymptote.

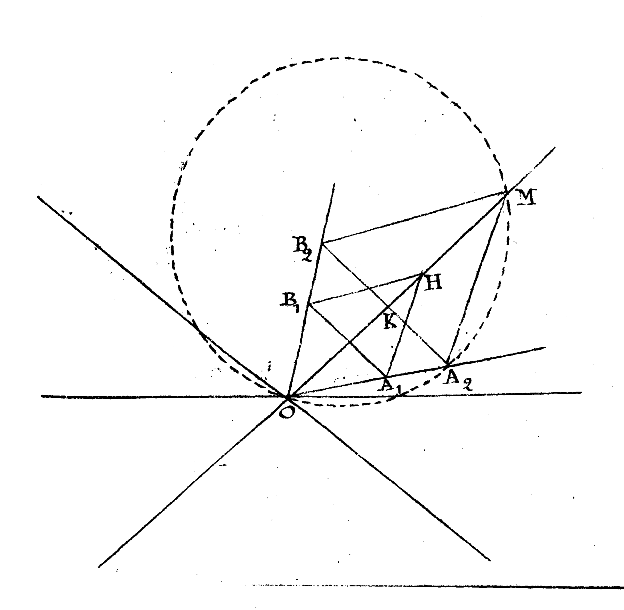
822. Construction de deux diamètres conjugués faisant un angle donné.

1° Si l'hyperbole est tracée, il suffit de décrire sur l'axe transverse un segment de cercle capable de l'angle donné, il y a toujours deux solutions, sauf pour le cas où θ = 90°; alors le cercle est doublement tangent à l'hyperbole et l'on obtient les axes.

2° Si la courbe n'est pas tracée, on suppose les axes connus; il faut déterminer les directions de deux diamètres conjugués faisant l'angle donné.

Remarquons que si l'on a deux demi-diamètres conjugués et si l'on construit le parallélogramme sur ces diamètres, les diagonales seront une asymptote et une parallèle à l'autre asymptote.

Supposons qu'on se donne l'angle OB_1H; nous considérons ici les angles obtus des diamètres. Si l'on prend un point M de l'asymptote, et que, par ce point, on mène des parallèles aux diamètres OA_1, OB_1, jusqu'à leur intersection avec les prolongements de OA_1, OB_1, les deux parallélogrammes OA_1B_1H, OA_2B_2M



seront homothétiques, et les diagonales A_1B_1, A_2B_2 seront parallèles ; le point K, intersection de A_2B_2 avec l'asymptote sera le milieu de OM ; et, en outre, l'angle OB_2M est encore égal à l'angle donné.

Par suite, pour construire deux diamètres conjugués faisant un angle donné, on prend un point quelconque M sur une asymptote, et sur OM on décrit un segment capable de l'angle (obtus) donné ; par le point milieu K de OM on mène une parallèle à l'autre asymptote, on joint son intersection A_2, avec le cercle, au centre, on a ainsi un diamètre OA_2 ; joignons MA_2, et par le centre menons une parallèle à MA_2, on aura le diamètre conjugué OB_2.

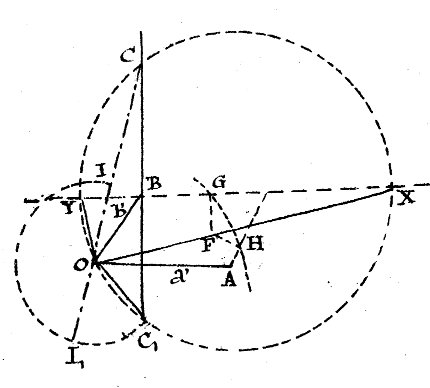
Nous verrons, plus loin, comment on peut déterminer les longueurs de deux diamètres conjugués donnés.

IV.° Construction des axes connaissant deux diamètres conjugués.

823. 1.° Construire les axes d'une ellipse, connaissant les longueurs de deux diamètres conjugués et leur angle.

Si a' et b' sont les longueurs de ces diamètres et θ leur angle, si a et b sont les longueurs des axes nous avons entre ces quantités les relations :

$$\begin{cases} a'^2+b'^2=a^2+b^2, \\ a'\,b'\sin\theta=a\,b. \end{cases}$$



C'est de ces relations que nous allons tirer la solution de la question.

Multiplions les deux membres de la seconde relation par 2 ; retranchons et ajoutons successivement à la première, on a

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^2 &= a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta \\ (a-b)^2 &= a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta \end{aligned}\right\} \text{(I)}.$$

Cela posé, soient OA, OB les diamètres conjugués donnés ; OA = a', OB = b'.

Du point B abaissons une perpendiculaire sur OA, et prenons $BC=BC_1=a'$; puis joignons les points C et C_1 au point O.

Dans le triangle OBC, on a

$$\overline{OC}^2=\overline{OB}^2+\overline{BC}^2-2a'b'\cos\widehat{CBO};$$

ou

$$\overline{OC}^2=a'^2+b'^2+2a'b'\cos\widehat{OBC_1};\ \text{mais } OBC_1=90^\circ-\theta,$$

$$\text{donc } \cos\widehat{OBC_1}=\sin\theta,\ \text{par suite } \overline{OC}^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta.$$

Dans le triangle OBC_1 nous avons de même

$$\overline{OC_1}^2=\overline{OB}^2+\overline{BC_1}^2-2OB.BC_1\cos\widehat{OBC_1};$$

$$\text{ou}\quad \overline{OC_1}^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta.$$

D'après ces relations et les relations (I) nous voyons que

$$OC=a+b,\ OC_1=a-b.$$

Donc, si du point O comme centre avec OC_1 pour rayon on décrit une circonférence, laquelle coupe OC en I et I_1, on aura

$$CI=2b,\ CI_1=2a.$$

Il faut maintenant trouver la direction des axes ; nous avons deux méthodes pour déterminer cette direction.

1° Si, par les points A et B, on mène des parallèles aux droites OB, OA, ces parallèles seront des tangentes à l'ellipse; or, le lieu des projections du foyer sur les tangentes est un cercle de rayon a; nous voyons alors que les points G et H, intersections des tangentes avec le cercle de rayon a, sont les projections du foyer sur les tangentes; donc élevons en ces points des perpendiculaires aux tangentes, l'intersection F est le foyer; OF est l'axe focal, et la perpendiculaire à OF est le petit axe.

2°. On peut encore remarquer que le grand axe OX est la bissectrice de l'angle COC_1.

En effet, le produit des segments d'une tangente compris entre le point de contact et deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

Les axes OX, OY étant conjugués, XY étant une tangente on a

$$BX \cdot BY = \overline{OA}^2 = a'^2,$$

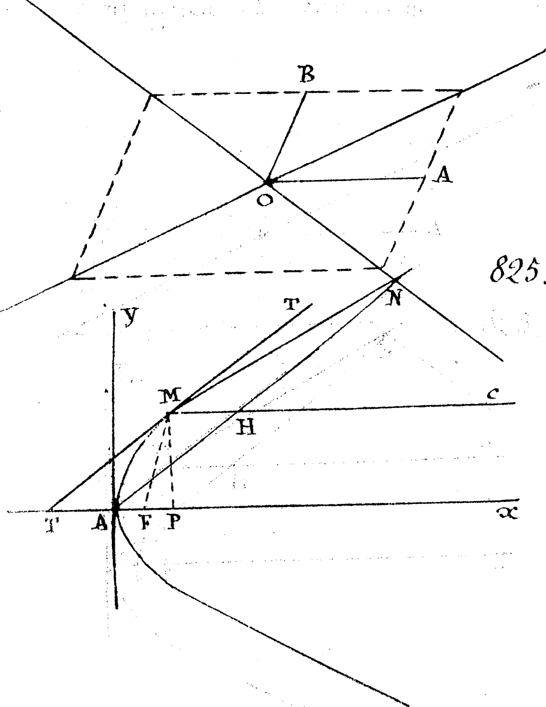
Or, si sur XY comme diamètre on décrit une circonférence, elle passera par les points C et C_1; car BC et BC_1 étant égaux à a', on a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{BC_1}^2 = BX \cdot BY.$$

Cette circonférence passe, en outre, par le point O, car l'angle XOY est droit.

Puisque XY est un diamètre, et CC_1 une corde perpendiculaire, les arcs CX et XC_1 sont égaux; les angles COX, C_1OX qu'ils mesurent sont donc égaux; c.à.d. que l'un des axes est la bissectrice de l'angle COC_1; ce qui permet de le construire facilement.

824. 2° Construire les axes d'une hyperbole connaissant les longueurs de deux diamètres conjugués et leur angle.



Soient OA et OB les deux diamètres conjugués; comme les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués, il nous est facile de les construire. Mais le point A est un point de l'hyperbole, nous sommes donc ramenés à cette question que nous résoudrons plus tard: Construire une hyperbole connaissant les asymptotes et un point.

825. 3° Construire l'axe et le sommet d'une parabole, connaissant une tangente, le diamètre et le paramètre correspondant.

Soit MT la tangente et MC le diamètre, prenons MT et MC pour axes de coordonnées, l'équation de la parabole est $y^2 = 2p'x$, et on suppose donnée la constante p'.

Nous allons démontrer d'abord que la distance du point M au foyer est égale à la moitié du demi-paramètre p'.

Soit A le sommet, Ax l'axe; menons AH parallèle à la tangente, cette parallèle rencontre la courbe en N; et d'après l'équation $y^2 = 2p'x$, on a

$$2p' = \frac{\overline{NH}^2}{MH}.$$

Mais NH = HA = MT; puis MH = AT = AP, MP étant une perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe; donc

$$2p' = \frac{\overline{MT}^2}{AP}.$$

Or, en prenant l'axe et la tangente au sommet pour axes de coordonnées, et en désignant par x et y les coordonnées du point M, on a

$$\overline{MT}^2 = y^2 + 4x^2, \text{ et } AP = x;$$

$$\text{donc } 2p' = \frac{y^2 + 4x^2}{x}.$$

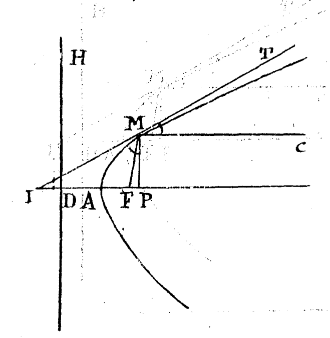
Le point M étant sur la parabole, on a $y^2 = 2px$; par suite

$$2p' = \frac{2px + 4x^2}{x} = 2p + 4x = 4\left(x + \frac{p}{2}\right) = 4 . MF;$$

car $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ est la distance du point M au foyer; donc

$$p' = 2MF.$$

Cette propriété établie, nous pouvons construire le sommet et l'axe de la parabole.



Comme la tangente est également inclinée sur le rayon focal et sur le diamètre qui passe par le point de contact, si l'on mène une droite faisant l'angle $\widehat{IMF} = TMC$, le foyer devra se trouver sur cette droite. Mais la constante $\frac{p'}{2}$ est égale à la distance du point M au foyer; on aura donc le foyer F en prenant $MF = \frac{p'}{2}$.

La parallèle à MC menée par le foyer est l'axe; le sommet A est le milieu de IP, et la directrice DH s'obtient en prenant AD = AF.

V.° Détermination par le calcul de l'axe et du paramètre d'une parabole.

826. L'équation générale des paraboles est

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

avec la condition

$$B^2 - AC = 0.$$

Un des coefficients A ou C au moins n'étant pas nul, A par exemple, multiplions par A le premier membre de l'équation, nous pourrons l'écrire

$$(Ax + By)^2 + 2ADx + 2AEy + AF = 0.$$

Nous voyons que la droite $Ax + By = 0$ est un diamètre, car cette droite rencontre la courbe en un seul point à distance finie. La droite $2Dx + 2Ey + F = 0$ est une tangente à l'extrémité de ce diamètre, puisqu'en cherchant l'intersection de cette droite avec la courbe on trouve un carré parfait.

Si ces deux droites étaient rectangulaires, la première serait l'axe de la parabole, et la seconde, la tangente au sommet.

Or écrivons l'équation de la courbe sous la forme suivante

$$(2) \qquad (Ax + By + \lambda)^2 + 2A(D - \lambda)x + 2(AE - \lambda B)y + AF - \lambda^2 = 0,$$

en introduisant sous le carré l'indéterminée λ.

Les deux droites

$$(3) \quad \begin{cases} Y = Ax + By + \lambda = 0, \\ X = 2A(D - \lambda)x + 2(AE - \lambda B)y + AF - \lambda^2 = 0, \end{cases}$$

sont encore: la première, un diamètre; la seconde, la tangente à l'extrémité de ce diamètre. Mais on peut disposer de l'indéterminée λ de manière à rendre ces deux droites rectangulaires; pour cela, il faut que

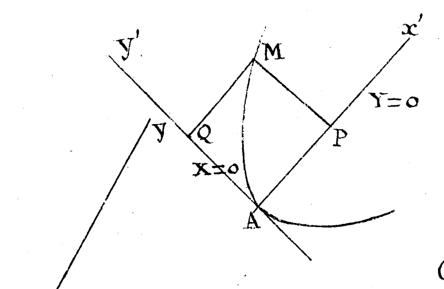
$$1 + \left(-\frac{A}{B} - \frac{A(D - \lambda)}{AE - \lambda B}\right)\cos\theta + \frac{A^2 (D - \lambda)}{B(AE - \lambda B)} = 0,$$

en désignant par θ l'angle des axes auxquels est rapportée la courbe.

De cette égalité on tire, en ayant égard à la relation $B^2 - AC = 0$:

$$(4)\qquad \frac{BE + AD - (AE + BD)\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta}.$$

En remplaçant λ par cette valeur, les droites (3) seront l'axe et la tangente au sommet.



Or si l'on rapporte la courbe à ces deux droites; x' et y' étant les coordonnées d'un point $M(x, y)$ par rapport aux nouveaux axes Ax', Ay'; on aura

$$x' = MQ,\ y' = MP;$$

par suite

$$y' = \frac{X\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}};\ x' = \frac{X\sin\theta}{2\sqrt{A^2(D-\lambda)^2 + (AE-\lambda B)^2 - 2A(D-\lambda)(AE-\lambda B)\cos\theta}}.$$

On déduit de là

$$(5)\quad X = \frac{2x'}{\sin\theta}\sqrt{A^2(D-\lambda)^2 + (AE-\lambda B)^2 - 2A(D-\lambda)(AE-\lambda B)\cos\theta};\ Y = \frac{y'}{\sin\theta}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}.$$

Mais les quantités Y et X doivent vérifier l'équation (2) de la courbe, c.à.d. que

$$Y^2 + X = 0;$$

il vient après la substitution des valeurs (5):

$$(6)\quad y'^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta) + 2x'\sin\theta\sqrt{A^2(D-\lambda)^2 + (AE-\lambda B)^2 - 2A(D-\lambda)(AE-\lambda B)\cos\theta} = 0;$$

telle est **l'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet**; λ ayant, dans cette équation, la valeur (4).

Le **demi-paramètre p de la parabole** a donc pour expression

$$(7)\qquad p = \frac{\sin\theta\sqrt{A^2(D-\lambda)^2 + (AE-\lambda B)^2 - 2A(D-\lambda)(AE-\lambda B)\cos\theta}}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta},$$

on a en même temps:

$$(8)\qquad \lambda = \frac{BE + AD - (AE + BD)\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta},\ B^2 - AC = 0.$$

Remarque I. Lorsqu'on veut seulement déterminer l'axe de la parabole, on peut se servir de l'équation donnée et démontrée au N.° [578]; l'un des axes, qui est à l'infini, se séparera de cette équation et il restera l'axe à distance finie. L'équation rappelée est, dans le cas des axes rectangulaires:

$$BF'^2_x - (A-C)f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0.$$

En remplaçant les dérivées par leurs valeurs, et en ayant égard à la relation

$$B^2 - AC = 0,$$

on trouve, tout calcul fait:

$$Ax + By + \frac{AD + BE}{A + C} = 0.$$

Remarque II. On peut encore se proposer la question suivante:

« Étant donnée l'équation de la parabole rapportée à son axe et à son sommet,

$$(1.°)\qquad y^2 = 2px,$$

« rapporter cette courbe à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre. »

Lorsqu'une parabole est rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité, son équation prend la forme

$$(2.°)\qquad y'^2 = 2p'x';$$

la réciproque est évidente. D'après cela, on partira des formules de transformation

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \\ y = y_0 + x'\sin\alpha + y'\sin\beta; \end{cases}$$

on substituera ces valeurs dans l'équation (1°), on exprimera qu'elle se réduit à la forme (2°); et on arrivera ainsi aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \sin\alpha = 0, \\ y_0 = 2p x_0, \\ \tang\beta = \dfrac{p}{y_0}, \\ p' = \dfrac{p\cos\alpha}{\sin^2\beta} = 2\left(x_0 + \dfrac{p}{2}\right). \end{cases}$$

Toutes ces relations pouvaient être écrites à priori, d'après les propriétés connues; la dernière démontre la proposition déja établie au N° [824].

827. La valeur (7) de p peut se mettre sous une autre forme beaucoup plus simple; mais l'objet principal du calcul que nous avons indiqué au N° [826] était de montrer, avec quelques détails, comment on peut rapporter une parabole à son axe, sans passer par les formules de transformation des coordonnées. Lorsqu'on se propose seulement de déterminer le paramètre de la parabole, dans le cas de l'équation générale, il est plus simple de procéder comme il suit.

Si a et b sont les axes de l'ellipse, a étant l'axe focal, le demi-paramètre p de la parabole est défini par l'égalité

$$(1) \qquad p = \lim.\frac{b^2}{a},$$

lorsqu'on suppose a et b infinis, c.à.d. $(B^2 - AC)$ nul.

Or, d'après l'équation (8) du N° [580], on a

$$(2) \qquad a^2b^2 = \frac{\Delta^2\sin^2\theta}{(AC-B^2)^3}, \quad a^2+b^2 = -\frac{\Delta(A+C-2B\cos\theta)}{(AC-B^2)^2},$$

θ étant l'angle des axes de coordonnées; Δ est le discriminant de l'équation générale.

Posons, pour un instant :

$$(3) \qquad AC - B^2 = \delta, \quad A + C - 2B\cos\theta = \varepsilon;$$

dans le cas de l'ellipse réelle, les quantités δ et ε sont positives; la quantité Δ est négative.

D'après cela, on déduira des équations (2)

$$(4) \qquad \begin{cases} a^2 = -\dfrac{\Delta}{2\delta^2}\left[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right], \\ b^2 = \dfrac{-\Delta}{2\delta^2}\left[\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right], \end{cases}$$

a est le plus grand des deux axes.

Le carré p^2 du demi paramètre de l'ellipse aura donc pour expression

$$(5) \qquad p^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{-\Delta}{2\delta^2}\cdot\frac{\left[\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right]^2}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}}.$$

Il s'agit maintenant de trouver la limite de cette dernière expression lorsque δ tend vers zéro.

Pour cela, multiplions par $\left[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right]^2$ les deux termes de la fraction (5), il vient

$$p^2 = \frac{-\Delta}{2\delta^2}\,\frac{(4\delta\sin^2\theta)^2}{\left[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right]^3} = \frac{-8\Delta\sin^4\theta}{\left[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta\sin^2\theta}\right]^3}.$$

Introduisons alors l'hypothèse $B^2 - AC = 0$ ou $\delta = 0$, on trouve définitivement, après avoir remplacé ε par sa valeur (3) et avoir extrait la racine carrée:

$$(6) \qquad p = \sin^2\theta\sqrt{\frac{-\Delta}{(A+C-2B\cos\theta)^3}};$$

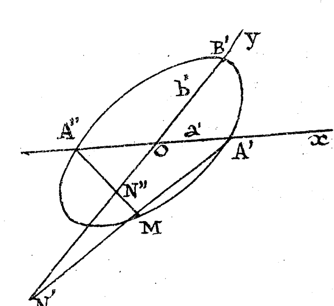
telle est l'expression générale du paramètre de la parabole.

§IV. Diverses propriétés relatives aux diamètres.

828. Les cordes menées des extrémités d'un diamètre à un point de la conique font, à partir du centre, sur le diamètre conjugué deux segments dont le produit est constant et égal au carré du demi-diamètre conjugué.

Rapportons la conique au diamètre considéré et à son conjugué, on aura l'équation ($OA'=a'$, $OB'=b'$)

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$



Soit M un point quelconque de l'ellipse ($x_1=a'\cos\varphi$, $y_1=b'\sin\varphi$); les équations des deux cordes supplémentaires A'M, A''M seront

$$(A'M):\ y=\frac{b'\sin\varphi}{a'\cos\varphi-a'}(x-a');\ (A''M)\ y=\frac{b'\sin\varphi}{a'\cos\varphi+a'}(x+a').$$

En faisant $x=0$, les valeurs de y seront ON' et ON''; on aura donc

$$(1)\qquad ON'.\,ON''=b'^2\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}=b'^2;$$

C. Q. F. D.

Remarque. On peut déduire de là la construction par points d'une conique dont on donne deux diamètres conjugués en grandeur et en direction. (Chasles. Coniques page 121).

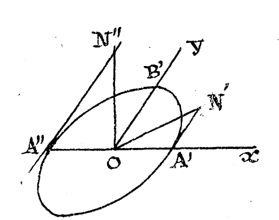
829. Le produit des segments que deux diamètres conjugués font sur deux tangentes parallèles, à partir des points de contact de ces tangentes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle aux tangentes.

Rapportons la conique aux deux diamètres conjugués formés par la corde de contact des tangentes parallèles et le diamètre parallèle à ces tangentes, on aura l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$

Les équations de deux diamètres conjugués seront

$$y=mx,\ y=m'x,$$



avec la condition

$$(1)\quad mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}.$$

En cherchant les intersections de ces diamètres avec les tangentes $x=a'$, $x=-a'$, on trouve

$$A'N'=ma',\ \ A''N''=-m'a';$$

d'où l'on conclut, en égard à la relation (1):

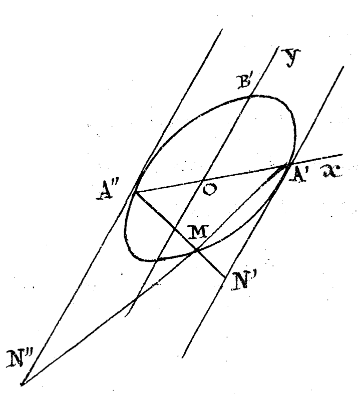
$$(2)\qquad A'N'.\,A''N''=b'^2.$$

C. Q. F. D.

830. Si autour des extrémités d'un diamètre on fait tourner deux cordes qui se coupent toujours sur la courbe, le produit des segments qu'elles font sur les tangentes aux mêmes extrémités du diamètre, à partir de ces points, est constant et égal au carré du diamètre conjugué.

Rapportons la courbe au diamètre considéré et à son conjugué, on a

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$



Les équations des cordes A'M et A''M sont

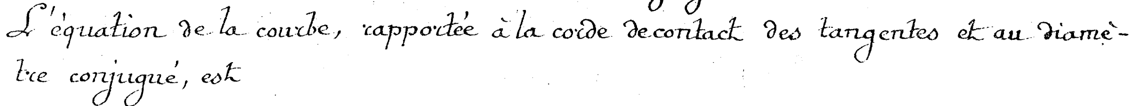
$$y = \frac{b' \sin\varphi}{a' \cos\varphi - a'}(x - a'), \quad y = \frac{b' \sin\varphi}{a' \cos\varphi + a'}(x + a');$$

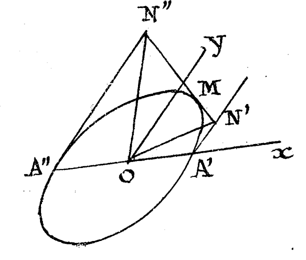
faisons dans la 1ère $x = -a'$, et, dans la seconde, $x = +a'$; on en conclut

$$(1) \quad A'N'.\ A''N'' = \frac{4b'^2 . \sin^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi} = (2b')^2.$$

C. Q. F. D.

831. Quand deux tangentes parallèles sont rencontrées par une troisième, les droites menées du centre aux points de rencontre sont deux diamètres conjugués.


L'équation de la courbe, rapportée à la corde de contact des tangentes et au diamètre conjugué, est



$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

l'équation d'une tangente quelconque pourra s'écrire

$$\frac{x}{a'} \cos\varphi + \frac{y}{b'} \sin\varphi - 1 = 0.$$

Si l'on fait successivement $x = a'$ et $x = -a'$, on en conclut

$$A'N' = \frac{b'}{\sin\varphi}(1 - \cos\varphi), \quad A''N'' = \frac{b'}{\sin\varphi}(1 + \cos\varphi).$$

Les coefficients angulaires m et m' des deux droites ON' et ON'' auront donc pour valeurs

$$m = \frac{A'N'}{OA'} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad m' = \frac{A''N''}{-OA''} = -\frac{b'}{a'} \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi};$$

d'où, en multipliant membre à membre:

$$(1) \quad m m' = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

C. Q. F. D.

De là résulte encore No. [829]

$$(2) \quad A'N'.\ A''N'' = b'^2.$$

C. à d. que: Le produit des segments que chaque tangente à une conique fait sur deux tangentes fixes parallèles, à partir de leurs points de contact, est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle aux deux tangentes fixes.

832. Deux tangentes parallèles quelconques font sur une tangente fixe, à partir de son point de contact, deux segments dont le produit est constant et égal, mais de signe contraire, au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente fixe.

Rapportons la conique à deux diamètres conjugués dont l'un passe par le point de contact de la tangente, l'autre sera parallèle à la tangente; on aura pour l'équation de la courbe

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Les équations de deux tangentes parallèles seront

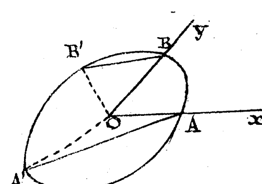
$$y = mx + \sqrt{a'^2 m^2 + b'^2},$$
$$y = mx - \sqrt{a'^2 m^2 + b'^2};$$

en faisant $x = a'$, on aura les intersections de ces tangentes avec la tangente fixe; il vient alors

$$(1) \quad A'N.\ A'N' = \left(ma' + \sqrt{a'^2 m^2 + b'^2}\right)\left(ma' - \sqrt{m^2 a'^2 + b'^2}\right) = -b'^2;$$

C. Q. F. D.

833. Si, par les extrémités A et B de deux diamètres conjugués, on mène, deux cordes parallèles quelconques AA', BB', leurs extrémités A' et B' appartiendront à deux diamètres conjugués.



L'équation de la courbe rapportée aux deux diamètres OA et OB est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$

Les équations des deux cordes AA' et BB' seront

$$AA':\ y=\lambda(x-a');\quad BB':\ y-b'=\lambda x;$$

les intersections respectives de ces droites avec l'ellipse seront :

$$A'\begin{cases} x_1=\dfrac{a'(\lambda^2a'^2-b'^2)}{\lambda^2a'^2+b'^2}, \\ y_1=-\dfrac{2a'b'^2\lambda}{\lambda^2a'^2+b'^2}; \end{cases}\qquad B'\begin{cases} x_2=-\dfrac{2\lambda a'^2b'}{\lambda^2a'^2+b'^2}, \\ y_2=-\dfrac{b'(\lambda^2a'^2-b'^2)}{\lambda^2a'^2+b'^2}. \end{cases}$$

Les coefficients angulaires m et m' des droites OA' et OB' auront pour valeurs

$$m=\frac{y_1}{x_1}=-\frac{2b'^2\lambda}{\lambda^2a'^2-b'^2},\quad m'=\frac{y_2}{x_2}=\frac{\lambda^2a'^2-b'^2}{2\lambda a'^2};$$

d'où l'on conclut

$$(1)\quad mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}.$$

C. Q. F. D.

834. La corde de contact de deux tangentes est parallèle à la corde comprise entre les deux diamètres parallèles aux tangentes.

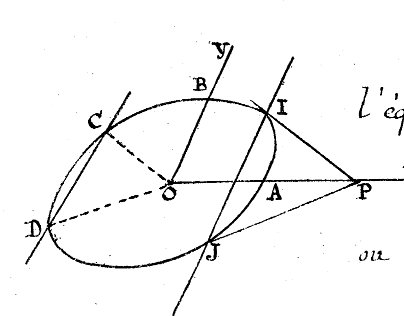
Rapportons la courbe à deux diamètres conjugués dont l'un passe par le point de concours des tangentes, l'autre sera parallèle à la corde de contact. Soit l'équation de la conique

$$(1)\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0,$$

et α l'abscisse du point de concours P ; la corde de contact sera la polaire du point P, c.à.d. $\frac{\alpha x}{a'^2}-1=0$.

L'équation quadratique des tangentes est

$$\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a'^2}-1\right)=\left(\frac{\alpha x}{a'^2}-1\right)^2;$$



l'équation des droites parallèles menées par l'origine sera, par suite,

$$\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a'^2}-1\right)=\frac{\alpha^2x^2}{a'^4},$$

ou

$$(2)\quad -\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}\left(\frac{\alpha^2}{a'^2}-1\right)=0;$$

c'est l'équation des deux diamètres OC et OD parallèles aux tangentes.

Si l'on élimine y^2 entre les équations (1) et (2), on aura l'équation d'une courbe passant par les points C et D ; cette équation sera

$$x^2=a'^2-\frac{a'^4}{\alpha^2};$$

équation qui représente des droites parallèles à l'axe des y c.à.d. à la corde de contact.

C. Q. F. D.

N. B. Ces théorèmes sont également vrais dans le cas de l'hyperbole, et se démontrent de la même manière.

835. Le produit des rayons vecteurs qui joignent les foyers à un point M de la courbe est égal au carré du demi-diamètre conjugué de OM.

Ellipse.

Soit φ le paramètre angulaire du point M, on a N.° [693]

$$FM = a - \frac{cx}{a} = a - \cos\varphi, \quad F'M = a + c\cos\varphi;$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad FM.FM' = a^2 - c^2\cos^2\varphi = a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = b'^2,$$

car le second membre est N.° [795] la valeur du diamètre conjugué de OM.

Hyperbole.

Soit φ le paramètre angulaire du point M pris sur la branche de droite, on a N.° [696]

$$FM = \frac{cx}{a} - a = \frac{c}{\cos\varphi} - a, \quad F'M = \frac{c}{\cos\varphi} + a;$$

d'où l'on déduit

$$FM.FM' = \frac{c^2}{\cos^2\varphi} - a^2 = \frac{a^2+b^2-a^2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi};$$

or le second membre est le carré N.° [798] du diamètre b' conjugué de OM; donc

$$(2) \qquad FM.FM' = b'^2.$$

836. Rayon de courbure des coniques.

Nous appellerons rayon de courbure en un point la distance à ce point de l'intersection de la normale avec la normale infiniment voisine.

1.° Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Soit φ le paramètre angulaire d'un point M, l'équation de la normale en ce point sera

$$(1) \qquad \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

Le point de rencontre de cette normale avec la normale infiniment voisine s'obtiendra en prenant la dérivée par rapport à φ de l'équation précédente. Pour cela, multipliant d'abord l'équation (1) par $\sin\varphi$, et prenons la dérivée, on a

$$\frac{ax}{\cos^2\varphi} - c^2\cos\varphi = 0, \text{ d'où } x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi;$$

puis multiplions par $\cos\varphi$ et prenons de nouveau la dérivée, il vient

$$\frac{by}{\sin^2\varphi} + c^2\sin\varphi = 0, \text{ d'où } y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

Les coordonnées du point d'intersection de deux normales infiniment voisines ou du centre de courbure sont donc

$$(2) \qquad x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi; \text{ où } c^2 = a^2 - b^2.$$

D'après cela, l'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho^2 = \left[\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi - a\cos\varphi\right]^2 + \left[\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi + b\sin\varphi\right]^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2}\left[a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right]^2 + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\left[a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right]^2,$$

ou

$$\rho^2 = \frac{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}{a^2b^2};$$

or le numérateur est le carré du diamètre b' conjugué de OM N.° [795], donc

$$\text{(I)} \qquad \rho = \frac{b'^3}{ab}$$

2.° Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Soit φ le paramètre angulaire d'un point, l'équation de la normale en ce point sera

$$\text{(1)} \quad ax + \frac{by}{\sin\varphi} - \frac{c^2}{\cos\varphi} = 0.$$

Multiplions cette équation par $\sin\varphi$ et prenons la dérivée par rapport à φ, on a

$$ax\cos\varphi - \frac{c^2}{\cos^2\varphi} = 0, \text{ d'où } x = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{1}{\cos^3\varphi};$$

puis prenons la dérivée par rapport à φ, sans modifier l'équation (1), il vient

$$-\frac{by\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{c^2\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0, \text{ d'où } y = -\frac{c^2}{b}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$\text{(2)} \qquad x = \frac{c^2}{a\cos^3\varphi}, \quad y = -\frac{c^2\sin^3\varphi}{b\cos^3\varphi}; \text{ où } c^2 = a^2 - b^2.$$

D'après cela, l'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho^2 = \left(\frac{c^2}{a\cos^3\varphi} - \frac{a}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{b}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2,$$

ou

$$\rho^2 = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left[\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi}\right]^2 + \frac{\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi}\left[\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi}\right]^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2}{\cos^2\varphi}\right]^3.$$

Or la quantité entre parenthèses est le carré du diamètre b' conjugué de OM, N.° [798]; donc

$$\text{(II)} \qquad \rho = \frac{b'^3}{ab}.$$

3.° Parabole: $y^2 - 2px = 0$.

Soient x_1, y_1, les coordonnées d'un point M de la parabole, la normale en ce point est

$$\text{(1)} \qquad py - y_1(p - x) - \frac{y_1^3}{2p} = 0, \quad y_1^2 = 2px_1.$$

Prenons la dérivée par rapport à y_1, il vient

$$-(p - x) - \frac{3y_1^2}{2p} = 0, \text{ d'où } x = p + 3x_1;$$

divisons l'équation (1) par y_1, et prenons encore la dérivée par rapport à y_1, on a

$$-\frac{py}{y_1^2} - \frac{y_1}{p} = 0, \text{ d'où } y = -\frac{2x_1y_1}{p}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$\text{(2)} \qquad x = p + 3x_1, \; y = -\frac{2x_1y_1}{p}, \text{ avec } y_1^2 = 2px_1.$$

L'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(\frac{2x_1y_1}{p} + y_1\right)^2 = (p + 2x_1)^2 + 2px_1\left(\frac{2x_1}{p} + 1\right)^2,$$

ou

$$\rho^2 = (p + 2x_1)^2 + \frac{2x_1}{p}(p + 2x_1)^2 = \frac{(p + 2x_1)^3}{p};$$

mais on a

$$FM = x_1 + \frac{p}{2}, \text{ ou } 2x_1 + p = 2FM;$$

il vient donc définitivement

$$\text{(III)} \qquad \rho^2 = \frac{8\overline{FM}^3}{p}.$$

Remarque. Les expressions des rayons de courbure peuvent se transformer de bien des manières; nous citerons la suivante.

Si N est l'angle de la normale en un point M avec le rayon focal qui passe par ce point, et si b' est le diamètre conjugué de OM, on a

$$\text{(IV)} \qquad \cos N = \frac{b}{b'}$$

Cette formule se démontre sans difficulté en se servant des relations que nous avons déjà fréquemment utilisées.

D'après cela, on trouve, en désignant par p le demi-paramètre $\frac{b^2}{a}$ de la conique,

$$\text{(V)} \qquad \rho = \frac{p}{\cos^3 N}.$$

837. Si d'un point fixe on abaisse une perpendiculaire sur chaque diamètre d'une conique et qu'on prenne le point d'intersection de cette droite et du diamètre conjugué: le lieu de ce point sera une hyperbole équilatère passant par le point fixe, par le centre de la conique donnée et par les pieds des normales abaissées du point fixe sur la conique, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la courbe. (Chasles, Coniques. page 142).

Soit, par exemple, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et α, β, les coordonnées du point fixe P. L'équation d'une sécante quelconque passant par ce point sera

$$(1) \qquad y - \beta = \lambda(x - \alpha);$$

le coefficient angulaire d'un diamètre perpendiculaire est $-\frac{1}{\lambda}$; et d'après la relation

$$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2},$$

l'équation du diamètre conjugué sera

$$(2) \qquad y = \frac{\lambda b^2}{a^2}x.$$

Éliminant λ entre les équations (1) et (2), on trouve pour l'équation du lieu cherché

$$(3) \qquad y - \beta = \frac{a^2 y}{b^2 x}(x - \alpha).$$

On reconnait aisément toutes les propriétés énoncées, et on voit en outre que c'est la condition pour qu'une normale en (x, y) passe par le point (α, β).

838. Les perpendiculaires abaissées d'un point donné P sur les tangentes d'une parabole rencontrent les diamètres menés par le point de contact de ces tangentes en des points situés sur une hyperbole équilatère qui passe par le point P et dont une asymptote est parallèle à l'axe de la parabole. (Chasles. Coniques page 144).

Soit l'équation de la parabole

$$y^2 - 2px = 0,$$

et α, β, les coordonnées du point P. L'équation d'une sécante quelconque passant par ce point sera

$$(1) \qquad y-\beta=\lambda(x-\alpha);$$

l'équation d'une tangente en un point x_1, y_1 est

$$yy_1-p(x+x_1)=0;$$

si l'on exprime que ces deux droites sont perpendiculaires, on trouve

$$\frac{\lambda p}{y_1}=-1, \text{ d'où } y_1=-\lambda p.$$

L'équation du diamètre passant par le point de contact est, par suite:

$$(2) \qquad y=-\lambda p.$$

Éliminant λ entre les équations (1) et (2), on trouve pour l'équation du lieu cherché

$$(3) \qquad y-\beta=-\frac{y}{p}(x-\alpha).$$

On reconnaît aisément les propriétés énoncées; on voit, en outre, que c'est la condition pour que la normale en (x, y) passe par le point (α, β).

Chapitre IV
Asymptotes.

§I. Détermination des Asymptotes.

1°. Recherche des Asymptotes.

839. Nous allons d'abord déterminer les asymptotes en cherchant leur coefficient angulaire c_1 et leur ordonnée à l'origine d_1. On a vu que N° [500]:

$$c_1=\lim\frac{y}{x}, \quad d_1=\lim(y-c_1x),$$

lorsque x croît indéfiniment.

Appliquons à l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, \text{ ou } y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad (1 \text{ bis})$$

laquelle représente une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.

De l'équation (1 bis) on déduit

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}, \text{ d'où } \lim\frac{y}{x}=c_1=\pm\frac{b}{a}.$$

Si l'on prend pour c_1 la valeur $+\frac{b}{a}$, par exemple, on aura

$$y-c_1x=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right].$$

En multipliant et divisant cette expression par la quantité $\left\{\sqrt{x^2-a^2}+x\right\}$, il vient

$$y-c_1x=\frac{b}{a}\,\frac{-a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=-ab\,\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$$

d'où l'on conclut

$$d_1 = \lim (y - c_1 x) = 0.$$

Le même calcul s'appliquera à l'autre valeur $-\frac{b}{a}$ de c_1. Donc

Les asymptotes de l'hyperbole passent par le centre et sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.

En appliquant la même méthode à l'ellipse, on trouve

$$c_1^2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

ce qui donne pour c_1 des valeurs imaginaires; donc l'ellipse n'a pas d'asymptotes réelles.

Parabole. L'équation de la courbe est

$$y^2 = 2px,$$

donc $\frac{y^2}{x^2} = \frac{2p}{x}$, par suite $\lim \frac{y}{x} = 0$ ou $c_1 = 0$;

donc si la parabole a une asymptote, elle est parallèle à l'axe des x. Mais l'ordonnée à l'origine d_1, est

$$d_1 = \lim (y - c_1 x) = \lim \sqrt{2px}$$

Il est évident que si x croît indéfiniment, il en est de même pour d_1; donc la parabole n'a pas d'asymptote à distance finie.

840. **Seconde Méthode.** — Si on rend homogène l'équation de l'hyperbole, elle devient

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - z^2 = 0;$$

on voit en cherchant l'intersection de la courbe par la droite de l'infini, que les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

De plus les deux droites représentées par cette équation sont les asymptotes elles-mêmes; car si nous cherchons l'intersection de la courbe par une des deux droites

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

nous trouvons le carré parfait $z^2 = 0$; donc cette droite est tangente à l'hyperbole aux points où cette courbe est coupée par la droite de l'infini, c'est donc une asymptote.

Dans l'ellipse, la même méthode conduit au résultat déjà énoncé plus haut.

Dans le cas de la Parabole

$$y^2 - 2pxz = 0,$$

nous voyons que les directions asymptotiques sont données par $y^2 = 0$; c.à.d. que les asymptotes doivent être parallèles à Ox. Prenons donc une droite passant par le point à l'infini dans la direction de l'axe des x; l'équation de cette droite sera de la forme $z = \lambda y$, et son intersection avec la courbe sera donnée par l'équation

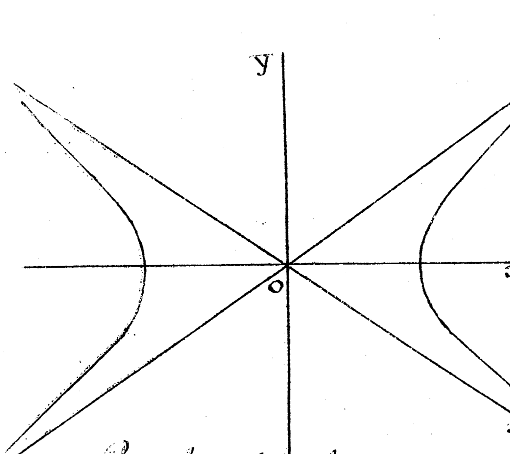
$$y^2 - 2p\lambda xy = 0.$$

La droite considérée ne peut donc être tangente à la courbe que si λ est nul, mais alors son équation se réduit à $z = 0$; donc la parabole a pour asymptote la droite de l'infini parallèle à Ox.

II. Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

841. Rapporter l'hyperbole à ses asymptotes.

Nous avons déjà vu plusieurs fois que l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est



de la forme

$$xy = m.$$

Ramenons à cette forme l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes,

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

il suffit évidemment de faire une transformation de coordonnées sans changer d'origine; de sorte que les formules de transformation seront

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation (1), et posant

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha'}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha'}{b^2} = 0,$$

l'équation de la courbe se réduit à

$$(2) \quad 2x'y'\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a^2} - \frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{b^2}\right) = 1.$$

C'est la forme cherchée; les angles α et α' sont déterminés par les équations

$$\tang^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \tang^2\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

ce qui donne pour tang α et tang α' deux valeurs. Or puisque α et α' représentent les angles de Ox' et Oy' avec Ox, il faut prendre pour tang α et tang α' des valeurs différentes; de sorte que, si tang $\alpha = \pm\frac{b}{a}$, on devra choisir tang $\alpha' = \mp\frac{b}{a}$, les signes se correspondant.

Or choisissons pour directions positives des nouveaux axes les portions d'asymptotes dans l'angle desquelles se trouve la courbe, alors évidemment tang $\alpha = -\frac{b}{a}$ et par suite tang $\alpha' = +\frac{b}{a}$; d'où l'on conclut

$$\sin\alpha = \frac{-b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Mais α étant compris entre 270° et 360°, sin α est négatif et cos α est positif; donc il faut prendre

$$\sin\alpha = \frac{-b}{+\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}};$$

de même, puisque α' est compris entre 0° et 90°:

$$\sin\alpha' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Remplaçant alors dans l'équation (2), et réduisant, elle devient

$$x'y' = \frac{a^2+b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Si on avait pris pour directions positives des nouveaux axes les portions d'asymptotes qui ne comprennent pas la courbe, on serait arrivé à l'équation

$$x'y' = -\frac{a^2+b^2}{4} \text{ ou } x'y' = -\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

842. **Relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués.**

Lorsque l'équation de l'hyperbole est ramenée à la forme ci-dessus, la relation générale

$$A + B(m+m') + Cmm' = 0,$$

qui lie les coefficients angulaires m, m' de deux diamètres conjugués se réduit à

$$m + m' = 0;$$

donc l'équation du diamètre conjugué de $y - \lambda x = 0$ sera

$$y + \lambda x = 0.$$

Les asymptotes et deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole forment un faisceau harmonique.

Car, les équations des asymptotes étant

$$x = 0 \text{ et } y = 0,$$

les équations de deux diamètres conjugués quelconques seront

$$y = \lambda x,\ y = -\lambda x;$$

or il est évident que ces quatre droites forment un faisceau harmonique (N.° [170]).

843. **Équation d'une tangente parallèle à une direction donnée.**

Soit $y = ax$ une droite passant par le centre et parallèle à la direction donnée. L'équation de la tangente sera de la forme

$$y = ax + b;$$

si cette droite est tangente à la courbe $xy = m$, alors l'équation

$$x(ax + b) = m,$$

qui donne les abscisses des points d'intersection, devra avoir deux racines égales; ce qui détermine b. On trouve ainsi

$$b^2 + 4am = 0;$$

donc l'équation d'une tangente parallèle à la droite $y = ax$ sera

$$(1) \qquad y = ax \pm 2\sqrt{-am}.$$

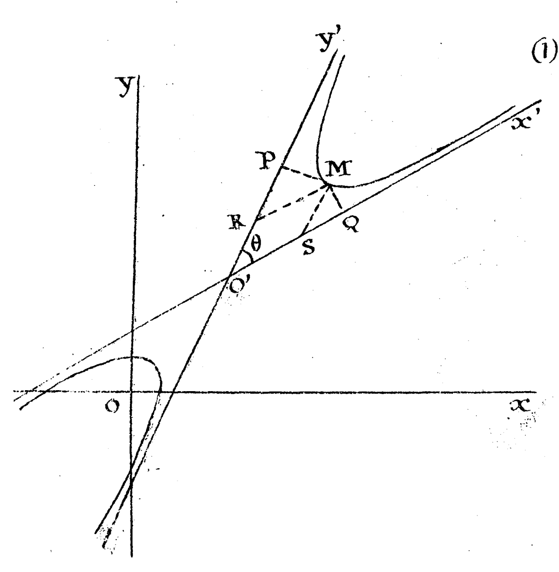
La quantité m étant positive, on voit que cette tangente sera imaginaire tant que a sera >0, c.à.d. tant que la droite $y = ax$ rencontrera l'hyperbole. —

III.° Équation générale des hyperboles ayant pour asymptotes deux droites données.

844. Si les équations des deux droites sont

$$(P)\ Ax + By + C = 0,\ (Q)\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

nous avons vu que l'équation



$$(1) \qquad \overbrace{(Ax + By + C)}^{P}\ \overbrace{(A_1 x + B_1 y + C_1)}^{Q} = \pm K^2$$

$$\text{ou} \qquad PQ = \pm K^2,$$

représente une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites P et Q.

On peut toujours ramener l'équation générale d'une hyperbole à la forme ci-dessus; car, en décomposant cette équation en carrés, on arrivera alors nécessairement à la forme

$$X^2 - Y^2 = K^2,\ \text{ou}\ (X + Y)(X - Y) = K^2,\ \text{ou}\ P.Q = K^2.$$

On peut partir de là pour rapporter la courbe à ses asymptotes $O'x'$ et $O'y'$; car, si θ est l'angle de ces deux droites et (x', y') les nouvelles coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, on a

$$\overline{PM} = \overline{RM} \sin\theta,\ \overline{QM} = \overline{SM} \sin\theta;$$

$$\text{donc: } x' \sin\theta = \frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ \ y' \sin\theta = \frac{Q}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}};$$

et, comme P et Q vérifient la relation $PQ = \pm K^2$, on a définitivement

$$(2) \qquad x'y' = \frac{\pm K^2}{\sin^2\theta \cdot \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

845. Signification géométrique de l'équation $PQ = \pm K^2$.

Nous venons de voir que l'on a

$$P = \overline{PM}\cdot\sqrt{A^2+B^2}, \quad Q = \overline{QM}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2};$$

par suite,

$$(1) \quad PM \cdot QM = \frac{\pm K^2}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2}};$$

le second membre est une constante, donc

Le produit des distances d'un point quelconque de l'hyperbole à ses deux asymptotes est constant.

Remarquons encore que l'on a

$$\overline{MP} = \overline{MR}\cdot\sin\theta, \quad \overline{MQ} = \overline{MS}\cdot\sin\theta;$$

et la relation (1) pourra s'écrire

$$(2) \quad MR\cdot MS\cdot\sin\theta = \frac{\pm K^2}{\sin\theta\,\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

Le second membre est encore constant; donc la surface du parallélogramme O'RMS est constante; c.à.d. que la surface du parallélogramme formé en menant par un point quelconque de la courbe des parallèles aux asymptotes est constante.

Cette propriété est la traduction immédiate de l'équation $xy = m$.

846. L'équation d'une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites

$$Ax+By+C=0, \quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

est

$$(Ax+By+C)(A_1x+B_1y+C_1) = \pm K^2;$$

voyons comment on peut reconnaître dans quel angle se trouve la courbe.

Prenons d'abord l'hyperbole

$$(1) \qquad (Ax+By+C)(A_1x+B_1yC_1) = K^2.$$

Si nous considérons la droite $Ax+By+C=0$, et que, x_0, y_0 soient les coordonnées d'un point du plan, on aura N° [76]

$$Ax_0+By_0+C>0,$$

lorsque, B étant positif, le point sera situé au-dessus de la droite en marchant parallèlement à l'axe des y; ce serait le contraire si B était négatif. Ou bien, (Ax_0+By_0+C) sera positif, lorsque, A étant positif, le point est à droite de la ligne en marchant parallèlement à l'axe des x. Or, dans l'équation (1), le 2ème membre est positif; il doit en être de même du premier.

Supposons par exemple B et B_1 positifs; il faut que les deux facteurs soient ou tous deux positifs ou tous deux négatifs, par suite, il faut que le point soit au-dessus des deux droites ou au-dessous de ces deux droites. Si CD, C_1D_1 sont ces deux droites, la courbe sera dans les angles CRD_1, C_1RD.

Considérons maintenant l'équation

$$(Ax+By+C)(A_1x+B_1y+C_1) = -K^2 \quad (2)$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut évidemment que le premier membre soit négatif, et par suite

que ses deux facteurs soient de signes contraires. En restant toujours dans l'hypothèse précédente, (c. à. d. B et B_1 positifs), il faut donc que les points de la courbe soient au-dessous de l'une des droites et au-dessous de l'autre ; par suite, la courbe sera dans les angles CRC_1, DRD_1.

Les deux hyperboles ainsi obtenues

$$PQ = K^2,$$
$$PQ = -K^2,$$

sont des hyperboles conjuguées.

847. Nous pouvons écrire immédiatement les équations de deux diamètres conjugués dans l'hyperbole

$$(1) \qquad PQ = K^2.$$

Un diamètre est une droite passant par le centre ; or le centre est donné par l'intersection des asymptotes ; l'équation d'un diamètre sera donc de la forme

$$P - \lambda Q = 0.$$

Pour trouver son conjugué, rappelons nous que les asymptotes et deux diamètres conjugués forment un système harmonique ; or les équations des asymptotes sont

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

l'équation d'un diamètre étant $\qquad (2) \quad P = \lambda Q,$

celle de la droite conjuguée sera $\qquad (3) \quad P = -\lambda Q.$

§II. Propriétés relatives aux asymptotes.

848. La projection d'un foyer sur une asymptote est sur la directrice correspondante.

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'asymptote, l'équation de l'asymptote est

$$y = \frac{b}{a} x,$$

celle de FH est $\quad y = -\frac{a}{b}(x - c).$

Cherchons l'abscisse de l'intersection de cette droite avec l'asymptote ; nous trouvons

$$\frac{b}{a} x + \frac{a}{b} x - \frac{ac}{b} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad x = \frac{a^2}{c};$$

le point ayant pour abscisse $\frac{a^2}{c}$ se trouve sur la directrice, donc....

849. Les portions d'une sécante comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales.

Considérons une sécante quelconque MM_1, on aura

$$(1) \qquad MN = M_1N_1.$$

Pour le démontrer, rapportons la courbe à deux diamètres conjugués Ox, Oy ; l'un conjugué de la sécante, c. à. d. passant par son milieu I et l'autre, par suite, parallèle à cette corde.

L'équation de l'hyperbole sera alors

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

l'axe des x divise en deux parties égales les cordes parallèles à

l'axe des y, donc

$$IM = IM_1 .$$

D'autre part, l'équation des asymptotes est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0 ;$$

on voit que l'ensemble des deux asymptotes forme un système tel que les cordes parallèles à l'axe des y sont partagées en deux parties égales par l'axe des x, donc

$$IN = IN_1 ;$$

et par suite

$$MN = M_1N_1 . \quad C.Q.F.D.$$

On peut le démontrer d'une autre manière.

Supposons la courbe rapportée à ses asymptotes, son équation sera

$$xy = m.$$

Prenons l'équation d'une sécante quelconque

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0 ;$$

les abscisses de ses intersections avec la courbe seront données par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{m}{\beta x} - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{\alpha} - x + \frac{m}{\beta} = 0.$$

Si l'on désigne par x_1 et x_2 les abscisses de ces points, on aura

$$x_1 + x_2 = \alpha .$$

Soit x_1 la plus grande, on a alors

$$ON_1 = \alpha ; \text{ or } \alpha - x_1 = x_2 ,$$

donc

$$ON_1 - OQ = x_2 = MP ; \text{ ou } QN_1 = MP.$$

Les deux triangles MNP, M_1N_1Q, qui ont leurs angles égaux, sont par suite égaux ; donc

$$MN = M_1N_1 .$$

De là on peut déduire la construction de l'hyperbole par points, étant donnés les asymptotes et un point.

Soit M le point donné, AB, CD les deux asymptotes ; par le point M, on mène une sécante quelconque et on prend $JM' = IM$; puis on opère sur M_1 comme sur M, on mène une sécante et on prend $I'M' = I'_1M_1$ et ainsi de suite. — Pour construire la branche de gauche, on mène une sécante MK et on prend $K_1N = KM$; etc.

850. Les portions d'une tangente comprises entre le point de contact et les asymptotes sont égales.

Cela résulte du théorème précédent ; considérons en effet une sécante quelconque NN_1, on a $MN = M_1N_1$; si l'on suppose que cette sécante se meuve parallèlement à elle même jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente TT_1, alors les deux points M, M_1 se confondront au point I, et on aura encore

$$IT = IT_1.$$

On peut le démontrer directement. Soit la tangente TT_1; rapportons la courbe à deux diamètres conjugués Ox, Oy, dont l'un est conjugué de la tangente, c. à. d. passe par le point de contact I; et, par suite, l'autre est parallèle à cette tangente.
L'équation de la courbe est alors

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

et les asymptotes sont données par

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0.$$

Or l'équation de la tangente TT_1 est

$$x = a';$$

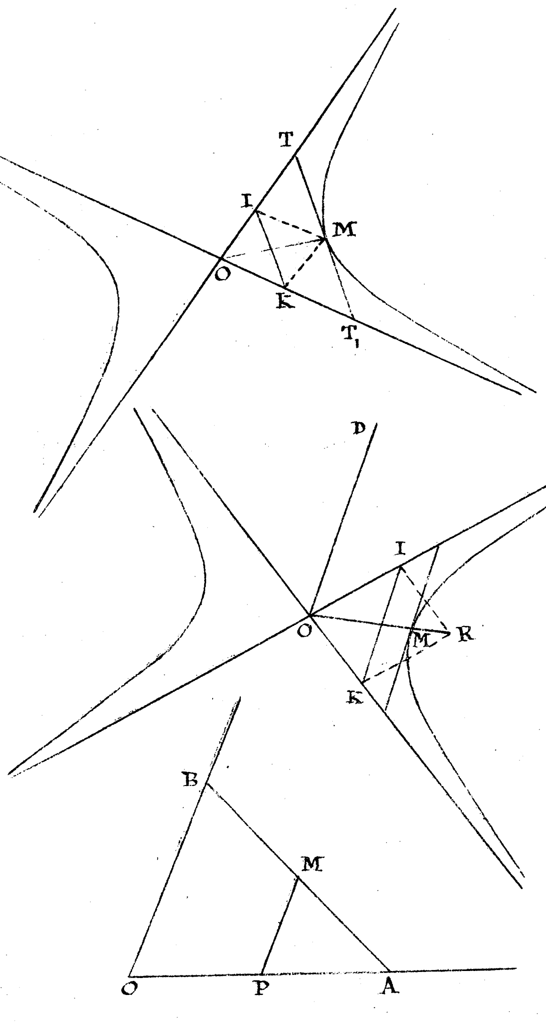
si l'on cherche son intersection avec les asymptotes, on trouve

$$y^2 = b'^2, \text{ d'où } y = \pm b'.$$

Ces deux valeurs sont égales et de signes contraires; on a donc en valeur absolue

$$IT = IT_1.$$

On peut de là déduire la construction de la tangente à l'hyperbole, en un point donné ou parallèlement à une direction donnée.



Pour construire la tangente en un point M de la courbe, joignons OM, puis sur cette droite construisons un parallélogramme en menant par le point M des parallèles aux asymptotes; la diagonale IK de ce parallélogramme est divisée en deux parties égales par la droite OM; par suite, si par le point M on mène une parallèle à cette droite, ce sera la tangente cherchée.

Passons à la construction de la tangente parallèle à une direction donnée. Soit OD la parallèle à cette direction menée par l'origine et se trouvant dans l'angle des asymptotes où n'est pas la courbe; menons une parallèle IK à la droite D, puis sur cette droite construisons un parallélogramme en menant par I et K des parallèles aux asymptotes; la diagonale OR de ce parallélogramme rencontre la courbe en M, et en menant par ce point une parallèle à la direction donnée, nous aurons la tangente.

La propriété que nous venons de démontrer est caractéristique; car une courbe telle, que les portions d'une tangente comprises entre le point de contact et deux droites fixes sont égales, est une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes.
Soient OA et OB les deux droites fixes, AB une tangente quelconque, $M(x, y)$ son point de contact. Exprimons que, quelle que soit la position de la tangente AB, M en est le milieu. L'équation d'une tangente est

$$Y - y = y'_x (X - x),$$

X, Y étant les coordonnées courantes; son intersection avec l'axe des x sera donnée par l'équation

$$X - x = -\frac{y}{y'_x};$$

or M étant le milieu de AB, son abscisse OP est la moitié de OA, donc $X = 2x$; et par suite

$$x = -\frac{y}{y'_x};$$

$$\text{d'où } \frac{y'_x}{y} = -\frac{1}{x}.$$

Par suite

$$ly = -lx + lc, \quad lxy = lc$$

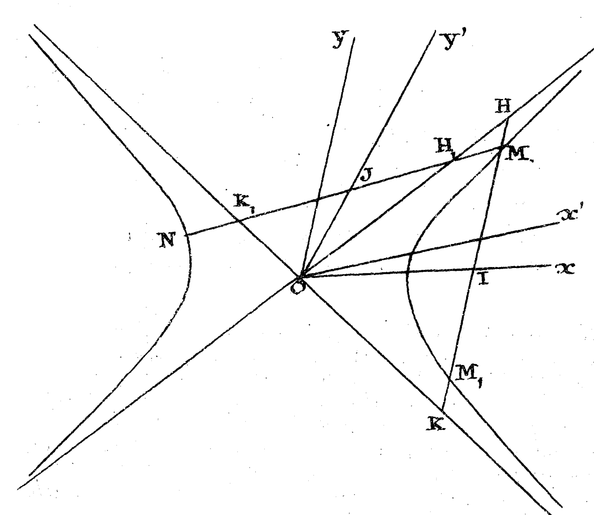
$$\text{d'où} \quad xy = c;$$

équation qui représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

851. Le produit des segments d'une sécante compris entre un point de la courbe et les asymptotes est égal au carré du demi-diamètre parallèle.

Soit M un point de la courbe et HK une sécante passant par ce point, on aura

$$\text{(I)} \quad MH \cdot MK = b'^2.$$



Pour le démontrer, rapportons l'hyperbole à deux diamètres conjugués, dont l'un soit lui même conjugué de cette sécante; soient Ox, Oy ces deux diamètres; l'équation de la courbe est alors

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

et les asymptotes sont $y = \pm \frac{b'}{a'} x$.

Multiplions l'équation (1) par b'^2, il vient

$$\left(\frac{b'^2}{a'^2} x^2 - y^2\right) = b'^2;$$

$$\text{d'où} \quad \left(\frac{b'}{a'} x - y\right)\left(\frac{b'}{a'} x + y\right) = b'^2.$$

Or $\frac{b'}{a'} x$ est l'ordonnée IH de l'asymptote correspondant à l'abscisse $x = OI$, donc $(IH - IM)(IH + IM) = b'^2$, ou $MH \cdot MK = b'^2$.

Considérons une autre sécante telle que MN, nous aurons de même

$$\text{(II)} \quad MH_1 \cdot MK_1 = a'^2.$$

Rapportons la courbe aux deux diamètres conjugués Ox', Oy', dont l'un Ox' est parallèle à la sécante; l'équation de l'hyperbole est encore

$$(2) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

où a' et b' ont une autre valeur; les asymptotes sont $y = \pm \frac{b'}{a'} x$, ou $x = \pm \frac{a'}{b'} y$.

Multiplions l'équation (2) par a'^2, il vient

$$x^2 - \frac{a'^2}{b'^2} y^2 = a'^2;$$

$$\text{ou} \quad \left(x - \frac{a'}{b'} y\right)\left(x + \frac{a'}{b'} y\right) = a'^2;$$

$$\text{ou} \quad (JM - JH_1)(JM + JH_1) = a'^2;$$

$$\text{ou enfin} \quad MH_1 \cdot MK_1 = a'^2.$$

852. Valeur de la surface constante du triangle formé par les asymptotes et une tangente quelconque.

La surface du triangle OTT_1 est constante quelle que soit la position de la tangente; en effet, si sur OI on construit un parallélogramme en menant par le point I des parallèles aux asymptotes; on voit que l'on a ainsi quatre triangles équivalents; par suite la surface du triangle sera égale au double de celle

du parallélogramme OAIB. Or nous savons que la surface de ce parallélogramme est constante, donc celle du triangle OTT_1 l'est aussi.

Pour avoir la valeur de cette surface, on part de la relation $xy = \frac{a^2+b^2}{4}$; d'où

$$\sin\theta . xy = \frac{a^2+b^2}{4}\sin\theta ;$$

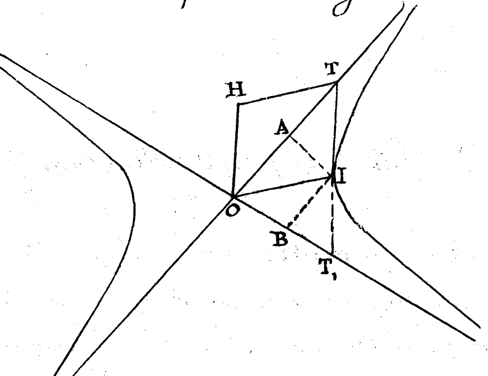
$$\text{par suite : surf. } OTT_1 = \frac{a^2+b^2}{2}\sin\theta .$$

Évaluons $\sin\theta$; on a $\tang\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$; d'où

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \text{et } \sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2};$$

$$\text{et par suite : surf. } OTT_1 = ab .$$

La surface du triangle est donc égale à celle du rectangle construit sur les demi axes. —



On aurait pu d'ailleurs le déduire immédiatement de ce fait que la surface est constante; car si l'on considère une position particulière de la tangente (la tangente au sommet), il est alors visible que la surface est égale à ab.

La démonstration de cette proposition résulte encore du théorème d'Apollonius

$$a'b'\sin\theta = ab.$$

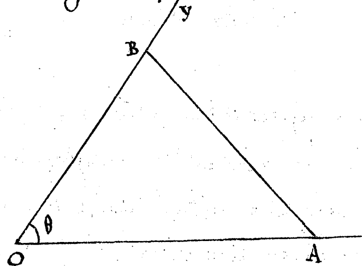
En effet, si nous considérons un diamètre $OI = a'$, le diamètre conjugué $OH = b'$ est parallèle à la tangente en I; de plus le parallélogramme construit sur ces deux demi-diamètres a pour diagonale l'asymptote; donc

$$a'b'\sin\theta = OITH ;$$

$$\text{or surf. } OTT_1 = 2\,\text{surf. } OIT = \text{surf. } OITH ;$$

$$\text{donc} \quad \text{surf. } OTT_1 = ab.$$

Réciproquement, les courbes telles, que la surface du triangle formé par deux droites fixes et une tangente quelconque est constante, sont des hyperboles.



Soient OA, OB les deux droites fixes auxquelles on rapportera la courbe, et soit AB une tangente; d'après l'hypothèse

$$OA.OB\sin\theta = K^2,$$

$$\text{ou} \quad OA.OB = 4m.$$

Prenons l'équation d'une tangente sous la forme

$$y = ax + b;$$

cherchons son intersection avec l'axe des x et l'axe des y; on a

$$\text{avec l'axe des } x : OA = -\frac{b}{a},$$

$$\text{avec l'axe des } y : OB = b;$$

$$\text{par suite} \quad -\frac{b^2}{a} = 4m,\ \text{d'où } b^2 = -4am.$$

L'équation de la tangente sera donc

$$(1) \qquad y = ax + 2\sqrt{-am},$$

où il n'y a que le seul paramètre arbitraire a.

Cherchons l'enveloppe de ces tangentes; la dérivée par rapport à a est

$$x - \frac{m}{\sqrt{-am}} = 0;\ \text{d'où } \sqrt{-am} = \frac{m}{x},\ \text{et } ax = -\frac{m}{x}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (1) conduit à

$$(2) \qquad xy = m;$$

équation qui représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

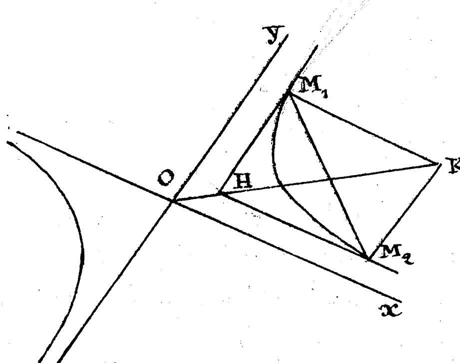
853. Si sur une corde on construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, la diagonale passe par le centre.

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$xy = m;$$

soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux points de l'hyperbole, de sorte que

$$x_1 y_1 = m, \quad x_2 y_2 = m.$$



La seconde diagonale du parallélogramme passe par les points H et K dont les coordonnées sont

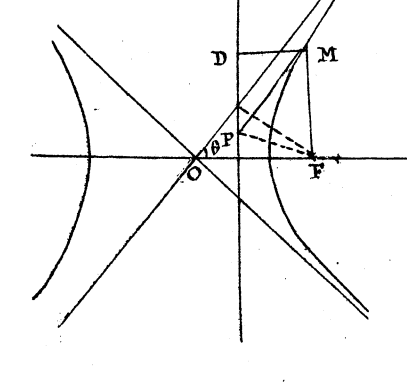
$$H(x_1, y_2), \quad K(x_2, y_1);$$

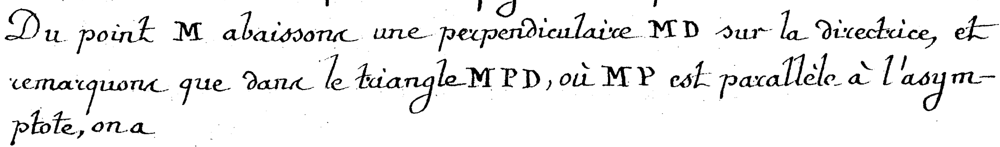
elle a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est visible que cette droite passe par l'origine, car lorsqu'on fait $x = y = 0$, il reste $(x_1 y_1 - x_2 y_2)$, quantité nulle, puisque $x_1 y_1 = x_2 y_2 = m$.

854. La distance d'un point de l'hyperbole à la directrice, comptée sur une parallèle à l'asymptote, est égale à la distance du même point au foyer correspondant à la directrice.




Du point M abaissons une perpendiculaire MD sur la directrice, et remarquons que dans le triangle MPD, où MP est parallèle à l'asymptote, on a

$$MP = \frac{MD}{\cos\theta};$$

mais $\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{a}$, par suite $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c}$; donc

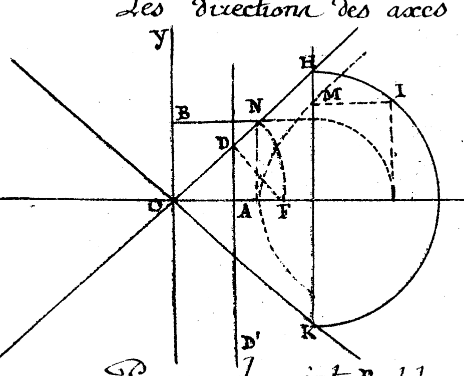
$$MP = MD \cdot \frac{c}{a};$$

or $\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a}$, d'après la propriété de la directrice; donc

$$(1) \quad MP = MF. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

855. Construire les éléments d'une hyperbole connaissant les asymptotes et un point.

Les directions des axes sont donc connues, puisque ce sont les bissectrices des angles des asymptotes. Soit M le point donné, la droite Ox situé dans le même angle que le point M est la direction de l'axe transverse. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur Ox, nous savons que N° (851):



$$MH \cdot MK = b^2.$$

Si sur HK comme diamètre on décrit une circonférence, et qu'on élève MI perpendiculaire à HK, on aura

$$\overline{MI}^2 = MH \cdot MK = b^2.$$

Prenons le point B, tel que $OB = MI$, OB sera le diamètre imaginaire.

L'asymptote étant une diagonale du rectangle construit sur les axes, BN ou OA sera égal à a, c.à.d. à l'axe transverse.

On voit, en outre, que $\overline{ON}^2 = a^2 + b^2 = c^2$; le point N rabattu, en F, sur Ox sera le foyer. La projection du foyer sur l'asymptote étant un point de la directrice, on construira aisément la directrice DD'.

Les éléments de la seconde branche s'obtiendront par symétrie.

856. Connaissant les asymptotes et un point, construire les longueurs de deux diamètres conjugués dont on donne les directions.

Soient OA et OB les deux asymptotes, M le point donné. Considérons un diamètre quelconque Ox, et construisons le conjugué et les longueurs des deux diamètres. Par M, menons une parallèle à Ox, on aura

$$MI.MJ=a'^2,$$

a' étant la longueur du diamètre Ox, diamètre réel puisqu'il est dans l'angle des asymptotes où se trouve le point donné; les segments MI et MJ étant connus, la longueur a' se construit par une moyenne proportionnelle; soit

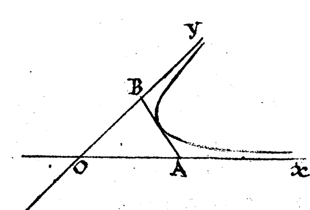
$$OA'=II_1=a'.$$

Le diamètre Oy, conjugué de Ox sera parallèle à la tangente en A'; or nous savons construire la tangente en A' No. [850]; on connaîtra donc le diamètre conjugué de Ox, et on déterminera sa longueur en appliquant le théorème No. [851], ou bien en construisant le parallélogramme correspondant à ces deux diamètres.

857. Équation tangentielle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$xy=m;$$



la tangente en un point (x_1, y_1) est

$$xy_1+yx_1-m=0, \text{ avec la condition } x_1y_1=m.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{u}=\frac{m}{y_1}, \frac{1}{v}=\frac{m}{x_1}; \text{ d'où } x_1=\frac{m}{v}, y_1=\frac{m}{u};$$

u et v sont les coordonnées de la tangente, on aura donc

$$(1)\qquad uv=\frac{1}{m};$$

telle est l'équation tangentielle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Si AB est une tangente quelconque, on déduit de l'équation (1)

$$\frac{1}{OA}\cdot\frac{1}{OB}=\frac{1}{m}, \text{ ou } OA.OB=m;$$

c.à.d. que la surface du triangle formé par une tangente et les asymptotes est constante.

On retrouve ainsi la proposition démontrée au No. [852]; la réciproque de ce théorème s'établit immédiatement.

Soient, en effet, Ox et Oy les deux droites fixes, u et v les coordonnées d'une tangente quelconque AB; on a

$$u=\frac{1}{OA}, v=\frac{1}{OB};$$

or d'après l'hypothèse, la surface du triangle OAB est constante; c.à.d. que

$$OA.OB.\sin\theta=K, \text{ ou } OA.OB=m, \text{ ou enfin } uv=\frac{1}{m};$$

c'est l'équation tangentielle d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

§ III. Hyperbole Equilatère.

858. L'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses axes est

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$

a est le rayon de l'hyperbole. L'équation de la courbe, rapportée à ses asymptotes, sera

$$(2) \qquad xy = \frac{a^2}{2},$$

les axes Ox et Oy, c.à.d. les asymptotes, sont alors rectangulaires.

Nous ne citerons qu'un très-petit nombre des propriétés de l'hyperbole équilatère.

Dans l'hyperbole équilatère, les asymptotes sont rectangulaires; les diamètres conjugués sont égaux.

La distance des foyers au centre est $c = a\sqrt{2}$.

Les distances des foyers F et F' à un point de la branche de droite sont

$$(3) \quad \begin{cases} FM = x\sqrt{2} - a, \\ F'M = x\sqrt{2} + a, \end{cases}$$

lorsqu'on suppose la courbe rapportée à ses axes.

On déduit de là :

$$FM \cdot F'M = 2x^2 - a^2 = OM^2;$$

c.à.d. que le produit des rayons vecteurs qui joignent les foyers à un point de la courbe est égal au carré du demi-diamètre qui passe par ce point.

Lorsqu'on suppose la courbe rapportée à ses asymptotes, la condition pour que deux directions soient conjuguées est N° [842]

$$m + m' = 0;$$

comme les axes sont rectangulaires, il en résulte que :

deux directions conjuguées font des angles égaux avec les asymptotes.

Cette proposition est aussi une conséquence de l'égalité des diamètres conjugués, et de ce que les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.

Il résulte de là encore que :

Les droites, menées des extrémités d'un diamètre à un point de la courbe, font des angles égaux avec une asymptote.

Car ces droites sont des cordes supplémentaires et sont, par suite, des directions conjuguées.

859. Si, dans une hyperbole équilatère, on inscrit un triangle rectangle, l'hypoténuse est parallèle à la normale au sommet de l'angle droit.

Supposons la courbe rapportée à ses asymptotes, son équation est

$$(1) \qquad xy = m.$$

Désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets du triangle inscrit, (x_1, y_1) étant le sommet de l'angle droit.

Le coefficient angulaire d'une droite passant par deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) situés sur l'hyperbole, est

$$(2) \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\dfrac{m}{y_2} - \dfrac{m}{y_1}} = -\frac{y_1 y_2}{m}.$$

D'après cela, les deux droites M_1M_2, M_1M_3 devant être perpendiculaires, on a

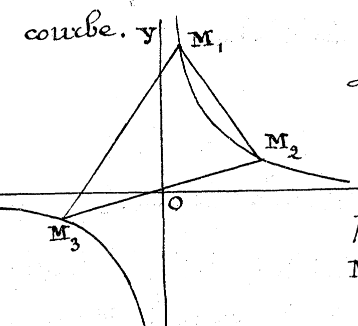
$$\left(-\frac{y_1 y_2}{m}\right)\left(-\frac{y_1 y_3}{m}\right) = -1,$$

ou

$$(3) \qquad -\frac{y_2 y_3}{m} = \frac{m}{y_1^2}.$$

Or $\left(-\frac{y_2 y_3}{m}\right)$ est le coefficient angulaire de la droite $M_2 M_3$; $\left(\frac{m}{y_1^2}\right)$ est le coefficient angulaire de la normale en M_1; ces deux droites, d'après l'égalité (3), sont donc parallèles.

860. Les trois hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent sur la courbe.



Le coefficient angulaire de la droite $M_2 M_3$ est

$$-\frac{y_2 y_3}{m};$$

par suite, l'équation de la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur le côté $M_2 M_3$, est

$$y - y_1 = \frac{m}{y_2 y_3}(x - x_1).$$

Si l'on cherche l'intersection de cette droite avec la courbe

$$xy = m,$$

on trouve, en remplaçant x par $\frac{m}{y}$, et x_1 par $\frac{m}{y_1}$:

$$y - y_1 = \frac{m^2}{y_2 y_3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_1}\right);$$

d'où l'on tire, après avoir supprimé la solution $(y - y_1) = 0$:

$$(1) \qquad y' = -\frac{m^2}{y_1 y_2 y_3}, \text{ puis } x' = -\frac{y_1 y_2 y_3}{m}.$$

Telles sont les coordonnées du point d'intersection d'une des hauteurs avec la courbe; ces valeurs étant symétriques par rapport aux coordonnées des trois points M_1, M_2, M_3, le point (x', y') appartiendra aux trois hauteurs. Donc.....

861. Analogies du cercle et de l'hyperbole équilatère.

L'équation d'un cercle est

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

celle de l'hyperbole équilatère est

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

1° « La perpendiculaire abaissée d'un point du cercle sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre « les deux segments qu'elle détermine sur ce diamètre.

« La perpendiculaire, abaissée d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère sur l'axe transverse, est moy- « enne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'axe transverse.

« Seulement, dans le cercle, le pied de la perpendiculaire est situé entre les extrémités du diamètre; dans l'hy- « perbole, le pied de la perpendiculaire est en dehors des extrémités de l'axe transverse.

2° « Dans le cercle, la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact; « dans l'hyperbole équilatère, la perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon vecteur et la tangente en ce point « sont également inclinées sur l'axe de la courbe, mais inversement situées.

3° « Dans le cercle, la distance du centre à une tangente est égale au rayon.

« Dans l'hyperbole équilatère, la distance du centre à une tangente multipliée par la distance du centre « au point de contact est égale au carré du rayon.

Ces différentes propriétés sont faciles à constater.

Chapitre V
Aires.

§I. Détermination des Aires.

1°. Formules relatives à l'évaluation des Aires.

862. *Dérivée de l'aire comprise entre une courbe, l'axe des x, et deux parallèles à l'axe des y.* Soient CC_1 une ordonnée fixe, MP une ordonnée variable, x et y les coordonnées du point M; désignons par S l'aire $\overline{C_1CMPC_1}$ dont nous cherchons la dérivée. Cette aire est évidemment une fonction de l'abscisse OP ou x; soit une ordonnée M'P' voisine de MP; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, les coordonnées du point M'; l'aire $\overline{C_1CM'P'C_1}$ aura pour valeur $S+\Delta S$. Par les points M et M' menons MK' et M'K parallèle à Ox, l'accroissement ΔS ou $\overline{PMM'P'}$ de l'aire est compris entre les aires des deux parallélogrammes PMK'P', PKM'P'; on a donc

$$PMK'P' < \Delta S < PKM'P'.$$

Or, si θ est l'angle des axes:

$$PMK'P' = y.\Delta x.\sin\theta,\quad PKM'P' = (y+\Delta y).\Delta x.\sin\theta;$$

il vient donc, en divisant par Δx

$$y\sin\theta < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (y+\Delta y)\sin\theta.$$

Le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est compris entre deux quantités qui ont la même limite; la dérivée de S par rapport à x est donc égale à la limite commune; ainsi

$$\text{(I)}\quad S'_x = y\sin\theta,\ \text{si } \theta \text{ est l'angle des axes;}$$

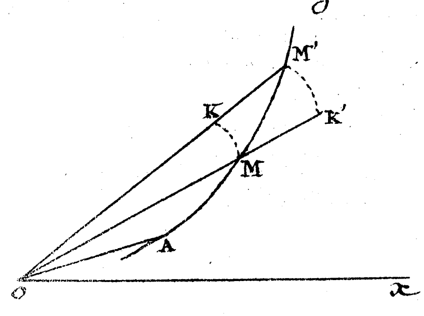
$$\text{(II)}\quad S'_y = y,\quad \text{si les axes sont rectangulaires.}$$

Si l'on considérait l'aire comprise entre la courbe, l'axe des y, et deux parallèles à l'axe des x, on aurait, en désignant encore par S cette aire:

$$\text{(III)}\quad S'_y = x\sin\theta,\ \text{si } \theta \text{ est l'angle des axes;}$$

$$\text{(IV)}\quad S'y = x,\quad \text{si les axes sont rectangulaires.}$$

863. Nous allons chercher maintenant, en coordonnées polaires, la dérivée de l'aire comprise entre la courbe et deux rayons vecteurs.



Soit OA un rayon vecteur fixe, ρ et ω les coordonnées du point M; $(\rho+\Delta\rho)$, $(\omega+\Delta\omega)$ celles d'un point voisin M'; l'accroissement ΔS de l'aire OAM est OMM'. Or si du point O comme centre, nous décrivons les arcs de cercle MK et M'K', on aura visiblement

$$\text{secteur } OMK < \Delta S < \text{secteur } OM'K';$$

Mais, secteur $OMK = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega$; secteur $OM'K' = \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2.\Delta\omega$; donc

$$\frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega < \Delta S < \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2.\Delta\omega;$$

et, en divisant par $\Delta\omega$,

$$\frac{\rho^2}{2} < \frac{\Delta S}{\Delta\omega} < \frac{(\rho+\Delta\rho)^2}{2}.$$

Le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta\omega}$ est compris entre deux quantités dont la différence est très-petite et qui à la limite sont égales; il s'en suit que la limite du rapport $\frac{\Delta S}{\Delta\omega}$ c.à.d. la dérivée de S par rapport à ω est égale à leur limite commune, donc

$$\text{(V)} \quad S'_\omega = \frac{\rho^2}{2}.$$

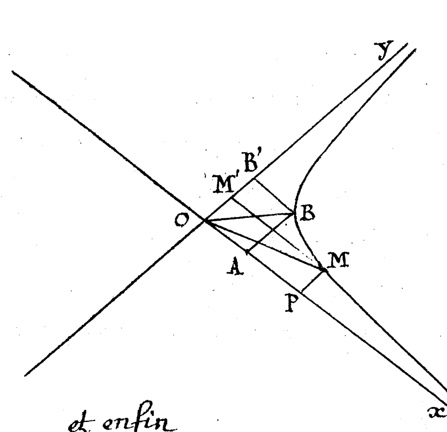
II° Applications.

864. Appliquons à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes et dont l'équation est $xy=m$.

Soit AB une ordonnée fixe, OA = a; la dérivée de l'aire ABMP est

$$S'_x = y \sin\theta,$$

θ étant l'angle des asymptotes.



Or $xy=m$, donc $y=\frac{m}{x}$, et par suite

$$S'_x = m\sin\theta\cdot\frac{1}{x}.$$

Remontons aux fonctions primitives, il vient

$$S = m\sin\theta\, lx + lc.$$

Si on convient de compter l'aire à partir de l'ordonnée AB, on devra avoir $S=0$ lorsqu'on suppose $x=a$; par conséquent

$$0 = m\sin\theta . la + lc, \text{ d'où } lc = -m\sin\theta\, la;$$

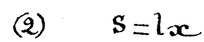
et enfin

$$(1) \qquad S = m\sin\theta\,(lx - la) = m\sin\theta\, l\frac{x}{a}.$$

Remarque I. On peut d'une infinité de manières satisfaire à la relation $m\sin\theta = 1$; pour les hyperboles remplissant cette condition on aura

$$S = l\frac{x}{a};$$

et si l'on suppose $a=1$, on aura enfin



$$(2) \qquad S = lx$$

De sorte que, OA étant égal à 1 et OP à x, le logarithme népérien de x a pour valeur la surface ABMP.

Remarque II. Nous ajouterons la remarque suivante:

$$(3) \quad \text{secteur OBM} = \text{segment ABMP}.$$

En effet, secteur OBM = BOA + segment ABMP − OMP;

mais $BOA = \frac{1}{2}\,OABB'$, $OMP = \frac{1}{2}\,OPMM'$

et nous avons vu que les parallélogrammes OABB', OPMM' avaient même surface, il en est de même des triangles BOA, OMP; il reste donc

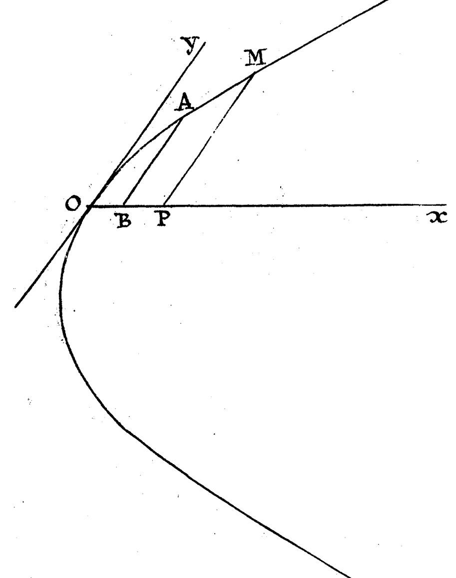
Surf. secteur OBM = surf. segment ABMP.

865. Appliquons encore les formules précédentes à la parabole.

Supposons la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité; soit θ leur angle. AB étant une ordonnée fixe et MP une ordonnée variable, évaluons l'aire du segment ABMP.

Si S est cette aire, on sait que

$$S'_x = y\sin\theta.$$



Mais $y^2 = 2px$, d'où $y = \sqrt{2px}$; par suite:

$$S'_x = \sqrt{2p} \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2p}\,\sin\theta .\ x^{\frac{1}{2}}.$$

Remontons aux fonctions primitives, nous avons

$$S = \sqrt{2p} \cdot \sin\theta\, x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + c$$

ou

$$S = \frac{2}{3} x \sin\theta \sqrt{2px} + c = \frac{2}{3} xy \sin\theta + c, \text{ car } y = \sqrt{2px}.$$

Or l'aire commençant à l'ordonnée AB, on doit avoir $S = 0$ lorsque $x = a$, $y = b$; par suite

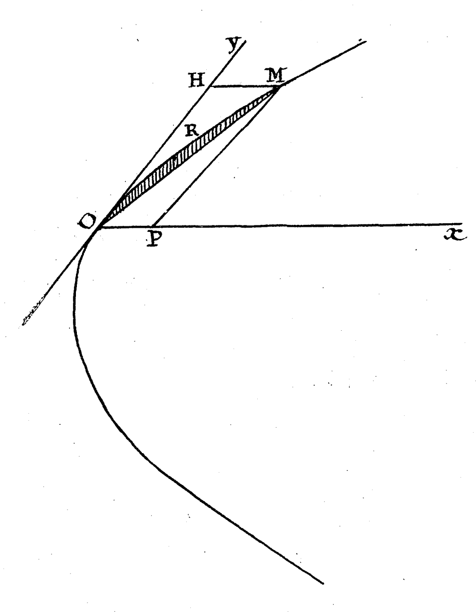
$$0 = \frac{2}{3} ab \sin\theta + c, \text{ ou } c = -\frac{2}{3} ab \sin\theta;$$

donc enfin

$$(1) \qquad S = \frac{2}{3} \sin\theta\,(xy - ab).$$

Si l'on commence à compter les aires à partir de la tangente, il faut supposer a et b nuls, il vient alors

$$(2) \qquad S = \frac{2}{3} xy \sin\theta.$$



Mais le parallélogramme OPMH a pour surface $xy\sin\theta$; nous voyons donc que l'aire d'un segment de parabole est les deux-tiers de la surface du parallélogramme construit sur l'ordonnée et l'abscisse de l'extrémité de l'arc, les axes de coordonnées étant la tangente et le diamètre à l'origine de l'arc.

Nous voyons encore que l'aire comprise entre un arc parabolique et sa corde est le sixième de l'aire du même parallélogramme. Car soit Σ cette aire, on a

$$\Sigma = \text{surf. ORMP} - \text{surf. OMP},$$

c. à d.

$$\Sigma = \frac{2}{3} xy \sin\theta - \frac{1}{2} xy \sin\theta$$

ou enfin

$$(3) \qquad \Sigma = \frac{1}{6} xy \sin\theta.$$

866. **Aire de l'ellipse.**

On a démontré N.º [808] que l'ellipse ayant pour axes a et b peut être considérée comme la projection d'un cercle ayant son centre au centre de l'ellipse, ayant pour diamètre le grand axe de cette courbe, et situé dans un plan faisant avec le plan de l'ellipse un angle α tel que l'on ait $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

L'aire de l'ellipse, étant la projection de celle du cercle, aura donc pour expression

$$(1) \qquad E = \pi a^2 . \cos\alpha = \pi ab.$$

Si l'équation de la courbe était de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

alors le produit a^2b^2 serait égal à $\frac{H^2 \sin^2\theta}{AC - B^2}$ N.º [580], θ étant l'angle des axes de coordonnées auxquels est rapportée l'ellipse; donc

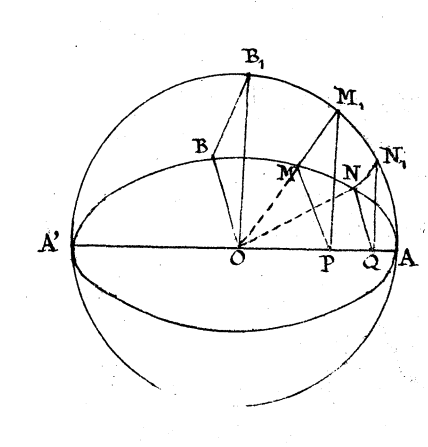
$$(2) \qquad E^2 = \frac{\pi^2 H^2 \sin^2\theta}{AC - B^2} = \frac{\pi^2 \Delta^2 \sin^2\theta}{(AC - B^2)^3}.$$

Si ox et oy étaient rectangulaires on aurait

$$(3) \qquad E^2 = \frac{\pi^2 H^2}{AC - B^2} = \frac{\pi^2 \Delta^2}{(AC - B^2)^3}.$$

867. **Aires du segment et du secteur elliptique.**

Si on projette le segment de cercle PM_1N_1Q sur le plan de l'ellipse, on obtient le segment elliptique PMNQ; et on a



(1) $PMNQ = PM_1N_1Q \cos\alpha = \frac{b}{a} PM_1N_1Q$.

Mais il est évident que le cercle ABA' n'est autre que le cercle homographique de l'ellipse, car il a même centre et même rayon ; on en conclut que :
Le rapport d'un segment elliptique à la surface du segment correspondant dans le cercle homographique est constant et égal à $\frac{b}{a}$.

On peut encore démontrer comme il suit cette proposition :
Désignons par S l'aire du segment elliptique et par Σ celle du segment correspondant dans le cercle homographique ; on a (N.° 862)

$$S'_x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad \Sigma'_x = \sqrt{a^2-x^2};$$

d'où l'on conclut

$$S'_x = \frac{b}{a}\Sigma'_x;$$

et, en remontant aux fonctions primitives :

$$S = \frac{b}{a}\Sigma + \text{Const.}$$

Or, si l'on compte ces deux segments à partir de la même ordonnée, la constante arbitraire doit être nulle ; donc

$$S = \frac{b}{a}\Sigma. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Si maintenant nous considérons le secteur MON, on a

secteur MON = segment MPQN + triangle OMP − triang. ONQ ;

ou

(2) secteur $MON = \frac{b}{a}$ [segment M_1PQN_1 + triangle OM_1P − triangle ON_1Q] $= \frac{b}{a}$ secteur OM_1N_1 ;

c.à.d. que le rapport de la surface d'un secteur elliptique MON au secteur correspondant M_1ON_1 dans le cercle homographique est constant et égal à $\frac{b}{a}$.

On déduit de là facilement le théorème suivant :
Le secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres quelconques est équivalent au secteur compris entre les deux demi-diamètres conjugués.

Soit MON un secteur, M_1ON_1 le secteur correspondant dans le cercle homographique ; on a

(1°) secteur $MON = \frac{b}{a}$ secteur M_1ON_1.

Si OM' et ON' sont les diamètres respectivement conjugués de OM et ON, et $M'_1ON'_1$ le secteur correspondant dans le cercle homographique, on aura encore

(2°) secteur $M'ON' = \frac{b}{a}$ secteur $M'_1ON'_1$.

Mais les paramètres angulaires des points M et N, M' et N', sont respectivement $\widehat{M_1OA}$ et $\widehat{N_1OA}$; $\widehat{M'_1OA}$ et $\widehat{N'_1OA}$; les diamètres étant conjugués, on a

$$\widehat{M'_1OA} = \widehat{M_1OA} + \frac{\pi}{2},$$
$$\widehat{N'_1OA} = \widehat{N_1OA} + \frac{\pi}{2};$$

d'où l'on conclut

$$\widehat{M'_1OA} - \widehat{N'_1OA} = \widehat{M_1OA} - \widehat{N_1OA}; \text{ ou angle } M_1ON_1 = \text{angle } M'_1ON'_1.$$

Les deux secteurs circulaires M_1ON_1 et $M'_1ON'_1$ ont donc même angle au centre ; ils sont par conséquent égaux ; donc les secteurs elliptiques MON et M'ON' sont équivalents.

§II. Triangles inscrits et circonscrits.

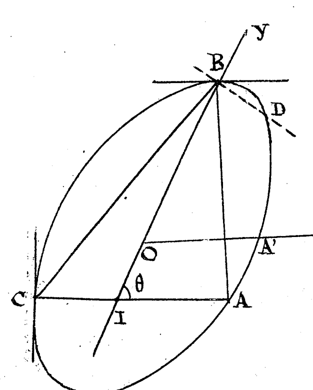
1°. Triangles inscrits. (Maximum).

868. Ellipse.

Déterminons les triangles de surface maximum inscrits dans une ellipse.

Pour qu'un triangle ABC, inscrit dans une ellipse, ait une surface maximum il faut et il suffit que le centre de gravité du triangle coïncide avec le centre de l'ellipse.

Nous allons d'abord démontrer que la tangente à l'ellipse en un quelconque des sommets du triangle opposé doit être parallèle au côté opposé.



Supposons en effet le côté AC fixe et menons par le point B une parallèle à AC; si cette droite coupe l'ellipse en un second point D, il est clair que tous les triangles qui auront pour base AC et pour sommet un point quelconque de l'arc d'ellipse, BD, auront une aire plus grande que celle du triangle ABC; donc, pour que le triangle ABC soit maximum, en supposant AC fixe, il faut que la droite BD, parallèle à AC, soit tangente en B à l'ellipse. Alors, si on joint OB, comme ce diamètre est conjugué de la direction de la tangente au point B, la droite OB passera par le milieu I du côté AC, puisque AC est parallèle à cette tangente; BO est donc une médiane du triangle ABC.

D'après un raisonnement semblable, on conclura que les tangentes en A et C doivent être parallèles à BC et AB, et, par suite, OA et OC sont les médianes correspondant à ces côtés. Ainsi le centre de gravité du triangle doit coïncider avec le centre de l'ellipse.

Nous allons démontrer que cette condition nécessaire est en même temps suffisante, en constatant que tous les triangles satisfaisant à cette condition ont une aire constante.

En effet, BIA est la moitié du triangle ABC, donc

$$\text{aire. } ABC = BI \cdot IA \cdot \sin\theta.$$

Pour calculer AI et BI, rapportons la courbe aux deux droites OB et OA', la seconde étant parallèle à AC; ces deux diamètres sont conjugués, et si l'on pose $OA' = a'$, $OB = b'$, l'équation de l'ellipse sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Si l'on remarque que le point O est le centre de gravité du triangle ABC, on en conclura

$$OI = \frac{b'}{2}, \text{ d'où } BI = \frac{3b'}{2}.$$

Nous obtiendrons AI en cherchant l'intersection de l'ellipse par la droite $y = -\frac{b'}{2}$; on trouve ainsi

$$x^2 = \frac{3}{4}a'^2, \quad \text{ou } IA = \frac{a'}{2}\sqrt{3}.$$

Nous aurons par conséquent,

$$(1) \qquad \text{aire. } ABC = \frac{3\sqrt{3}}{4} a'b' \sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab,$$

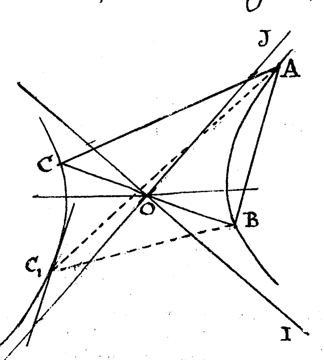
puisque a' et b' sont deux diamètres conjugués faisant l'angle θ.

Donc Tous les triangles inscrits dans une ellipse, et ayant pour centre de gravité le centre de l'ellipse, ont une aire constante; ce sont les triangles d'aire maximum.

Remarque. Un triangle inscrit dans une parabole, ou dans une même branche d'hyperbo

n'a ni maximum ni minimum ; car la surface d'un tel triangle peut évidemment varier d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini.

Lorsqu'un triangle, inscrit dans une hyperbole, a deux de ses sommets A et B sur une branche et le troisième sommet C sur la seconde branche, l'aire de ce triangle peut croître indéfiniment ; si l'on suppose le côté AB fixe, cette aire acquerra une valeur minimum, lorsque le sommet C se trouvera au point C_1 pour lequel la tangente est parallèle à AB ; et il existera toujours un point tel sur la seconde branche, puisque la droite AB rencontre les portions OI et OJ des asymptotes, et qu'une parallèle à cette droite menée par l'origine O se trouvera dans l'angle des asymptotes où n'est pas la courbe. D'ailleurs l'aire du triangle ABC_1 variera avec la position de la corde AB ; et, si cette corde se déplace parallèlement à elle-même, l'aire variera depuis zéro jusqu'à l'infini.



II°. Triangles circonscrits (Minimum).

869. Étudions les variations de l'aire d'un triangle circonscrit.

Laissons fixes deux des côtés AB et AC, et cherchons la position du 3ème côté BC pour que l'aire du triangle soit maximum ou minimum ; soit B'C' la corde de contact des deux côtés AC et AB, que nous prendrons pour axes de coordonnées ; l'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(1) \qquad 2Kxy = \left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1\right)^2,$$

les quantités m, n, K peuvent être regardées comme positives ; l'équation de la corde de contact B'C' est

$$(2) \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0.$$

L'équation (1) représentera

une ellipse, si $K < \frac{2}{mn}$,

une hyperbole, si $K > \frac{2}{mn}$,

une parabole, si $K = \frac{2}{mn}$.

L'équation d'une tangente quelconque à la courbe (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 ;$$

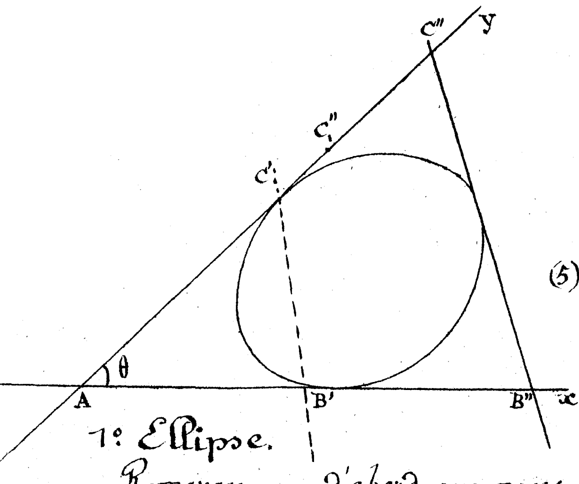
on exprimera qu'elle est tangente en remplaçant $\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1\right)$ par $\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)$ dans l'équation de la courbe, et en écrivant que l'équation résultante a deux racines égales ; ce qui donne

$$(3) \qquad \alpha\beta = \frac{2}{K} ;$$

et l'équation d'une tangente BC sera, en tenant compte de cette condition,

$$(4) \qquad x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\alpha}\right) + y\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\beta}\right) - 1 = 0.$$

Remarquons que, d'après la relation (3), les deux constantes α et β sont toutes de même signe, c. à d. toutes deux positives, ou toutes deux négatives.



Désignons par θ l'angle des deux tangentes fixes AB' et AC'; soient C'' et B'' les points où la tangente mobile (4) coupe Ay et Ax; on aura, d'après l'équation (4):

$$(5)\begin{cases} AB''=\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{\alpha}}=\dfrac{m\alpha}{\alpha-m}, \\ AC''=\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{\beta}}=\dfrac{n\beta}{\beta-n}. \end{cases}$$

1° Ellipse.

Remarquons d'abord que nous devons laisser de côté les cas où les points B'' et C'' seraient sur les prolongements de Ax ou de Ay; car, si le point B'', par exemple, est à gauche de A en B''_1, le point C'' se trouvera en C''_1 par exemple sur Ay. Or l'aire du triangle $AB''_1C''_1$ peut évidemment varier d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, en faisant mouvoir la tangente $B''_1C''_1$ depuis C'A jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle à AB'. Il n'y a donc pas lieu à rechercher les valeurs maximum ou minimum de ces triangles.

Les valeurs (5) étant alors les valeurs absolues des longueurs AC'' et BC'', l'aire du triangle AB''C'' sera

$$2\ A''B''C''=AC''.\ AB''\sin\theta=\frac{mn\alpha\beta\ \sin\theta}{(\alpha-m)(\beta-n)};$$

ou, d'après la relation (3)

$$(6)\qquad 2.\overline{(A''B''C'')}=\frac{\dfrac{2mn}{K}\ \sin\theta}{mn+\dfrac{2}{K}-(\alpha n+\beta m)},$$

On voit que la valeur de la surface (A''B''C'') ne dépend que des variations de la quantité $(\alpha n+\beta m)$.

1er Cas: α et β sont négatifs; alors, en mettant les signes en évidence, on a

$$AB''<AB',\ \text{car}\ \frac{m\alpha}{\alpha+m}<m,\ \text{ou}\ \alpha<\alpha+m;$$

$$\text{et}\quad AC''<AC',\ \text{car}\ \frac{n\beta}{\beta+n}<n,\ \text{ou}\ \beta<\beta+n;$$

c. à. d. que le point de contact de la tangente B''C'' se trouve sur l'arc de l'ellipse situé dans le triangle AB'C'.

L'expression de la surface AB''C'' est alors, en mettant les signes de α et β en évidence,

$$\frac{\dfrac{2mn}{K}}{mn+\dfrac{2}{K}+(\alpha n+\beta m)};$$

Or cette surface sera maximum lorsque la somme $(\alpha n+\beta m)$ sera minimum; et comme on a la relation

$$\alpha\beta=\frac{2}{K},\ \text{ou}\ \alpha n.\beta m=\frac{2mn}{K},$$

c. à. d. que le produit des deux termes αn et βm est constant et positif, la somme $(\alpha n+\beta m)$ sera minimum, et, par suite, l'aire du triangle A''B''C'' sera maximum, lorsqu'on aura

$$(7)\qquad \alpha n=\beta m=\sqrt{\frac{2mn}{K}}.$$

L'équation (4) de la tangente

$$x\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\alpha}\right)+y\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta}\right)-1=0,$$

devient alors, en remplaçant α et β par ces valeurs :

$$(8)\qquad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{Kmn}{2}}}\,;$$

c.à.d. que la tangente B″C″ doit être parallèle à la corde de contact B′C′ (2).

2ème Cas. α et β sont positifs ; on a alors

$$AB'' > AB', \quad car \frac{m\alpha}{\alpha-m} > m,$$

$$et \qquad AC'' > AC', \quad car \frac{n\beta}{\beta-n} > n;$$

le point de contact de la tangente B″C″ est sur l'arc de l'ellipse non situé dans le triangle AB′C′.

Le même raisonnement que ci-dessus nous montre que la somme $(\alpha n+\beta m)$ est minimum lorsque les relations (7) sont satisfaites, c.à.d. lorsque la tangente est parallèle à la corde de contact B′C′. L'aire (6) du triangle A″B″C″ est alors minimum.

Ainsi, dans le cas de l'ellipse, AB′ et AC′ étant deux tangentes fixes dont B′C′ est la corde de contact ; si l'on mène une troisième tangente B″C″, l'aire du triangle formé par ces trois tangentes ne pourra être maximum ou minimum, que si la tangente B″C″ est parallèle à la corde de contact B′C′. L'aire sera maximum, si le point de contact de la troisième tangente se trouve sur l'arc d'ellipse situé dans le triangle AB′C′, elle sera minimum, si le point de contact de la troisième tangente se trouve sur l'arc d'ellipse qui n'est pas dans le triangle AB′C′.

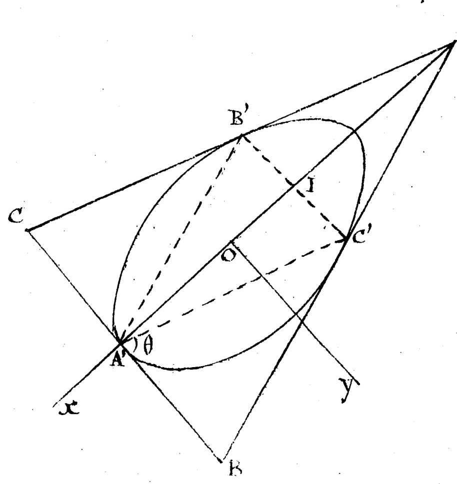
Lorsque l'ellipse est extérieure au triangle AB″C″, on peut faire varier la position du sommet A du triangle de manière à ce que l'aire du triangle AB″C″ varie d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini. Il ne nous reste donc à examiner que le cas où l'ellipse est intérieure au triangle circonscrit.

870. Pour qu'un triangle ABC circonscrit à une ellipse, et renfermant cette ellipse, ait une surface minimum, il faut et il suffit que son centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse.

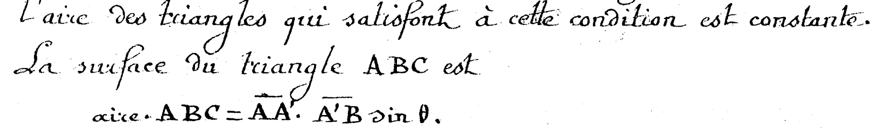
Il résulte, en effet, du théorème précédent, que le côté BC doit être parallèle à la corde de contact B′C′ des côtés AC et AB ; et de même pour les autres côtés.

Cela posé, si l'on joint OA, ce diamètre sera conjugué de la polaire B′C′ du point A, il passera donc par le point de contact A′ du côté BC, lequel est parallèle à B′C′ ; de plus A′ sera le milieu de BC, puisque I est le milieu de B′C′. Ainsi la droite OA est une médiane du triangle ABC ; il en sera de même des diamètres OB et OC ; donc le centre de gravité du triangle doit coïncider avec le centre de l'ellipse.

Nous allons démontrer que cette condition nécessaire est en même temps suffisante, en constatant que l'aire des triangles qui satisfont à cette condition est constante.



La surface du triangle ABC est



$$aire \cdot ABC = \overline{AA'}\cdot\overline{A'B}\sin\theta.$$

Désignons par a' le diamètre OA′, et par b' le diamètre conjugué de OA′ ; on a d'abord

$$AA' = 3\overline{OA'} = 3a'.$$

Pour calculer A′B, remarquons que

$$\frac{A'B}{IC'}=\frac{A'A}{IA}, \text{ ou } A'B = 3a'\cdot\frac{IC'}{IA}.$$

D'après la propriété de la polaire

$$OI.OA = a'^2, \text{ d'où } OI = \frac{a'^2}{2a'} = \frac{a'}{2}, \text{ et } IA = 2a' - \frac{a'}{2} = \frac{3a'}{2}.$$

L'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

donne, en y faisant $x = -\frac{a'}{2}$, $IC' = \frac{\sqrt{3}}{2} b'$; donc

$$A'B = 3a' \frac{\frac{b'}{2}\sqrt{3}}{\frac{3a'}{2}} = b'\sqrt{3}.$$

La surface du triangle ABC sera, par conséquent, égale à

$$(1) \qquad \text{aire } ABC = 3\sqrt{3}\, a'b' \sin\theta = 3\sqrt{3}\, ab,$$

puisque a' et b' sont deux diamètres conjugués dont l'angle est θ.

Les triangles circonscrits à l'ellipse, ayant pour centre de gravité le centre de l'ellipse, ont une surface constante.

Si l'on rapproche ce résultat de celui qui a été obtenu au N° [868] on voit que

L'aire du triangle minimum circonscrit est égale à quatre fois l'aire du triangle maximum inscrit.

Remarque. Dans le cas de la parabole, la courbe est toujours extérieure au triangle circonscrit, nous n'avons donc rien à ajouter à la première partie de la proposition énoncée à la fin du N° [869].

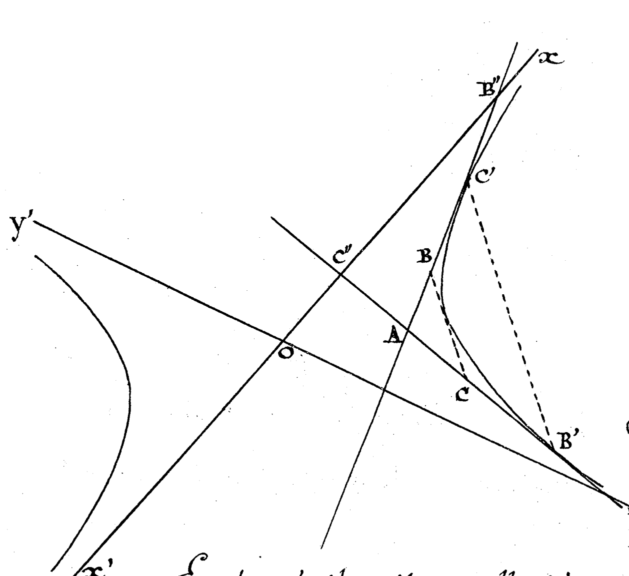
871. 2° Hyperbole.

Rappelons que les tangentes, menées d'un point situé dans l'angle des asymptotes où ne se trouve pas la courbe, touchent l'une et l'autre branche de l'hyperbole ; lorsque le point se trouve dans l'angle où est la courbe, les deux tangentes touchent la branche qui se trouve dans cet angle.

Ceci posé, soit A un point situé dans l'angle où n'est pas la courbe, et les deux tangentes fixes AB', AC', dont la corde de contact est B'C' ; faisons rouler une troisième tangente BC sur la courbe et étudions les variations du triangle circonscrit ABC. La tangente partant de B'A et roulant sur l'arc B'y', l'aire, d'abord nulle, croît jusqu'à ce que la tangente devienne parallèle à la droite AC', l'aire est alors infinie. Elle décroît ensuite, devient égale à AB''C'', lorsque la tangente se confond avec l'asymptote y'y. La tangente roulant maintenant sur l'arc yC', l'aire décroît toujours et devient nulle quand la tangente se confond avec C'A. La tangente roulant sur l'arc C'x, l'aire croît de nouveau, elle devient infinie lorsque la tangente est parallèle à AB'. L'aire décroît ensuite, devient égale à AB'''C''' quand la tangente se confond avec l'asymptote xx' ; la tangente roulant sur l'arc x'B', cette aire décroît toujours et devient nulle, lorsque la tangente se confond avec B'A.

On voit par cette discussion que si un des sommets d'un triangle circonscrit se trouve dans l'angle des asymptotes où n'est pas la courbe, il y aura un deuxième sommet situé dans le même angle ou dans l'angle opposé ; le troisième sommet sera toujours dans l'un des angles où se trouve la courbe. Nous constatons, en outre, que l'aire d'un tel triangle varie d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini ; il n'y a donc pas lieu à rechercher les valeurs maximums ou minimums.

Soit, en second lieu, un point A situé dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe, les deux tangentes AB', AC' toucheront la même branche de la courbe.



Imaginons une troisième tangente BC roulant sur la courbe et partant de la position B'A. Cette tangente roulant sur l'arc B'C', l'aire du triangle circonscrit ABC est d'abord nulle; elle croît, devient maximum quand la tangente mobile est parallèle à la corde de contact B'C' N.° (869); elle décroît ensuite et devient nulle lorsque la tangente mobile se confond avec AC'.

Les trois sommets du triangle circonscrit sont alors dans l'angle des asymptotes où est la courbe, et sont tous trois dans le même angle. La tangente roulant ensuite sur l'arc C'x, puis sur l'arc x'y', l'aire du triangle croît, devient infinie lorsque la tangente est parallèle à AC'; puis décroît toujours, jusqu'à ce que la tangente mobile, après avoir roulé sur l'arc yB', vienne coïncider avec BA.

En résumé, il suit de cette discussion que:

Dans le cas d'un triangle circonscrit à une hyperbole, si les trois tangentes ne touchent pas toutes trois la même branche: deux des sommets sont dans l'angle des asymptotes où ne se trouve pas la courbe, le troisième sommet est nécessairement dans l'un des angles où se trouve la courbe. Il n'y a alors ni maximum ni minimum.

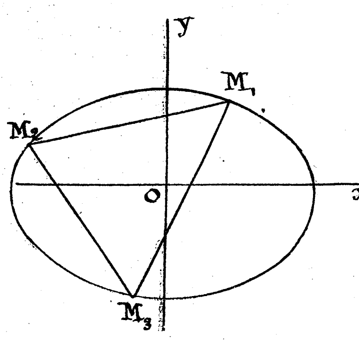
Lorsque les trois tangentes touchent une même branche de l'hyperbole, les trois sommets se trouvent dans l'angle où est cette branche; il y a alors un triangle d'aire maximum. Le maximum a lieu lorsque deux des côtés du triangle sont les asymptotes mêmes de la courbe; le troisième côté est une tangente quelconque.

III.° Expression de l'aire d'un triangle inscrit ou circonscrit à une ellipse.

892. Nous supposerons l'ellipse rapportée à ses axes

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, les paramètres angulaires des trois sommets M_1, M_2, M_3 d'un triangle inscrit dans cette ellipse; l'expression de l'aire S de ce triangle sera



$$2S=+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=+ab\begin{vmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1\\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1\\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1\end{vmatrix},$$

les points étant dans l'ordre indiqué sur la figure.

Nous allons d'abord transformer ce déterminant, on a

$$P=\begin{vmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1\\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1\\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1\end{vmatrix}=\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

Posons

$$\varphi_3-\varphi_2=A,\quad \varphi_1-\varphi_3=B,\quad \varphi_2-\varphi_1=C\,;$$

il vient

$$P=\sin A+\sin B+\sin C,\quad \text{et}\quad A+B+C=0.$$

Or, on a successivement:

$$\sin A+\sin B+\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin A+\sin B+\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right] = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right],$$

$$\sin A+\sin B+\sin C = -4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

On conclut de là

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1 \\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 4\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}.$$

On est ainsi conduit à cette première expression de la surface du triangle inscrit dans l'ellipse (1)

$$(I)\qquad S = +2ab\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}.$$

Remarque I. Désignons par a_1, a_2, a_3, les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 du triangle $M_1M_2M_3$; par a', a'', a''', les demi-diamètres parallèles à ces côtés; par c', c'', c''', les cordes focales respectivement parallèles à ces mêmes côtés.

D'après la formule (6) du N.° [803] on aura, en ayant égard à la position des points $M_1M_2M_3$ pour déterminer les signes des différences $\varphi_1-\varphi_2$, etc....:

$$(3)\qquad a_1 = 2a'\sin\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2},\; a_2 = 2a''\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2},\; a_3 = 2a'''\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}.$$

L'expression (I) se transforme alors en la suivante:

$$(II)\qquad S = \frac{ab}{4}\cdot\frac{a_1a_2a_3}{a'a''a'''}.$$

On a encore d'après la formule (3) du N.° [801]

$$(4)\qquad c' = \frac{2a'^2}{a},\; c'' = \frac{2a''^2}{a},\; c''' = \frac{2a'''^2}{a}.$$

L'expression (II) se transformera en la suivante:

$$(III)\qquad S^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{c'c''c'''}.$$

Remarque II. On peut encore déduire de ces formules l'expression du rayon R du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

On sait, en effet, que $S = \frac{a_1a_2a_3}{4R}$, ou $R = \frac{a_1a_2a_3}{4S}$; d'après cela, on conclura des formules (II), (III) les expressions suivantes:

$$(IV)\qquad R = \frac{a'a''a'''}{ab};$$

$$(V)\qquad R^2 = \frac{c'c''c'''}{8\frac{b^2}{a}}.$$

Ces diverses expressions ont été données par Mac-Cullagh.

873. Triangle circonscrit à l'ellipse.

Désignons encore par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, les paramètres angulaires des points de contact des trois côtés du triangle; les trois côtés du triangle auront pour équations

$$(5)\qquad \frac{x}{a}\cos\varphi_1+\frac{y}{b}\sin\varphi_1-1=0,\; \frac{x}{a}\cos\varphi_2+\frac{y}{b}\sin\varphi_2-1=0,\; \frac{x}{a}\cos\varphi_3+\frac{y}{b}\sin\varphi_3-1=0.$$

Si S_1 est la surface du triangle formé par ces trois droites, nous aurons d'après la formule du N.° (82):

$$2S_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\cos\varphi_1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b} & 1 \\ \frac{\cos\varphi_2}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b} & 1 \\ \frac{\cos\varphi_3}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b} & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \frac{\cos\varphi_1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b} \\ \frac{\cos\varphi_2}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\cos\varphi_2}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b} \\ \frac{\cos\varphi_3}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\cos\varphi_3}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b} \\ \frac{\cos\varphi_1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b} \end{vmatrix}}.$$

D'où l'on conclut, eu égard à la relation (2):

$$2S_1 = \frac{16\,ab \sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin^2\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)\sin(\varphi_2-\varphi_3)\sin(\varphi_3-\varphi_1)};$$

en remplaçant $\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ par $2\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$, etc..., on a, en définitive

$$\text{(VI)} \qquad S_1 = ab \operatorname{tang}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}.$$

Remarque I. Si l'on compare les formules (I) et (VI), on trouve

$$\text{(VII)} \qquad \frac{S}{S_1} = 2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2};$$

cette relation détermine le rapport de la surface S d'un triangle inscrit $M_1M_2M_3$ à la surface S_1 du triangle circonscrit formé par les tangentes aux sommets du triangle inscrit.

Remarque II. Si l'on désigne par A_1, A_2, A_3, les longueurs des côtés du triangle circonscrit; par A', A'', A''', les longueurs des diamètres qui passent par les points de contact M_1, M_2, M_3 de A_1, A_2, A_3, on a les relations suivantes que nous ne ferons qu'indiquer:

$$(6) \qquad A_1 = A'\frac{\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}},\quad A_2 = A''\frac{\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}},\quad A_3 = A'''\frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}};$$

on devra prendre les différences de manière à représenter les valeurs absolues des côtés.

On peut obtenir, à l'aide de ces formules, des expressions remarquables de la surface du triangle circonscrit.

IV.° Expression de l'aire d'un triangle inscrit ou circonscrit à l'hyperbole.

874. Nous supposerons l'hyperbole rapportée à ses axes

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, les paramètres angulaires des sommets M_1, M_2, M_3, d'un triangle inscrit dans l'hyperbole; de sorte que

$$(2) \qquad x_i = \frac{a}{\cos\varphi_i},\quad y_i = \frac{b\sin\varphi_i}{\cos\varphi_i};$$

l'expression de l'aire Σ de ce triangle sera

$$2\Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\cos\varphi_1} & \frac{b\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} & 1 \\ \frac{a}{\cos\varphi_2} & \frac{b\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} & 1 \\ \frac{a}{\cos\varphi_3} & \frac{b\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{ab}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \\ 1 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}$$

Si l'on a égard à la relation (2) du N° [872], on a définitivement

$$\text{(I)}\qquad \Sigma = 2ab\,\frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}.$$

Remarque I. Désignons par a_1, a_2, a_3 les côtés M_2M_3, M_3M_1, du triangle inscrit $M_1M_2M_3$; par a', a'', a''', les semi-diamètres parallèles à ces côtés ; par c', c'', c''' les cordes focales respectivement parallèles à ces mêmes côtés.

On a N° [804]

$$\text{(3)}\qquad a_1 = \frac{2a'\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{\sqrt{\cos\varphi_2\cos\varphi_3}},\ \text{ou}\ a_1 = \frac{2a'\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi_2\cos\varphi_3}},$$

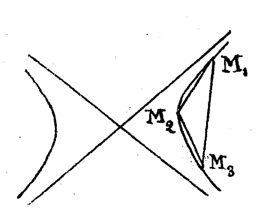
suivant que les deux sommets M_2, M_3 sont sur une même branche de l'hyperbole, ou sur des branches différentes. Dans le 1er cas, a' est la longueur réelle du diamètre imaginaire parallèle au côté M_2M_3 ou a_1 ; dans le second cas, a' est un diamètre réel. On aura des relations semblables pour les autres côtés.

Or un triangle étant inscrit dans une hyperbole, les deux hypothèses suivantes peuvent se présenter :

1° Les trois sommets sont sur une même branche :

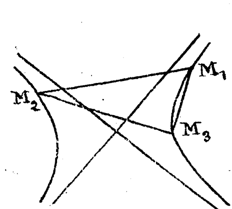
2° Deux des sommets sont sur une branche, le 3ème sommet est sur l'autre branche.

Dans la première hypothèse, les relations (3) donneront



$$a_1a_2a_3 = 8a'a''a'''\frac{\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3};$$

dans la seconde hypothèse, elles donneront



$$a_1a_2a_3 = 8a'a''a'''\frac{\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\sqrt{\cos\varphi_1\cos\varphi_3}\sqrt{-\cos\varphi_2\cos\varphi_3}}.$$

On aura donc dans tous les cas

$$\text{(II)}\qquad \Sigma = \frac{ab}{4}\cdot\frac{a_1a_2a_3}{a'a''a'''}.$$

Si l'on a égard à la formule (6) du N° [802], on aura encore

$$\text{(III)}\qquad \Sigma^2 = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a_1^2a_2^2a_2^3}{c'c''c'''}.$$

Remarque II. On peut aussi déduire de ces formules l'expression du rayon du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$; on trouve

$$\text{(IV)}\qquad R = \frac{a'a''a'''}{ab},$$

$$\text{(V)}\qquad R^2 = \frac{c'c''c'''}{8.\frac{b^2}{a}}.$$

875. Triangle circonscrit à l'hyperbole.

Désignons encore par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, les paramètres angulaires des points de contact des trois côtés du triangle circonscrit, les trois côtés de ce triangle auront pour équations

$$(4)\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi_1-\cos\varphi_1=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi_2-\cos\varphi_2=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi_3-\cos\varphi_3=0.$$

Si Σ_1 est la surface du triangle formé par ces trois droites, nous aurons d'après la formule du N° [82]:

$$2\Sigma_1=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b} & \cos\varphi_1\\ \frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b} & \cos\varphi_2\\ \frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b} & \cos\varphi_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b}\\ \frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_2}{b}\\ \frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_3}{b}\\ \frac{1}{a} & \frac{\sin\varphi_1}{b}\end{vmatrix}}.$$

D'où l'on conclut, eu égard à la relation (2) du N° [872]:

$$2\Sigma_1=\frac{16ab\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin^2\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)(\sin\varphi_3-\sin\varphi_2)(\sin\varphi_1-\sin\varphi_3)}.$$

Remplaçant les différences de sinus par des produits, on a en définitive

$$(\text{VI})\qquad \Sigma_1=ab\,\frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_3+\varphi_1}{2}}$$

Remarque. Si l'on compare les formules (I) et (VI), on trouve

$$(\text{VII})\qquad \frac{\Sigma}{\Sigma_1}=2\,\frac{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_3+\varphi_1}{2}}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3};$$

cette relation détermine le rapport de la surface Σ d'un triangle inscrit $M_1M_2M_3$ à la surface Σ_1 du triangle circonscrit formé par les tangentes aux sommets du triangle inscrit.

V. Expression de l'aire d'un triangle inscrit ou circonscrit à la parabole.

876. Nous supposerons la parabole rapportée à son axe

$$(1)\qquad y^2-2px=0.$$

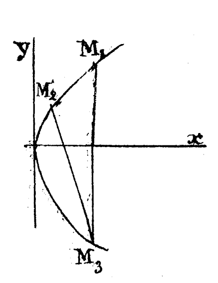
Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets d'un triangle $M_1M_2M_3$ inscrit dans la parabole, de sorte que

$$(2)\qquad y_i^2=2px_i.$$

L'expression de l'aire T de ce triangle sera

$$2T=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1 \\ \frac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1 \\ \frac{y_3^2}{2p} & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

Si l'on développe ce déterminant on trouve sans difficulté :



$$(I)\qquad T=-\frac{(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)}{4p}$$

Remarque I. Désignons par a_1, a_2, a_3, les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 du triangle $M_1M_2M_3$; par c', c'', c''', les cordes focales respectivement parallèles à ces côtés ; on a les relations

$$(3)\qquad (y_2-y_3)^2=\frac{2pa_1^2}{c'},\ (y_3-y_1)^2=\frac{2pa_2^2}{c''},\ (y_1-y_2)^2=\frac{2pa_3^2}{c'''}.$$

La démonstration de ces relations est facile ; soient x', x'', les extrémités de la corde focale c', on a

$$c'=\left(\frac{p}{2}+x'\right)+\left(\frac{p}{2}+x''\right)=p+(x'+x'').$$

L'équation de cette corde est d'ailleurs

$$y=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\left(x-\frac{p}{2}\right);$$

si l'on cherche son intersection avec la parabole (1), on trouve

$$x'+x''=p\left[1+2\frac{(x_2-x_3)^2}{(y_2-y_3)^2}\right];\ \text{or}\ a_1^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2,$$

de là il résulte

$$x'+x''=p\left[1+\frac{2a_1^2}{(y_2-y_3)^2}-2\right];$$

et par conséquent

$$c'=\frac{2pa_1^2}{(y_2-y_3)^2}.$$

En ayant égard aux relations (3), on trouve pour l'expression de la surface

$$(II)\qquad T^2=\frac{p}{2}\cdot\frac{a_1^2\,a_2^2\,a_3^2}{c'\,c''\,c'''}.$$

Remarque II. Nous déduirons de là l'expression du rayon du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ en se rappellant que $T=\frac{a_1a_2a_3}{4R}$; par conséquent

$$(III)\qquad R^2=\frac{c'c''c'''}{8p}.$$

876. **Triangle circonscrit à la parabole.**

Désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points de contact des côtés du triangle circonscrit à la parabole ; les équations de ces côtés seront

$$(4)\qquad -px+y_1y-px_1=0,\ -px+y_2y-px_2=0,\ -px+y_3y-px_3=0.$$

Si T_1 est la surface du triangle formé par ces trois droites, nous aurons d'après la formule du N° (82) :

$$2T_1 = \frac{\begin{vmatrix} p & y_1 & px_1 \\ p & y_2 & px_2 \\ p & y_3 & px_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} p & y_1 \\ p & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & y_2 \\ p & y_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & y_3 \\ p & y_1 \end{vmatrix}};$$

d'où l'on conclut, en remplaçant les x_i par leurs valeurs (2)

$$\text{(IV)} \qquad T_1 = \frac{-(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)}{8p}.$$

Remarque. Il résulte de la comparaison des formules (I) et (IV)

$$\text{(V)} \qquad T = 2T_1;$$

c. à d. que l'aire du triangle formé par trois tangentes à la parabole est la moitié de l'aire du triangle formé par leurs trois points de contact.

877. **Les trois hauteurs du triangle circonscrit à une parabole se coupent sur la directrice.**

Les équations des trois côtés du triangle, qui sont des tangentes à la parabole, pourront s'écrire :

$$(1) \qquad y = m_1 x + \frac{p}{2m_1}, \quad y = m_2 x + \frac{p}{2m_2}, \quad y = m_3 x + \frac{p}{2m_3}.$$

Cherchons l'équation de la hauteur correspondant au premier côté; cette droite, passant par l'intersection des deux autres tangentes, aura une équation de la forme

$$y - m_2 x - \frac{p}{2m_2} + \lambda\left(y - m_3 x - \frac{p}{2m_3}\right) = 0;$$

exprimons qu'elle est perpendiculaire au premier côté; on trouve

$$m_1 \cdot \frac{m_2 + \lambda m_3}{1+\lambda} + 1 = 0, \quad \text{d'où } \lambda = -\frac{1+m_1 m_2}{1+m_1 m_3}.$$

Remplaçons λ par cette valeur dans l'équation précédente, nous aurons pour l'équation de cette hauteur

$$\left(y - m_2 x - \frac{p}{2m_2}\right)(1+m_1 m_3) + \left(y - m_3 x - \frac{p}{2m_3}\right)(1+m_1 m_2) = 0.$$

Cherchons maintenant l'intersection de cette droite avec la directrice $x + \frac{p}{2} = 0$, c. à d. remplaçant x par $-\frac{p}{2}$, réduisons et supprimons le facteur $(m_2 - m_3)$, on trouve

$$(2) \qquad y_0 = \frac{p}{2m_1 m_2 m_3}(1 + m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1).$$

Cette valeur de y est symétrique par rapport aux quantités m_1, m_2, m_3; on obtiendra donc la même expression en appliquant le même calcul aux deux autres hauteurs; le point de concours des hauteurs est donc sur la directrice.

878. **Le cercle circonscrit au triangle, formé par trois tangentes à la parabole, passe par le foyer.**

En effet, si du foyer F on abaisse des perpendiculaires sur les trois tangentes, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite, puisqu'ils se trouvent sur la tangente au sommet de la parabole; donc le point F est sur le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes. N.º [261].

La propriété énoncée peut se constater sans difficulté par un calcul direct.

Chapitre VI

Intersection des courbes du second degré. Tangentes communes.

§I. Courbes du second ordre. Cordes communes

1°. Détermination des cordes communes à deux coniques.

879. Soient les équations des deux coniques

$$(1) \qquad S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(2) \qquad S_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Les coordonnées des points communs à ces deux courbes seront les valeurs de x et y, solutions communes à ces deux équations; la recherche numérique de ces valeurs pourra se ramener, par l'élimination de x ou de y, à la résolution d'une équation du 4ème degré.

Une seconde méthode, importante surtout au point de vue géométrique, consiste à chercher les systèmes de droites passant par les points communs aux deux courbes ou les couples de cordes communes; la question se réduira alors soit à déterminer les points de rencontre d'une des coniques avec un système de cordes communes, soit les points de rencontre de deux systèmes de cordes communes.

L'équation générale des courbes du second ordre passant par les points communs aux deux courbes (1) et (2) est No. [912]

$$(3) \qquad \Sigma = S + \lambda S_1 = 0,$$

ou

$$(3\ bis) \qquad \Sigma = (A+\lambda A_1)x^2 + 2(B+\lambda B_1)xy + (C+\lambda C_1)y^2 + 2(D+\lambda D_1)x + 2(E+\lambda E_1)y + (F+\lambda F_1) = 0,$$

ou

$$(3\ ter) \qquad \Sigma = a x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0;$$

λ étant une constante arbitraire.

Exprimons que la conique Σ se réduit à un système de deux droites, nous aurons alors les couples de cordes communes aux courbes S et S_1.

Or, pour que l'équation (3) représente un système de deux droites, il faut que

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A+\lambda A_1 & B+\lambda B_1 & D+\lambda D_1 \\ B+\lambda B_1 & C+\lambda C_1 & E+\lambda E_1 \\ D+\lambda D_1 & E+\lambda E_1 & F+\lambda F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée sera

$$(4\ bis) \qquad \Delta_1 \lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + \Delta = 0,$$

Δ_1 et Δ étant respectivement les discriminants des fonctions S et S_1.

L'équation (4) est du troisième degré par rapport à λ. En remplaçant λ par une des racines de l'équation (4), l'équation $\Sigma = 0$ ou (3) représentera un système de deux droites passant par les quatre points communs aux deux coniques. Nous concluons de là que

Par les quatre points communs à deux coniques passent trois couples de cordes communes,

ou autrement, par quatre points donnés, on peut faire trois coniques évanouissantes.

Nous ajouterons que

Parmi les trois systèmes de cordes communes, il y a toujours un système réel.

Soient, en effet, A, B, C, D, les quatre points d'intersection; les coefficients des équations $S=0$, $S_1=0$ étant supposés réels, les quatre points d'intersection seront: ou tous les quatre réels; ou, deux seront réels et les deux autres imaginaires conjugués; ou, les quatre seront imaginaires et par couples conjugués. Ces conséquences résultent de la discussion de deux équations à deux inconnues.

Si les quatre points sont réels, les trois systèmes de cordes communes (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), sont évidemment réels.

Si les deux points A et B sont réels, et les deux autres C et D imaginaires; la droite AB sera réelle, ainsi que la droite CD qui passe par deux points imaginaires conjugués; le couple (AB, CD) est donc réel. Mais la droite qui joint un point réel A à un point imaginaire C est imaginaire; car elle ne pourrait être réelle que si le point imaginaire conjugué de C se trouvait sur cette droite; les trois points A, C, D, seraient donc en ligne droite, ce qui ne peut avoir lieu, puisque ces trois points sont sur une conique. Les deux autres systèmes de cordes communes sont donc imaginaires.

Enfin, si les quatre points sont imaginaires, soit B le conjugué de A, et D le conjugué de C; les deux droites AB et CD seront réelles; il y a donc un système de cordes communes réelles; les deux autres seront encore imaginaires.

Remarque. Avant de faire la discussion de l'équation en λ remarquons qu'à une valeur imaginaire de λ correspond nécessairement un système imaginaire de cordes communes; car, soit $\lambda = p + q\sqrt{-1}$; si l'équation

$$S + \lambda S_1 = 0, \text{ ou } S + pS_1 + q\sqrt{-1}\ S_1 = 0,$$

représentait des droites réelles, les coordonnées des points réels situés sur ces droites devant vérifier l'équation ci-dessus, on aurait à la fois

$$S=0,\ S_1=0,$$

et cela pour une infinité de points réels; les deux équations données représenteraient alors le même système de droites; l'équation en λ se réduirait à une identité. Ainsi à une valeur imaginaire de λ correspond nécessairement un système imaginaire de cordes communes.

Les systèmes réels ne peuvent être donnés que par des valeurs réelles de λ; mais à une valeur réelle de λ ne correspond pas toujours un système réel de cordes communes, car il peut arriver, que, pour une valeur réelle de λ, l'équation

$$\Sigma = S + \lambda S_1 = 0,$$

représente deux droites imaginaires. Pour que le système de sécantes soit réel, il faut que la courbe Σ soit du genre hyperbole, c.à.d. que la valeur de λ satisfasse à l'inégalité

$$(5)\qquad (B+\lambda B_1)^2 - (A+\lambda A_1)(C+\lambda C_1) > 0.$$

Remarque. Le problème de la recherche des points qui ont même polaire par rapport à deux courbes données du second ordre, revient à la recherche des systèmes de cordes communes.

En effet, nous exprimerons que la courbe

$$(6)\qquad \Sigma = S + \lambda S_1 = 0,$$

se réduit à un système de deux droites, en écrivant que le centre se trouve sur la courbe, ce qui donne

$$(7)\qquad S'_x + \lambda S'_{1x} = 0,\ S'_y + \lambda S'_{1y} = 0,\ S'_z + \lambda S'_{1z} = 0.$$

Si l'on élimine x, y, z, entre les équations (7) on obtiendra, d'après ce qui vient d'être dit une équation du troisième degré en λ. Les coordonnées du centre de chacune des trois coniques évanouissantes seront alors déterminées par deux des équations (7), ou, si l'on veut, par les relations suivantes

$$(8)\qquad \frac{S'_x}{S'_{1x}}=\frac{S'_y}{S'_{1y}}=\frac{S'_z}{S'_{1z}}.$$

D'un autre côté, les équations des polaires d'un point x, y, z, par rapport à chacune des coniques S et S_1 sont

$$\xi\, S'_x+\eta\, S'_y+S'_z=0,$$

$$\xi\, S'_{1x}+\eta\, S'_{1y}+S'_{1z}=0,$$

ξ, η, étant les coordonnées courantes. Pour que ces polaires coïncident, il faut et il suffit que

$$\frac{S'_x}{S'_{1x}}=\frac{S'_y}{S'_{1y}}=\frac{S'_z}{S'_{1z}};$$

on retrouve ainsi les équations (8). Donc

Il y a, en général, trois points qui ont même polaire par rapport à deux coniques données S et S_1; ces trois points sont les points de concours ou centres des systèmes de cordes communes aux deux coniques.

Ajoutons encore que:

La polaire d'un quelconque de ces trois points passe par les deux autres.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) les coordonnées de ces trois points M_1, M_2, M_3, ces valeurs correspondant aux trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de l'équation en λ.

On a les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} S'_{x_1}=-\lambda_1 S'_{1x_1},\\ S'_{y_1}=-\lambda_1 S'_{1y_1},\\ S'_{z_1}=-\lambda_1 S'_{1z_1}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} S'_{x_2}=-\lambda_2 S'_{1x_2},\\ S'_{y_2}=-\lambda_2 S'_{1y_2},\\ S'_{z_2}=-\lambda_2 S'_{1z_2}. \end{array}\right.$$

Multiplions les trois premières égalités par x_2, y_2, z_2, les trois autres par x_1, y_1, z_1, et ajoutons, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 S'_{x_1}+y_2 S'_{y_1}+z_2 S'_{z_1}=-\lambda_1\left[x_2 S'_{1x_1}+y_2 S'_{1y_1}+z_2 S'_{1z_1}\right]\\ x_1 S'_{x_2}+y_1 S'_{y_2}+z_1 S'_{z_2}=-\lambda_2\left[x_1 S'_{1x_2}+y_1 S'_{1y_2}+z_1 S'_{1z_2}\right]; \end{array}\right.$$

or si l'on remarque que, pour une fonction f du second degré, on a identiquement

$$x_1 f'_{x_2}+y_1 f'_{y_2}+z_1 f'_{z_2}=x_2 f'_{x_1}+y_2 f'_{y_1}+z_2 f'_{z_1};$$

et qu'on retranche membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve

$$(9)\qquad x_1 S'_{x_2}+y_1 S'_{y_2}+z_1 S'_{z_2}=0;$$

on aura de même

$$(9\ bis)\qquad x_1 S'_{x_3}+y_1 S'_{y_3}+z_1 S'_{z_3}=0.$$

Mais les égalités (9) et (9 bis) expriment que la polaire

$$x_1 S'_x+y_1 S'_y+z_1 S'_z=0,$$

du point (x_1, y_1, z_1), par rapport à la conique S, passe par les points (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). C. Q. F. D.

II° Discussion de l'équation en λ. (Première méthode.)

880. L'équation en λ:

$$\Delta_1 \lambda^3+M\lambda^2+N\lambda+\Delta=0,$$

est du troisième degré; les cas suivants peuvent se présenter:

1° Les trois racines sont réelles;
2° Une seule racine est réelle;
3° Deux racines sont égales;
4° Les trois racines sont égales;
5° Une racine est nulle ou infinie;
6° Deux racines sont nulles ou infinies;
7° Les trois racines sont nulles ou infinies.

1° Les trois racines sont réelles.

Alors il arrivera que les trois systèmes de cordes communes sont réels, ou qu'un seul est réel. Dans le premier cas, les quatre points d'intersection seront réels, puisqu'ils sont les intersections de droites réelles. Dans le second cas, les quatre points d'intersection sont imaginaires. En effet, les points de concours ou centres des systèmes de sécantes sont donnés par les équations

$$ax+by+d=0,\quad bx+cy+e=0;$$

ces équations sont à coefficients réels puisque les valeurs de λ sont réelles; donc les centres des systèmes de sécantes sont réels. Il résulte de là qu'il n'y a pas deux points réels A et B communs aux deux coniques; car les sécantes imaginaires passeraient par un de ces points qui est réel et par leur centre I qui est également réel; ces sécantes seraient alors réelles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

D'ailleurs les quatre points d'intersection des coniques ne sauraient être réels, puisqu'alors les trois systèmes de sécantes seraient évidemment réels. Donc

Lorsque l'équation en λ a ses trois racines réelles, les quatre points d'intersection des deux coniques sont tous quatre réels, ou tous quatre imaginaires.

II° L'équation en λ a une seule racine réelle.

D'après la remarque faite au numéro précédent, il y a un système de cordes communes réel et un seul; par suite, les quatre points d'intersection ne peuvent pas être tous quatre réels. Lorsque nous remplacerons λ par une des valeurs imaginaires, l'équation (3) se présentera sous la forme

$$(M+N\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1})=0,$$

M, N, P, Q étant des fonctions linéaires à coefficients réels; mais la seconde valeur imaginaire de λ est conjuguée de la première; le système de sécantes correspondant sera donc

$$(M-N\sqrt{-1})(P-Q\sqrt{-1})=0.$$

Les points d'intersection des coniques seront donnés par les intersections des droites du premier système avec celles du second; ces quatre points seront

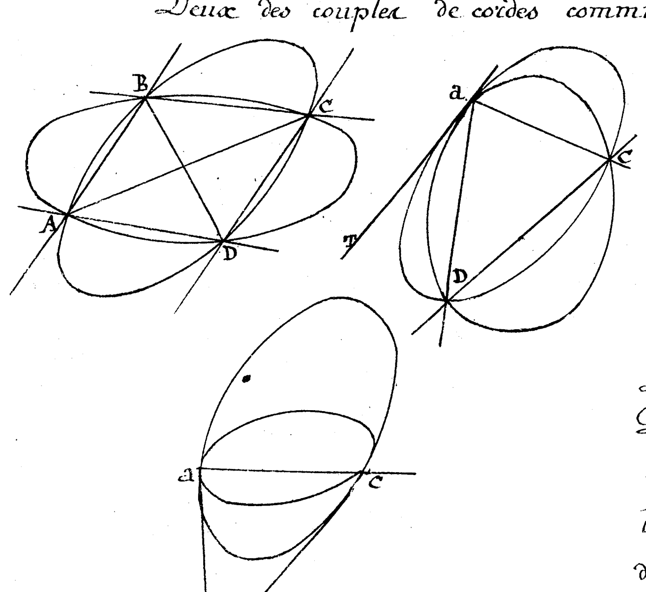
$$\begin{cases} M+N\sqrt{-1}=0, \\ M-N\sqrt{-1}=0; \end{cases} \quad \begin{cases} M+N\sqrt{-1}=0, \\ P-Q\sqrt{-1}=0; \end{cases} \quad \begin{cases} P+Q\sqrt{-1}=0, \\ M-N\sqrt{-1}=0; \end{cases} \quad \begin{cases} P+Q\sqrt{-1}=0, \\ P-Q\sqrt{-1}=0; \end{cases}$$

or le 1er et le 4ème sont évidemment réels. Donc

Lorsque l'équation en λ n'a qu'une seule racine réelle, les coniques se coupent en deux points réels et en deux points imaginaires.

III° L'équation en λ a deux racines égales.

Deux des couples de cordes communes doivent alors coïncider. Or ceci peut arriver en supposant que deux des points d'intersection viennent se confondre, A et B par exemple; alors la droite AB est devenue tangente en a; les deux couples de sécantes (AD, BC), (AC, BD), sont venus se confondre en un seul couple (aD, aC) lequel correspond à la racine double; le couple (AB, CD) est devenu le système (aT, CD) formé par la tangente commune et la droite qui passe par les deux autres points d'intersection; ce système correspond à la racine simple. Les deux coniques sont alors simplement tangentes.



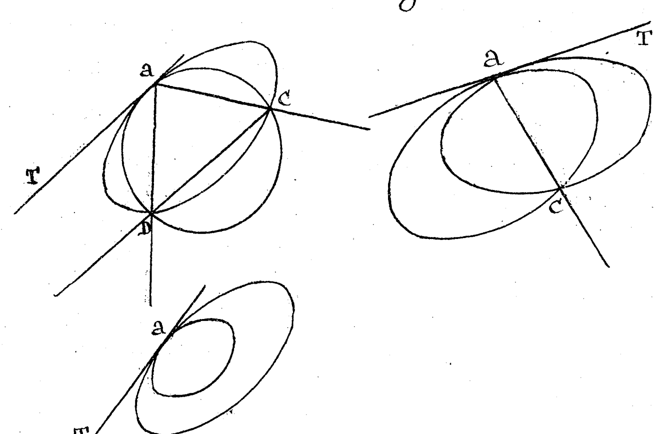
Plus particulièrement, il peut arriver que les deux points C et D viennent aussi se confondre; alors les deux droites, formant le couple double qui correspond à la racine double, viennent se réunir en une seule droite ac; les deux droites AB et CD du premier système sont devenues

tangentes; les deux coniques sont doublement tangentes.

Ainsi, lorsque l'équation en λ a deux racines égales, les coniques sont tangentes ou doublement tangentes, suivant que le système de cordes communes correspondant à la racine double se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes ?

IV° L'équation en λ a ses trois racines égales.

Alors les trois systèmes de cordes communes n'en forment plus qu'un seul, c.à.d. que les deux couples (aT, DC) et (aC, aD) sont venus se confondre. Ce qui arrivera en supposant que l'un des points D ou C vient se réunir au point a; les trois couples viennent se confondre dans le couple unique (aT, aC). Le point a est la réunion de trois points communs aux deux courbes; les deux coniques sont tangentes en ce point et se traversent; on dit alors qu'elles sont osculatrices ou qu'elles ont un contact du second ordre.

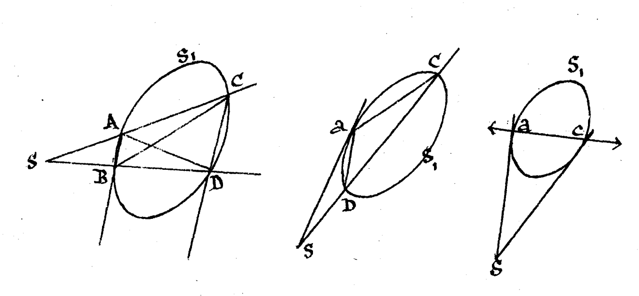


Plus particulièrement, il peut arriver que les deux points C et D viennent se confondre avec le point a; alors la corde aC se confond avec la tangente aT; les deux coniques ont quatre points communs réunis en a, elles ont un contact du 3ème ordre. Ainsi

Lorsque l'équation en λ a ses trois racines égales, les coniques sont osculatrices; elles ont un contact du second ordre ou du troisième ordre, suivant que le système de cordes communes correspondant à la racine triple se compose de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.

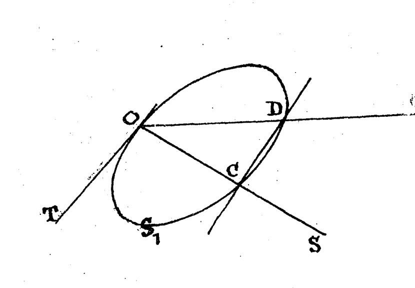
V° L'équation en λ a une racine nulle (ou infinie).

Dans ce cas, Δ est nul (équation 4 Bis); la conique S est alors un système de deux droites; ce système fait partie des trois systèmes de cordes communes. On voit, en effet, que pour $\lambda = 0$, l'équation $S + \lambda S_1 = 0$ devient $S = 0$. Lorsque les deux autres racines, supposées différentes de zéro, seront égales, la conique S sera tangente ou doublement tangente à la conique S_1, suivant que le couple de sécantes correspondant à la racine double se composera de deux droites distinctes ou de deux droites coïncidentes.



VI° L'équation en λ a deux racines nulles (ou infinies).

La conique S est encore un système de deux droites; un des couples de cordes communes (AD, BC) par exemple doit venir se confondre avec la conique S ou le système (AC, BD), c.à.d. que la conique S_1 passe par le point de concours O des deux droites qui forment le système (S), lequel forme un système double correspondant à la racine double 0: La droite AB devient alors tangente; de sorte que le couple de cordes communes correspondant à la racine simple, supposée différente de zéro, est formé par la tangente en O à la conique S_1 et par la corde CD passant par les deux autres points d'intersection de la conique S_1 avec le système S.



Ce résultat est d'accord avec celui que nous a fourni le 3ème cas; les deux coniques S et S_1 sont tangentes; car le point O est un point double pour la conique S, par conséquent, la conique S_1 rencontre la conique S en deux points confondus avec le point O.

VII° L'équation en λ a trois racines nulles (ou infinies).

Il faut alors que les deux systèmes de sécantes (OT, CD) et (OC, OD) viennent se confondre,

les points O, C, D, restant toujours sur la conique S_1; ce qui exige que OC, par exemple, vienne coïncider avec OT; dans ce cas, le point de concours O des droites du système S se trouve sur la conique S_1, et l'une de ces droites est tangente à la conique S_1. Ce résultat est aussi d'accord avec celui que nous a fourni la discussion du 1ème cas; car le point O est un point double pour la conique S, de plus, la tangente OT a deux points communs avec la conique S_1; la conique S_1 rencontre donc la conique S en trois points coïncidant avec le point O; deux de ces points sont sur la direction OT.

III°. Discussion de l'équation en λ (Seconde méthode).

881. Nous allons reprendre la même discussion par le calcul.

On a démontré qu'il y a toujours un système réel de cordes communes; nous prendrons ces deux droites pour axes de coordonnées.

Remarquons d'abord que les racines de l'équation en λ ne changent pas lorsqu'on rapporte les courbes à de nouveaux axes de coordonnées.

Soient en effet: les formules de transformation

$$(1°)\quad \begin{cases} x = \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2, \\ y = \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2, \end{cases}$$

et les équations des deux coniques

$$S = F(x, y, z) = 0, \quad S_1 = F_1(x, y, z) = 0.$$

Par les formules (1°) les fonctions $F(x, y, z)$, $F_1(x, y, z)$ se changeront par exemple, en $f(x', y', z')$ et $f_1(x', y', z')$; de sorte que, eu égard aux relations (1°), on aura identiquement

$$(2°)\quad F(x, y, z) = f(x', y', z'); \quad F_1(x, y, z) = f_1(x', y', z').$$

Ceci posé, la fonction $(F + \lambda F_1)$ se changera identiquement en $f + \lambda f_1$; on aura encore, en ayant toujours égard aux relations (1°), l'identité

$$(3°)\quad F(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) = f(x', y', z') + \lambda f_1(x', y', z');$$

la valeur de λ n'est évidemment pas altérée, puisque les formules (1°) de transformation ne renferment pas cette constante.

D'après cela, si $(F + \lambda F_1)$ devient, pour une certaine valeur de λ, le produit de deux fonctions linéaires, la fonction $(f + \lambda f_1)$ deviendra également, pour cette même valeur de λ, le produit de deux fonctions linéaires; et inversement. Donc toutes les valeurs de λ, qui réduiront la conique $F + \lambda F_1 = 0$ à un système de deux droites, réduiront aussi à un système de droites la conique $f + \lambda f_1 = 0$; d'ailleurs ces systèmes de droites sont les cordes communes aux deux coniques proposées, et ne dépendent pas de la position des axes. Par conséquent, quels que soient les axes auxquels on rapporte les deux coniques, l'équation en λ aura toujours les mêmes racines.

Ceci posé, soient les équations des deux coniques:

$$(1)\quad S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(2)\quad S_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Ces deux courbes se coupant aux mêmes points sur l'axe Ox, les deux équations

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0, \quad A_1x^2 + 2D_1x + F_1 = 0,$$

qui donnent les abscisses des points d'intersection de ces courbes avec Ox, devront avoir les mêmes racines; ce qui exige que l'on ait

$$(3)\quad \frac{A}{A_1} = \frac{D}{D_1} = \frac{F}{F_1}.$$

On aura de même, en exprimant que les deux courbes S et S_1 se coupent aux mêmes points sur Oy:

$$(4)\qquad \frac{C}{C_1}=\frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1}.$$

L'équation de la conique S_1 pourra alors s'écrire

$$(5)\qquad S_1=Ax^2+2B'xy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Les points communs aux deux coniques (1) et (5) et situés sur Ox, seront donnés par l'équation

$$(6)\qquad Ax^2+2Dx+F=0;$$

et les points communs situés sur Oy seront donnés par l'équation

$$(7)\qquad Cy^2+2Ex+F=0.$$

Ceci admis, l'équation en λ devient, dans le cas actuel:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} A(1+\lambda) & B+\lambda B' & D(1+\lambda) \\ B+\lambda B' & C(1+\lambda) & E(1+\lambda) \\ D(1+\lambda) & E(1+\lambda) & F(1+\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est divisible par $(\lambda+1)$; la solution, $\lambda=-1$, donne le système de cordes communes (Ox, Oy); on trouve, en effet, en retranchant les équations (1) et (5) membre à membre

$$xy=0.$$

Si l'on supprime le facteur $(\lambda+1)$, il reste une équation du second degré en λ, laquelle ne dépend plus d'ailleurs que du rapport $\frac{B+\lambda B'}{\lambda+1}$. Posons donc

$$(9)\qquad \mu=\frac{B+\lambda B'}{\lambda+1},$$

l'équation (8) devient

$$\begin{vmatrix} A & \mu & D \\ \mu & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant:

$$(10)\qquad F\mu^2-2DE.\mu+AE^2+CD^2-ACF=0.$$

Ces préliminaires étant posés, la discussion ne présente aucune difficulté.

1°. *L'équation en λ a ses trois racines réelles.*

Il est évident qu'à une valeur réelle de μ correspond une valeur réelle de λ et inversement, puisque l'équation (9) ne renferme λ et μ qu'au premier degré. Donc si l'équation en λ a ses trois racines réelles, l'équation en μ devra avoir ses deux racines réelles; la réciproque est vraie, puisque nous avons déjà trouvé la valeur réelle $\lambda=-1$.

Or, pour que l'équation (10) ait ses racines réelles, il faut que

$$D^2E^2-F(AE^2+CD^2-ACF)>0;$$

cette inégalité peut s'écrire

$$(11)\qquad (D^2-AF)(E^2-CF)>0.$$

Cette inégalité sera vérifiée, soit en supposant

$$D^2-AF>0 \text{ et } E^2-CF>0;$$

soit, en supposant

$$D^2-AF<0 \text{ et } E^2-CF<0.$$

Dans le premier cas, les équations (6) et (7) ont leurs racines réelles; par suite, les coniques S et S_1 se coupent en quatre points réels. Dans le deuxième cas, les équations (6) et (7) ont leurs racines imaginaires, les coniques se coupent donc en quatre points imaginaires. Donc

Lorsque l'équation en λ a ses trois racines réelles, les quatre points d'intersection des

deux coniques sont tous quatre réels ou tous quatre imaginaires.

II°. L'équation en λ a une seule racine réelle.

Alors l'équation (10) a ses racines imaginaires, et réciproquement; donc

$$(12)\qquad (D^2-AF)(E^2-CF)<0.$$

Les facteurs (D^2-AF) et (E^2-CF) étant de signes contraires, une des équations (6) ou (7) aura ses racines imaginaires; et l'autre, ses racines réelles. Ainsi

Lorsque l'équation en λ n'a qu'une racine réelle, les coniques se coupent en deux points réels et en deux points imaginaires.

III°. L'équation en λ a deux racines égales.

Si la racine $\lambda=-1$ est la racine simple, l'équation (10) devra avoir ses deux racines égales, c.à.d. que

$$(13)\qquad (D^2-AF)(E^2-CF)=0.$$

Cette condition sera remplie si l'un des facteurs est nul; les coniques sont alors tangentes, puisque l'une des équations (6) ou (7) a ses deux racines égales. Les deux facteurs peuvent être nuls à la fois, les deux coniques sont alors doublement tangentes.

Si $\lambda=-1$ est la racine double, une des valeurs de μ (9) doit être infinie; on aura donc $F=0$; les deux coniques sont tangentes à l'origine à la droite $Dx+Ey=0$. Le cas du double contact ne peut pas se présenter dans cette hypothèse, car les deux axes de coordonnées Ox et Oy devraient se confondre.

IV°. L'équation en λ a ses trois racines réelles.

Comme une des racines est égale à -1, les trois racines doivent être égales à -1, c.à.d. que les deux valeurs de μ (9) doivent être infinies; on aura donc les conditions

$$F=0,\quad DE=0.$$

Les deux coniques ont alors un contact du second ordre, elles sont osculatrices; la tangente commune est l'axe des x ou l'axe des y.

V°. L'équation en λ a une ou plusieurs racines nulles ou infinies.

Dans ce cas, l'une des coniques se réduit à deux droites; la discussion se fera facilement en prenant ces deux droites pour axes de coordonnées; de sorte que les équations des deux coniques seront

$$(14)\qquad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\\ xy=0.\end{cases}$$

L'équation de la conique passant par leurs points communs sera

$$(15)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F+\lambda xy=0;$$

et nous aurons pour l'équation en λ

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} A & B+\lambda & D\\ B+\lambda & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=0,\quad F\lambda^2+2(BF-ED)\lambda+\Delta=0.$$

L'équation en λ avait une racine infinie qui se trouve supprimée. La discussion ne présente aucune difficulté, et on retrouvera pour ce calcul les cas particuliers signalés à la fin de la discussion précédente.

882. **Remarque.** L'analyse qu'on vient de présenter suppose que le système réel de cordes communes n'est pas formé de deux droites parallèles; cependant les résultats obtenus étant vrais quelqu'éloigné que soit le point de rencontre des deux droites Ox et Oy, on peut admettre qu'ils subsistent encore lorsque ces deux droites deviennent parallèles.

D'ailleurs, si les quatre points communs aux deux coniques sont situés sur deux droites parallèles AB et CD, on peut prendre pour axe des x une parallèle à ces deux droites et également distante. Soient A et B les deux points (réels ou imaginaires conjugués) situés sur la première droite, C et D les deux points (réels ou imaginaires conjugués) situés sur la seconde droite; soient, en outre, G et H les points milieux (toujours réels) des deux segments AB et CD; nous prendrons cette droite GH pour axe des y.

L'axe des y sera un diamètre commun aux deux coniques et divisant en deux parties égales les cordes parallèles à Ox. Les équations des deux coniques ne contiendront alors que des puissances paires de x et seront de la forme:

$$S = Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + F = 0,$$
$$S_1 = A_1x^2 + C_1y^2 + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Désignons par h les longueurs égales OH et OG; si l'on fait $y = h$ on a deux équations en x,

$$Ax^2 + Ch^2 + 2Eh + F = 0,$$
$$A_1x^2 + C_1h^2 + 2E_1h + F_1 = 0,$$

qui doivent avoir les mêmes racines; on a donc la condition

$$(C_1A - A_1C)h^2 + (E_1A - A_1E)h + (F_1A - A_1F) = 0.$$

Cette relation doit encore avoir lieu lorsqu'on y remplace h par $-h$, d'où

$$(C_1A - A_1C)h^2 - (E_1A - A_1E)h + (F_1A - A_1F) = 0.$$

De là on conclut

$$A_1E - AE_1 = 0, \quad (C_1A - A_1C)h^2 + F_1A - A_1F = 0.$$

On peut supposer $A_1 = A$; nous aurons alors

$$A_1 = A; \quad E_1 = E, \quad F_1 - F = C_1h^2 - Ch^2, \text{ ou } F_1 - C_1h^2 = F - Ch^2 = K;$$

les équations des deux coniques prennent la forme définitive:

$$(1) \qquad S = Ax^2 + C(y^2 - h^2) + 2Ey + K = 0,$$
$$(2) \qquad S_1 = Ax^2 + C_1(y^2 - h^2) + 2Ey + K = 0.$$

L'équation en λ est alors

$$\begin{vmatrix} A(1+\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & C + \lambda C_1 & E(1+\lambda) \\ 0 & E(1+\lambda) & K(1+\lambda) - h^2(C + \lambda C_1) \end{vmatrix} = 0;$$

supprimant la racine $\lambda = -1$, et posant

$$(3) \qquad \mu = \frac{C + \lambda C_1}{\lambda + 1},$$

il vient:

$$(4) \qquad h^2\mu^2 - K\mu + E^2 = 0.$$

L'équation en λ aura trois racines réelles ou une seule, suivant que les racines de l'équation (4) seront réelles ou imaginaires.

La discussion se continuera maintenant comme dans le cas précédent; on pourra, pour simplifier cette discussion, supposer la constante A positive, ce qui est évidemment permis.

IV: Applications.

883. Coniques concentriques.

En prenant le centre commun pour origine, les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$(1)\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2=1,$$
$$(2)\qquad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2=1.$$

Retranchant ces équations membre à membre, on trouve

$$(3)\qquad (A-A_1)x^2+2(B-B_1)xy+(C-C_1)y^2=0;$$

ce premier système de cordes communes passe par le centre commun.

L'équation générale des coniques passant par les points communs est

$$(4)\qquad (A+\lambda A_1)x^2+2(B+\lambda B_1)xy+(C+\lambda C_1)y^2=\lambda+1;$$

ce sont des coniques concentriques aux deux proposées. L'équation en λ se réduira au second degré, et on pourra constater que les deux autres couples de cordes communes se composent de droites parallèles. Ces résultats sont d'ailleurs visibles à priori.

884. Coniques confocales.

Les équations des deux coniques seront de la forme

$$S\quad (1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2,$$
$$S_1\quad (2)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(m_1x+n_1y+p_1)^2;$$

les deux droites

$$(3)\qquad mx+ny+p=0,\quad m_1x+n_1y+p_1=0,$$

sont les directrices correspondant dans chaque conique, au foyer commun (α,β).

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux coniques S et S_1 est

$$(4)\qquad \left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right)(\lambda+1)=(mx+ny+p)^2+\lambda(m_1x+n_1y+p_1)^2;$$

on voit que, en général, aucune de ces coniques n'aura pour foyer le foyer commun aux coniques S et S_1; car il faudrait pour cela que le second membre de l'équation (4) fut un carré parfait; or ceci ne pourra avoir lieu que si les deux directrices coïncident.

Si l'on suppose $\lambda=-1$, ce qui revient à retrancher les équations (1) et (2) membre à membre, on trouve

$$(mx+ny+p)^2-(m_1x+n_1y+p_1)^2=0,$$

ou

$$(5)\qquad \left[(m+m_1)x+(n+n_1)y+(p+p_1)\right]\left[(m-m_1)x+(n-n_1)y+p-p_1\right]=0.$$

On obtient ainsi un système de deux cordes communes; il est visible que ces deux cordes communes forment avec les deux directrices (3) un système harmonique.

885. Hyperboles ayant une asymptote commune.

Les équations des deux courbes pourront s'écrire

$$S\quad (1)\qquad (ax+by+cz)(Ax+By+Cz)=z^2,$$
$$S_1\quad (2)\qquad (ax+by+cz)(A_1x+B_1y+C_1z)=z^2;$$

l'équation générale des courbes passant par les points communs est

$$(3)\qquad (ax+by+cz)\left[(A+\lambda A_1)x+(B+\lambda B_1)y+(C+\lambda C_1)z\right]=z^2(\lambda+1).$$

On voit que toutes ces courbes ont pour asymptote l'asymptote commune aux coniques S et S_1.

Si l'on fait $\lambda=-1$, on a le premier système de cordes communes

$$\begin{cases} ax+by+cz=0,\\ (A-A_1)x+(B-B_1)y+(C-C_1)z=0;\end{cases}$$

c. à. d. l'asymptote commune, et une droite qui passe par les deux points d'intersection, en général, à distance finie.

Les deux courbes S et S_1 se touchent à l'infini; l'équation en λ aura donc une racine double, et le système de cordes communes, correspondant à cette racine double, se composera de deux droites parallèles passant par le point de contact à l'infini, et respectivement par un des points d'intersection à distance finie; ces deux droites seront, par suite, parallèles à l'asymptote commune.

On peut vérifier ces résultats en formant l'équation en λ.

886. **Hyperboles ayant les mêmes asymptotes.**

Les équations des deux courbes pourront s'écrire

$$S \qquad (1) \qquad (ax+by+cz)(a_1x+b_1y+c_1z)=Kz^2,$$

$$S_1 \qquad (2) \qquad (ax+by+cz)(a_1x+b_1y+c_1z)=K_1z^2;$$

l'équation générale des coniques passant par leurs points communs sera

$$(3) \qquad (ax+by+cz)(a_1x+b_1y+c_1z)(\lambda+1)=(K+\lambda K_1)z^2.$$

Pour $\lambda=-1$, on trouve un système de cordes coïncidentes et confondues avec la droite de l'infini; pour $\lambda=-\frac{K}{K_1}$, on obtient les deux asymptotes.

En effet, les coniques S et S_1 sont doublement tangentes; la droite de l'infini est la corde de contact, les asymptotes sont les tangentes communes.

On voit que les courbes (3) sont des hyperboles ayant mêmes asymptotes que les courbes proposées.

887. **Coniques ayant un axe commun** (ou un diamètre commun conjugué d'une même direction de cordes).

Si l'on prend l'axe commun pour axe des x, l'axe des y étant parallèle à la direction des cordes, les équations des deux coniques seront

$$S \qquad (1) \qquad Ax^2+y^2+Dx+F=0,$$

$$S_1 \qquad (2) \qquad A_1x^2+y^2+D_1x+F_1=0.$$

L'équation générale des coniques passant par leurs points communs sera

$$(3) \qquad (A+\lambda A_1)x^2+y^2(\lambda+1)+(D+\lambda D_1)x+F+\lambda F_1=0;$$

on voit que la droite Ox est aussi un diamètre commun pour toutes ces courbes.

Si l'on fait $\lambda=-1$, ou si l'on retranche les équations (1) et (2) membre à membre, on trouve

$$(4) \qquad (A-A_1)x^2+(D-D_1)x+F-F_1=0;$$

c. à. d. un système de deux cordes communes parallèles et conjuguées du diamètre commun.

Si la droite Ox est un axe, les autres systèmes de cordes communes se composeront de droites également inclinées sur l'axe.

888. **Deux coniques homothétiques ont une corde commune à l'infini; réciproquement, quand la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques, ces courbes sont homothétiques.**

En effet, les équations de deux courbes homothétiques sont

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)z+Fz^2=0,$$

$$(2) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(D_1x+E_1y)z+F_1z^2=0;$$

en retranchant membre à membre, on trouve pour une des cordes communes

$$z=0.$$

Réciproquement, soit les deux coniques

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)z+Fz^2=0,$$

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2(D_1x+E_1y)z+F_1z^2=0.$$

L'équation générale des courbes passant par leurs points communs est

$$(A+\lambda A_1)x^2+2(B+\lambda B_1)xy+(C+\lambda C_1)y^2+2z\left[(D+\lambda D_1)x+(E+\lambda E_1)y\right]+(F+\lambda F_1)z^2=0;$$

il faut que cette équation puisse représenter deux droites dont l'une est la droite $z=0$; pour cela, il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=-\lambda\,;$$

donc......

Deux coniques homothétiques et concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini; réciproquement, quand deux coniques ont deux points de contact à l'infini, elles sont homothétiques et concentriques. Ces coniques ont les mêmes asymptotes.

La démonstration se fera sans difficulté en suivant une marche semblable à celle qui précède.

V°. Diverses propriétés relatives aux cordes communes.

889. Toutes les coniques passant par quatre points ont un système de diamètres conjugués parallèles, lequel système peut être imaginaire.

Soient, en effet,

$$S \quad (1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

$$S_1 \quad (2) \qquad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0;$$

les équations de deux coniques passant par quatre points. Démontrons d'abord qu'il y a un système de diamètres conjugués parallèles appartenant à chacune de ces coniques.

Si m et m' sont les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la première courbe, on aura

$$(3) \qquad A+B(m+m')+C\,mm'=0;$$

si maintenant la seconde conique a un système de diamètres conjugués parallèles à ceux que nous considérons, on devra avoir

$$(4) \qquad A_1+B_1(m+m')+C_1\,mm'=0.$$

Les deux équations (3) et (4) donnent

$$(5) \qquad m+m'=-\frac{AC_1-A_1C}{BC_1-B_1C},\quad mm'=\frac{AB_1-A_1B}{BC_1-B_1C};$$

les coefficients angulaires cherchés seront donc les racines de l'équation du second degré

$$(6) \qquad (BC_1-B_1C)Z^2+(AC_1-A_1C)Z+AB_1-A_1B=0.$$

Ceci démontre qu'il existe dans l'une et l'autre conique un système de diamètres conjugués parallèles; on voit que ces diamètres peuvent être imaginaires, puisque les valeurs de m et m' dépendent d'une équation du second degré.

Nous ajouterons que ces diamètres appartiendront à une conique quelconque passant par les quatre points communs aux deux coniques S et S_1; l'équation d'une telle conique est, en effet,

$$(A+\lambda A_1)x^2+2(B+\lambda B_1)xy+(C+\lambda C_1)y^2+\cancel{2(D+\lambda D_1)x}+2(D+\lambda D_1)x+2(E+\lambda E_1)y+F+\lambda F_1=0.$$

Or si l'on remplace, dans l'équation (6), A_1 par $(A+\lambda A_1)$, etc....., cette équation ne change pas; donc.......

890. Les systèmes de cordes communes à deux coniques forment un système harmonique avec les diamètres conjugués parallèles.

Prenons pour axes de coordonnées deux droites parallèles aux système de diamètres conjugués parallèles; les équations des deux courbes ne contiendront pas de terme en xy et seront, par conséquent, de la forme

$$(1) \quad Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$(2) \quad A_1x^2+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

L'équation d'un couple de sécantes, passant par leurs points communs, sera

$$(3) \quad (A+\lambda_0A_1)x^2+(C+\lambda_0C_1)y^2+2(D+\lambda_0D_1)x+2(E+\lambda_0E_1)y+F+\lambda_0F_1=0,$$

λ_0 étant une des racines de l'équation en λ. Alors l'équation

$$(4) \quad (A+\lambda_0A_1)x^2+(C+\lambda_0C_1)y^2=0,$$

représentera deux droites parallèles aux cordes communes considérées; or il est visible que ces deux droites, dont les équations sont de la forme

$$y=+Kx, \quad y=-Kx,$$

constituent un système harmonique avec les deux axes de coordonnées $x=0$, $y=0$, ou les diamètres conjugués parallèles.

N. B. Si les diamètres conjugués parallèles sont imaginaires, on peut concevoir que les équations des coniques aient été ramenées aux formes (1) et (2) à l'aide d'une substitution linéaire

$$x=ax'+by', \quad y=a_1x'+b_1y',$$

dont les coefficients seraient imaginaires.

891. **Lorsque, dans deux coniques, il existe deux systèmes de diamètres conjugués de l'une parallèles à des diamètres conjugués de l'autre, ces coniques seront homothétiques.**
Prenons pour axes de coordonnées deux des diamètres conjugués parallèles, les équations des coniques seront

$$(1) \quad Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$(2) \quad A_1x^2+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

Si m et m' sont les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués de la première qui ont leurs parallèles dans la seconde, on devra avoir à la fois

$$A+mm'C=0, \quad A_1+mm'C_1=0;$$

d'où l'on conclut

$$(3) \quad \frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1};$$

c. à. d. que les deux coniques sont homothétiques. La réciproque est visible; et l'on constate en même temps que tous les systèmes de diamètres conjugués de l'une ont leurs parallèles dans l'autre.

892. 1° **Pour que quatre points d'une conique soient sur un cercle, il faut que les sécantes qui passent par ces points soient également inclinées sur les axes de la courbe.**
Supposons les axes de coordonnées parallèles aux axes de la courbe, l'équation de la courbe ne devra pas renfermer le terme en xy et sera de la forme

$$(1) \quad Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Soit l'équation d'un cercle, ou plus généralement, l'équation d'une seconde conique dont les axes sont parallèles à ceux de la première

$$(2) \quad A_1x^2+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

Un système de cordes communes sera

$$(3) \quad (A+\lambda_0A_1)x^2+(C+\lambda_0C_1)y^2+2(D+\lambda_0D_1)x+2(E+\lambda_0E_1)y+F+\lambda F_1=0;$$

l'équation des droites parallèles menées par l'origine est

$$(A+\lambda_0A_1)x^2+(C+\lambda_0C_1)y^2=0;$$

d'où l'on déduit

$$y=+Kx, \quad y=-Kx;$$

ces droites sont également inclinées sur les axes, puisque les axes de coordonnees sont rectangulaires.

Cette proposition est un cas particulier de celle qui a été démontrée au N° [890].

2°. Lorsque deux coniques ont leurs axes parallèles, les quatre points d'intersection sont sur un cercle.

Les équations (1) et (2) seront celles des coniques en question, et nous pourrons regarder l'équation (3) comme l'équation générale des coniques qui passent par leurs points d'intersection ; or cette équation représentera un cercle si l'on détermine λ_0 par la condition

$$(4) \qquad A + \lambda_0 A_1 = C + \lambda_0 C_1, \text{ ou } \lambda_0 = -\frac{C_1 - C}{A_1 - A},$$

puisqu'elle ne renferme pas de terme en xy ; donc.....

Lorsque deux paraboles ont leurs axes perpendiculaires, leurs quatre points d'intersection sont sur un cercle.

Car en prenant pour axes de coordonnées les axes de ces paraboles, leurs équations seront respectivement

$$y^2 = 2px + p_1, \quad x^2 = 2qy + q_1 ;$$

et leurs points d'intersection sont sur la courbe

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - p_1 - q_1 = 0 ;$$

laquelle courbe est évidemment un cercle.

Corol. I. Quand un cercle est tangent à une conique, la corde qu'il intercepte dans la conique et la tangente au point de contact sont également inclinées sur l'axe.

Corol II. Le cercle osculateur en un point d'une conique rencontre la courbe en un autre point tel, que la corde qui joint ce point au point de contact, et la tangente en celui-ci, sont également inclinées sur un axe de la conique.

De là une construction très-simple du cercle osculateur.

893. Du théorème précédent, nous déduirons la proposition suivante :

Étant donnée une ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et quatre points M, M_1, M_2, M_3 de cette ellipse ; si $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, sont les paramètres angulaires de ces points, la condition pour qu'ils soient sur un cercle est

$$(I) \qquad \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2K\pi,$$

ou

$$(II) \quad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi_3}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_3}{2}}\right] = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi_3}{2}.$$

En effet, les équations des cordes MM_1 et M_2M_3 sont respectivement N° [716]

$$MM_1 : \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2},$$

$$M_2M_3 : \qquad \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2} = \cos\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}.$$

Or, pour que les quatre points considérés soient sur un cercle, il faut et il suffit N° [892] que les cordes MM_1 et M_2M_3 soient également inclinées sur les axes, ce qui donne l'égalité

$$(1°) \qquad \cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2} + \sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2} = 0 ;$$

laquelle n'est autre que

$$(2°) \qquad \sin\frac{\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}{2} = 0.$$

Les égalités (1°) et (2°) conduisent respectivement aux relations (II) et (I).

On peut à l'aide de cette relation, démontrer la proposition suivante due à Joachimstal:

Si par un point on mène les quatre normales à une conique, les pieds de trois d'entre elles sont sur un cercle qui passe par le point diamétralement opposé du pied de la quatrième.

En effet, les paramètres angulaires φ des pieds des normales menées à l'ellipse (1) par le point (α, β) sont déterminés N° [751] par l'équation

$$(2) \qquad \frac{\alpha a}{\cos\varphi} - \frac{\beta b}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

Or posons

$$(3) \qquad \tan\frac{\varphi}{2} = t; \text{ d'où } \begin{cases} \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \end{cases}$$

l'équation (2) devient

$$(4) \qquad t^4 + 2\,\frac{a\alpha + c^2}{b\beta}\,t^3 + 2\,\frac{a\alpha - c^2}{b\beta}\,t - 1 = 0.$$

Si l'on désigne par t', t_1, t_2, t_3, les racines de l'équation (4), les relations entre les coefficients et les racines nous conduisent aux deux égalités

$$(5) \qquad \begin{cases} t'(t_1+t_2+t_3) + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 0, \\ t'\,t_1t_2t_3 = -1. \end{cases}$$

Or soit φ' le paramètre angulaire du point M' correspondant à la racine t', et φ celui du point M diamétralement opposé du point M'; on a

$$\begin{cases} x' = a\cos\varphi', & x = a\cos\varphi = -a\cos\varphi', \\ y' = b\sin\varphi; & y = b\sin\varphi = -b\sin\varphi'; \end{cases}$$

d'où il résulte successivement

$$\begin{cases} \cos\varphi' = -\cos\varphi \\ \sin\varphi' = -\sin\varphi \end{cases} \text{ puis } \varphi = \pi + \varphi'; \ \tan\frac{\varphi'}{2} = -\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}, \text{ ou enfin } t' = -\frac{1}{t}.$$

Les égalités (5) deviennent alors

$$(6) \qquad \begin{cases} t_1+t_2+t_3 = tt_1t_2 + tt_1t_3 + tt_2t_3, \\ t = t_1t_2t_3. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre, on trouve

$$t + t_1 + t_2 + t_3 = tt_1t_2 + tt_1t_3 + tt_2t_3 + t_1t_2t_3;$$

et, en remplaçant les t par les lignes trigonométriques $\tan\frac{\varphi}{2}$ qu'elles représentent, on a précisément la relation (II). Donc les pieds M_1, M_2, M_3, de trois des normales et le point M, diamétralement opposé du pied M' de la quatrième normale, sont sur un même cercle.

Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui qui a été démontré pour la parabole au N° (759).

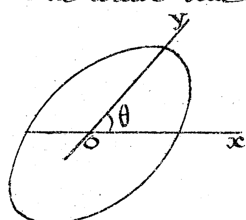
894. Cercle doublement tangent à une conique. Théorèmes d'Apollonius.

Les longueurs des axes d'une conique sont les rayons d'un cercle doublement tangent à la conique.

En effet, si nous supposons le cercle concentrique à la conique, il y aura un système de cordes communes passant par le centre, ces droites seront également inclinées sur les axes; lorsque le cercle deviendra doublement tangent à la conique, ces cordes se confondront et, par suite, se confondront avec l'un ou l'autre des axes de la courbe. Ou encore, les tangentes au cercle et à la

conique, au point de contact commun, coïncident; or la tangente au cercle est perpendiculaire au rayon; le centre du cercle étant le centre de la conique, il en résulte que la tangente à la conique est perpendiculaire au diamètre qui passe par le point de contact, ce point est donc un sommet de la courbe.

Ceci posé, soit une conique rapportée à deux diamètres conjugués quelconques d'angle θ; l'équation de la courbe sera



$$(1) \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0;$$

cherchons l'équation qui donne les longueurs des axes de cette conique.

Pour cela, prenons un cercle concentrique, son équation sera

$$(2) \qquad x^2+2xy\cos\theta+y^2=\rho^2;$$

exprimons que ce cercle est doublement tangent à la courbe. L'équation du système de cordes communes passant par le centre est

$$\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{a'^2}\right)x^2+\frac{2\cos\theta}{\rho^2}xy+\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{b'^2}\right)y^2=0;$$

il faut que ces deux droites se confondent, ce qui exige que

$$\frac{\cos^2\theta}{\rho^4}=\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{a'^2}\right)\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{b'^2}\right);$$

ou, en développant

$$(3) \qquad \rho^4-(a'^2+b'^2)\rho^2+a'^2b'^2\sin^2\theta=0.$$

Cette équation donne les axes a et b de la conique; on aura donc

$$(4) \qquad a'^2b'^2\sin^2\theta=a^2b^2, \quad a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

Ce sont les théorèmes d'Apollonius.

895. **Angles droits pivotants.**

1° Lorsqu'un angle droit AOB pivote autour d'un point O pris sur une conique, la corde AB passe par un point fixe situé sur la normale en O.

Prenons pour axe des y la tangente en O, et, pour axe des x, la normale en ce point, l'équation de la conique sera alors

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2x=0.$$

Si $y=mx$ est l'équation de la droite OA, $y=-\frac{1}{m}x$ sera celle de la droite OB perpendiculaire à OA; l'équation quadratique des deux droites OA et OB est donc

$$x^2+\left(m-\frac{1}{m}\right)xy-y^2=0,$$

ou

$$(2) \qquad x^2+2\lambda xy-y^2=0,$$

λ étant une constante indéterminée.

Si l'on ajoute les équations (1) et (2) après avoir multiplié la seconde par C, il vient

$$(A+C)x^2+2(B+\lambda C)xy+2x=0;$$

c'est l'équation d'un système de cordes communes, dont l'une est la droite $x=0$ ou tangente Oy, la seconde sera donc la droite AB; ainsi l'équation de la corde AB est

$$(3) \qquad (\overline{AB}) \qquad (A+C)x+2(B+\lambda C)y+2=0.$$

Or, quel que soit λ, cette droite passe par le point fixe

$$(4) \qquad y=0, \quad (A+C)x+2By+2=0;$$

ce point est sur l'axe des x ou la normale en O; donc.......

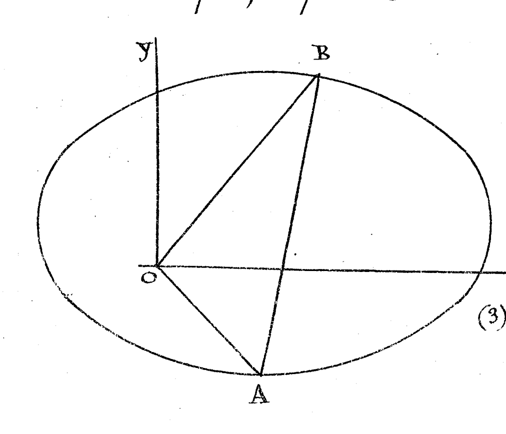
Remarque I. Cette propriété permet de construire la tangente en O; il suffit en effet de construire les deux angles droits AOB, A'OB'; les cordes AB, A'B', se coupent en un point C; ce point appartient à la normale en O.

Remarque II. Lorsque la conique est une hyperbole équilatère, (A+C) est nul, les droites $\overline{AB}$ sont constamment parallèles à l'axe des x c. à d. à la normale au point O. Nous retrouvons ainsi ce théorème déjà démontré:

Lorsqu'un triangle rectangle est inscrit dans une hyperbole équilatère, l'hypothénuse est parallèle à la normale à la courbe au sommet de l'angle droit de ce triangle.

895 bis 2° Lorsqu'un angle droit pivote autour d'un point situé dans le plan d'une conique, les cordes d'intersection enveloppent une conique ayant pour foyer le point fixe.

Prenons le point fixe pour origine, et pour axes de coordonnées des parallèles aux axes de la conique; l'équation de la courbe sera



$$(1) \qquad Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Soit l'équation d'une corde AB

$$(2) \qquad ux+vy-1=0,$$

u et v étant des constantes indéterminées; l'équation générale des coniques passant par les deux points d'intersection de la droite (2) avec la conique proposée, est

$$(3) \qquad Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F+(ux+vy-1)(\alpha x+\beta y+\gamma)=0,$$

α, β, γ sont des indéterminées. Exprimons que cette conique (3) se réduit à deux droites passant par l'origine O; il faut pour cela que le premier membre de l'équation (3) soit homogène, on a donc

$$(4) \qquad \begin{cases} 2D+\gamma u-\alpha=0, \\ 2E+\gamma v-\beta=0, \\ F-\gamma=0 \quad ; \end{cases} \text{ d'où: } \begin{cases} \gamma=F, \\ \alpha=2D+Fu, \\ \beta=2E+Fv; \end{cases}$$

l'équation des deux droites OA et OB est alors

$$(A+\alpha u)x^2+(\beta u+\gamma v)xy+(C+\beta v)y^2=0.$$

Ces deux droites enfin doivent être rectangulaires, il faut donc qu'on ait

$$\frac{C+\beta v}{A+\alpha u}=-1, \text{ ou } A+C+\alpha u+\beta v=0;$$

et, en remplaçant α, β, par leurs valeurs (4):

$$(5) \qquad F(u^2+v^2)+2(Du+Ev)+(A+C)=0.$$

La question consiste alors à chercher l'enveloppe des droites

$$(6) \qquad ux+vy-1=0,$$

les paramètres u et v étant liés par la relation (5). L'équation (5) est l'équation tangentielle du lieu cherché; c'est une courbe de 2ème classe. Cette équation peut encore s'écrire, en rendant homogène:

$$(7) \qquad u^2+v^2=-\frac{A+C}{F}\left[\frac{2Du}{A+C}+\frac{2E}{A+C}v+w\right]w;$$

on reconnait là une conique ayant pour foyers N° [712] les points

$$(8) \qquad w=0, \quad \frac{2D}{A+C}u+\frac{2E}{A+C}v+1=0.$$

Le premier foyer est l'origine O; le second foyer a pour coordonnées N° [111]

$$(9) \qquad x_0=-\frac{2D}{A+C}, \quad y_0=-\frac{2E}{A+C}.$$

La conique trouvée (5) devient une parabole lorsque la courbe proposée est une hyperbole équilatère.

896. Quand une droite est une corde commune à deux coniques, les polaires de chaque point de cette droite se rencontrent sur la droite même.

Réciproquement, si dans le plan de deux coniques il existe une droite telle que les polaires de deux de ses points se coupent sur la droite même, cette droite est une corde commune aux deux coniques.

Les deux points donnés peuvent être regardés comme les intersections d'une conique $C=0$ et d'une droite $D=0$; de sorte que les équations des deux coniques pourront s'écrire:

$$(1)\quad S=C+DM=0, \qquad (2)\quad S_1=C+DN=0; \qquad \text{où} \begin{cases} D=ax+by+c, \\ M=\alpha x+\alpha_1 y+\alpha_2, \\ N=\beta x+\beta_1 y+\beta_2. \end{cases}$$

Soit un point (x_0, y_0) situé sur la droite $D=0$, les équations de ses polaires, par rapport aux deux coniques, seront

$$x\left[C'_x+D'_xM+M'_xD\right]_0+y\left[C'_y+D'_yM+M'_yD\right]_0+z\left[C'_z+D'_zM+M'_zD\right]_0=0,$$
$$x\left[C'_x+D'_xN+N'_xD\right]_0+y\left[C'_y+D'_yN+N'_yD\right]_0+z\left[C'_z+D'_zN+N'_zD\right]_0=0;$$

ou, en remarquant que D_0 est nul, et en ayant égard à la signification de la lettre D;

$$x\left[C'_{x_0}+M_0a\right]+y\left[C'_{y_0}+M_0b\right]+z\left[C'_{z_0}+cM_0\right]=0,$$
$$x\left[C'_{x_0}+N_0a\right]+y\left[C'_{y_0}+N_0b\right]+z\left[C'_{z_0}+cN_0\right]=0;$$

ou enfin:

$$(3)\quad xC'_{x_0}+yC'_{y_0}+zC'_{z_0}+M_0.D=0,$$
$$(4)\quad xC'_{x_0}+yC'_{y_0}+zC'_{z_0}+N_0.D=0.$$

Ces deux droites se coupent évidemment sur la droite $D=0$, et au point où la droite $D=0$ est rencontrée par la polaire du point (x_0, y_0) relative à la conique $C=0$.

Pour démontrer la réciproque, prenons la droite en question pour axe des y, et soient les équations des deux courbes

$$(1)\qquad (S)\quad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$(2)\qquad (S_1)\quad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

Les polaires d'un point $(x_0=0, y_0)$ sont par rapport aux deux coniques,

$$x(By_0+D)+y(Cy_0+E)+Ey_0+F=0,$$
$$x(B_1y_0+D_1)+y(C_1y_0+E_1)+E_1y_0+F_1=0;$$

ces deux droites devant se couper sur l'axe Oy, on aura

$$(3)\qquad \frac{Cy_0+E}{C_1y_0+E_1}=\frac{Ey_0+F}{E_1y_0+F_1}.$$

On aura de même pour un second point $(x_1=0, y_1)$ situé sur Oy:

$$(4)\qquad \frac{Cy_1+E}{C_1y_1+E_1}=\frac{Ey_1+F}{E_1y_1+F_1}.$$

Nous pouvons prendre un de ces points, y_1 par exemple, pour origine des coordonnées; on aura donc, en supposant $y_1=0$

$$(5)\qquad \frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1}=\frac{1}{K};$$

la relation (3) devient alors

$$(6)\qquad C_1y_0+KE=(Cy_0+E)K, \quad \text{ou } C_1=CK.$$

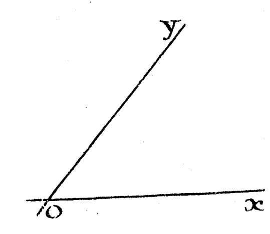
D'après cela les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \\ A_1x^2+2B_1xy+C\,y^2+2D_1x+2E\,y+F=0, \end{cases}$$

il est alors visible qu'elles ont deux points en commun sur l'axe des y.

897. Le point d'intersection de deux cordes communes à deux coniques, a la même polaire dans les deux courbes; Réciproquement, quand un point a la même polaire dans deux coniques, ce point est l'intersection de deux cordes communes aux deux coniques.

Prenons les deux cordes communes pour axes de coordonnées, les équations des deux coniques seront N° [881]



$$(1)\qquad S = Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$(2)\qquad S_1 = A\,x^2+2B_1xy+C\,y^2+2D\,x+2Ey+F_1=0.$$

La polaire de l'origine est, par rapport à chacune de ces courbes,

$$S'_z=0,\quad \text{ou}\quad Dx+Ey+F=0,$$
$$S'_{1z}=0,\quad \text{ou}\quad Dx+Ey+F=0;$$

il est visible que ces deux droites sont les mêmes.

Pour démontrer la réciproque, prenons le point en question pour origine des coordonnées; les équations des deux courbes étant

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0;$$

les polaires de l'origine sont

$$Dx+Ey+F=0,\ D_1x+E_1y+F_1=0.$$

Ces deux droites devant coïncider, on a

$$\frac{D_1}{D}=\frac{E_1}{E}=\frac{F_1}{F};$$

et les équations des deux coniques deviennent

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$A'_1x^2+2B'_1xy+C'_1y^2+2D\,x+2E\,y+F=0.$$

En retranchant membre à membre, on a

$$(A-A'_1)x^2+2(B-B'_1)xy+(C-C'_1)y^2=0;$$

c'est un système de cordes communes se coupant au point O.

Il résulte de là la proposition déjà démontrée au N° [879]:

Étant données deux coniques quelconques, il existe, en général, trois points dont chacun a la même polaire dans les deux courbes.

Ces trois points sont les points d'intersection des systèmes de sécantes qui passent par les quatre points communs aux deux coniques.

D'après la discussion faite au N° [880], nous pouvons dire que:

Les trois points qui ont même polaire par rapport à deux coniques, sont tous trois réels, si les quatre points d'intersection de ces coniques sont tous quatre réels ou tous quatre imaginaires; un seul est réel, lorsque les coniques se coupent en deux points réels seulement.

Il est facile de voir ce que deviennent ces points, lorsque les coniques deviennent tangentes, ou doublement tangentes, etc....; il suffit de se rappeler la discussion du N° [880].

§ II. Courbes de 2ème classe. Tangentes communes.

1°. Détermination des tangentes communes à deux coniques.

898. Soient les équations tangentielles des deux coniques :

$$(1) \qquad S = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

$$(2) \qquad S_1 = A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0.$$

Les coordonnées des tangentes communes à ces deux courbes seront les valeurs de u et v solutions communes à ces deux équations. L'équation générale des courbes de 2ème classe touchant les tangentes communes aux deux courbes (1) et (2) est [N° 943]

$$(3) \qquad \Sigma = S + \lambda S_1 = 0,$$

ou

$$(3 bis) \qquad (A+\lambda A_1)u^2 + 2(B+\lambda B_1)uv + (C+\lambda C_1)v^2 + 2(D+\lambda D_1)u + 2(E+\lambda E_1)v + F + \lambda F_1 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire.

Exprimons que la conique Σ se réduit à un système de deux points ; nous aurons alors les points de concours des tangentes communes aux deux courbes S et S_1, points que nous nommerons, d'après M. Chasles, points ombilicaux. Or pour que l'équation (3) représente un système de deux points, il faut que

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A+\lambda A_1 & B+\lambda B_1 & D+\lambda D_1 \\ B+\lambda B_1 & C+\lambda C_1 & E+\lambda E_1 \\ D+\lambda D_1 & E+\lambda E_1 & F+\lambda F_1 \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant

$$(4 bis) \qquad \Delta_1\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + \Delta = 0.$$

L'équation (4) est du troisième degré par rapport à λ. En remplaçant λ par une des racines de l'équation (4), l'équation $\Sigma = 0$ ou (3) représentera un système de deux points, qui seront les points de concours des quatre tangentes communes aux deux coniques. Nous concluons de là que :

*Les quatre tangentes communes à deux coniques donnent par leurs points de concours trois systèmes de deux points, ou trois systèmes de **points ombilicaux** ; ou autrement, quatre droites étant données, il y a trois coniques infiniment aplaties touchant ces quatre droites.*

Nous ajouterons que :

Parmi les trois systèmes de points ombilicaux, il y a toujours un système réel.

On s'en convaincra par un raisonnement analogue à celui du N° [879].

Remarque. On exprimera aussi que la conique (3) se réduit à un système de deux points en écrivant que cette conique possède une tangente double, ce qui donne

$$(5) \qquad S'_u + \lambda S'_{1u} = 0, \quad S'_v + \lambda S'_{1v} = 0, \quad S'_w + \lambda S'_{1w} = 0,$$

car lorsqu'une conique se réduit à deux points, le point polaire d'une droite quelconque se meut sur la droite qui joint les deux points, et réciproquement.

Les équations (5) ou les suivantes

$$(6) \qquad \frac{S'_u}{S'_{1u}} = \frac{S'_v}{S'_{1v}} = \frac{S'_w}{S'_{1w}},$$

déterminent les coordonnées des droites qui joignent les deux points ombilicaux de chaque système.

Or les équations des points polaires d'une droite (u, v, w) par rapport aux deux coniques $S=0$, $S_1=0$, sont

$$\xi S'_u + \eta S'_v + S'_w = 0,$$
$$\xi S'_{1u} + \eta S'_{1v} + S'_{1w} = 0,$$

ξ, η, étant les coordonnées tangentielles courantes. Si l'on exprime que ces deux points coïncident, on retrouve précisément les relations (6).

Donc Il y a trois droites qui ont même pôle par rapport à deux coniques données, ces droites sont celles qui joignent les points ombilicaux d'un même système, c.à.d. les points de concours des quatre tangentes communes. Ces pôles sont N° [879] les points de concours ou centres des trois systèmes de cordes communes aux deux coniques.

II: Discussion de l'équation en λ.

899. Les raisonnements et calculs développés dans les N.os [880], [881] sont applicables ici; nous ne ferons, la plupart du temps, qu'énoncer les conclusions.

1°. Les trois racines de l'équation en λ sont réelles:

Les tangentes communes sont toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires.

2°. Une seule racine est réelle:

Deux des tangentes communes sont réelles, les deux autres sont imaginaires.

3°. L'équation en λ a deux racines égales:

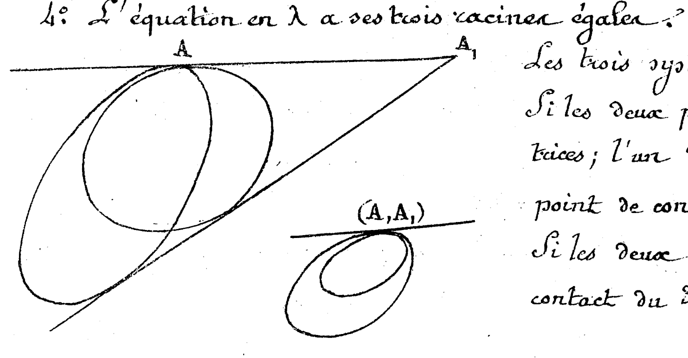
Dans le cas général, les trois systèmes de points ombilicaux sont (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1).

Dans le cas actuel, deux de ces systèmes doivent se confondre; on a alors deux coniques tangentes, fig. (I) ou fig. (II); le système double de points ombilicaux c.à.d. le système correspondant à la racine double (B, B_1) se compose des points où la tangente au point de contact rencontre les deux autres tangentes communes.

Le système correspondant à la racine simple se compose du point de contact A et du point de concours A_1 des deux autres tangentes communes.

Il peut arriver que les deux points ombilicaux qui constituent le système double (B, B_1) se confondent; les deux coniques sont alors doublement tangentes fig (III); le système des points ombilicaux, correspondant à la racine simple, est composé des deux points de contact.

4°. L'équation en λ a ses trois racines égales:

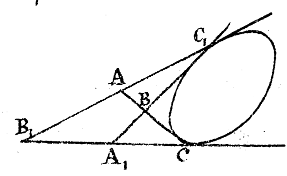


Les trois systèmes de points ombilicaux se confondent en un seul (A, A_1).

Si les deux points ombilicaux sont distincts, les deux coniques sont osculatrices; l'un des points, A, est le point d'osculation, l'autre, A_1, est le point de concours de la tangente en A avec l'autre tangente commune.

Si les deux points ombilicaux se confondent, les coniques ont un contact du 3ème ordre.

5°. L'équation en λ a une racine nulle.



Une des coniques se compose alors de deux points A et A_1; ils constituent un premier système de points ombilicaux. Les deux autres systèmes (B, B_1), (C, C_1) sont les points d'intersection des deux couples de tangentes menées à la conique proprement dite par les deux points A & A_1.

Lorsque les deux autres racines, différentes de zéro, seront égales, un des points A ou A_1, ou tous les deux, se trouveront sur la conique proprement dite.

6°. L'équation en λ a deux racines nulles.

Les deux points ombilicaux (A, A_1) sont sur une tangente à la conique proprement dite; etc....

III°. Applications.

900. 1°. Coniques concentriques.

$$(1)\qquad Au^2+2Buv+Cv^2=1,$$

$$(2)\qquad A_1u^2+2B_1uv+C_1v^2=1;$$

en retranchant membre à membre on trouve

$$(A-A_1)u^2+2(B-B_1)uv+(C-C_1)v^2=0;$$

cette équation représente deux points à l'infini; les tangentes communes forment donc deux systèmes de droites parallèles.

2°. Deux cercles.

Les équations tangentielles de deux cercles sont N° [278]

$$(1)\qquad R^2(u^2+v^2)=(au+bv-1)^2,$$

$$(2)\qquad R_1^2(u^2+v^2)=(a_1u+b_1v-1)^2;$$

retranchant ces équations membre à membre après avoir divisé par R^2 et R_1^2, il vient

$$\left(\frac{au+bv-1}{R}\right)^2-\left(\frac{a_1u+b_1v-1}{R_1}\right)^2=0.$$

On a donc les deux points ombilicaux (situés sur la ligne des centres)

$$\begin{cases} au+bv-1=\dfrac{R}{R_1}(a_1u+b_1v-1), \\ au+bv-1=-\dfrac{R}{R_1}(a_1u+b_1v-1), \end{cases}$$

lesquels forment évidemment un système harmonique avec les deux points

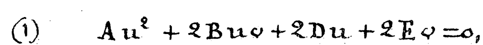
$$au+bv-1=0,$$

$$a_1u+b_1v-1=0,$$

ou les centres des deux cercles. Donc les points de concours des tangentes communes à deux cercles forment un système harmonique avec les centres des deux cercles.

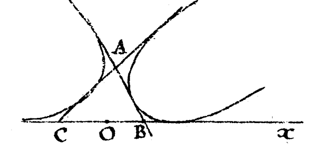
3°. Deux paraboles.

Ces deux courbes touchent la droite de l'infini ($u=0, v=0$), leurs équations tangentielles sont, en prenant pour axe Ox une autre tangente commune:



$$(1)\qquad Au^2+2Buv+2Du+2Ev=0,$$

$$(2)\qquad A_1u^2+2B_1uv+2D_1u+2E_1v=0.$$



Si l'on retranche ces équations, après avoir multiplié la 1ère par E_1, la 2ème par E, on trouve un résultat de la forme

$$(3)\qquad u[au+2bv+2d]=0,$$

ce système de points ombilicaux se compose d'un point A_1 à l'infini sur Ox et d'un point A à distance finie. Les deux autres systèmes comprendront chacun un point à l'infini sur la direction de l'une et l'autre tangente commune distincte de Ox.

4°. Coniques confocales.

Les équations tangentielles de deux coniques ayant un foyer commun seront N° [712]

$$(1)\qquad (au+bv-1)(a_1u+b_1v-1)=b^2(u^2+v^2),$$

$$(2)\qquad (au+bv-1)(a_2u+b_2v-1)=B^2(u^2+v^2);$$

si l'on retranche ces équations membre à membre, il vient

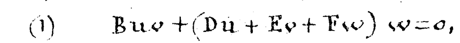
$$(au+bv-1)\left[\frac{a_1u+b_1v-1}{b^2}-\frac{a_2u+b_2v-1}{b^2}\right]=0;$$

c. à. d. qu'un des systèmes de points ombilicaux se compose du foyer commun et d'un point situé sur la droite qui joint les deux autres foyers.

IV: Propriétés relatives aux points ombilicaux et aux cordes communes.

901. Toute droite menée par un point ombilical de deux coniques a ses pôles, relatifs aux deux coniques, situés sur une 2ème droite passant par le point. Réciproquement, s'il existe un point tel que, pour deux droites passant par ce point, leurs pôles relatifs aux deux coniques soient sur des droites passant par le point, ce point sera un ombilic ou le point de concours de deux tangentes communes aux deux coniques.

Prenons pour axes les deux tangentes communes, les équations tangentielles des deux coniques seront (en se rappelant que les coordonnées de Ox sont $u=0$, $w=0$, et celles de Oy, $v=0$, $w=0$):



(1) $$Buv+(Du+Ev+Fw)w=0,$$

(2) $$B_1uv+(D_1u+E_1v+F_1w)w=0.$$

Les coordonnées (u_0, v_0, w_0) d'une droite passant par l'origine O, seront

(DD') $$v_0=mu_0,\quad w_0=0,$$

m étant une constante. L'équation générale du pôle d'une droite est

$$u_0F'_u+v_0F'_v+w_0F'_w=0;$$

les équations des pôles de la droite DD' par rapport à l'une et l'autre conique seront donc

(3) $$Bv+Dw+m(Bu+Ew)=0,$$

(4) $$B_1v+D_1w+m(B_1u+E_1w)=0.$$

Or ces deux équations sont vérifiées, pour $w=0$, $mu+v=0$; c. à. d. que les deux pôles sont situés sur la droite

$$w=0,\quad v+mu=0,$$

laquelle passe par le point O et est conjuguée harmonique de la droite DD' par rapport aux deux tangentes qui concourent en O.

Pour démontrer la réciproque, prenons le point en question pour origine et les deux droites pour axes des coordonnées; soient alors les équations tangentielles des deux coniques

$$S=Au^2+2Buv+Cv^2+2(Du+Ev)w+Fw^2=0,$$

$$S_1=A_1u^2+2B_1uv+C_1v^2+2(D_1u+E_1v)w+F_1w^2=0.$$

Les pôles de la droite Ox $(u_0=0, w_0=0)$, par rapport à ces deux coniques, ont pour équations respectives:

$$Bu+Cv+Ew=0,\quad B_1u+C_1v+E_1w=0;$$

ces deux points doivent se trouver sur une droite passant par l'origine $(w=0)$, on aura donc

$$\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

De même, les pôles de la droite Oy $(v_0=0, w_0=0)$ auront pour équations

$$Au+Bv+Dw=0,\quad A_1u+B_1v+D_1w=0;$$

ces deux points devant se trouver sur une droite par l'origine, on aura encore

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}.$$

Les équations des deux coniques pourront alors s'écrire

$$S=Au^2+2Buv+Cv^2+2(Du+Ev)w+Fw^2=0,$$

$$S_1=Au^2+2Buv+Cv^2+2(D_1u+E_1v)w+F_1w^2=0.$$

Si l'on retranche ces équations membre à membre, on obtient le système de points ombilicaux

$$w\left[(D-D_1)u+(E-E_1)v+\frac{F-E_1}{2}w\right]=0;$$

un de ces points est précisément l'origine $w=0$. Donc.......

902. La droite qui joint deux points ombilicaux communs à deux coniques, a le même pôle dans les deux courbes. Réciproquement, quand une droite a le même pole dans deux coniques, cette droite passe par deux des points ombilicaux de ces courbes. (Proposition déja démontrée N.° [898]).

Prenons deux des tangentes communes pour axes de coordonnées, les équations tangentielles des deux coniques seront

$$(1)\quad uv+w(Du+Ev+Fw)=0,$$

$$(2)\quad uv+w(D_1u+E_1v+F_1w)=0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, on trouve

$$w\left[(D-D_1)u+(E-E_1)u+(F-F_1)w\right]=0;$$

c'est le système des deux points ombilicaux

$$(3)\qquad w=0,\qquad \underbrace{(D-D_1)}_{d}u+\underbrace{(E-E_1)}_{e}v+\underbrace{(F-F_1)}_{f}w=0.$$

Le point polaire, par rapport à la conique (1), de la droite OO', passant par les deux points (3), est

$$u_0(v+Dw)+v_0(u+Ew)=0,$$

car $w_0=0$, on a de plus $du_0+ev_0=0$; l'équation qui précède devient alors

$$-(E-E_1)(v+Dw)+(D-D_1)(u+Ew)=0;$$

ou, en ordonnant

$$(4)\qquad (D-D_1)u-(E-E_1)v+(DE_1-D_1E)w=0.$$

Pour obtenir le pôle de la même droite par rapport à la conique (2), il faut changer D, E, F, en D_1, E_1, F_1, or l'équation (4) ne change pas; donc la droite OO' a les mêmes pôles dans les deux coniques.

Afin de démontrer la réciproque, prenons la droite en question pour axe Ox, et soient alors

$$S\qquad (1)\qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0,$$

$$S_1\qquad (2)\qquad A_1u^2+2B_1uv+C_1v^2+2D_1uw+2E_1vw+F_1w^2=0,$$

les équations des deux coniques. Les pôles de la droite Ox ($u_0=0, w_0=0$) sont, par rapport à chacune des coniques,

$$Bu+Cv+Ew=0,\quad B_1u+C_1v+E_1w=0,$$

ces deux points devant coincider, on a

$$\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}=\frac{E_1}{E};$$

et les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$(S)\qquad Au^2+2Buv+Cv^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0,$$

$$(S_1)\qquad A_1u^2+2Buv+Cv^2+2D_1uw+2Evw+F_1w^2=0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, on obtient le système suivant de points ombilicaux

$$(A-A_1)u^2+2(D-D_1)uw+(F-F_1)w^2=0,$$

or cette équation représente deux points situés sur l'axe des x; donc ......

Il résulte de cette proposition et de celle du N.° [898] que:

Etant donnés deux coniques, il existe, en général, trois droites dont chacune a le même pôle dans les deux coniques: Une de ces droites est toujours réelle, les deux autres peuvent être imaginaires.

Ces droites sont, en effet, d'après le théorème qui précède, les lignes qui joignent les points ombilicaux d'un même système; or il y a trois systèmes de points ombilicaux, N.° [898]; donc.....

903. Correspondance des systèmes de cordes communes et des systèmes de points ombilicaux

Etant données deux coniques, elles ont quatre points d'intersection communs (a, b, c, d), et quatre tangentes communes ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

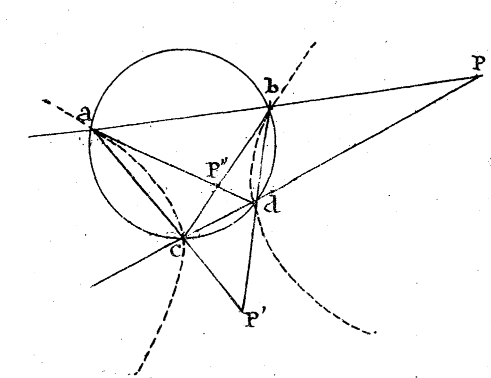
Par les quatre points communs passent trois systèmes de deux sécantes

$$(ab, cd),\ (ac, bd),\ (ad, bc),$$

qu'on appelle systèmes de cordes communes; soient P, P', P'' les points de rencontre des deux droites de chaque système, ou les centres de chaque système de cordes communes.

1° **Chacun des points P, P', P'' a la même polaire dans les deux courbes; et la polaire de chacun de ces points est la droite qui passe par les deux autres; de sorte que le triangle (P P' P'') est conjugué par rapport aux deux coniques.**

Cette proposition a été démontrée aux N.os [879] ou [897]; elle résulte aussi de la construction même de la polaire.



En effet, les quatre points a, b, c, d, sont sur l'une et l'autre courbe; si l'on veut construire la polaire du point P, on peut considérer les sécantes Pab, Pcd; les diagonales bc, ad, bd, ac, se coupent en deux points P' et P'', qui seront précisément sur la polaire du point P.

Le calcul des N.os [879] ou [897] montre en outre que ce sont les seuls points qui aient même polaire par rapport aux deux courbes.

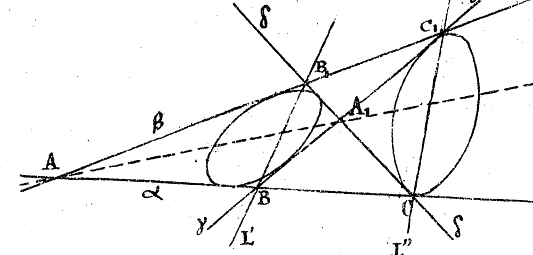
Les quatre tangentes communes forment par leurs intersections trois systèmes de deux points

$$(\alpha\beta, \gamma\delta), (\alpha\gamma, \beta\delta), (\alpha\delta, \beta\gamma), \text{ ou } (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1),$$

qu'on appelle systèmes de points ombilicaux; soient L, L', L'', les droites passant par les deux points de chaque système.

2° **Chacune des droites L, L', L'', a le même pôle dans les deux courbes; et le pôle de chacune de ces droites est le point de concours des deux autres droites; le triangle L L' L'' est conjugué par rapport aux deux coniques.**

Cette proposition résulte du calcul des N.os [898] ou [902]; elle est aussi une conséquence de la construction du pôle



d'une droite. Ainsi d'un point A on mène les tangentes à une des coniques; d'un deuxième point A_1 on mène également les tangentes; les intersections de ces tangentes entre elles donnent des droites qui passent par le pôle de la droite AA_1, N.o [466]; ces droites sont ici L' et L''; donc leur intersection est le pôle de la droite AA_1 ou L par rapport à l'une ou à l'autre des coniques.

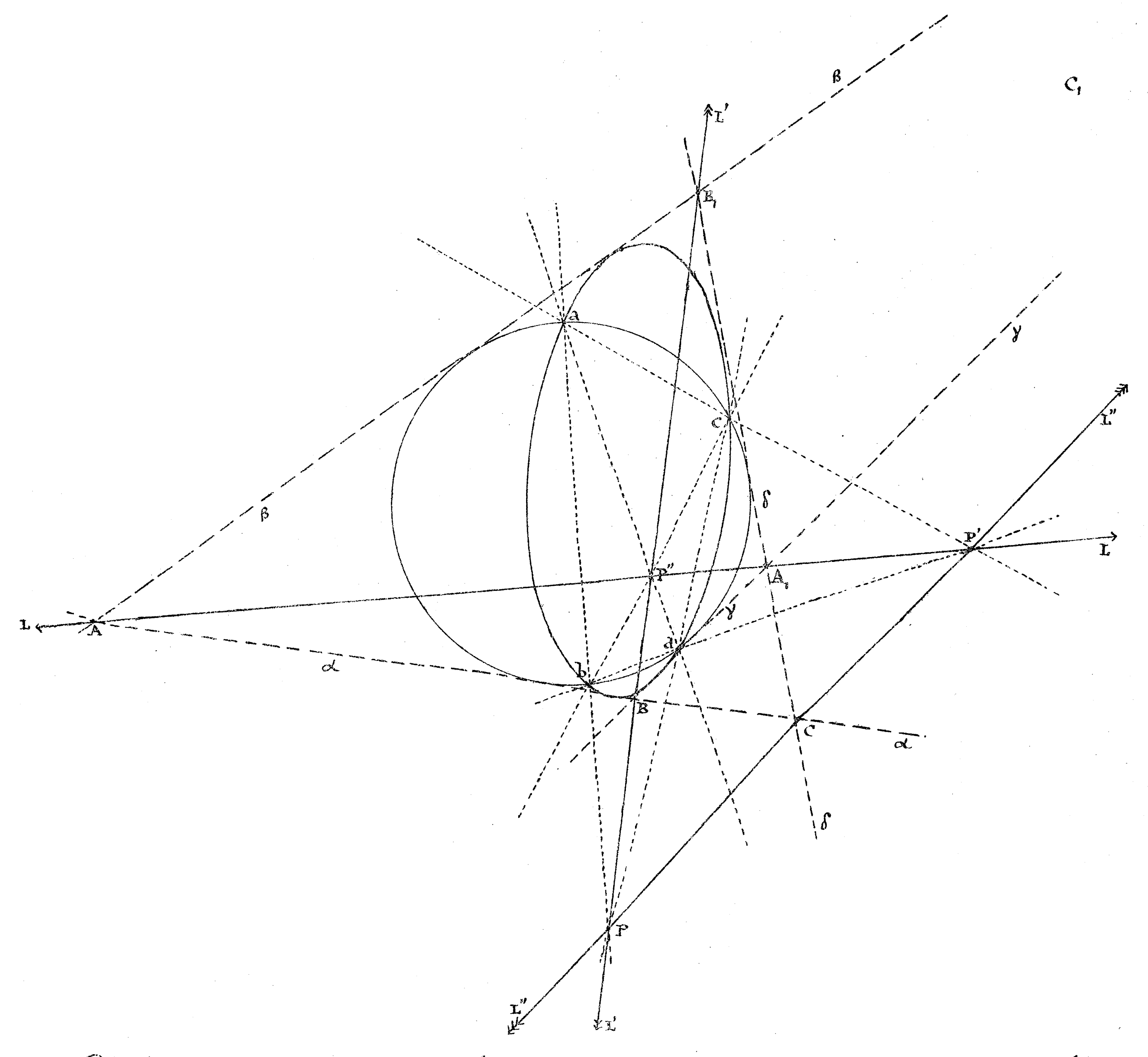
Comme dans le plan, il n'y a que trois points qui aient la même polaire par rapport à deux coniques données, et que trois droites qui aient le même pôle, il en résulte que:

3° **Les droites L, L', L'' qui passent par les systèmes de points ombilicaux ne sont autres que les droites P'P'', PP'', PP' qui joignent les centres des systèmes de cordes communes. Les deux points ombilicaux sont conjugués harmoniques par rapport aux deux centres qui se trouvent sur la même droite.**

Quant à la dernière partie de la proposition (3°), elle résulte évidemment de la construction de la polaire d'un point par rapport à deux droites.

Si nous considérons en effet, les deux droites PP'', PP'; la polaire du point A se déterminera à l'aide des sécantes A B C, A B_1C_1; les diagonales BC_1 et B_1C se coupent en A_1; donc PA_1 est la conjuguée harmonique de PA par rapport aux droites PP' et PP''.

Ainsi, en résumé, étant données deux coniques dans un plan, les points qui ont les mêmes polaires par rapport aux deux courbes sont les points de concours des trois couples de cordes communes, et ces polaires communes sont les trois diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes communes aux deux coniques N.o [898].



Dans la figure ci-dessus, a, b, c, d, sont les quatre points communs aux deux coniques; P, P', P''', sont les points de concours des trois systèmes de sécantes communes; α, β, γ, δ, sont les quatre tangentes communes; les trois systèmes de points ombilicaux sont A, A_1; B, B_1; C, C_1; ces points sont respectivement situés sur les droites P'P'' ou L, P''P ou L', PP' ou L''.
Les quatre systèmes harmoniques sont $(\overline{AA_1}, \overline{P'P''})$, $(BB_1, P''P)$, (CC_1, PP').

N. B. Pour faciliter plusieurs des énoncés qui suivent, nous dirons, avec M. Chasles, que les points ombilicaux (A, A_1) par exemple, qui se trouvent sur la droite P'P'', correspondent aux cordes communes qui passent par le point P, pôle de la droite P'P''.

904. **Si d'un point d'une corde commune à deux coniques on mène des tangentes aux deux courbes, les quatre droites, qui joindront les points de contact de la 1ère aux points de contact de la 2ème, passeront, deux à deux, par les points ombilicaux correspondant à la corde commune.**

Réciproquement: si par un point ombilical commun à deux coniques, on mène une droite qui coupe ces courbes chacune en deux points, et qu'en ces points on mène les tangentes: les tangentes à la première courbe rencontreront les tangentes à la seconde en quatre points situés, deux à deux, sur les deux cordes communes correspondant à l'ombilic.

Soit P, P', P'' les centres des trois systèmes de cordes communes aux deux coniques; le triangle PP'P'' est conjugué par rapport aux deux coniques N.° (903); si l'on prend ce triangle pour triangle de référence, leurs équations pourront alors

se mettre sous la forme

$$S \qquad (1) \qquad b^2 Y^2 + c^2 Z^2 = X^2,$$

$$S_1 \qquad (2) \qquad b_1^2 Y^2 + c_1^2 Z^2 = X^2,$$

les quantités b, b_1, c, c_1, pouvant être imaginaires.

Si l'on retranche ces équations membre à membre, on aura

$$(b^2 - b_1^2)\,Y^2 + (c^2 - c_1^2)\,Z^2 = 0;$$

c'est le système de cordes communes passant par le centre P; d'où l'on déduira

$$(3) \qquad Y = +hZ\,, \quad Y = -hZ$$

après avoir posé

$$(3\,bis) \qquad h = \sqrt{\frac{c^2 - c_1^2}{b_1^2 - b^2}}\,.$$

Ces cordes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites PP', PP''. No (903, 3°).

Le système de points ombilicaux correspondant No [903] à ce système de cordes communes sera sur la droite P'P'' ou $X = 0$.

Les coordonnées d'un point quelconque M situé sur la conique S pourront se représenter par

$$(4) \qquad (M) \quad \begin{cases} bY = X\cos\varphi, \\ cZ = X\sin\varphi; \end{cases}$$

et les coordonnées d'un point quelconque M_1 situé sur la conique S_1 pourront également se représenter par

$$(5) \qquad (M_1) \quad \begin{cases} b_1 Y = X\cos\varphi_1 \\ c_1 Z = X\sin\varphi_1. \end{cases}$$

L'équation de la tangente en un point (X', Y', Z') étant

$$b^2\,YY' + c^2 ZZ' - XX' = 0;$$

on conclut de là que, la tangente en M à la conique S est

$$(6) \qquad bY\cos\varphi + cZ\sin\varphi = X\,;$$

et la tangente en M_1 à la conique S_1 est,

$$(7) \qquad b_1 Y\cos\varphi_1 + c_1 Z\sin\varphi_1 = X.$$

On trouve encore facilement pour l'équation de la droite MM_1

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & \dfrac{\cos\varphi}{b} & \dfrac{\sin\varphi}{c} \\ 1 & \dfrac{\cos\varphi_1}{b_1} & \dfrac{\sin\varphi_1}{c_1} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant:

$$(8) \qquad (MM_1) \qquad X(b_1 c\cos\varphi\sin\varphi_1 - bc_1\cos\varphi_1\sin\varphi) + bb_1(c_1\sin\varphi - c\sin\varphi_1)\,Y + cc_1(b\cos\varphi_1 - b_1\cos\varphi)\,Z = 0.$$

Ceci posé, pour déterminer les points ombilicaux (A, A_1), exprimons d'abord que la droite (6), tangente à la conique S, est également tangente à la conique S_1, on trouve immédiatement

$$c^2 b_1^2 \sin^2\varphi + c_1^2 b^2 \cos^2\varphi = b_1^2 c_1^2\,;$$

d'où l'on déduit

$$\sin^2\varphi = \frac{c_1^2\,(b^2 - b_1^2)}{b^2 c_1^2 - b_1^2 c^2}\,, \quad \cos^2\varphi = \frac{b_1^2\,(c_1^2 - c^2)}{b^2 c_1^2 - b_1^2 c^2}\,.$$

Si maintenant on cherche l'intersection de la tangente (6) avec la droite P'P'' ou $X = 0$, et qu'on ait égard aux valeurs précédentes de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, et à la notation (3 bis), on trouve pour les coordonnées des points ombilicaux A et A_1:

$$(9) \qquad (A, A_1) \qquad X = 0, \quad bb_1 Y \pm \frac{cc_1}{h} Z = 0.$$

Il est alors facile de démontrer complètement la proposition énoncée.

Supposons d'abord que les tangentes en M et M_1 (6) et (7), se coupent sur une des cordes communes (3); on a la condition

$$(10) \qquad c \sin\varphi - c_1 \sin\varphi_1 = \pm h\,(b\cos\varphi - b_1\cos\varphi_1);$$

alors la droite MM_1 ou (8) passe par un des points ombilicaux. En effet, en y introduisant les valeurs (9), l'équation (8) devient

$$(11) \qquad c_1 \sin\varphi - c\sin\varphi_1 = \pm h\,(b\cos\varphi_1 - b_1\cos\varphi).$$

De sorte que la relation (10) exprime que les tangentes en M et M_1 se coupent sur une des cordes communes (3); tandis que la relation (11) exprime que la droite MM_1 passe par un des points ombilicaux (9); or ces deux relations sont une conséquence l'une de l'autre. En effet, posons

$$(12) \qquad \frac{bh}{c} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \frac{b_1 h}{c_1} = \operatorname{tang}\alpha_1;$$

les relations (10) et (11) deviennent

$$\frac{c}{\cos\alpha}\sin(\varphi \pm \alpha) = \frac{c_1}{\cos\alpha_1}\sin(\varphi_1 \pm \alpha_1),$$

$$\frac{c}{\cos\alpha}\sin(\varphi_1 \pm \alpha) = \frac{c_1}{\cos\alpha_1}\sin(\varphi \pm \alpha_1),$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être pris ensemble dans chacune des relations prises isolément. Mais, d'après la définition (3 bis) de h, on a

$$\frac{c}{\cos\alpha} = \frac{c_1}{\cos\alpha_1}; \text{ car } \frac{c}{\cos\alpha} = \sqrt{c^2+b^2h^2}, \ \frac{c_1}{\cos\alpha_1} = \sqrt{c_1^2+b_1^2h^2}; \text{ et } c^2+b^2h^2 = c_1^2+b_1^2h^2.$$

Les relations (10) et (11) sont donc respectivement

$$(10\text{ bis}) \qquad \sin(\varphi \pm \alpha) = \sin(\varphi_1 \pm \alpha_1),$$

$$(11\text{ bis}) \qquad \sin(\varphi \pm \alpha_1) = \sin(\varphi_1 \pm \alpha).$$

Or si la relation (10 bis) est vérifiée, on aura, par exemple

$$\varphi + \alpha = \varphi_1 + \alpha_1; \text{ on en conclura } \varphi - \alpha_1 = \varphi_1 - \alpha,$$

c. à. d. que la relation (11 bis) sera vérifiée.

La proposition énoncée et sa réciproque se trouvent donc démontrées.

N. B. On aurait pu simplifier cette démonstration en employant simultanément les équations en coordonnées-point et les équations tangentielles.

905. Lorsque deux coniques ont un contact du troisième ordre, si d'un point de la tangente commune on mène des tangentes aux deux coniques, la droite qui joint les deux points de contact passe par le point de contact des deux courbes.

Réciproquement: Quand deux coniques se touchent en un point A, si les tangentes menées d'un point quelconque de leur tangente commune en A ont leurs points de contact toujours en ligne droite avec ce point A, les deux coniques ont un contact du 3ème ordre en ce point.

Une partie de cette proposition est une conséquence de la précédente; nous allons néanmoins la démontrer directement.

y
P
M
N
O
x

Prenons pour origine le point de contact commun, et pour axe des y la tangente commune; les équations des deux coniques seront

$$(S) \qquad (1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2x = 0,$$

$$(S_1) \qquad (2) \qquad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2x = 0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, on aura

$$(3) \qquad (A-A_1)x^2 + 2(B-B_1)xy + (C-C_1)y^2 = 0;$$

c'est le système des cordes communes passant par le point de contact.

Si les coniques ont un contact du troisième ordre, ces deux droites doivent se confondre avec la tangente Oy, on aura donc

$$(4) \qquad C_1 = C, \; B_1 = B.$$

Or soit β l'ordonnée d'un point quelconque P pris sur la tangente commune Oy; les polaires de ce point, par rapport à chacune des coniques, sont

$$(5) \qquad \beta(Bx + Cy) + x = 0,$$
$$(6) \qquad \beta(B_1x + C_1y) + x = 0;$$

ce sont les droites OM et ON, si M et N sont les points de contact des tangentes menées par le point P à chacune des coniques.

Si les coniques ont un contact du 3ème ordre, on a les relations (4); par conséquent, les droites OM et ON coïncident; la droite MN passe par le point O, c'est la première partie de la proposition.

Maintenant, si l'on exprime que les droites (5) et (6) coïncident, quel que soit β, c.à.d. que la droite MN passe toujours par le point O, on a

$$B_1 = B \qquad C_1 = C;$$

les deux coniques ont donc un contact du 3ème ordre; c'est la proposition réciproque.

Chapitre VII

Démonstration de plusieurs propositions relatives aux coniques.

§I. Diverses formes spéciales de l'équation des coniques.

906. Nous rappellerons d'abord que l'équation générale des coniques rapportées à un triangle ABC est

$$(I) \qquad aX^2 + a_1Y^2 + a_2Z^2 + 2bYZ + 2b_1XZ + 2b_2XY = F(X, Y, Z) = 0;$$

on peut regarder X, Y, Z, comme des fonctions linéaires des coordonnées Cartésiennes (x, y) d'un point; ou bien, X, Y, Z, peuvent être considérées comme proportionnelles aux distances du point (x, y) aux trois droites fixes ayant pour équations $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; l'équation (I) est alors l'équation en coordonnées trilatères de la conique.

1°. Équation générale des coniques circonscrites à un triangle.

907. Prenons le triangle donné pour triangle de référence; soient $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, les équations de ses côtés; il faut exprimer que la conique représentée par l'équat (I) passe par les trois sommets.

Elle doit passer par le sommet A $(Y=0, Z=0)$, donc

$$a = 0;$$

de même puisqu'elle doit passer par les sommets B et C on aura

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0;$$

l'équation se réduit donc à

$$\text{(II)} \qquad bYZ + b_1XZ + b_2XY = 0;$$

c'est l'équation la plus générale des coniques circonscrites à un triangle. On le voit à priori: une conique, et une seule, est en effet déterminée par cinq points; or la courbe (II) passe par les trois sommets du triangle; donc elle sera complètement déterminée lorsqu'on la fera passer par deux autres points choisis arbitrairement; mais l'équation renferme deux rapports indéterminés, on pourra en profiter de manière à faire passer la conique par les deux points choisis; donc l'équation (II) peut représenter toutes les coniques passant par les trois points donnés.

Si nous désignons par A, B, C des fonctions linéaires de x et y, cette équation pourra s'écrire encore

$$\text{(II bis)} \qquad \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0.$$

Supposons que l'une des fonctions linéaires, C, se réduise à une constante; l'équation (II) devient

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + c = 0,$$

ou

$$aB + bA + cAB = 0.$$

Si l'on rend cette équation homogène, c.à.d. si l'on remplace x par $\frac{x}{z}$ et y par $\frac{y}{z}$, il vient

$$(aB + bA)z + cAB = 0;$$

cette équation représente une conique passant par l'intersection des deux droites A et B avec la droite à l'infini; le triangle auquel est circonscrit cette conique a deux côtés à une distance finie et un 3ème à l'infini; donc ces coniques passent toutes par les deux mêmes points à l'infini. Cette équation représente alors des hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques. Ce que nous pouvions constater encore en remarquant que les termes du 2ème degré et, par suite les directions asymptotiques, ne changent pas lorsqu'on fait varier les rapports $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$.

908. **Les droites qui joignent les sommets d'un triangle circonscrit aux points de contact des côtés opposés sont concourantes.**

Soit ABC le triangle inscrit dans une conique et $A_1B_1C_1$ le triangle circonscrit, les points de contact se trouvant aux sommets du triangle inscrit. L'équation de la conique étant

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

on a pour l'équation de la tangente à la conique au point (X_0, Y_0, Z_0):

$$XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + ZF'_{Z_0} = 0,$$

ou

$$X_0F'_X + Y_0F'_Y + Z_0F'_Z = 0,$$

avec la condition $F(X_0, Y_0, Z_0) = 0$.

La tangente au point A $(Y_0 = 0, Z_0 = 0)$ sera donc

$$F'_X = 0;$$

de même les tangentes en B et C auront pour équation

$$F'_Y = 0, \quad F'_Z = 0.$$

On pourrait encore obtenir comme il suit les équations de ces tangentes.

Ainsi pour avoir la tangente en A, on prendrai l'équation d'une droite quelconque, $Y = \lambda Z$, passant par ce point; on cherchera son intersection avec la courbe et on exprimera que l'équation

a deux racines égales, ce qui déterminera λ et par suite la tangente.

Les équations des tangentes, ou côtés du triangle $A_1 B_1 C_1$, sont donc, en appliquant à l'équation (II) N.º (907)

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} B_1C_1 & b_1 Z + b_2 Y = 0, \\ C_1A_1 & b Z + b_2 X = 0, \\ A_1B_1 & b Y + b_1 X = 0. \end{array}$$

Nous allons démontrer que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes.

Pour avoir l'équation de AA_1, prenons l'équation générale des droites passant par le point A_1, intersection de C_1A_1 et de B_1A_1 ; on a

$$bZ + b_2 X + K(bY + b_1 X) = 0;$$

exprimons que cette droite passe par le point A $(Y=0, Z=0)$; ce qui donne

$$b_2 + K b_1 = 0, \text{ d'où } K = -\frac{b_2}{b_1};$$

on a par suite :

$$b_1(bZ + b_2 X) - b_2(bY + b_1 X) = 0,$$

$$b_1 Z - b_2 Y = 0;$$

ou enfin

$$(2)\qquad AA_1 \mid \frac{Y}{b_1} = \frac{Z}{b_2}.$$

De même on trouvera que l'équation de BB_1 est

$$(2)\qquad BB_1 \mid \frac{Z}{b_2} = \frac{X}{b};$$

et celle de CC_1

$$(2)\qquad CC_1 \mid \frac{X}{b} = \frac{Y}{b_1}.$$

Or cette troisième équation est une conséquence des deux autres ; donc les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes.

909. Les intersections des côtés opposés de ces triangles sont en ligne droite.

En effet, les équations des côtés du triangle $A_1 B_1 C_1$ peuvent se mettre sous la forme :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l|l} B_1C_1 & \dfrac{Y}{b_1} + \dfrac{Z}{b_2} = 0, \\ A_1C_1 & \dfrac{Z}{b_2} + \dfrac{X}{b} = 0, \\ A_1B_1 & \dfrac{X}{b} + \dfrac{Y}{b_1} = 0. \end{array} \right.$$

Prenons l'équation générale des droites passant par le point d'intersection des deux côtés opposés BC, B_1C_1, elle sera

$$\lambda X + \frac{Y}{b_1} + \frac{Z}{b_2} = 0;$$

exprimons que cette droite passe par le point d'intersection des deux droites AC, A_1C_1 c.à.d.

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = 0, \\ \dfrac{Z}{b_2} + \dfrac{X}{b} = 0, \end{array} \right.$$

on trouve $\qquad \lambda = \frac{1}{b};$

par suite l'équation de la droite passant par les intersections des côtés (BC, B_1C_1) et (AC, A_1C_1) est

$$\frac{X}{b} + \frac{Y}{b_1} + \frac{Z}{b_2} = 0.$$

Or il est visible qu'elle passe par l'intersection des deux autres côtés AB, A_1B_1, c.à.d.

$$\left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ \dfrac{X}{b}+\dfrac{Y}{b_1}=0 . \end{array}\right.$$

II.° Équation générale des coniques inscrites dans un triangle.

910\. Cette équation se déduit facilement de l'équation générale (I).

Prenons pour triangle de référence le triangle donné ; la conique doit être tangente à la droite $X=0$, donc si l'on fait $X=0$, le 1.er membre de l'équation

$$a_1Y^2+a_2Z^2+2bYZ=0,$$

doit être un carré parfait, ce qui exige que

$$b^2=a_1a_2 .$$

De même, en exprimant que la conique est tangente aux droites $Y=0, Z=0$, on obtient les conditions

$$b_1^2=aa_2 ,\ b_2^2=aa_1 .$$

Au lieu de a, a_1, a_2, écrivons a^2, a_1^2, a_2^2 ; les conditions à remplir seront alors

$$b=\pm a_1a_2 ;$$
$$b_1=\pm aa_2 ;$$
$$b_2=\pm aa_1 .$$

L'équation se présente alors sous la forme

$$a^2X^2+a_1^2Y^2+a_2^2Z^2\pm 2a_1a_2YZ\pm 2aa_2XZ\pm 2aa_1XY=0.$$

On ne peut pas prendre à la fois les signes plus, car on aurait alors un carré parfait ; il en serait encore de même si l'on prenait un terme avec le signe + et deux termes avec le signe − ; d'ailleurs le cas où l'on prendrait un terme avec le signe − et deux termes avec le signe +, se ramène au cas où les trois termes sont précédés du signe − en changeant a en $-a$, ou a_1 en $-a_1$, ou a_2 en $-a_2$; donc l'équation des coniques inscrites dans le triangle ABC est

$$\text{(III)}\quad a^2X^2+a_1^2Y^2+a_2^2Z^2-2a_1a_2YZ-2aa_2XZ-2aa_1XY=0;$$

cette équation peut s'écrire encore

$$\text{(III bis)}\quad \sqrt{aX}\pm\sqrt{a_1Y}\pm\sqrt{a_2Z}=0;$$

on retrouve en effet l'équation (III) en rendant rationnelle l'équation (III bis).

On peut constater autrement que la conique représentée par l'équation (III) remplit toutes les conditions posées. Ainsi cette conique touche le côté $X=0$; car si l'on fait $X=0$, on a un carré parfait ; il en est de même pour $Y=0$, ainsi que pour $Z=0$; donc la conique est inscrite au triangle.

Nous écrirons aussi l'équation (III) sous la forme

$$\text{(III ter)}\quad \sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}=0,$$

a, b, c étant des constantes, et A, B, C des fonctions linéaires de x et y.

Supposons que la fonction linéaire C se réduise à une constante, l'équation devient

$$\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{c}=0.$$

Cette équation représente une parabole ; en effet si dans les fonctions linéaires A, B on remplace x par $\frac{x}{z}$ et y par $\frac{Y}{z}$, il viendra

$$\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cz}=0;$$

équation qui représente une conique tangente aux trois droites $A=0, B=0, Z=0$; cette droite $Z=0$ est la droite de l'infini ; or on sait qu'une conique tangente à la droite de l'infini est une parabole.

On peut le voir d'ailleurs en rendant l'équation rationnelle; il vient alors

$$aA+bB+2\sqrt{aA}.\sqrt{bB}=c,$$

ou $$(aA+bB-c)^2=4abAB;$$

ou enfin $$(aA-bB)^2+c(c-2aA-2bB)=0;$$

nous avons un carré et une fonction linéaire; nous retrouvons donc bien la forme de l'équation de la parabole.

Remarque. On conclut de l'équation générale (III), qu'il y a quatre coniques touchant trois droites données et passant par deux points donnés.

III°. Équation des coniques conjuguées par rapport à un triangle.

911. Nous avons déjà vu N° [456] que l'équation générale des coniques conjuguées par rapport à un triangle est

$$\text{(IV)}\quad aX^2+bY^2+cZ^2=0;$$

pour cela, on a exprimé que les sommets du triangle étaient les pôles des côtés opposés par rapport à la conique; ceci équivaut donc à trois conditions; car une conique est déterminée par cinq points; mais elle sera parfaitement déterminée lorsqu'on la fera passer par deux points du plan, puisque l'équation renferme deux rapports indéterminés; donc les conditions imposées à la conique reviennent à donner trois conditions.

Lorsqu'on assujettit les coniques conjuguées à passer par un point fixe, la polaire d'un point fixe passe également par un point fixe; et inversement, les polaires de ce second point passent par le premier.

En effet, la courbe passant par un point fixe X_0, Y_0, Z_0 on a

$$aX_0^2+bY_0^2+cZ_0^2=0.$$

Soit X_1, Y_1, Z_1 un point fixe, sa polaire est

$$aXX_1+bYY_1+cZZ_1=0;$$

toutes ces polaires passent par un point fixe. En effet si l'on élimine c entre ces deux équations, il vient

$$a(X_0^2ZZ_1-XX_1Z_0^2)+b(Y_0^2ZZ_1-YY_1Z_0^2)=0;$$

or quels que soient a et b, cette équation est vérifiée lorsqu'on a à la fois

$$\begin{cases} X_0^2ZZ_1-XX_1Z_0^2=0, \\ Y_0^2ZZ_1-YY_1Z_0^2=0; \end{cases}$$

ou

$$\frac{X_2X_1}{X_0^2}=\frac{Y_2Y_1}{Y_0^2}=\frac{Z_2Z_1}{Z_0^2};$$

donc toutes les polaires passent par le point fixe (X_2, Y_2, Z_2) déterminé par ces équations; la proposition inverse est évidente.

IV°. Équation des coniques passant par les points d'intersection de deux coniques données.

912. 1° Soient $S=0$, $S_1=0$; les équations de deux coniques; l'équation générale des coniques passant par leurs points d'intersection est

$$\text{(V)}\quad \Sigma=S+\lambda S_1=0.$$

En effet, les coordonnées des points communs aux coniques données annulent S et S_1, et par suite $S+\lambda S_1$.

De plus, c'est l'équation la plus générale; car deux coniques se coupant en quatre points; toutes les coniques Σ ont ces points communs; comme une courbe du second degré est déterminée par cinq points, la conique

Σ sera complètement déterminée si on l'assujettit à passer par un cinquième point choisi arbitrairement; ce que l'on pourra toujours faire en déterminant convenablement λ, quelque soit le point choisi.

Donc $S+\lambda S_1=0$ est l'équation la plus générale des coniques passant par les points d'intersection des coniques $S=0$ et $S_1=0$.

Une des coniques S ou S_1 peut se réduire à un système de deux droites; soit, par exemple, $S_1=P.Q$, P et Q étant deux fonctions linéaires.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de la conique S avec les deux droites $P=0$ et $Q=0$ sera donc

$$(\text{V bis})\quad S+\lambda PQ=0.$$

Si nous supposons que les points d'intersection a et b, a_1 et b_1 viennent se confondre, les deux droites P et Q se confondront. Mais alors la conique Σ devient tangente à la conique S aux points où (a,b), (a_1,b_1), sont venus se réunir; et alors l'équation

$$(\text{V ter})\quad S+\lambda P^2=0,$$

sera l'équation la plus générale des coniques doublement tangentes à la conique S aux points où elle est rencontrée par la droite $P=0$.

2° Cas particuliers.

Revenons à l'équation $S+\lambda PQ=0$, et supposons que la fonction linéaire Q se réduise à une constante, l'équation prend alors la forme

$$S+\lambda P=0.$$

Pour trouver sa signification, remplaçons x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ et chassons le dénominateur; l'équation rendue homogène sera

$$S+\lambda Pz=0;$$

cette équation représente une conique passant par les points d'intersection de la conique S avec la droite $P=0$ et la droite de l'infini $z=0$.

Toutes ces coniques passent donc par les mêmes points à l'infini, c.à.d. ont les mêmes directions asymptotiques.

Ainsi l'équation $S+\lambda P=0$ est l'équation générale des coniques passant par l'intersection de la conique S et de la droite P et ayant les asymptotes parallèles aux asymptotes de la conique S.

Soit maintenant l'équation $S+\lambda P^2=0$, et supposons que la fonction linéaire P se réduise à une constante, de sorte que l'équation a la forme

$$S+\lambda=0.$$

Pour interpréter cette équation passons aux coordonnées homogènes, c.à.d. remplaçons x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, l'équation prend la forme

$$S+\lambda z^2=0;$$

équation d'une conique doublement tangente à la conique S aux points où elle est rencontrée par la droite de l'infini.

Donc l'équation $S+\lambda=0$ est l'équation générale des coniques ayant mêmes asymptotes que la conique S.

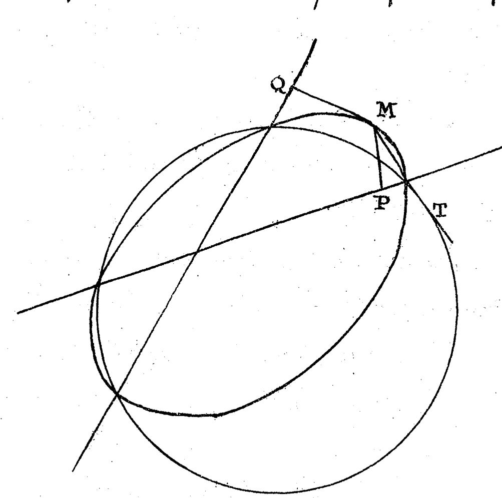
913. L'interprétation géométrique des équations

$$S+\lambda PQ=0,$$

$$S+\lambda P^2=0,$$

lorsqu'on suppose que $S=0$ est l'équation d'un cercle, conduit à des résultats remarquables.

Si dans l'équation (I) $S+PQ=0$, nous supposons que S soit le premier membre de l'équation d'un cercle, nous aurons dans S, P, Q, assez de constantes arbitraires (huit) pour avoir le droit d'affirmer que l'équation (I) peut représenter une conique quelconque.



Or si M est un point de la conique, la quantité S est proportionnelle au carré de la tangente menée du point M au cercle, $S=\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{MT}^2$; P et Q sont des quantités proportionnelles aux distances du point M aux droites $P=0$, $Q=0$, ainsi

$$P=\frac{1}{\beta}\cdot\overline{MP},\quad Q=\frac{1}{\gamma}\overline{MQ}.$$

Mais le point M étant sur la conique,

$$S+P.Q=0;$$

on doit avoir

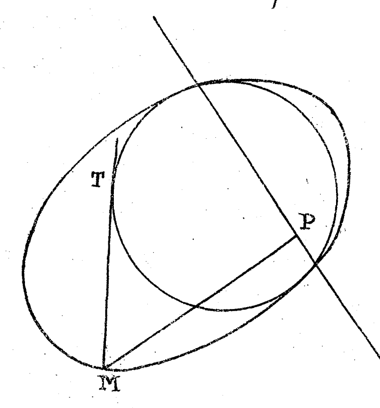
$$\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{MT}^2+\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\overline{MP}.\overline{MQ}=0,$$

ou

$$(2)\qquad \frac{\overline{MT}^2}{\overline{MP}.\overline{MQ}}=\text{Constante}.$$

On peut donc regarder une conique comme le lieu des points tels que le rapport du carré de la distance de ce point à un cercle, comptée sur la tangente, au produit des distances du même point à deux droites fixes est constant. On voit, en outre, que cette conique passe par les points d'intersection du cercle et des deux droites fixes.

Considérons encore l'équation



$$(3)\qquad S+P^2=0,$$

et supposons que S soit le premier membre de l'équation d'un cercle; nous aurons dans S et P assez de constantes arbitraires (six) pour avoir le droit d'affirmer que l'équation (2) peut représenter une conique quelconque. Or, si M est un point de la conique, la quantité S est proportionnelle au carré de la tangente menée du point M au cercle considéré et dont l'équation est $S=0$; Ainsi $\frac{1}{\alpha}\overline{MT}^2=S$;

de même la quantité P est proportionnelle à la distance du point M à la droite dont l'équation est $P=0$; de sorte que

$$P=\frac{1}{\beta}\overline{MP}.$$

Mais, le point M se trouve sur la conique,

$$S+P^2=0,$$

et par suite $\frac{1}{\alpha}\overline{MT}^2+\frac{1}{\beta^2}\overline{MP}^2=0$,

ou

$$(4)\qquad \frac{\overline{MT}}{\overline{MP}}=\text{Constante}.$$

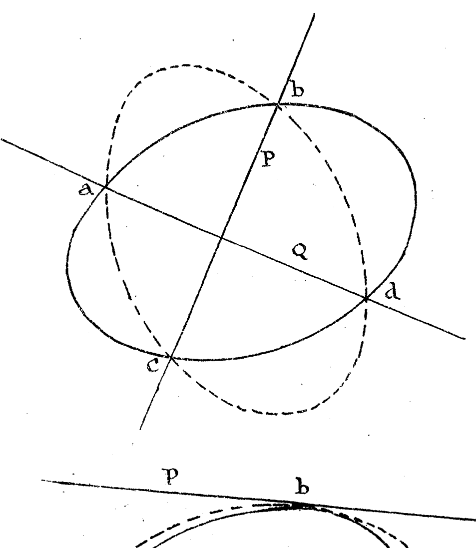
Donc une conique peut être regardée comme le lieu des points tels que le rapport des distances de ce point à un cercle (distance comptée sur la tangente) et à une droite fixe est constant. On voit que la conique est doublement tangente au cercle aux points où il est rencontré par la droite fixe.

Si le cercle se réduit à un point, (cercle de rayon nul) le lieu des points dont le rapport des distances à ce point et à une droite fixe est constant est une conique doublement tangente au cercle de rayon nul aux points où la droite rencontre ce cercle de rayon nul. Nous retrouvons ainsi la propriété et la définition des foyers.

914. Coniques osculatrices.

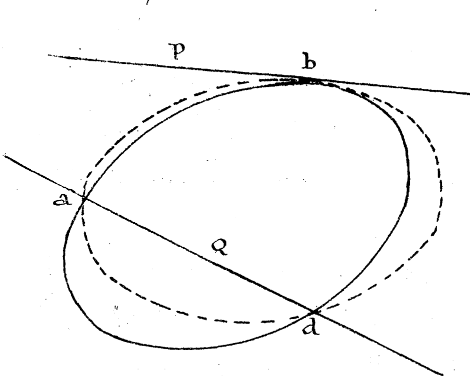
Nous avons trouvé pour l'équation générale des coniques passant par l'intersection d'une conique $S=0$ et de deux droites $PQ=0$,

$$\Sigma=S+\lambda PQ=0.$$



Supposons que deux des points d'intersection b et c se confondent, la droite P devient alors une tangente. Les coniques Σ sont tangentes en b à la conique S et ont avec elle deux autres points communs a et b.

Supposons enfin que, le point a restant fixe, le point d se rapproche indéfiniment du point b, les coniques Σ sont encore tangentes en b, et ont un autre point commun a. Mais le contact en b avec la conique S est un contact du second ordre, puisque trois points sont venus se confondre au point b; les coniques Σ sont dites osculatrices à la conique S; les coniques Σ touchent en b la conique S, mais la traversent, de la même manière qu'en un point d'inflexion la tangente traverse la courbe.

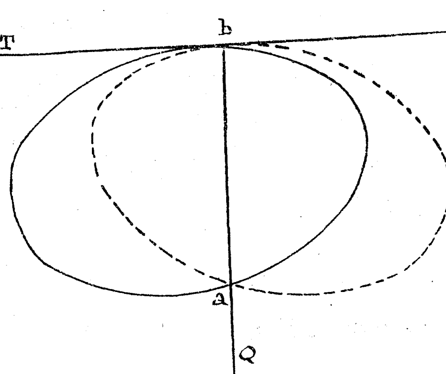


L'équation des coniques osculatrices est

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma_1 = S + \lambda TQ = 0,$$

$T=0$ étant l'équation de la tangente à la conique S au point d'osculation, et $Q=0$ étant une sécante quelconque passant par le point d'osculation.

Lorsque la conique Σ_1 devient un cercle, le cercle est dit cercle osculateur. Pour trouver l'équation de ce cercle, il suffit d'exprimer que l'équation $S+\lambda TQ=0$ représente un cercle.



Appliquons à l'ellipse.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation d'une ellipse en coordonnées rectangulaires, l'équation générale des courbes du second degré osculatrices à cette ellipse au point (x_1, y_1) sera, d'après ce qui vient d'être dit,

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)\left[y-y_1-m(x-x_1)\right]=0;$$

$y-y_1=m(x-x_1)$ est l'équation de la corde passant par le point de contact de la tangente.

Cherchons les conditions pour que cette équation représente un cercle; on trouve en annulant le coefficient de xy

$$(2) \qquad m=\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1};$$

et en égalant les coefficients des carrés, on a $\frac{1}{a^2}-\lambda\frac{x_1 m}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda y_1}{b^2}$,

$$\text{d'où} \quad (3) \qquad \lambda=-\frac{a^2c^2y_1}{a^4y_1^2+b^4x_1^2}.$$

Si α et β sont les coordonnées du centre du cercle osculateur, le rayon de ce cercle ou rayon de courbure sera

$$\rho^2=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2.$$

En remplaçant, dans l'équation (1), m et λ par leurs valeurs ci-dessus, et développant, on obtient α et β; et on trouve alors, après avoir posé

$$x_1=a\cos\varphi, \quad y_1=b\sin\varphi,$$

$$(4) \qquad \rho^2=\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2}{a^2b^2}.$$

Mais la quantité

$$a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi,$$

est le carré du diamètre conjugué de celui qui passe par le point M (au paramètre φ); soit b' la longueur de ce diamètre, on a donc

$$(5)\qquad \rho^2=\frac{b'^6}{a^2b^2},\ \text{ou enfin}\ \ \rho=\frac{b'^3}{ab}.$$

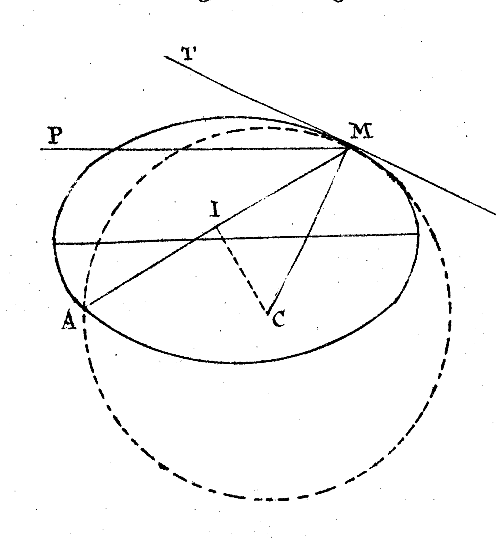
Cette expression remarquable du rayon de courbure en un point d'une conique a déjà été obtenue par une autre méthode.

Nous avons trouvé pour le coefficient angulaire de la corde commune à la conique et au cercle osculateur

$$m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

mais le coefficient angulaire de la tangente au même point est

$$m'=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=-m;$$



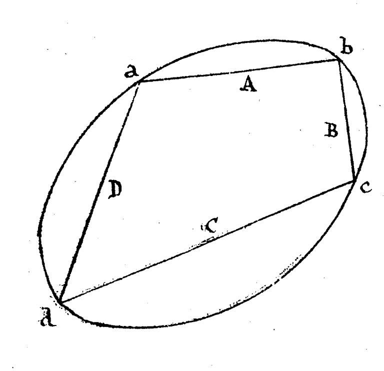
donc si par le point M on mène une parallèle au grand axe, la tangente et la corde de contact sont également inclinées sur cette parallèle.

Ceci est d'ailleurs une conséquence de la proposition déjà démontrée : lorsque quatre points d'une conique sont sur un cercle, les droites qui passent par ces points sont également inclinées sur les axes.

Cette propriété nous permet de construire géométriquement le cercle osculateur en un point M de l'ellipse. Pour cela on mène la tangente en M et une parallèle à l'axe ; on trace la droite MA faisant avec MP le même angle que MT, cette droite rencontre la conique en A, ce point appartient au cercle osculateur ; MT est d'ailleurs tangente au cercle en M ; le centre qui est le centre de courbure est donc à l'intersection des droites MC et IC, la 1ère perpendiculaire à MT en M ; la seconde perpendiculaire à MA et passant par le milieu I.

V°. Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère.

915. Soient $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, les équations des quatre côtés du quadrilatère, A, B, C, D sont des fonctions linéaires de x et y, l'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère est



$$\text{(VII)}\qquad AC=\lambda BD.$$

Cette courbe passe, en effet, par les quatre sommets ; le sommet a, par exemple, est défini par les équations ($A=0$, $D=0$) ; or l'équation (VII) est vérifiée par ces valeurs ; la conique passe donc par le sommet a, et de même par les autres sommets. C'est l'équation générale, car quatre points étant donnés, il suffira d'un cinquième point pour déterminer la conique ; or on pourra toujours déterminer λ de manière à ce que cette conique passe par le point choisi arbitrairement.

L'équation (VII) est d'ailleurs une conséquence de l'équation $S+\lambda S_1=0$; il suffit de supposer que les coniques S et S_1 se réduisent chacune à un système de deux droites.

Il peut arriver qu'une des fonctions, D par exemple se réduise à une constante ; de sorte que l'équation prend la forme $AC=\lambda B$.

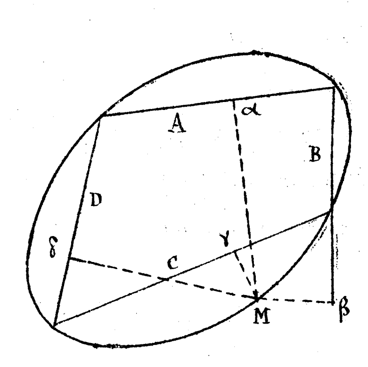
Pour interpréter cette équation, remplaçons x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; l'équation devient, après avoir chassé le dénominateur,

$$AC = \lambda Bz.$$

C'est l'équation des coniques passant par les intersections (a et c) de B avec A et C et ayant de plus en commun les points à l'infini situés sur les droites A et C ; c'est donc l'équation des hyperboles passant par deux points fixes et dont les asymptotes sont parallèles aux droits A et C

916\. Cherchons la signification géométrique de l'équation

$$AC = \lambda BD.$$



Soit un point M de la conique correspondant à une valeur particulière et déterminée de λ ; les distances de ce point aux droites A, B, C, D sont proportionnelles aux fonctions linéaires A, B, C, D, où on remplace x et y par les coordonnées du point M ; de sorte que

$$A = \frac{1}{K}\cdot\overline{M\alpha} \qquad B = \frac{1}{h}\cdot\overline{M\beta} \quad C = \frac{1}{K_1}\cdot\overline{M\gamma} \quad D = \frac{1}{h_1}\cdot\overline{M\delta}.$$

Mais le point M se trouvant sur la conique, ses coordonnées vérifient l'équation

$$AC = \lambda BD;$$

donc, en remplaçant A, B, C, D par les valeurs ci-dessus, on a

$$\frac{\overline{M\alpha}\cdot\overline{M\gamma}}{K.K_1} = \lambda\,\frac{\overline{M\beta}\cdot\overline{M\delta}}{h.h_1},$$

ou

$$\frac{\overline{M\alpha}\cdot\overline{M\gamma}}{\overline{M\beta}\cdot\overline{M\delta}} = \frac{\lambda K K_1}{h h_1};$$

mais les quantités K, K_1, h, h_1, ne dépendent que des coefficients des fonctions A, B, C, D et sont indépendantes des coordonnées du point M ; et par suite, quel que soit le point de la conique, on a la relation :

$$(1) \qquad \frac{\overline{M\alpha}\cdot\overline{M\gamma}}{\overline{M\beta}\cdot\overline{M\delta}} = \text{Constante};$$

delà ce théorème : (Théorème de Pappus).

Le rapport des produits des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit et fixe est constant.

917\. La polaire d'un point fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère passe par un point fixe.

L'équation générale des coniques passant par les sommets du quadrilatère formé par les quatre droites A, B, C, D est

$$(2) \qquad AC + \lambda BD = 0.$$

Supposons que les fonctions A, B, C, et D soient rendues homogènes, alors d'après la formule connue, l'équation de la polaire d'un point fixe (x_0, y_0, z_0) par rapport aux courbes considérées, sera

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

ou

$$x_0\left[(AC)_1 + \lambda(BD)_1\right] + y_0\left[(AC)_2 + \lambda(BD)_2\right] + z_0\left[(AC)_3 + \lambda(BD)_3\right] = 0,$$

en représentant les dérivées par rapport à x, y et z par les indices 1, 2, 3. Or cette équation ne contient l'indéterminée λ qu'au premier degré ; donc, quelque soit λ, la droite qu'elle représente passe par l'intersection des deux droites fixes,

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0\,(AC)_1 + y_0\,(AC)_2 + z_0\,(AC)_3 = 0, \\ x_0\,(BD)_1 + y_0\,(BD)_2 + z_0\,(BD)_3 = 0; \end{cases}$$

donc elles passe par un point fixe.

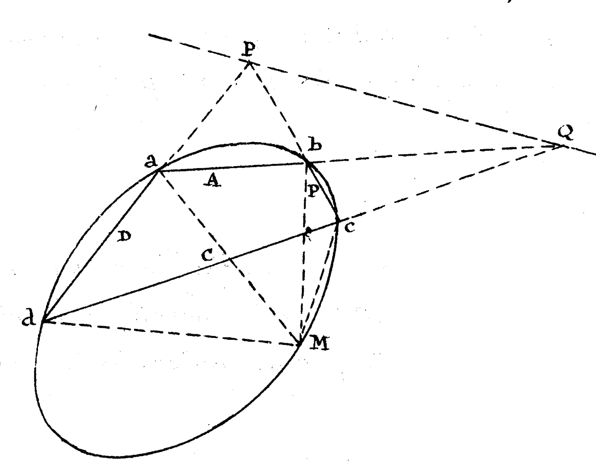
918\. Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique.

Les coordonnées du centre doivent vérifier les deux équations

$$f'_x \quad \text{ou} \quad (AC)_1 + \lambda(BD)_1 = 0;$$

$$f'_y \quad \text{ou} \quad (AC)_2 + \lambda(BD)_2 = 0;$$

en éliminant λ nous aurons l'équation du lieu; c'est donc



$$\frac{(AC)_1}{(AC)_2}=\frac{(BD)_1}{(BD)_2},$$

équation qui représente une conique.

Si on écrit explicitement les fonctions linéaires A, B, C, D,

(4) $\{A=ax+a'y+a''z,\ B=bx+b'y+b''z, C=cx+c'y+c''z,\ D=dx+d'y+d''z;\}$

alors le lieu des centres est représenté par l'équation

(5) $(Ac+Ca)(Bd'+Db')=(Bd+Db)(Ac'+Ca')$.

Cette conique passe par le point Q puisque son équation est vérifiée quand on y fait $A=0, C=0$; on voit de même qu'elle passe par le point P; c.à.d. que la conique passe par les intersections des côtés opposés du quadrilatère.

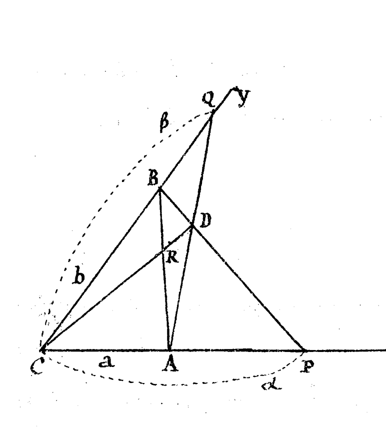
Enfin on peut démontrer qu'elle passe par les milieux des côtés du quadrilatère; on y arrive facilement en prenant pour axes des x et des y deux côtés consécutifs du quadrilatère.

Soit CADB le quadrilatère considéré; posons

$$CA=a,\ CB=b;\ CP=\alpha,\ CQ=\beta,$$

P et Q étant les intersections des droites BD et AD avec CA et CB; l'équation générale des coniques circonscrites à ce quadrilatère sera

$$(6)\quad y\left[\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{b}-1\right]+\lambda x\left[\frac{x}{a}+\frac{y}{\beta}-1\right]=0.$$



Les dérivées par rapport à x et y donnent, en les égalant à zéro:

$$\lambda\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{\beta}-1\right)+\frac{y}{\alpha}=0,$$

$$\lambda\frac{x}{\beta}+\left[\frac{x}{\alpha}+\frac{2y}{b}-1\right]=0;$$

d'où l'on conclut, en éliminant λ:

$$(7)\quad \left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{\beta}-1\right)\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{2y}{b}-1\right)-\frac{xy}{\alpha\beta}=0;$$

c'est l'équation du lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD. Or cette courbe passe par le point P $(x=\alpha,\ y=0)$; par le point Q $(x=0,\ y=\beta)$; par le point R $\left(x=\frac{a\alpha(\beta-b)}{2\alpha\beta-a\beta-b\alpha},\ y=\frac{b\beta(\alpha-a)}{2\alpha\beta-a\beta-b\alpha}\right)$.

Les coordonnées du point D seront $\left[x=\frac{a\alpha(\beta-b)}{\alpha\beta-ab},\ y=\frac{b\beta(\alpha-a)}{\alpha\beta-ab}\right]$; et l'on constate encore que la conique (7) passe par les points milieux des segments AC, BC, DA, BD, AB, CD; car les coordonnées du point milieu de CA sont $\left(x=\frac{a}{2},\ y=0\right)$; celles du milieu de AD sont $\left[x=\frac{a[2\alpha\beta-ab-\alpha b]}{2(\alpha\beta-ab)},\ y=\frac{b\beta(\alpha-a)}{2(\alpha\beta-ab)}\right]$; celles du milieu de AB sont $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$; etc.....

Ainsi: le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique passant par les points de rencontre des côtés opposés et par les milieux des côtés et des diagonales; en tout, neuf points; on pourrait l'appeler la conique des neuf points du quadrilatère.

Par cinq points on peut faire passer une seule conique; or ces cinq points considérés quatre à quatre forment cinq quadrilatères; le centre de la conique, que les cinq points déterminent, doit se trouver à la fois sur les cinq coniques des neuf points; mais le centre est unique, donc

Les cinq coniques des neuf points des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu cinq points quelconques, considérés quatre à quatre, passent par un même point.

Remarque. La méthode précédente est applicable encore à la recherche du lieu des pôles d'une droite fixe; le lieu est aussi une conique. En effet, soit

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

l'équation de la droite fixe; et $x_0\ y_0\ z_0$ un point quelconque du lieu, alors la polaire du point $x_0 y_0 z_0$ qui est

$$x f'_{x_0}+y f'_{y_0}+z f'_{z_0}=0,$$

doit coïncider avec la droite fixe; ce qui donne

$$\frac{f'_{x_0}}{\alpha}=\frac{f'_{y_0}}{\beta}=\frac{f'_{z_0}}{\gamma}.$$

Écrivons explicitement les dérivées et supprimons l'indice zéro, alors le lieu cherché s'obtiendra en éliminant λ entre les deux relations

$$\frac{(AC)_1+\lambda(BD)_1}{\alpha}=\frac{(AC)_2+\lambda(BD)_2}{\beta}=\frac{(AC)_3+\lambda(BD)_3}{\gamma}.$$

En effectuant les calculs, on trouve pour l'équation du lieu

$$(8)\quad \begin{vmatrix} Ac+Ca & Bd+Db & \alpha \\ Ac'+Ca' & Bd'+Db' & \beta \\ Ac''+Ca'' & Bd''+Db'' & \gamma \end{vmatrix}=0.$$

Si la droite fixe est la droite à l'infini, on doit retrouver le lieu des centres; et, en effet, dans ce cas α et β sont nuls et en développant le déterminant par rapport à la 3ème colonne on retrouve l'équation

$$(Ac+Ca)(Bd'+Db')=(Ac'+Ca')(Bd+Db).$$

919. Le rapport anharmonique du faisceau formé en joignant un point quelconque d'une conique à quatre points fixes pris sur la courbe est constant.

En effet, les quatre points fixes peuvent être considérés comme les sommets d'un quadrilatère, de sorte que l'équation de la courbe sera

$$AC+\lambda BD=0,$$

λ ayant une valeur déterminée, puisque la conique est fixe. Cela posé, l'aire du triangle Mab peut être exprimée ou par le produit $\overline{Ma}.\overline{Mb}.\sin aMb$, ou par le produit de la base ab par la distance du sommet M à cette base; or cette distance est proportionnelle à la fonction A, donc $\overline{Ma}.\overline{Mb}.\sin aMb=\overline{ab}.\frac{A}{\alpha}$, α étant une constante connue; on a donc

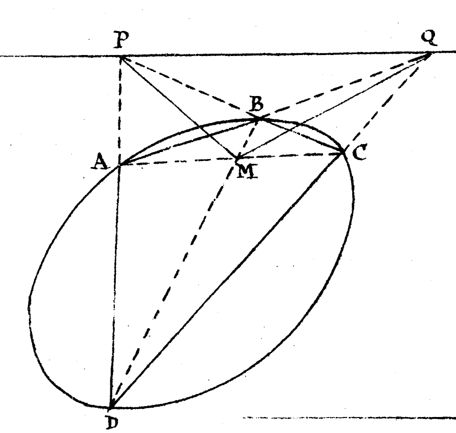
$$A=\frac{\alpha}{\overline{ab}}.\overline{Ma}.\overline{Mb}.\sin\widehat{aMb};$$
$$B=\frac{\beta}{\overline{bc}}.\overline{Mb}.\overline{Mc}.\sin\widehat{bMc};$$
$$C=\frac{\gamma}{\overline{cd}}.\overline{Mc}.\overline{Md}.\sin\widehat{cMd};$$
$$D=\frac{\delta}{\overline{da}}.\overline{Md}.\overline{Ma}.\sin\widehat{dMa}.$$

Or $\quad AC+\lambda BD=0$; donc

$$\frac{\sin\widehat{aMb}.\sin\widehat{cMd}}{\sin\widehat{bMc}.\sin\widehat{aMd}}=K.\frac{\overline{ab}.\overline{cd}}{\overline{bc}.\overline{ad}},$$

K étant une constante; le second membre est donc constant, et par suite le premier. Or c'est précisément la valeur du rapport anharmonique du faisceau des quatre droites (Ma, Mb, Mc, Md).

920. Toutes les coniques passant par les quatre sommets A,B,C,D, d'un quadrilatère sont conjuguées par rapport au triangle PMQ, formé par les trois diagonales de ce quadrilatère.

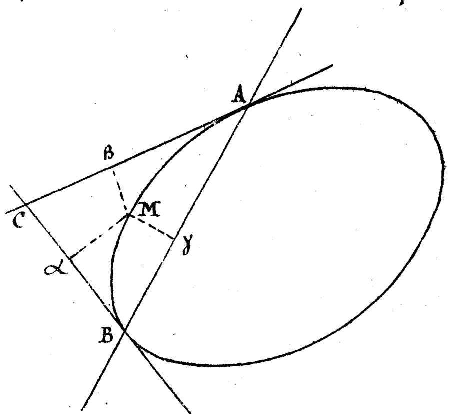


En effet, par rapport à toutes ces coniques, le sommet P du triangle considéré est le pôle du côté opposé QM, de même Q est le pôle du côté PM, et M le pôle du côté PQ. Ceci résulte immédiatement de la construction de la polaire dans les courbes du second degré.

Ce théorème est un cas particulier de celui qui a été démontré aux N.os [879] et [897].

VI.e Équation générale des coniques tangentes à deux droites.

921. On déduit cette équation de l'équation précédente en supposant que deux côtés opposés AD et BC du quadrilatère sont venus se confondre, l'équation $AC+\lambda BD$ devient alors $AC+\lambda B^2=0$.



Nous prendrons de préférence la forme

$$\text{(VIII)} \quad AB=\lambda C^2,$$

$A=0$ et $B=0$ représentant les tangentes AC et BC, et $C=0$ la corde de contact AB.

Si on prenait le triangle ABC comme triangle de référence, l'équation de la courbe serait, d'après nos notations

$$\text{(VIII bis)} \quad XY=\lambda Z^2.$$

Pour le démontrer, partons de l'équation générale

$$aX^2+a_1Y^2+a_2Z^2+2bYZ+2b_1XZ+2b_2XY=0.$$

Exprimons que cette courbe est tangente à la droite BC, dont l'équation est $X=0$, au point B où elle est rencontrée par AB ou $Z=0$. Pour cela faisons $X=0$ dans l'équation ci-dessus il vient

$$a_1Y^2+a_2Z^2+2bYZ=0,$$

équation en Z qui doit avoir deux racines égales et égales à zéro; donc $a_1=0$ et $b=0$.

De même en exprimant que la courbe est tangente à la droite BC au point A on verrait que $a=0$ et $b_1=0$; donc l'équation de la courbe prend la forme

$$\lambda Z^2=XY.$$

Il est d'ailleurs facile de constater qu'une équation de la forme

$$AB=\lambda C^2,$$

représente une conique tangente aux deux droites $A=0$ et $B=0$ aux points où elles sont rencontrées par la droite $C=0$.

En effet, en faisant $A=0$ on trouve un carré parfait $C^2=0$; donc la droite $A=0$ est tangente à la courbe au point où elle rencontrée par la droite $C=0$; de même pour la droite $B=0$. En second lieu, c'est l'équation la plus générale des courbes du second degré satisfaisant à la question; car ces courbes étant assujetties à être tangentes à deux droites en des points donnés, sont par là même assujetties à quatre conditions et par conséquent elles seront complètement déterminées si on les soumets à une cinquième condition; donc leur équation ne doit contenir qu'un seul paramètre arbitraire.

Cas particuliers. Si nous supposons que B soit une constante, alors l'équation

$$AB=\lambda C^2,$$

devient $A=KC^2$, ou bien en rendant les fonctions A et C homogènes

$$Az=KC^2.$$

Cette équation représente une parabole, puisque la courbe est tangente à la droite $A=0$ et à la droite de

l'infini $Z=0$. Les diamètres de cette parabole sont parallèles à la droite $C=0$ puisque cette droite rencontre la courbe à l'infini.

D'ailleurs ce résultat est évident à priori, car les termes du second degré de l'équation forment un carré parfait.

Si nous supposons que C se réduit à une constante, alors l'équation $AB=\lambda C^2$ devient

$$AB=m.$$

Nous avons démontré déjà que cette équation représente une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites A et B. Nous le voyons encore ici d'une autre manière; en effet si nous rendons homogènes les fonctions A et B, alors on a $AB=mZ^2$; or cette forme d'équation indique que la courbe est tangente aux deux droites A et B aux points où elles sont rencontrées par la droite à l'infini $Z=0$; donc les droites A et B sont les asymptotes de la courbe.

922. Signification géométrique de l'équation $XY=\lambda Z^2$ ou $AB=\lambda C^2$.

X, Y, et Z, étant les coordonnées trilatères d'un point quelconque M de la courbe, sont proportionnelles aux perpendiculaires $M\alpha$, $M\beta$, et $M\gamma$ abaissées du point M sur les côtés du triangle de référence, on a donc

$$(1)\qquad \frac{\overline{M\gamma}^2}{\overline{M\alpha}.\overline{M\beta}} = \text{Constante}.$$

On interprète de la même manière l'équation $AB=\lambda C^2$. On voit donc que le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque d'une conique sur deux tangentes fixes est dans un rapport constant avec le carré de la perpendiculaire abaissée sur leur corde de contact.

923. La polaire d'un point fixe passe par un point fixe situé sur la corde de contact.

En effet l'équation de la polaire du point (X_0, Y_0, Z_0) est Nº (453)

$$XF'_{X_0}+YF'_{Y_0}+ZF_{Z_0}=0.$$

Appliquons cette formule au cas où la fonction F est

$$2XY-\lambda Z^2=0;$$

alors l'équation de la polaire du point fixe considéré est

$$XY_0+YX_0-\lambda ZZ_0=0.$$

Or il est évident que, quel que soit λ, cette droite passe par le point d'intersection de la corde de contact $Z=0$ avec la droite $XY_0+X_0Y=0$. Cette dernière droite est conjuguée harmonique, par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$, de la droite qui joint le point C au pôle (X_0, Y_0, Z_0).

924. Le lieu des pôles d'une droite fixe est une droite fixe.

Soit

$$aX+bY+cZ=0,$$

l'équation de la droite fixe; les coordonnées de son pôle sont données par les deux relations

$$\frac{Y_0}{a}=\frac{X_0}{b}=-\frac{\lambda Z_0}{c}.$$

Éliminons λ entre ces deux relations nous aurons l'équation du lieu; or les deux premiers rapports sont indépendants de λ, donc l'équation du lieu est

$$aX=bY,$$

qui représente une droite passant par le point d'intersection C des tangentes communes.

Si l'on suppose que la droite fixe est la droite de l'infini, on obtient le lieu des centres: c'est une droite passant par le point C et par le milieu de la droite AB: en effet pour que la droite

$$aX+bY+cZ=0,$$

représente la droite de l'infini il faut qu'on ait

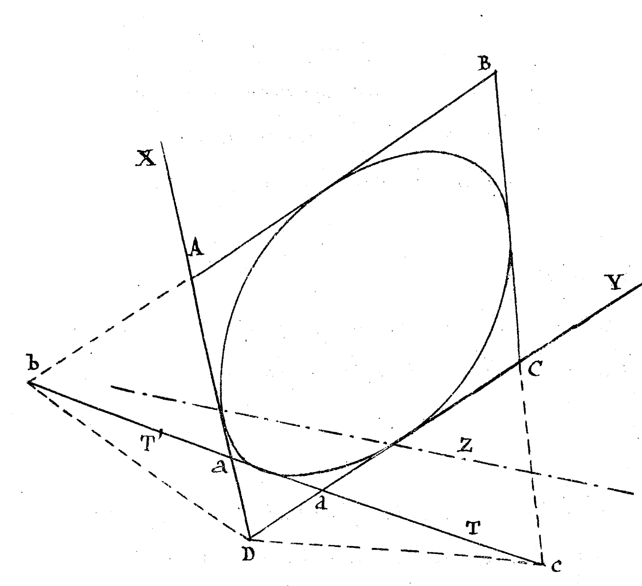
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};$$

donc l'équation $aX = bY$ devient

$$X \sin A = Y \sin B;$$

or ceci représente la médiane correspondant au côté AB. N.º [102]

925. **Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une tangente variable à une conique avec quatre tangentes fixes est constant.**



Rapportons la conique aux deux tangentes fixes DA ou $X=0$, DC ou $Y=0$, et à leur corde de contact $Z=0$; l'équation de la conique sera

(1) $XY = Z^2$.

Si l'on exprime que la droite $Z = \lambda X + \mu Y$ est tangente, on trouve pour l'équation d'une tangente

(2) $4\lambda^2 X - 4\lambda Z + Y = 0$.

Soient alors deux autres tangentes fixes AB, CB,

(3) $4a^2 X - 4a Z + Y = 0$,

(4) $4b^2 X - 4b Z + Y = 0$;

et regardons comme variable la tangente représentée par l'équation (2).

Les points d'intersection des quatre tangentes fixes

AD ou $X=0$, DC ou $Y=0$, AB ou (3), CB ou (4)

avec la tangente variable TT' ou (2) sont situés sur les quatre droites

(5) $X=0,\ Y=0,\ Y-4\lambda a X=0,\ Y-4\lambda b X=0$;

les deux dernières de ces équations s'obtiennent en éliminant Z entre (2) et (3), puis entre (2) et (4). Or les quatre droites (5), lesquelles passent par le point D et les intersections de la tangente variable avec les quatre tangentes fixes, déterminent un faisceau dont le rapport anharmonique est N.º [170]

$$\frac{-4\lambda a}{-4\lambda b} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b};$$

donc ce rapport est indépendant de λ et, par suite, constant, quelle que soit la tangente TT'.

926. **Équation des tangentes menées à une conique par un point donné.**

Soit l'équation d'une conique

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

et x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point fixe; la polaire de ce point est

$$(2) \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0;$$

et l'équation générale des coniques, touchant la conique proposée aux points où elle est rencontrée par la droite (2), sera N.º [912]

$$(3) \quad f(x, y, z) = \lambda\,(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})^2.$$

L'équation (3) représentera les tangentes menées par le point (x_0, y_0, z_0) si l'on exprime que cette courbe passe ce point; on obtient ainsi

$$f(x_0, y_0, z_0) = 4\lambda\,(f(x_0, y_0, z_0))^2;$$

l'équation des deux tangentes est donc (v. N.ºs [378], [407]):

$$(4) \qquad 4 f(x_0, y_0, z_0) \cdot f(x, y, z) = (x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})^2.$$

VII° Équation des coniques inscrites dans un quadrilatère.

927. Étant données les équations des diagonales d'un quadrilatère sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ Y = x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0, \\ Z = x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = 0, \end{cases}$$

il y a une infinité de quadrilatères ayant pour diagonales les droites données; les équations générales des côtés de ce quadrilatère sont

$$(2)\quad \begin{cases} A = X + aY + bZ = 0, \\ B = X - aY + bZ = 0, \\ C = X + aY - bZ = 0, \\ D = X - aY - bZ = 0, \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes arbitraires.

Prenons pour triangle de référence le triangle PQR formé par les trois diagonales; les côtés du quadrilatère auront des équations de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} A = X + aY + bZ = 0, \\ B = X + a_1Y + b_1Z = 0, \\ C = X + a_2Y + b_2Z = 0, \\ D = X + a_3Y + b_3Z = 0, \end{cases}$$

car on peut toujours supposer le coefficient de X égal à l'unité, puisque les côtés d'un quadrilatère ne doivent pas passer par les points de concours des diagonales.

Si maintenant on exprime que les droites A et B se coupent sur Y, A et C sur Z, etc...., on arrive aux relations

$$(1°)\quad \begin{cases} b_1 = b,\ a_2 = a,\ a_3 = a_1,\ b_3 = b_2, \\ \dfrac{a_3}{a} = \dfrac{b_3}{b},\quad \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}. \end{cases}$$

On déduit de là, en éliminant d'abord a_3 et b_3,

$$(2°)\quad a_1 b = a b_2,\quad a b = a_1 b_2.$$

Par conséquent, après avoir éliminé b_2

$$a_1 = \pm a,\quad b_2 = \pm b,$$
$$a_3 = \pm a,\quad b_3 = \pm b,$$
$$a_2 = a.\quad b_1 = b.$$

Les signes supérieurs ou inférieurs doivent être pris ensemble, or, lorsqu'on choisit les signes supérieurs, les droites A, B, C, D, se confondent; on doit donc prendre les signes inférieurs; et, en substituant ces valeurs dans les équations (3), on obtient les équations (2) qu'il s'agissait d'établir.

928. Cherchons l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère abcd ou (A=0, B=0, C=0, D=0).

Pour cela, nous prendrons d'abord l'équation des coniques inscrites au triangle A=0, B=0, C=0, laquelle est N° [910]

$$(4)\quad \lambda^2A^2 + \mu^2B^2 + \nu^2C^2 - 2\lambda\mu AB - 2\lambda\nu AC - 2\mu\nu BC = 0;$$

et nous exprimerons que cette conique est tangente au côté D=0, ou

$$X - aY - bZ = 0.$$

Remplaçons X par $(aY+bZ)$ dans l'équation (4), il vient, eu égard aux valeurs (2) des fonctions A, B, C,

$$\lambda^2(aY+bZ)^2+\mu^2b^2Z^2+\nu^2a^2Y^2-2\lambda\mu bZ(aY+bZ)-2\lambda\nu aY(aY+bZ)-2\mu\nu abYZ=0;$$

ou, en ordonnant

$$a^2Y^2(\lambda-\nu)^2+b^2Z^2(\lambda-\mu)^2+2abYZ[\lambda(\lambda-\mu)-\nu(\lambda+\mu)]=0.$$

Les deux racines de cette équation doivent être égales, on a donc la condition

$$[(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)-2\mu\nu]^2=(\lambda-\mu)^2(\lambda-\nu)^2;$$

ou, en développant et faisant les réductions :

$$\lambda(\lambda-\mu-\nu)=0.$$

Or $\lambda=0$ ne donne pas une conique proprement dite ; la condition pour que la conique (4) soit inscrite au quadrilatère ABCD est donc

$$(5)\qquad \lambda=\mu+\nu.$$

Si maintenant nous développons l'équation (4), après y avoir remplacé A, B, C, D par leurs valeurs (2), on trouve, en ayant égard à la relation (5) :

$$(6)\qquad -\frac{X^2}{\lambda}+\frac{a^2Y^2}{\nu}+\frac{b^2Z^2}{\mu}=0.$$

Ainsi, les diagonales d'un quadrilatère étant données sous la forme (1) N° [927], et prenant pour les équations des côtés sous la forme (2), (où a et b sont des constantes qui dépendent de la position des côtés du quadrilatère ayant pour diagonales les droites (1)), l'équation générale des coniques inscrites dans ce quadrilatère sera

$$(7)\qquad \frac{a^2Y^2}{\nu}+\frac{b^2Z^2}{\mu}=\frac{X^2}{\lambda},$$

avec la condition

$$(7\text{bis})\qquad \lambda=\mu+\nu.$$

Remarque I. Les coniques inscrites à un quadrilatère sont conjuguées par rapport au triangle PQR, c.à.d. par rapport au triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère.

Nous avons vu N° [920] que les coniques circonscrites à un quadrilatère sont conjuguées par rapport au triangle P, Q, R, c.à.d. par rapport au triangle dont les sommets sont les points de rencontre des côtés opposés, les diagonales AC et BD étant considérées comme côtés opposés.

Remarque II. Lorsqu'on se donnera les côtés du quadrilatère, on en conclura les équations des diagonales sous la forme (1) ; les constantes a et b seront alors déterminées, on les connaîtra en identifiant les équations (2) avec celles des côtés donnés ; et l'équation (7) sera celle de la conique inscrite dans ce quadrilatère.

Remarque III. On peut n'introduire qu'une constante arbitraire dans l'équation des coniques inscrites. En remplaçant λ par sa valeur, l'équation (7) devient

$$a^2Y^2\left(\frac{\mu}{\nu}+1\right)+b^2Z^2\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)=X^2.$$

Posons alors $\frac{\mu}{\nu}+1=\frac{1}{\rho}$, d'où $\frac{\nu}{\mu}+1=\frac{1}{1-\rho}$; nous en conclurons que

L'équation

$$(\text{IX})\qquad (8)\qquad \frac{a^2Y^2}{\rho}+\frac{b^2Z^2}{1-\rho}-X^2=0,$$

est l'équation générale des coniques inscrites au quadrilatère ABCD ; les équations des diagonales étant :

$$(8, 2^\circ) \quad \text{Diagonales:} \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ Y = x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0, \\ Z = x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = 0, \end{cases}$$

et les équations de ses côtés étant

$$(8, 3^\circ) \quad \text{Côtés:} \begin{cases} A = X + aY + bZ = 0 \\ B = X - aY + bZ = 0, \\ C = X + aY - bZ = 0, \\ D = X - aY - bZ = 0; \end{cases}$$

ρ est une constante arbitraire.

Pour conserver plus de symétrie à l'équation (IX) des coniques inscrites dans un quadrilatère, nous l'écrirons aussi sous la forme

$$(\text{IX bis}) \qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0;$$

on aura alors entre m, n, p la relation

$$(8, 4^\circ) \qquad \frac{1}{m} + \frac{a^2}{n} + \frac{b^2}{p} = 0,$$

a, et b étant les constantes qui figurent dans les équations (8, 3°).

Il est facile de vérifier, en cherchant l'enveloppe des courbes (8), que ces courbes touchent effectivement les quatre droites $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$.

Lorsqu'on n'aura pas à considérer les paramètres de référence, on pourra mettre Y et Z, dans l'équation (8), au lieu de aY et bZ.

929. Les droites qui joignent les points de contact opposés $a_1, c_1; b_1, d_1$, passent par le point de rencontre des diagonales proprement dites, et forment avec ces diagonales, un faisceau harmonique.

L'équation des coniques inscrites est

$$(9) \qquad \frac{a^2Y^2}{\rho} + \frac{b^2Z^2}{1-\rho} = X^2.$$

La droite a_1c_1 [figure du N° (927)] est la polaire du point P_1, intersection des deux droites $A=0$, $C=0$; les coordonnées de ce point sont donc

$$Z_0 = 0, \quad X_0 = -aY_0;$$

l'équation de la polaire d'un point (X_0, Y_0, Z_0) est

$$\frac{a^2YY_0}{\rho} + \frac{b^2ZZ_0}{1-\rho} - XX_0 = 0;$$

ou, en remplaçant les coordonnées par leurs valeurs :

$$(a_1c_1) \quad (10) \qquad aY + \frac{\rho}{1-\rho}X = 0.$$

La droite b_1d_1 est la polaire du point Q_1, intersection des deux droites $B=0$, $D=0$; les coordonnées de ce point seront donc

$$Z_0 = 0, \quad X_0 = aY_0;$$

et l'équation de la polaire sera

$$(b_1d_1) \quad (11) \qquad aY - \frac{\rho}{1-\rho}X = 0.$$

Ainsi, les cordes de contact a_1c_1, b_1d_1, ou mieux, les polaires des points P_1 et Q_1 passent par le point R et forment un système harmonique avec les deux diagonales qui se coupent en R.

On constatera tout aussi facilement que:

Les polaires des points a et c, c.à.d. les cordes de contact b_1c_1, d_1a_1, passent par le point P et forment un système harmonique avec les deux diagonales $Y=0$, $Z=0$, qui se coupent en P.

Les polaires des points b et d, c.à.d. les cordes a_1b_1, c_1d_1, passent par le point Q et forment un système harmonique avec les deux diagonales $X=0$, $Z=0$, qui se coupent en Q.

Ces propriétés résultent aussi de ce fait, qu'une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD est conjuguée par rapport au triangle PQR.

930. Étant donnée une conique fixe inscrite à un quadrilatère, le rapport du produit des distances des sommets opposés à une tangente variable est constant. (C'est le corrélatif du théorème de Pappus).

Les coordonnées d'un point quelconque (X_1, Y_1, Z_1) situé sur la conique inscrite (9), pourront se représenter par

$$(12)\qquad aY_1 = X_1\sqrt{\rho}\cdot\cos\varphi,\quad bZ = X_1\sqrt{1-\rho}\cdot\sin\varphi;$$

l'équation d'une tangente en ce point sera

$$\frac{a^2YY_1}{\rho}+\frac{b^2ZZ_1}{1-\rho}-XX_1=0,$$

ou, en introduisant le paramètre φ:

$$(13)\qquad \frac{aY}{\sqrt{\rho}}\cos\varphi+\frac{bZ}{\sqrt{1-\rho}}\sin\varphi-X=0.$$

Rappelons que la distance d'un point à la droite

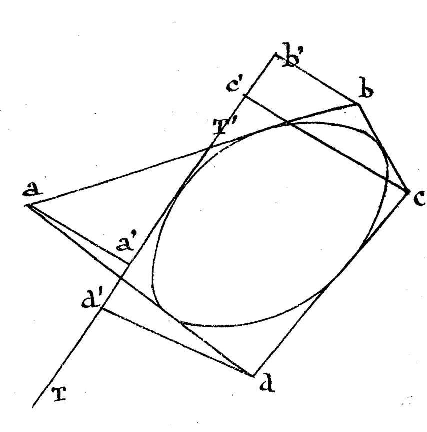
$$MX+NY+PZ=0,$$

a pour expression

$$(14)\qquad \frac{MX+NY+PZ}{\sqrt{M^2+N^2+P^2-2NP\cos A-2MP\cos B-2MN\cos C}},$$

A, B, C, étant les angles du triangle de référence.

Or d'après les équations du N° [928], remarque III, les coordonnées des points a, b, c, d, sont respectivement



$$(15)\qquad (a)\begin{cases}X_1=0,\\ aY_1+bZ_1=0;\end{cases}\quad (c)\begin{cases}X_3=0,\\ aY_3-bZ_3=0;\end{cases}$$
$$(b)\begin{cases}Y_2=0,\\ X_2+bZ_2=0;\end{cases}\quad (d)\begin{cases}Y_4=0,\\ X_4+bZ_4=0.\end{cases}$$

D'après la formule (14) les distances respectives de ces points à la tangente variable TT' ou (13), seront:

$$(16)\begin{cases} aa'=\frac{bZ_1}{K}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho}}-\frac{\cos\varphi}{\rho}\right), & cc'=\frac{bZ_3}{K}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho}}+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\rho}}\right);\\ bb'=\frac{bZ_2}{K}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho}}+1\right), & dd'=\frac{bZ_4}{K}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho}}-1\right);\end{cases}$$

en représentant par K la quantité

$$\sqrt{1+\frac{a^2\cos^2\varphi}{\rho}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{1-\rho}-\frac{2ab\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\rho}\sqrt{1-\rho}}\cos A+\frac{2b\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho}}\cos B+\frac{2a\cos\varphi}{\sqrt{\rho}}\cos C},$$

variable avec la position de la tangente considérée.

Des valeurs (16) on déduit:

$$\overline{aa'}.\ \overline{cc'} = \frac{b^2 Z_1 Z_3}{K^2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{1-\rho} - \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\right);$$

$$\overline{bb'}.\ \overline{dd'} = \frac{b^2 Z_2 Z_4}{K^2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{1-\rho} - 1\right);$$

on en conclut enfin

$$\frac{\overline{aa'}.\ \overline{cc'}}{\overline{bb'}.\ \overline{dd'}} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}.\ \frac{\rho \sin^2\varphi - (1-\rho)\cos^2\varphi}{\rho\left[\sin^2\varphi - 1 + \rho\right]} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}.\ \frac{\rho - \cos^2\varphi}{\rho\left[\rho - \cos^2\varphi\right]} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}.\frac{1}{\rho};$$

et par suite :

$$(17) \qquad \frac{\overline{aa'}.\ \overline{cc'}}{\overline{bb'}.\ \overline{dd'}} = \text{Constante},$$

puisque les quantités Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont constantes comme définissant des points fixes. C'est la proposition qu'il fallait démontrer.

931. Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite passant par les milieux des diagonales.

L'équation de la conique étant

$$(19) \qquad \frac{a^2 Y^2}{\rho} + \frac{b^2 Z^2}{1-\rho} = X^2,$$

si l'on désigne par A, B, C, les angles du triangle de référence PQR, on sait que le centre sera défini par les équations N.° (544)

$$(20) \qquad \frac{-X}{\sin A} = \frac{a^2 Y}{\rho \sin B} = \frac{b^2 Z}{(1-\rho)\sin C};$$

car le centre est le pôle de la droite de l'infini

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

Éliminons ρ entre les équations (20), on aura pour le lieu des centres,

$$(21) \qquad \frac{X}{\sin A} + \frac{a^2 Y}{\sin B} + \frac{b^2 Z}{\sin C} = 0;$$

le lieu des centres est donc une droite.

Calculons les coordonnées des milieux des diagonales ac, bd, et $P_1 Q_1$.

Si X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' sont les coordonnées de deux points, les coordonnées du point milieu sont données par les relations

$$(22) \qquad \frac{X}{X'+X''} = \frac{Y}{Y'+Y''} = \frac{Z}{Z'+Z''} = \frac{1}{2}.$$

D'après les formules (15) du N.° précédent, on a pour les points a et c

$$(a) \begin{cases} X_1 = 0, \\ a Y_1 + b Z_1 = 0; \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} X_3 = 0, \\ a Y_3 + b Z_3 = 0; \end{cases}$$

les relations (22) donnent alors

$$X = 0, \quad \frac{a Y}{b(Z_3 - Z_1)} = \frac{Z}{Z_1 + Z_3}.$$

Les coordonnées d'un point doivent, en outre, vérifier la relation

$$(23) \qquad X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = \frac{S}{R};$$

on en déduit

$$Z_1 = \frac{aS}{R} \cdot \frac{1}{a \sin C - b \sin B}, \quad Z_3 = \frac{aS}{R} \cdot \frac{1}{a \sin C + b \sin B};$$

les coordonnées du point milieu de la diagonale ac seront donc

$$(24)\qquad X=0,\quad \frac{aY}{b\sin B}=\frac{bZ}{-a\sin C}.$$

Ces valeurs vérifient évidemment l'équation (21).

Le même calcul se fera sans difficulté pour la diagonale bd.

Enfin les points P_1 et Q_1 sont les intersections de la droite $Z=0$ avec les côtés $A=0$ et $D=0$; on a alors, d'après les formules (2) du N° [927]:

$$(P_1)\begin{cases} Z'=0,\\ X'+aY'=0;\end{cases}\qquad (Q_1)\begin{cases} Z''=0,\\ X''-aY''=0.\end{cases}$$

Les coordonnées du point milieu de la droite P_1Q_1 seront donc

$$(25)\qquad Z=0,\quad \frac{X}{-a^2\sin A}=\frac{Y}{\sin B};$$

l'équation (21) est encore vérifiée par ces valeurs. Donc ......

932\. Nous appliquerons encore ces formules à la résolution de la question suivante:

Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Nous prendrons l'équation de la conique sous la forme (IX bis) N° [928]

$$(26)\qquad mX^2+nY^2+pZ^2=0,$$

on a alors entre m, n, p, la relation

$$(27)\qquad \frac{1}{m}+\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{p}=0.$$

D'après les relations (6) du N° [711], les coordonnées X, Y, Z, du foyer devront vérifier les égalités

$$(28)\qquad\begin{cases} \dfrac{(L-X\sin A)^2}{m}+\dfrac{X^2\sin^2 B}{n}+\dfrac{X^2\sin^2 C}{p}+\rho\sin A\sin B\sin C=0,\\[2ex] \dfrac{Y^2\sin^2 A}{m}+\dfrac{(L-Y\sin B)^2}{n}+\dfrac{Y^2\sin^2 C}{p}+\rho\sin A\sin B\sin C=0,\\[2ex] \dfrac{Z^2\sin^2 A}{m}+\dfrac{Z^2\sin^2 B}{n}+\dfrac{(L-Z\sin C)^2}{p}+\rho\sin A\sin B\sin C=0,\end{cases}$$

où l'on a posé

$$(29)\qquad L=X\sin A+Y\sin B+Z\sin C;$$

$L=0$ est l'équation de la droite de l'infini.

Éliminant $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}, \rho$ entre les équations (27) et (28), on trouve

$$\begin{vmatrix} (L-X\sin A)^2 & X^2\sin^2 B & X^2\sin^2 C & 1\\ Y^2\sin^2 A & (L-Y\sin B)^2 & Y^2\sin^2 C & 1\\ Z^2\sin^2 A & Z^2\sin^2 B & (L-Z\sin C)^2 & 1\\ 1 & a^2 & b^2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

ou

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} \left(\dfrac{L}{\sin A}-X\right)^2 & X^2 & X^2 & 1\\[2ex] Y^2 & \left(\dfrac{L}{\sin B}-Y\right)^2 & Y^2 & 1\\[2ex] Z^2 & Z^2 & \left(\dfrac{L}{\sin C}-Z\right)^2 & 1\\[2ex] \dfrac{1}{\sin^2 A} & \dfrac{a^2}{\sin^2 B} & \dfrac{b^2}{\sin^2 C} & 0\end{vmatrix}=0.$$

Le développement de cette équation donne, après la suppression du facteur L (on développera par rapport aux élémen

de la dernière ligne:

$$(31)\quad \left(\frac{X}{\sin A}+\frac{a^2Y}{\sin B}+\frac{b^2Z}{\sin C}\right)(YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C)-(X\sin A+Y\sin B+Z\sin C)\left(\frac{X^2}{\text{tang}\,A}+\frac{a^2Y^2}{\text{tang}\,B}+\frac{b^2Z^2}{\text{tang}\,C}\right)=0.$$

Sous cette forme on voit sans difficulté que:

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une courbe du 3ème ordre, passant par les six sommets du quadrilatère complet, par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales, par les points circulaires à l'infini.

On peut en conclure d'autres propriétés nombreuses; nous laisserons cela comme sujet de recherche.

VIII. Équation des coniques doublement tangentes à deux coniques données.

933. Si les équations de deux coniques données sont

$$(1)\qquad S=0,\ S_1=0,$$

l'équation générale des coniques passant par leurs points d'intersection sera

$$S-\lambda S_1=0.$$

Or on pourra disposer de λ de manière à ce que cette conique se réduise à deux droites; de sorte que, P et Q désignant des fonctions linéaires, on pourra poser identiquement

$$(2)\qquad S-\lambda S_1=PQ.$$

L'équation générale des coniques doublement tangentes aux deux coniques données sera

$$(3)\qquad \Sigma=\mu^2P^2-2\mu(S+\lambda S_1)+Q^2=0,$$

μ étant une constante arbitraire.

En effet, cherchons l'enveloppe des courbes Σ, c.à.d. éliminons μ entre l'équation (3) et sa dérivée par rapport à μ, ce qui revient à exprimer que l'équation en μ a deux racines égales; on trouve

$$(S+\lambda S_1)^2-P^2Q^2=0,$$

pour l'équation de la courbe enveloppe. Mais, d'après l'identité

$$PQ=S-\lambda S_1,$$

cette équation devient

$$(S+\lambda S_1)^2-(S-\lambda S_1)^2=0,\quad \text{ou } SS_1=0;$$

c.à.d. que la conique Σ reste constamment tangente aux deux coniques S et S_1.

De plus, elle a, avec chacune d'elles, un double contact. Car, si nous cherchons l'intersection de la courbe Σ avec la conique S_1, par exemple; il vient, en faisant $S_1=0$:

$$\mu^2P^2-2\mu S+Q^2=0.$$

Mais, par suite de l'identité (2), la fonction S se réduit à PQ pour les valeurs qui annulent S_1; l'équation précédente devient alors

$$\mu^2P^2-2\mu PQ+Q^2=0,\quad \text{ou } (\mu P-Q)^2=0.$$

On a ainsi un carré parfait; la conique Σ a donc un double contact avec la conique S_1, et la corde de contact est

$$(4)\qquad \mu P-Q=0.$$

On prouvera de la même manière que la conique Σ a un double contact avec la conique S, et la corde de contact est

$$(4\ bis)\qquad \mu P+Q=0.$$

On voit que les cordes de contact passent toujours, quelque soit μ, par l'intersection des deux droites $P=0$, $Q=0$, et forment, avec ces dernières, un système harmonique.

Remarque. Nous aurons, en général, trois séries de coniques doublement tangentes aux deux coniques proposées S et S_1, car il y a trois valeurs de λ qui permettent de satisfaire à l'identité (1). Il n'y aura plus que deux séries ou qu'une seule série de coniques doublement tangentes, lorsque les coniques proposées seront ou tangentes entre elles, ou osculatrices.

934. Supposons que les coniques S et S_1 soient des cercles, et désignons par

$$(5) \qquad C=0, \quad C_1=0,$$

les équations de ces cercles, après avoir rendu les coefficients de x^2 et y^2 égaux à l'unité. Les cordes communes à ces deux courbes sont alors l'axe radical $C-C_1=0$, et la droite de l'infini ; de sorte que

$$C-C_1=PQ\,, \text{ et } Q=1.$$

L'équation des coniques doublement tangentes à ces deux cercles sera donc

$$\mu^2P^2-2\mu(C+C_1)+1=0;$$

ou, en remplaçant P par sa valeur identique $(C-C_1)$:

$$(6) \qquad \mu(C-C_1)^2-2\mu(C+C_1)+1=0;$$

telle est l'équation générale des coniques doublement tangentes aux deux cercles $C=0$, $C_1=0$. Les cordes de contact sont

$$(7) \qquad \mu P\pm1=0, \text{ ou } \mu(C-C_1)\pm1=0;$$

c.à.d. que les cordes de contact sont parallèles à l'axe radical des deux cercles.

L'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad \sqrt{C}\pm\sqrt{C_1}=\sqrt{\tfrac{1}{\mu}}\;;$$

on le constate aisément en rendant rationnelle cette dernière équation.

L'équation (8) a une signification géométrique remarquable : C et C_1 représentent, en effet, les carrés des longueurs des tangentes menées d'un point aux deux cercles $C=0$, $C_1=0$; l'équation (8) exprime alors que la somme algébrique de ces longueurs est égale à $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$. Donc, si μ est constant, on peut dire que :

Une conique est le lieu des points dont la somme des distances à deux cercles fixes est constante, les distances étant comptées sur les tangentes.

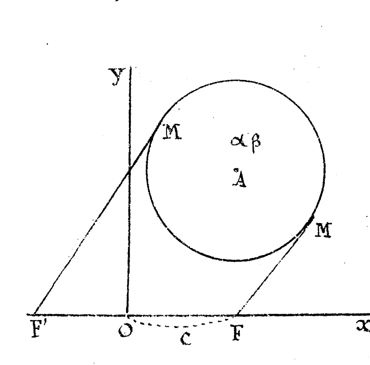
La conique est doublement tangente aux deux cercles, et les cordes de contact sont parallèles à l'axe radical des deux cercles.

Ces deux cercles ont été appelés cercles focaux.

935. **Il y a, dans le plan, une infinité de cercles tels que la somme algébrique des distances de deux points fixes à ces cercles est constante.**

Soient F et F' les deux points fixes, $2c$ leur distance ; prenons le milieu de la droite FF' pour origine, l'équation d'un cercle quelconque sera

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0.$$



Les distances des points F et F' à ce cercle sont respectivement

$$\overline{FM}^2=(c-\alpha)^2+\beta^2-R^2,$$
$$\overline{F'M}^2=(c+\alpha)^2+\beta^2-R^2;$$

d'après l'hypothèse, on doit avoir

$$FM+FM'=2a,$$

d'où l'on conclut

$$\sqrt{(c-\alpha)^2+\beta^2-R^2}+\sqrt{(c+\alpha)^2+\beta^2-R^2}=2a.$$

Rendant cette relation rationnelle, et posant

$$a^2-c^2=b^2, \text{ si } a>c,$$
$$\text{ou} \quad a^2-c^2=-b^2, \text{ si } a<c,$$

c.à.d. suivant qu'on considère la somme ou la différence des distances ; on trouve définitivement,

(dans le premier cas $a^2 - c^2 = b^2$)

$$(2) \qquad \frac{R^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1.$$

C'est la seule relation qui doive exister entre les constantes α, β, et R.

Lorsque le centre du cercle est assujetti à se mouvoir sur l'ellipse

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

alors $R = 0$, le rayon du cercle est nul; cette ellipse est, en effet, le lieu des points tels que la somme des distances aux deux points fixes est constante.

Pour que le rayon du cercle soit réel, il faut que le centre du cercle soit extérieur à l'ellipse (3).

Si l'on se donne le rayon du cercle, son centre décrira une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse (3).

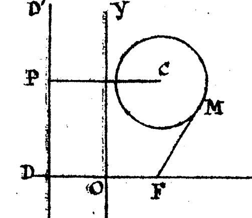
Les cercles considérés, c.à.d. les cercles dont le rayon et les coordonnées du centre vérifient la relation (2), jouent par rapport aux points F et F' le même rôle que les points de l'ellipse qui aurait pour foyers ces deux points et pour axe focal la longueur $2a$.

On peut encore vérifier que le rapport des distances du foyer à l'un quelconque de ces cercles et du centre de ce cercle à la directrice correspondante est constant et égal à l'excentricité de l'ellipse (3), ainsi

$$(4) \qquad \frac{FM}{CP} = \frac{c}{a}.$$

On obtiendra des conclusions identiques dans le cas où $a^2 - c^2 = -b^2$, c.à.d. dans le cas de l'hyperbole.

Si l'on exprime que la distance d'un point fixe F au cercle (1) est égale à la distance du centre C à une droite fixe DD', on trouve



$$(5) \qquad R^2 = \beta^2 - 2p\alpha.$$

Lorsqu'on se donne le rayon, les centres de ces cercles décrivent une parabole ayant même axe et même paramètre que la parabole

$$(6) \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Ces cercles jouent alors, par rapport au point fixe F et à la droite fixe DD', le même rôle que les points de la parabole ayant ce point et cette droite pour foyer et directrice.

IX°. Equation des coniques homofocales.

936. 1° Coniques à centre.

Supposons une conique rapportée à ses axes, ayant pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

une **conique homofocale** de la courbe (1) est une courbe ayant mêmes foyers que cette courbe. La conique cherchée doit donc avoir les mêmes axes que la courbe proposée, et son équation sera de la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0;$$

comme les foyers doivent être les mêmes, il en résulte que

$$A - B = a^2 - b^2, \text{ ou } A - a^2 = B - b^2 = -\lambda.$$

De sorte que l'équation générale des coniques homofocales de la courbe (1) est

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0;$$

λ est une constante arbitraire.

L'équation (2) représente des **ellipses**, lorsque λ est compris entre $-\infty$ et $+b^2$; si a_1 et b_1 sont les longueurs des axes de ces courbes, on a

$$(2\,bis) \quad a_1^2=a^2-\lambda,\ b_1^2=b^2-\lambda\ ;\ a_1^2-b_1^2=a^2-b^2=c^2.$$

L'équation (2) représente des **hyperboles** lorsque λ est compris entre a^2 et b^2; si a_1 et b_1 sont les longueurs des axes, on a

$$(2\,ter) \quad a_1^2=a^2-\lambda,\ b_1^2=\lambda-b^2;\ a_1^2+b_1^2=a^2-b^2=c^2.$$

On a des ellipses imaginaires lorsque λ est supérieur à a^2.

Nous reviendrons avec plus de détails sur ces courbes dans le § V du même chapitre.

937. Les coniques homofocales sont inscrites dans un quadrilatère dont les diagonales sont les axes de la courbe et la droite de l'infini.

Les côtés de ce quadrilatère ont pour équations

$$(3) \begin{cases} y-(x-c)\sqrt{-1}=0, & y+(x-c)\sqrt{-1}=0, \\ y-(x+c)\sqrt{-1}=0, & y+(x+c)\sqrt{-1}=0; \end{cases}$$

on vérifiera facilement que les coniques (2) sont tangentes à ces quatre droites, quelle que soit la valeur de λ. Ces quatre droites sont les tangentes menées à la conique par les points circulaires à l'infini. Ce résultat est conforme aux conséquences qui ont été déduites de la définition des foyers.

Les coniques homofocales sont doublement tangentes à deux cercles de rayon nul.

En effet, l'équation des coniques doublement tangentes aux deux cercles $C=0$, $C_1=0$ est (N° 933)

$$\mu^2(C-C_1)^2-2\mu(C+C_1)+1=0.$$

Considérons les deux cercles de rayon nul:

$$C=(x-c)^2+y^2,\ C_1=(x+c)^2+y^2, \text{ où } c^2=a^2-b^2,$$

l'équation précédente devient

$$16\mu^2c^2x^2-4\mu(x^2+y^2+c^2)+1=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$4\mu x^2+\frac{4\mu}{1-4\mu c^2}y^2-1=0;$$

et si l'on pose $4\mu=\dfrac{1}{a^2-\lambda}$, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0,$$

c.à.d. l'équation (2) des coniques homofocales.

Cette conséquence résulte encore de la définition des foyers.

La dernière proposition nous permet d'écrire immédiatement l'équation générale des coniques ayant pour foyers deux points donnés (α, β), (α_1, β_1).

Pour cela, considérons les cercles de rayon nul ayant pour centres les points donnés; de sorte que

$$C=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,\ C_1=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2;$$

l'équation cherchée est celle des coniques doublement tangentes à ces deux cercles, c.à.d. (N° 933)

$$\mu^2(C-C_1)^2-2\mu(C+C_1)+1=0;$$

ou, en remplaçant C et C_1 par leurs valeurs, est

$$(4) \quad \mu^2\left[2(\alpha-\alpha_1)x+2(\beta-\beta_1)y+\alpha_1^2+\beta_1^2-\alpha^2-\beta^2\right]^2-2\mu\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2\right]+1=0.$$

On obtiendrait encore cette équation en écrivant que la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux point fixes (α, β), (α_1, β_1) est égale à une quantité arbitraire.

938. 2° Paraboles.

Les paraboles homofocales sont des paraboles ayant les mêmes foyers ; par conséquent, ces courbes ont en commun le foyer à distance finie et, en outre, ont même axe ; l'équation générale des paraboles homofocales est donc :

$$(5) \qquad y^2 = 2\lambda x + \lambda^2, \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = (\lambda + x)^2 ;$$

λ est une constante arbitraire ; l'origine des coordonnées est le foyer commun.

---

§ II. Équations tangentielles.

939. Nous rappellerons d'abord que, dans l'équation générale tangentielle des coniques rapportées à un triangle ABC, savoir

$$(I) \qquad aU^2 + a_1V^2 + a_2W^2 + 2bVW + 2b_1UW + 2b^2UV = 0 ;$$

on peut regarder U, V, W, comme des fonctions linéaires des coordonnées bilatères (u, v) d'une droite ; ou bien, on peut regarder U, V, W, comme des quantités proportionnelles aux distances à la droite (u, v) des trois points fixes $U=0$, $V=0$, $W=0$; l'équation (I) est alors l'équation tangentielle en coordonnées trilatères de la conique considérée.

I° Équation générale des coniques inscrites à un triangle.

940. Prenons le triangle fixe pour triangle de référence, et exprimons que la conique (I) est tangente aux trois côtés de ce triangle, on trouve pour l'équation cherchée

$$(II) \qquad bVW + b_1UW + b_2UV = 0 ;$$

c'est l'équation tangentielle générale des coniques inscrites au triangle de référence.

Nous écrirons encore cette équation sous la forme suivante

$$(II \text{ bis}) \qquad aBC + bAC + cAB = 0,$$

en désignant par A, B, C, des fonctions linéaires de u, v, et par a, b, c, des constantes arbitraires.

Supposons qu'une de ces fonctions linéaires, C par exemple, se réduise à une constante ; rendons alors l'équation (II bis) homogène en remplaçant u, v, par $\frac{u}{w}, \frac{v}{w}$, il vient

$$cAB + w(aB + bA) = 0.$$

Cette équation représente une conique inscrite dans un triangle fixe qui a pour sommets les deux points $A=0$, $B=0$, et l'origine des coordonnées $w=0$.

Les calculs des N^{os} [908] et [909] sont applicables ici mot pour mot, et démontrent dans un ordre inverse les deux théorèmes qui s'y trouvent énoncés.

II° Équation générale des coniques circonscrites à un triangle.

941. Pour exprimer qu'un point

$$(1) \qquad aU + bV + cW = 0,$$

est situé sur une courbe dont on donne l'équation tangentielle

$$(2) \qquad f(U, V, W) = 0 ;$$

il faut, après avoir éliminé une des variables entre les équations (1) et (2), écrire que l'équation résultante a une racine double ; car alors, par le point considéré, passent deux tangentes qui se confondent ; condition nécessaire

et suffisante pour que ce point soit sur la courbe, si ce point n'appartient pas à une tangente multiple.

Ceci posé, on peut appliquer au cas actuel, les calculs du N° [910], on exprimera que le sommet A est sur la conique (I), en faisant $U=0$, dans l'équation (1) et en écrivant que le résultat est un carré parfait, et de même pour les sommets B et C. On trouvera ainsi pour l'équation tangentielle des coniques circonscrites au triangle ABC.

$$\text{(III)} \qquad a^2U^2+a_1^2V^2+a_2^2W^2-2aa_1UV-2aa_2UW-2a_1a_2VW=0.$$

Si l'on regarde U, V, W, comme des fonctions linéaires de u, et v, et que l'une d'elles, W par exemple, se réduise à une constante, l'un des sommets du triangle sera l'origine des coordonnées.

III°. Équation des coniques conjuguées par rapport à un triangle.

942. On a déjà vu N° [468] que l'équation tangentielle des coniques conjuguées par rapport au triangle de référence est

$$\text{(IV)} \qquad aU^2+bV^2+cW^2=0;$$

les sommets du triangle sont les pôles des côtés opposés.

Lorsqu'on assujettit les coniques conjuguées à toucher une droite fixe, le pôle d'une droite fixe décrit une autre droite fixe; et réciproquement, le pôle de cette dernière droite décrit la première.

En effet, la courbe touchant une droite fixe (U_0, V_0, W_0), on a

$$aU_0^2+bV_0^2+cW_0^2=0.$$

Soit une autre droite fixe U_1, V_1, W_1, son pôle est

$$aU_1U+bV_1V+cV_1V=0.$$

En tenant compte de la relation qui précède, on voit que ce point est sur la droite fixe dont les coordonnées U_2, V_2, W_2, vérifient les égalités

$$(1) \qquad \frac{U_1U_2}{U_0^2}=\frac{V_1V_2}{V_0^2}=\frac{W_1W_2}{W_0^2}.$$

IV°. Équation des coniques touchant les tangentes communes à deux coniques données.

943. Soient $S=0$, $S_1=0$, les équations tangentielles de deux coniques données; l'équation générale des coniques touchant leurs tangentes communes sera

$$\text{(V)} \qquad \Sigma=S+\lambda S_1=0.$$

En effet, les coordonnées des tangentes communes aux deux coniques S et S_1 annulent S et S_1 et par suite $(S+\lambda S_1)$.

C'est l'équation la plus générale; car deux coniques ont quatre tangentes communes, les coniques Σ touchent donc quatre droites; comme une courbe de 2ème classe est déterminée par cinq tangentes, la conique Σ sera complètement déterminée lorsqu'on l'assujettira à toucher une cinquième droite; or, on pourra disposer de λ de manière à ce que la courbe touche cette droite arbitrairement choisie; donc.....

Une des coniques S ou S_1 peut se réduire à deux points; soit, par exemple, $S_1=PQ$, P et Q étant des fonctions linéaires.

L'équation générale des coniques, touchant les tangentes menées à la conique S par les points $P=0$, et $Q=0$, sera

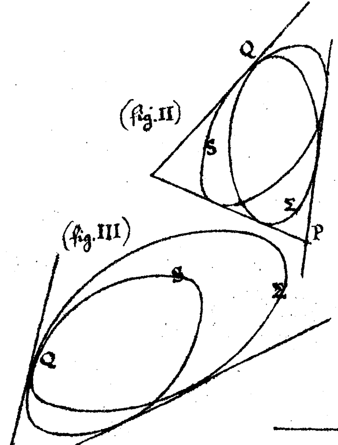
$$\text{(V bis)} \qquad S+\lambda PQ=0.$$

Si l'on suppose que les deux points P et Q se confondent, l'équation précédente devient

$$\text{(V ter)} \qquad S+\lambda P^2=0;$$

(fig. I) S Σ P

c'est l'équation tangentielle des coniques doublement tangentes à la conique S aux points où elle est touchée par les tangentes menées du point P à cette conique S (fig I).



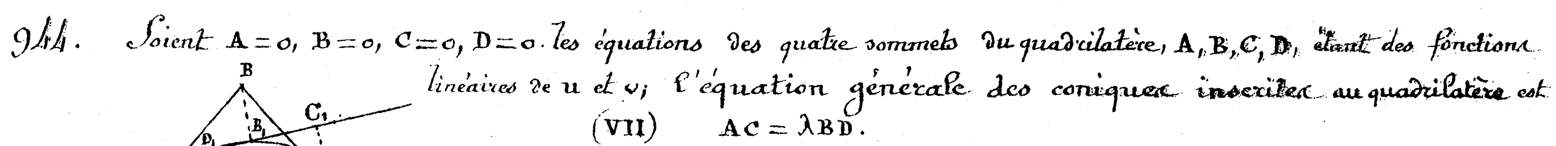
Reprenons l'équation (V bis)

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma = S + \lambda PQ = 0.$$

Si l'un des points, Q par exemple, est sur la conique S, et que le point P ne soit pas sur la tangente en Q, l'équation (V bis) représentera toutes les coniques touchant la conique S au point Q et les tangentes menées à la conique S par le point P (fig. II).

Si le point P est sur la tangente en Q, l'équation (V bis) sera l'équation tangentielle des coniques osculatrices de la conique S au point $Q=0$. (fig. III).

V.° Equation tangentielle des coniques inscrites à un quadrilatère.



944. Soient $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ les équations des quatre sommets du quadrilatère, A, B, C, D, étant des fonctions linéaires de u et v; l'équation générale des coniques inscrites au quadrilatère est

$$\text{(VII)} \qquad AC = \lambda BD.$$

En effet, les coordonnées de la droite passant par les deux points $A=0$, $B=0$, vérifient évidemment l'équation (VII); donc la conique qu'elle représente touche la droite AB; et de même pour les autres côtés. On démontrera que c'est l'équation la plus générale à l'aide du raisonnement employé dans le cas qui précède.

Le rapport des produits des distances des sommets opposés d'un quadrilatère inscrit à une tangente quelconque est constant. (C'est le corrélatif du théorème de Pappus, v. [930])

Supposons les équations des sommets mises sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} A = au + a_1 v - 1 = 0, \\ B = bu + b_1 v - 1 = 0, \\ C = cu + c_1 v - 1 = 0, \\ D = cu + d_1 v - 1 = 0; \end{cases}$$

et soient (u, v) les coordonnées d'une tangente quelconque. Les distances des sommets A, B, C, D à cette tangente sont N.° [129]:

$$\overline{AA_1} = \frac{A}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \overline{BB_1} = \frac{B}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \overline{CC_1} = \frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \overline{DD_1} = \frac{D}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

on déduit de là, en remarquant que les quantités A, B, C, D, doivent vérifier l'équation de la courbe

$$(2) \qquad \frac{\overline{AA_1}\cdot\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}\cdot\overline{DD_1}} = \lambda = \text{Constante}.$$

C. Q. F. D.

945. Le pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques inscrites dans un même quadrilatère décrit une droite fixe.

Supposons qu'on rende homogène les fonctions A, B, C, D, de l'équation

$$(3) \qquad f(u, v, w) = AC + \lambda BD = 0;$$

l'équation du point polaire d'une droite (u_0, v_0, w_0) est

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0;$$

ce qui donne en ayant égard à la forme (1) des fonctions A, B, C, D:

$$u_0\left[Ac + aC + \lambda(Bd + bD)\right] + v_0\left[Ac_1 + a_1C + \lambda(Bd_1 + Db_1)\right] - w_0\left[A + C + \lambda(B+D)\right] = 0.$$

Or il est visible que ce point est situé sur la droite dont les coordonnées sont déterminées par les deux équations:

$$(4) \qquad \begin{cases} A\,(cu_0 + c_1 v_0 - w_0) + C\,(au_0 + a_1 v_0 - w_0) = 0, \\ B\,(du_0 + d_1 v_0 - w_0) + D\,(bu_0 + b_1 v_0 - w_0) = 0; \end{cases}$$

équations qu'on peut écrire

$$AC_0 + CA_0 = 0, \quad BD_0 + DB_0 = 0,$$

ou

$$(4\ bis) \qquad \frac{A}{A_0} + \frac{C}{C_0} = 0, \quad \frac{B}{B_0} + \frac{D}{D_0} = 0.$$

Or la première de ces équations représente (N° 135) le pôle de la droite considérée (u_0, v_0, w_0) par rapport aux deux points A et C; et la seconde le pôle de cette droite par rapport aux deux points B et D.

On constaterait encore que la droite (4 bis) passe par le pôle de (u_0, v_0, w_0) par rapport aux deux points P_1 et Q_1, intersections des côtés opposés du quadrilatère.

Cette conséquence résulte de la propriété même du lieu défini par les équations (4 bis). En effet, cette droite est le lieu des pôles de la droite (u_0, v_0, w_0) par rapport aux diverses coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD. Or la diagonale AC, ou plutôt les deux points A et C forment une conique infiniment aplatie, ou une conique ayant une tangente double, laquelle est inscrite dans le quadrilatère ABCD; car les droites AD et AB, passant par le point A, sont tangentes à cette conique, et de même les droites CB et CD. Donc la droite, lieu des pôles, doit passer par le pôle de (u_0, v_0, w_0) par rapport au système des deux points (A, C). De même pour (B, D) et (P_1, Q_1).



De là résulte que:

Le lieu des centres (ou pôles de la droite de l'infini) des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite passant par les milieux des diagonales.

Un calcul facile nous montre encore que:

Les polaires d'un point fixe, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère, enveloppent une conique.

946. Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une tangente variable à une conique avec quatre tangentes fixes est constant.

Soient $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ les équations des sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes fixes; l'équation tangentielle pourra s'écrire

$$(5) \qquad AC = BD; \text{ ou } D = mA + nB + pC. \quad (5\ bis)$$

L'équation (5) sera vérifiée, si l'on pose

$$(6) \qquad A = \alpha B, \quad D = \alpha C,$$

mais les équations (6) représentent deux points respectivement situés sur les côtés AB et CD; de sorte que si l'on considère les deux points

$$(7) \quad \begin{array}{ll} (a) & M = A - \alpha B = 0, \\ (c) & N = D - \alpha C = 0, \end{array}$$

la droite qui passe par ces deux points touchera la conique (5), et cela quelle que soit l'arbitraire α.

L'équation d'un point (b) situé sur ac sera

$$(8) \qquad M + KN = 0, \quad \text{ou} \quad A(1+Km) + B(-\alpha + Kn) + K(p-\alpha)C = 0;$$

d'un autre côté l'équation d'un point situé sur BC est

$$B + K'C = 0.$$

Exprimons que ces deux points coïncident, on a $K = -\frac{1}{m}$; par conséquent, l'équation du point (b) sera

$$(9) \qquad (b) \qquad N - mM = 0.$$

De même exprimons que le point (8) coïncide avec un point situé sur AP, c.à.d. avec le point

$$D + K''A = 0, \quad \text{ou} \quad A(m + K'') + nB + pC = 0;$$

on trouve

$$\frac{1+Km}{m+K''}=\frac{-\alpha+Kn}{n}=\frac{K(p-\alpha)}{p}, \text{ d'où } K=\frac{p}{n}.$$

Par suite l'équation du point (d) sera

$$(10) \qquad (d) \qquad N+\frac{n}{p}M=0.$$

Ainsi les équations des quatre points a, b, c, d, sont

$$(a)\quad M=0,\quad (c)\quad N=0;\quad (b)\quad N-mM=0;\quad (d)\quad N+\frac{n}{p}M=0.$$

Le rapport anharmonique de ces quatre points a pour valeur N°. [174]

$$-\frac{mp}{n};$$

quantité visiblement indépendante de α, et par suite, constante. C. Q. F. D.

VI°. Équation des coniques tangentes à deux droites.

947. Si, dans l'équation précédente, on suppose les fonctions linéaires C et D égales, il vient

$$AC+\lambda B^2=0,$$

ou, en changeant les lettres

$$(\text{VIII}) \qquad AB=\lambda C^2;$$

c'est l'équation tangentielle des coniques touchant aux points fixes A et B deux droites qui se coupent au point C.

En effet, la droite passant par les points A=0, C=0 est évidemment tangente; de plus, si l'on fait A=0, l'équation (VIII) se réduit à un carré parfait; par conséquent, les deux tangentes menées à la conique par le point A=0 se confondent, ce qui exige que le point A soit sur la courbe.

Si la fonction linéaire C se réduit à une constante, il vient, en rendant homogène:

$$(\text{VIII bis}) \qquad AB=\lambda w^2;$$

c'est l'équation tangentielle des coniques touchant aux points A=0, B=0, deux droites fixes menées par l'origine $w=0$.

Signification géométrique de l'équation $AB=\lambda C^2$.

Supposons les fonctions linéaires A, B, C, mises sous la forme

$$A=au+a_1v-1,\quad B=bu+b_1v-1,\quad C=cu+c_1v-1;$$

et considérons une tangente quelconque à la conique; on aura pour les distances des points A, B, C, à cette tangente

$$\overline{AA_1}=\frac{A}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \overline{BB_1}=\frac{B}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \overline{CC_1}=\frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Les fonctions linéaires A, B, C, devant vérifier l'équation de la courbe on en conclura

$$\frac{\overline{AA_1}\cdot\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}^2}=\lambda=\text{constante};$$

c.à.d. que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes A et B d'une conique sur une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le carré de la perpendiculaire abaissée sur cette même tangente du pôle C de la droite AB.

948. Le pôle d'une droite fixe, par rapport aux diverses coniques touchant deux droites données en des points donnés, est sur une droite fixe passant par le pôle de la corde de contact.

En prenant le triangle ABC pour triangle de référence, l'équation générale des coniques considérées est

$$2XY=\lambda Z^2,$$

X, Y, Z représentant ici les coordonnées trilatères d'une droite.

Le point polaire de la droite fixe (X_0, Y_0, Z_0) a pour équation

$$XY_0 + YX_0 - \lambda ZZ_0 = 0.$$

Or, quel que soit λ, ce point est toujours sur la droite fixe

$$Z = 0, \quad XY_0 + XY_0 = 0;$$

le point $Z = 0$ est le pôle de la corde de contact AB; donc.....

VIIIe Équation des coniques circonscrites à un quadrilatère.

949. Supposons les équations des points de rencontre des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère mises sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} U = pu + p_1 v - 1 = 0, & (P) \\ V = qu + q_1 v - 1 = 0, \\ W = ru + r_1 v - 1 = 0, \end{cases}$$

il y aura une infinité de quadrilatères ayant pour diagonales les droites qui joignent ces trois points; les équations générales des sommets de ce quadrilatère seront

$$(2)\quad \begin{cases} A = U + aV + bW = 0, \\ B = U - aV + bW = 0, \\ C = U + aV - bW = 0, \\ D = U - aV - bW = 0. \end{cases}$$

Le fait est facile à vérifier; on parviendra d'ailleurs directement à ces équations par une analyse identique à celle qui a été développée au N° (927).

Ceci posé, si l'on prend l'équation tangentielle générale des coniques circonscrites au triangle ABC et si l'on exprime ensuite qu'elle passe par le point D (le calcul est le même que celui du N° (928)) on arrive à

$$(IX)\quad \frac{a^2V^2}{\rho} + \frac{b^2W^2}{1-\rho} - U^2 = 0;$$

c'est l'équation générale tangentielle des coniques circonscrites au quadrilatère $ABCD$; ρ est une constante arbitraire.

On voit que ces coniques sont conjuguées par rapport au triangle UVW, dont les sommets sont les points de rencontre des diagonales et des côtés opposés.

950. Les pôles de deux côtés opposés du quadrilatère sont sur la droite qui joint les points de rencontre des deux autres systèmes de côtés opposés, et forment, avec ces derniers points, un système harmonique (Les diagonales proprement dites sont considérées comme deux côtés opposés).

Le pôle d'une droite (U_0, V_0, W_0) par rapport à la conique (IX) est

$$\frac{a^2VV_0}{\rho} + \frac{b^2WW_0}{1-\rho} - UU_0 = 0.$$

Si nous prenons, par exemple, les côtés opposés AB et CD, on aura, d'après les formules (2),

pour AB : $\quad V_0 = 0, \quad U_0 = -bW_0,$

pour CD : $\quad V_0 = 0, \quad U_0 = bW_0;$

par conséquent on a:

pôle de AB : $\quad U - \dfrac{bW}{1-\rho} = 0;$

pôle de CD : $\quad U + \dfrac{bW}{1-\rho} = 0.$

Ces deux pôles sont évidemment sur la droite $U=0$, $W=0$; et forment avec ces derniers points, un système harmonique.

VIII° Équation tangentielle des coniques doublement tangentes à deux coniques données.

951. Si les équations tangentielles de deux coniques données sont

$$(1) \qquad S=0, \quad S_1=0,$$

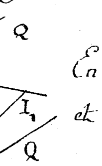
on pourra disposer de λ de manière qu'on ait identiquement

$$(2) \qquad S-\lambda S_1 = PQ;$$

P et Q sont deux fonctions linéaires de u et v, qui, égalées à zéro, représentent deux des points de concours des quatre tangentes communes aux coniques S et S_1.

Ceci posé, l'équation générale des coniques doublement tangentes aux coniques proposées sera

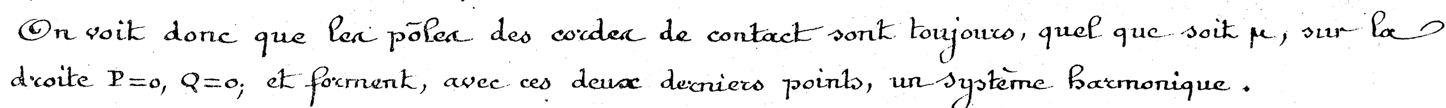
$$(3) \qquad \Sigma = \mu^2 P^2 - 2\mu(S+\lambda S_1) + Q^2 = 0.$$



En effet, considérons, par exemple, la conique S_1; les tangentes communes aux coniques $S_1=0$ et $\Sigma=0$, seront données, eu égard à l'identité (2), par les équations

$$S_1=0, \quad (\mu P - Q)^2 = 0;$$

les quatre tangentes communes se réduisent à deux groupes de tangentes coïncidentes et passant par le point I_1 $(\mu P - Q)=0$; les deux coniques S_1 et Σ sont donc doublement tangentes. Il en sera de même pour la conique S, et le pôle de la corde de contact sera $(\mu P + Q)=0$.



On voit donc que les pôles des cordes de contact sont toujours, quel que soit μ, sur la droite $P=0$, $Q=0$; et forment, avec ces deux derniers points, un système harmonique.

IX° Équation tangentielle des coniques homofocales.

952. Si l'équation d'une courbe en coordonnées-point est

$$f(x,y,z)=0,$$

son équation tangentielle s'obtiendra N° [427] en éliminant x, y, z entre les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{-w}, \quad ux+vy-wz=0.$$

1° Nous avons vu N° [935] que l'équation générale des coniques homofocales d'une conique donnée à centre est:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} - 1 = 0,$$

λ est une constante arbitraire, et la conique proposée est supposée rapportée à son centre et à ses axes.

Si l'on cherche l'équation tangentielle de la courbe (1), on a d'abord

$$\frac{x}{u(a^2-\lambda)} = \frac{y}{v(b^2-\lambda)} = 1, \quad ux+vy-1=0;$$

d'où l'on conclut:

$$(2) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda(u^2+v^2);$$

l'équation (2) est l'équation tangentielle des coniques homofocales de la conique

$$(3) \qquad a^2u^2+b^2v^2-1=0;$$

λ est une constante arbitraire; les axes de coordonnées sont rectangulaires.

2° L'équation des paraboles homofocales est N° [938]

$$(4) \qquad y^2 = 2\lambda x + \lambda^2;$$

nous trouvons alors pour l'équation tangentielle des paraboles homofocales

$$(5)\qquad 2u+\lambda(u^2+v^2)=0;\ \text{ou}\ 2u\omega+\lambda(u^2+v^2)=0.$$

953. On se rappelle que, dans le cas des axes rectangulaires, l'équation

$$u^2+v^2=0,$$

représente les points circulaires à l'infini; on voit alors, par les équations (2) et (5), que les courbes homofocales d'une courbe donnée touchent toutes les tangentes menées à la courbe proposée par les points circulaires à l'infini; propriété caractéristique déjà constatée plusieurs fois.

Il est facile, d'après cela, d'écrire l'équation tangentielle générale des courbes homofocales d'une courbe donnée

$$(6)\qquad f(u,v)=0;$$

car, si les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires, l'équation générale des courbes homofocales de la courbe (6) sera

$$(7)\qquad f(u,v)+\lambda(u^2+v^2)=0.$$

En effet, ces courbes touchent les droites passant par les points

$$u^2+v^2=0,$$

et tangentes à la courbe proposée. C'est d'ailleurs l'équation générale, puisque ces coniques sont assujetties à être inscrites dans un quadrilatère; elles seront donc déterminées par une seule condition, par suite leur équation ne doit renfermer qu'une constante arbitraire.

Si $f(u,v)$ se réduit au produit de deux fonctions linéaires, l'équation

$$(8)\qquad AB+\lambda(u^2+v^2)=0,$$

sera l'équation générale des coniques ayant pour foyers deux points donnés.

La courbe sera une parabole, lorsque l'un de ces points sera à l'infini.

La courbe devient un cercle lorsque les deux points A et B se confondent; ainsi l'équation

$$(9)\qquad A^2+\lambda(u^2+v^2)=0,$$

est l'équation générale des cercles ayant pour centre le point $A=0$.

Remarque. On pourrait de l'équation (7) déduire l'équation générale en coordonnées-point des coniques homofocales d'une conique donnée; mais cette équation est assez compliquée et nous n'aurons pas à en faire usage.

---

§III. Démonstration de plusieurs théorèmes généraux relatifs aux coniques.

Nous allons indiquer, dans ce paragraphe, plusieurs propriétés générales des coniques, dont la plupart sont des propriétés fondamentales de ces courbes. Notre intention n'est pas de présenter ici une théorie complète des coniques; nous voulons seulement montrer, par l'étude de quelques propositions importantes, comment le calcul se prête à la démonstration de ces propositions et constater toutes les ressources de l'analyse algébrique dans les recherches géométriques.

954. 1° **Propriétés fondamentales des coniques.**

(I) Si de quatre points d'une conique on mène des droites à un cinquième point de la courbe: le rapport anharmonique de ces droites a une valeur constante, quelque soit le cinquième point.

(II) Quatre tangentes fixes d'une conique sont rencontrées par une cinquième tangente quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

C'est de ces deux propriétés que M. Chasles déduit toute la théorie des coniques (Traité des sections coniques, par M. Chasles page 2).

Ces propositions ont été démontrées aux N^os [919], [925], [946].

955. II°. Théorème de Pascal. Théorème de Brianchon

Lemme. Lorsque trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes d'intersection passent par un même point.

Soit $S=0$ une de ces coniques, et $C=0$ l'équation de la corde commune, les équations des trois coniques pourront s'écrire

$$(1)\quad S=0,$$
$$(2)\quad S_1=S+CD=0,$$
$$(3)\quad S_2=S+CE=0;$$

D et E étant des fonctions linéaires. Les points d'intersection
des coniques S et S_1 seront sur les droites $C=0$, $D=0$;
des coniques S et S_2 seront sur les droites $C=0$, $E=0$;
des coniques S_1 et S_2 seront sur les droites $C=0$, $E-D=0$.

Les trois cordes d'intersection différentes de la corde commune sont donc

$$(4)\qquad D=0,\quad E=0,\quad D-E=0;$$

il est visible que ces trois droites sont concourantes, puisque la troisième équation est une conséquence des deux premières.

Remarque. Si l'on interprète ces équations dans le système des équations tangentielles, les équations (1), (2), (3), représentent trois coniques tangentes à deux droites fixes menées par le point $C=0$ tangentiellement à la conique S. Les équations (4) définissent les points de concours des autres couples de tangentes communes; donc:

Lorsque trois coniques sont tangentes à deux droites fixes, les points de concours des trois autres couples de tangentes communes sont en ligne droite.

956. Théorème de Pascal.

Lorsqu'un hexagone est inscrit à une conique, les intersections des côtés opposés donne trois points en ligne droite.

Soit abcdef un hexagone inscrit, désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6, les côtés consécutifs; considérons, avec la conique donnée S, les coniques S_1 et S_2 formées, la 1ère par l'ensemble des droites 1 et 3; la 2ème, par l'ensemble des droites 4 et 6. Les trois coniques

$$S;\quad S_1\,(1,3);\quad S_2\,(4,6);$$

ont une corde commune ad; il en résulte que leurs trois autres cordes d'intersection passent par un même point. Or la corde d'intersection des coniques S et S_1 est la droite bc ou (2); celle des coniques S et S_2 est la droite ef ou (5); donc l'intersection β des droites (2) et (5) doit se trouver sur la corde d'intersection des coniques S_1 et S_2. Or le côté (1) de S_1 coupe le côté (4) de S_2 en α; le côté (3) de S_1 coupe le côté (6) de S_2 en γ; la corde d'intersection de S_1 et S_2 sera donc la droite $\alpha\gamma$. Le point β doit se trouver sur cette droite; mais les trois points α, β, γ, sont les points de concours des côtés opposés (1,4); (2,5), (3,6);

ce qui démontre la proposition.

Corollaires.

On peut déduire de cette proposition les propriétés relatives au pentagone, quadrilatère et triangle inscrit.

Pentagone: Supposons que le sommet f vienne se confondre avec le sommet e, la droite fe deviendra tangente, et l'hexagone se réduit au pentagone. Le théorème de Pascal sera donc applicable à un pentagone, en supposant ce polygone complété par la tangente à l'un de ses sommets; aussi les trois points de concours des droites (1,4), (2,5), (3,6) seront en ligne droite.

Quadrilatère: Supposons que deux sommets b et c du pentagone viennent se confondre, la droite bc deviendra tangente; et l'on pourra appliquer le théorème de Pascal au quadrilatère, pourvu qu'on le suppose complété par les tangentes à deux de ses sommets.

Triangle: Enfin, si deux sommets du quadrilatère viennent se confondre, on aura un triangle auquel on pourra appliquer le théorème de Pascal, pourvu qu'on le suppose complété par les tangentes à ses trois sommets.

On retrouve ainsi la propriété déjà démontrée:

Étant donnés un triangle inscrit dans une conique et un triangle circonscrit, les points de contact étant les sommets du triangle inscrit, les intersections des côtés opposés de ces deux triangles sont trois points en ligne droite.

957. ## Théorème de Brianchon.

Lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point.

Nous appuierons cette démonstration sur le lemme corrélatif N.° [955].

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets consécutifs de l'hexagone circonscrit; considérons, avec la conique donnée S, les coniques S_1 et S_2 formées: la première, du système des deux points 1 et 3; la seconde, des deux points 4 et 6. Lorsqu'une conique se compose de deux points une droite quelconque, passant par un de ces points, est une tangente, car l'équation tangentielle de cette conique est évidemment vérifiée par les coordonnées de cette droite.

Ceci posé, les trois coniques

$$S;\quad S_1(1,3);\; S_2(4,6);$$

sont tangentes aux deux droites (1,6) et (3,4); donc, d'après le lemme rappelé, les points de concours des trois autres couples de tangentes communes sont en ligne droite.

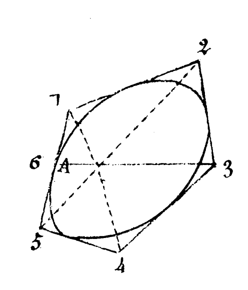
Or les droites (1,2) et (3,2) sont les tangentes communes aux coniques S et S_1; le sommet (2) est leur point de concours. Les droites (4,5) et (6,5) sont les tangentes communes aux coniques S et S_2; le sommet (5) est leur point de concours. Enfin les droites (1,4) et (3,6) sont les tangentes communes aux coniques S_1 et S_2; leur point de concours doit se trouver sur la ligne (2,5). Donc les diagonales (1,4), (2,5) et (3,6) sont concourantes. C.Q.F.D.

Corollaires.

On déduit aussi de cette proposition les propriétés relatives au pentagone, au quadrilatère et au triangle circonscrits.

Pentagone. Supposons qu'un des sommets de l'hexagone se rapproche indéfiniment de la courbe, de manière que les côtés qui le déterminent se réduisent à une tangente unique, l'hexagone devient

un pentagone.



Le théorème de Brianchon sera donc applicable au pentagone, en complétant le nombre de ses sommets par un des points de contact. Ainsi, en considérant le point de contact A comme un sixième sommet, les droites (1,4), (2,5), (3,6) seront concourantes.

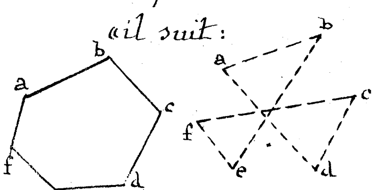
Quadrilatère. Si l'un des sommets du pentagone se rapproche indéfiniment de la courbe, de manière à ce que les côtés qui le déterminent se réduisent à une tangente unique, on aura un quadrilatère auquel le théorème de Brianchon sera applicable, pourvu qu'on complète le nombre des sommets à l'aide de deux des points de contact.

Triangle. On passe de la même manière au triangle, et on en conclura ce théorème déjà démontré:

Les droites, qui joignent les sommets d'un triangle circonscrit aux points de contact opposés, sont concourantes.

958. Seconde démonstration des Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

« Considérons six points a, b, c, d, e, f, situés sur une conique; avec ces six points on peut « former d'abord trois hexagones, en les joignant successivement dans l'ordre déterminé comme « il suit:



(I) a b c d e f. a

(II) a d c f e b. a

(III) a d e b c f. a.

« Ces trois hexagones donnent lieu aux trois systèmes de côtés opposés:

(1°) $\begin{cases} ab, de & \text{se coupent en } \alpha, \\ bc, ef & \text{se coupent en } \beta, \\ cd, fa & \text{se coupent en } \gamma; \end{cases}$

(2°) $\begin{cases} ad, fe & \text{se coupent en } \alpha_1, \\ dc, eb & \text{se coupent en } \beta_1, \\ cf, ba & \text{se coupent en } \gamma_1; \end{cases}$

(3°) $\begin{cases} ad, bc & \text{se coupent en } \alpha_2, \\ de, cf & \text{se coupent en } \beta_2, \\ eb, fa & \text{se coupent en } \gamma_2. \end{cases}$

Les trois systèmes de trois points (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont en ligne droite; et ces trois droites sont concourantes.

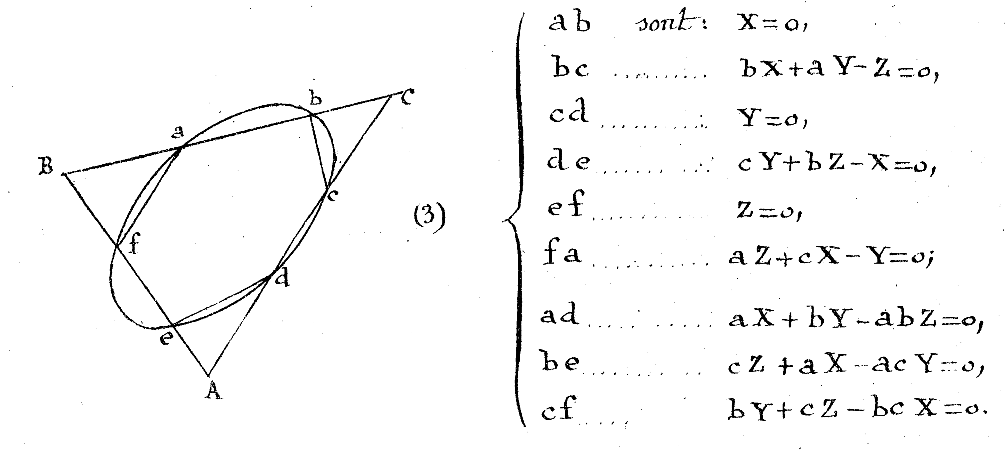
Prenons pour triangle de référence ABC le triangle formé par les trois droites ab, cd, ef; en choisissant convenablement les paramètres de référence, on pourra toujours mettre l'équation de la conique sous la forme:

$$(1) \qquad X^2+Y^2+Z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)YZ-\left(b+\frac{1}{b}\right)XZ-\left(c+\frac{1}{c}\right)XY=0.$$

Les coordonnées des points a, b, c, d, e, f seront alors

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (a)\begin{cases} X=0, \\ Y=aZ, \end{cases} & (c)\begin{cases} Y=0, \\ Z=bX, \end{cases} & (e)\begin{cases} Z=0, \\ X=cY, \end{cases} \\ (b)\begin{cases} X=0, \\ Z=aY, \end{cases} & (d)\begin{cases} Y=0, \\ X=bZ, \end{cases} & (f)\begin{cases} Z=0, \\ Y=cX. \end{cases} \end{array} \right.$$

On trouvera très facilement que les équations des droites



$$(3)\quad \begin{cases} ab \text{ sont: } X=0, \\ bc \ldots\ldots\ldots\ldots bX+aY-Z=0, \\ cd \ldots\ldots\ldots\ldots Y=0, \\ de \ldots\ldots\ldots\ldots cY+bZ-X=0, \\ ef \ldots\ldots\ldots\ldots Z=0, \\ fa \ldots\ldots\ldots\ldots aZ+cX-Y=0; \\ ad \ldots\ldots\ldots\ldots aX+bY-abZ=0, \\ be \ldots\ldots\ldots\ldots cZ+aX-acY=0, \\ cf \ldots\ldots\ldots\ldots bY+cZ-bcX=0. \end{cases}$$

Ceci posé, si l'on prend une droite passant par les deux points α, β, on constate qu'elle passe par le point γ; et de même pour les groupes $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$; on trouve pour les équations de ces trois droites:

$$(4)\quad \begin{cases} (L) \text{ ou } (\alpha, \beta, \gamma) \quad \frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=0; \\ (L_1) \text{ ou } (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad aX+bY+cZ=0; \\ (L_2) \text{ ou } (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \quad aX+bY+cZ-abc\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}\right)=0. \end{cases}$$

Il est visible, d'après les équations qui précèdent, que les trois droites L, L_1, L_2, sont concourantes. C. Q. F. D.

N. B. Les combinaisons des six points a, b, c, d, e, f donnent lieu à un grand nombre d'autres hexagones qui présenteront également la propriété qui vient d'être signalée.

959. Les calculs effectués dans le numéro précédent, peuvent être supposés faits dans le système des équations tangentielles; interprétant alors, à ce point de vue, les résultats obtenus, nous avons le théorème suivant:

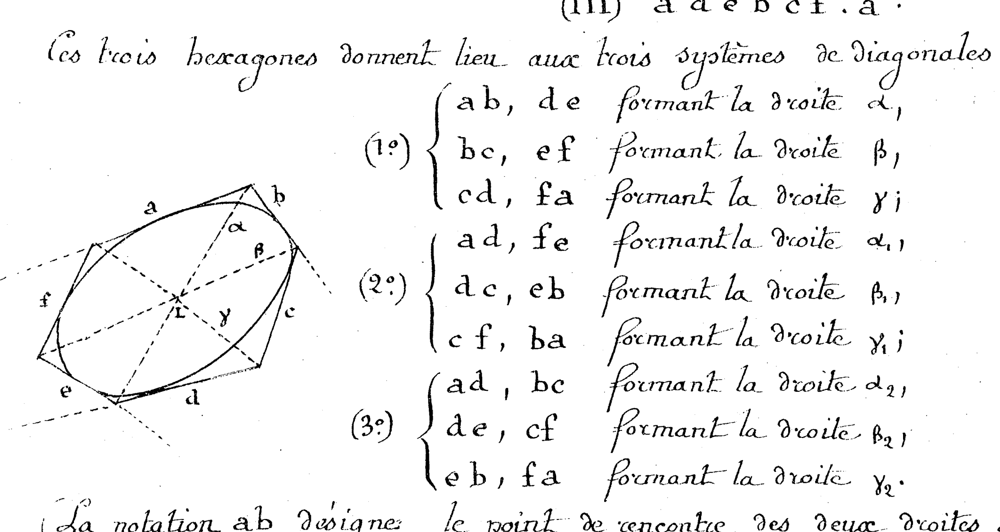
« Considérons six droites a, b, c, d, e, f, tangentes à une conique; avec ces six droites on peut former d'abord trois hexagones circonscrits, en les prenant dans l'ordre qui suit:

(I) a b c d e f . a,

(II) a d c f e b . a,

(III) a d e b c f . a.

Ces trois hexagones donnent lieu aux trois systèmes de diagonales



(1°) ab, de formant la droite α,
bc, ef formant la droite β,
cd, fa formant la droite γ;

(2°) ad, fe formant la droite α_1,
dc, eb formant la droite β_1,
cf, ba formant la droite γ_1;

(3°) ad, bc formant la droite α_2,
de, cf formant la droite β_2,
eb, fa formant la droite γ_2.

(La notation ab désigne le point de rencontre des deux droites a et b, etc....).

Les trois systèmes de trois droites (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ forment trois systèmes de droites concourantes; et les points de concours L, L_1, L_2, sont en ligne droite.

960. III° Théorème de Carnot.

Un triangle A B C étant tracé dans le plan d'une conique qui rencontre ses côtés consécutifs BC, CA, AB, en trois couples de points a, a', b, b', c, c'; les segments que ces points forment sur les côtés ont entre eux la relation

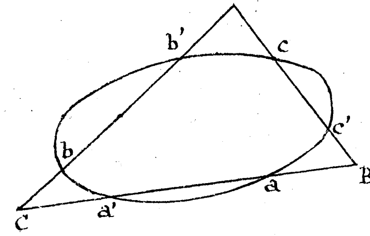
$$(\mathrm{I}) \qquad Ab.Ab'.Bc.Bc'.Ca.Ca' = Ac.Ac'.Ba.Ba'.Cb.Cb'.$$

Théorème Corrélatif.

Quand un triangle est tracé dans le plan d'une conique, si de ses sommets on mène des tangentes à la courbe, on aura entre les sinus des angles que ces tangentes font avec les côtés du triangle la relation suivante, dans laquelle a, b, c sont les trois côtés du triangle; et α, α', β, β', γ, γ', les trois couples de tangentes menées par les sommets opposés A, B, C:

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\sin(a,\beta).\sin(a,\beta').\sin(b,\gamma).\sin(b,\gamma').\sin(c,\alpha).\sin(c,\alpha')}{\sin(a,\gamma).\sin(a,\gamma').\sin(b,\alpha).\sin(b,\alpha').\sin(c,\beta).\sin(c,\beta')} = 1.$$

Nous avons déja donné le théorème général; nous allons reprendre la démonstration particulière dans le cas des coniques.



Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des trois sommets A, B, C; et

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la courbe.

Si l'on pose

$$(2) \qquad \lambda = \frac{Ba}{aC},$$

les coordonnées du point a seront N.° [90]:

$$(3) \qquad x' = \frac{x_2 + \lambda x_3}{1+\lambda}, \quad y' = \frac{y_2 + \lambda y_3}{1+\lambda}, \quad z' = \frac{z_2 + \lambda z_3}{1+\lambda}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), il vient

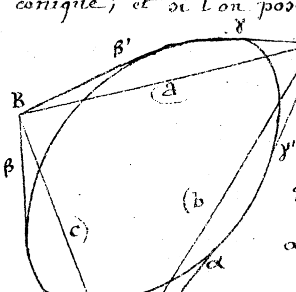
$$(4) \qquad f(x_2, y_2, z_2) + \lambda\left[x_3 f'_{x_2} + y_3 f'_{y_2} + z_3 f'_{z_2}\right] + \lambda^2 f(x_3, y_3, z_3) = 0.$$

Les deux racines de cette équation correspondent aux deux points a et a', c.à.d. donnent les deux rapports $\frac{Ba}{aC}, \frac{Ba'}{a'C}$; on aura donc

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{Ba}{aC} \cdot \dfrac{Ba'}{a'C} = \dfrac{f(x_2, y_2, z_2)}{f(x_3, y_3, z_3)}; \\ \text{on trouvera de même:} \\ \dfrac{Cb}{bA} \cdot \dfrac{Cb'}{b'A} = \dfrac{f(x_3, y_3, z_3)}{f(x_1, y_1, z_1)}; \\ \dfrac{Ac}{cB} \cdot \dfrac{Ac'}{c'B} = \dfrac{f(x_1, y_1, z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)}; \end{cases}$$

Multipliant ces égalités membre à membre et changeant les signes des six facteurs qui entrent dans le dénominateur, on obtient la relation (I).

Si maintenant nous regardons x, y, z, comme les coordonnées d'une tangente, et (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3) comme les coordonnées des côtés a, b, c du triangle; l'équation (1) sera l'équation tangentielle de la conique; et si l'on pose



$$(6) \qquad \lambda = \frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(\alpha, c)},$$

les formules (3) détermineront les coordonnées N.° [142] de la tangente α. Les racines de l'équation (4) seront les valeurs de ces rapports correspondant aux deux tangentes α et α' menées par le sommet A; on aura donc

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{\sin(b,\alpha)}{\sin(\alpha,c)}\cdot\dfrac{\sin(b,\alpha')}{\sin(\alpha',c)}=\dfrac{f(x_2,y_2,z_2)}{f(x_3,y_3,z_3)};\\[2mm] \dfrac{\sin(c,\beta)}{\sin(\beta,a)}\cdot\dfrac{\sin(c,\beta')}{\sin(\beta',a)}=\dfrac{f(x_3,y_3,z_3)}{f(x_1,y_1,z_1)};\\[2mm] \dfrac{\sin(a,\gamma)}{\sin(\gamma,b)}\cdot\dfrac{\sin(a,\gamma')}{\sin(\gamma',b)}=\dfrac{f(x_1,y_1,z_1)}{f(x_2,y_2,z_2)}.\end{cases}$$

Multipliant ces égalités membre à membre et changeant les signes des six facteurs qui entrent dans le dénominateur, on obtient la relation (II).

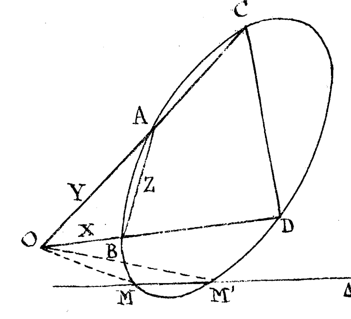
De ces relations générales (I) et (II) résultent de nombreuses relations particulières, en supposant par exemple, que un ou plusieurs côtés du triangle soient tangents à la courbe ; ou bien, que l'un des sommets s'éloigne à l'infini ; etc....

IV°

961. Les coniques, qui passent par quatre points fixes, déterminent sur une droite fixe des segments en involution.

Lorsque des coniques touchent quatre droites fixes, les tangentes menées à ces coniques par un point fixe sont en involution.

1° Soient A, B, C, D les quatre points fixes ; O étant le point de rencontre des côtés AC et BD, prenons OAB pour triangle de référence, et soient les équations des quatre côtés du quadrilatère :



$$(1)\quad\begin{cases}(BD)\quad X=0,\\ (AC)\quad Y=0,\\ (AB)\quad Z=0,\\ (CD)\quad Z=aX+bY;\end{cases}$$

l'équation générale des coniques circonscrites à ce quadrilatère sera

$$\Sigma\qquad (2)\qquad \lambda XY+Z(aX+bY-Z)=0,$$

λ étant une constante arbitraire. Soit maintenant l'équation d'une droite fixe Δ,

$$(3)\qquad Z=mX+nY;$$

si l'on cherche les intersections de cette droite avec la conique (Σ), on trouve en éliminant Z :

$$\lambda XY+(mX+nY)((a-m)X+(b-n)Y)=0,$$

ou, en ordonnant

$$(4)\qquad m(a-m)X^2+XY\{\lambda+an+bm-2mn\}+n(b-n)Y^2=0.$$

Cette équation détermine les deux droites

$$(5)\qquad Y=K_1X,\ Y=K_2X,$$

passant par le point fixe O et par les points d'intersection de la droite fixe Δ avec la conique Σ ; or on a, d'après l'équation (5) :

$$(6)\qquad K_1K_2=\frac{m(a-m)}{n(b-n)}=\text{Constante}.$$

Ce produit est indépendant de la constante arbitraire λ ; donc les droites OM et OM' sont en involution N° (184) équat. (7) ; et, par suite, les points M, M', forment une involution. Les deux droites $X=0$, $Y=0$, ou OB et OA sont des rayons homologues N° (184).

Si l'on exprime que l'équation (4) a deux racines égales, c. à d. que la conique Σ est tangente à la droite Δ, on trouve que les points de contact sont sur les deux droites

$$(7)\qquad Y=+\sqrt{+\frac{m(a-m)}{n(b-n)}}\cdot X,\quad Y=-\sqrt{+\frac{m(a-m)}{n(b-n)}}\cdot X;$$

ce sont les rayons doubles de l'involution. Le fait est évident ; on peut d'ailleurs le vérifier à l'aide des relations (3) du N° (183), en remarquant que dans le cas actuel, on a (si l'on conserve la notation du N° (183)) :

$$M = Y,\ M' = X\ ;\ \text{d'où}\ c = o,\ c' = \infty\ ;$$

puis $\lambda + \lambda' = o,$ et $\lambda\lambda' + a_1 a_1' = o\ ;$

or d'après ce qui précède

$$a_1 a_1' = \frac{m(a-m)}{n(b-n)}\ ;\ \text{donc}\ \lambda^2 + \frac{m(a-m)}{n(b-n)} = o.$$

962. Interprétons les calculs précédents dans le système des équations tangentielles. L'équation (2), c.à.d.

$$(8)\qquad \lambda XY + Z(aX + bY - Z) = o,$$

sera l'équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatère dont les sommets opposés sont

$$(9)\ \begin{cases} (A)\ X = o, & (C)\ Z = o, \\ (B)\ Y = o, & (D)\ Z = aX + bY\ ; \end{cases}$$

Soit un point fixe Δ

$$(10)\quad (\Delta)\qquad Z = mX + nY\ ;$$

les coordonnées des tangentes menées de ce point à la conique seront données par l'équation

$$\lambda XY + (mX + nY)\big((a-m)X + (b-n)Y\big) = o,$$

ou, en développant :

$$(11)\qquad m(a-m)X^2 + XY\big[\lambda + n(a-m) + m(b-n)\big] + n(b-n)Y^2 = o.$$

Cette équation représente deux points situés sur la droite AB ; les équations de ces deux points seront de la forme

$$(12)\qquad Y = K_1 X,\ Y = K_2 X\ ;$$

ce sont deux points appartenant aux tangentes menées par le point Δ.

Or on a, d'après l'équation (11),

$$(13)\qquad K_1 K_2 = \frac{m(a-m)}{n(b-n)} = \text{Constante}\ ;$$

ce produit est indépendant de la constante arbitraire λ ; donc, les points M et M' sont en involution N.° [187] équat. (18) ; et, par suite, les droites ΔM, $\Delta M'$ sont en involution. Les deux points $X = o$, $Y = o$, ou A et B, sont des points homologues N.° [187].

Si l'on exprime que l'équation (11) a deux racines égales, c.à.d. que la conique Σ passe par le point Δ, on obtiendra les deux points

$$(14)\qquad Y = +\sqrt{+\frac{m(a-m)}{n(b-n)}}\cdot X,\ Y = -\sqrt{+\frac{m(a-m)}{n(b-n)}}\cdot X\ ;$$

ces deux points déterminent les rayons doubles de l'involution N.° [186].

963. Parmi les coniques circonscrites à un quadrilatère, il y a, comme coniques particulières, les deux couples de côtés opposés (AB, CD) et (AD, BC) ; la proposition précédente est applicable à ce cas ; d'où :

Théorème de Desargues. Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, une transversale quelconque rencontre les deux couples de côtés opposés et la conique en trois couples de points qui sont en involution.

Parmi les coniques inscrites dans un quadrilatère, il y a, comme coniques particulières, les couples de sommets opposés, (A, B) et (C, D) ; la proposition précédente est encore applicable à ce cas ; d'où :

Théorème corrélatif de celui de Desargues. Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, si d'un point on mène des droites à ses sommets et deux tangentes à la courbe ; ces deux tangentes et les deux couples de droites aboutissant aux sommets opposés du quadrilatère sont en involution.

964. Dans les calculs des N.os [961] et [962] on peut supposer a et b nuls, on a alors une série de coniques tangentes à deux droites fixes en des points fixes ; la corde de contact est la droite AB ; les équations (7) ou (14) deviennent alors

$$mX + nY = 0, \quad mX - nY = 0;$$

pour la première de ces valeurs les équations (3) et (10) donnent $Z = 0$. Donc

Les coniques, tangentes à deux droites données en deux points donnés, déterminent sur une droite fixe une série de points en involution; un des points doubles de l'involution est sur la corde de contact.

Lorsque des coniques sont tangentes à deux droites données en des points donnés, les tangentes menées par un point fixe à toutes ces coniques forment une série en involution; un des rayons doubles de l'involution passe par le point de rencontre des deux tangentes données.

V°

965. L'enveloppe des droites coupées harmoniquement par deux coniques est une conique.

Le lieu des points d'où les tangentes menées à deux coniques fixes forment un faisceau harmonique est une conique.

Étant données deux coniques, il y a toujours un triangle par rapport auquel les deux coniques sont conjuguées (N° [89]); prenons ce triangle pour triangle de référence; les équations des deux coniques seront alors

$$(S) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0,$$

$$(S_1) \qquad a_1X^2 + b_1Y^2 + c_1Z^2 = 0;$$

soit une droite quelconque

$$(1) \qquad Z = \lambda X + \mu Y;$$

les intersections de cette droite avec chacune des coniques seront données par les équations

$$aX^2 + bY^2 + c(\lambda X + \mu Y)^2 = 0;$$

$$a_1X^2 + b_1Y^2 + c_1(\lambda X + \mu Y)^2 = 0;$$

ou

$$(2) \qquad (a + c\lambda^2)X^2 + 2c\lambda\mu XY + (b + c\mu^2)Y^2 = 0;$$

$$(3) \qquad (a_1 + c_1\lambda^2)X^2 + 2c_1\lambda\mu XY + (b_1 + c_1\mu^2)Y^2 = 0.$$

Il faut exprimer que le faisceau des quatre droites (2) et (3) est harmonique; on aura d'après la relation (31) (N° [177]):

$$\left[(a + c\lambda^2)(b_1 + c_1\mu^2) + (a_1 + c_1\lambda^2)(b + c\mu^2)\right] = 2cc_1\lambda^2\mu^2;$$

ou, en développant:

$$(4) \qquad ab_1 + a_1b + \lambda^2(cb_1 + c_1b) + \mu^2(ac_1 + a_1c) = 0.$$

Il s'agit donc de trouver l'enveloppe des droites

$$(5) \qquad Z = \lambda X + \mu Y,$$

en ayant égard à la relation (4).

Or les coordonnées U, V, W de la droite (5) sont données par les équations (N° [139])

$$\frac{U}{\lambda} = \frac{V}{\mu} = \frac{W}{-1};$$

remplaçant λ, μ, par ces valeurs dans la relation (4), il vient

$$(6) \qquad (cb_1 + c_1b)U^2 + (ac_1 + a_1c)V^2 + (ba_1 + b_1a)W^2 = 0;$$

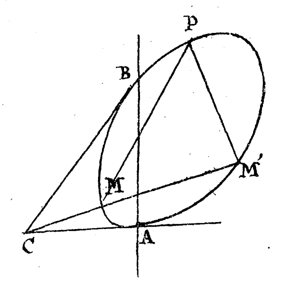
c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée; on voit que c'est une conique conjuguée par rapport au triangle de référence.

Nous démontrerons la proposition corrélative en interprétant ces calculs dans le système des équations tangentielles; et l'équation (6) sera l'équation en coordonnées-point du lieu cherché; c'est une conique conjuguée par rapport au triangle de référence.

VI°

966. On donne une conique et un point fixe C; par ce point on mène une sécante quelconque CMM'; on joint un point fixe P de la conique aux points M et M'; les droites PM, PM' forment une involution.

On donne une conique et une droite fixe AB; par un point quelconque I de cette droite on mène les tangentes IM, IM'; ces tangentes déterminent, sur une tangente fixe, une série de points en involution.



Rapportons la conique aux deux tangentes menées par le point C et à leur corde de contact, son équation sera

$$(1)\qquad XY = Z^2.$$

Une droite quelconque, passant par le point C, aura pour équation

$$(2)\qquad Y = \lambda X;$$

de là nous déduirons pour les coordonnées des points M et M':

$$(3)\qquad (M)\begin{cases} Y = \lambda X, \\ Z = \sqrt{\lambda}.X; \end{cases}\qquad (M')\begin{cases} Y = \lambda X, \\ Z = -\sqrt{\lambda}.X. \end{cases}$$

Les coordonnées du point P, fixe sur la courbe, pourront se représenter par

$$(4)\qquad X = aZ,\ Z = aY,$$

a étant une constante; les équations des droites PM, PM', seront alors

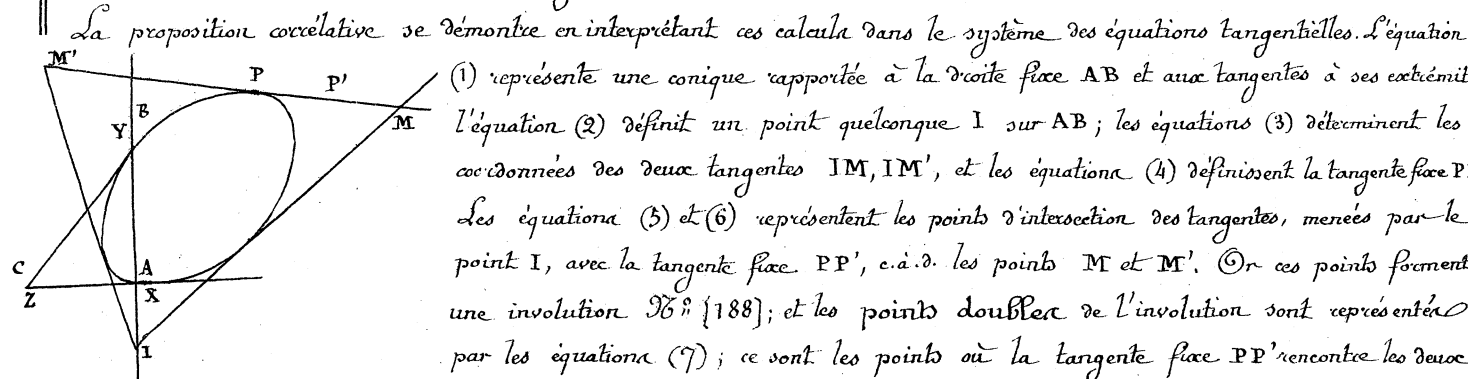
$$(5)\qquad aY - Z + \sqrt{\lambda}\,(X - aZ) = 0,$$
$$(6)\qquad aY - Z - \sqrt{\lambda}\,(X - aZ) = 0.$$

Il est visible que ces droites forment une involution, et que les droites

$$(7)\qquad aY - Z = 0,\ X - aZ = 0,$$

c.à.d. les droites PA et PB sont les **rayons doubles** de l'involution N° (185).

La proposition corrélative se démontre en interprétant ces calculs dans le système des équations tangentielles. L'équation



(1) représente une conique rapportée à la droite fixe AB et aux tangentes à ses extrémités, l'équation (2) définit un point quelconque I sur AB; les équations (3) déterminent les coordonnées des deux tangentes IM, IM', et les équations (4) définissent la tangente fixe PP'. Les équations (5) et (6) représentent les points d'intersection des tangentes, menées par le point I, avec la tangente fixe PP', c.à.d. les points M et M'. Or ces points forment une involution N° (188); et les **points doubles** de l'involution sont représentés par les équations (7); ce sont les points où la tangente fixe PP' rencontre les deux tangentes CA et CB.

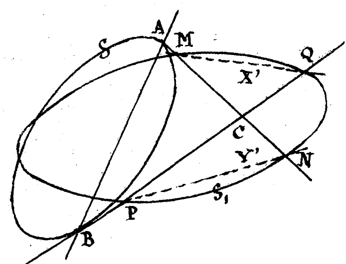
VII°.

967 Les droites, qui joignent deux à deux les points d'intersection de deux tangentes à une conique avec une autre conique, sont tangentes à une même conique passant par les points communs aux deux premières.

Par deux points pris sur une conique, on mène deux couples de tangentes à une deuxième conique; les points d'intersection de ces tangentes deux à deux sont sur une même conique touchant les tangentes communes aux deux premières coniques.

Soient AC, BC, deux tangentes à la conique S; rapportant cette conique au triangle ABC, elle aura pour équation

$$(S)\qquad (1)\qquad XY = Z^2;$$



M, N, P, Q, étant les intersections des tangentes AC et BC avec la conique S_1, cette conique peut être regardée comme circonscrite au quadrilatère MNPQ; et si l'on représente par

$$(2)\qquad X' = aX + bY + cZ = 0,\ Y' = a_1X + b_1Y + c_1Z = 0,$$

les équations des droites MQ et NP, l'équation de la conique S_1 pourra s'écrire

$$(S_1)\qquad (3)\qquad XY = X'Y'.$$

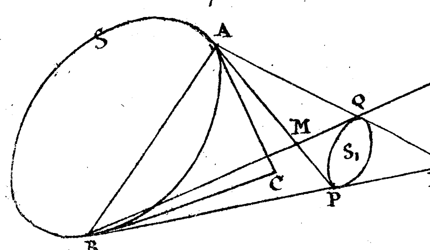
Si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (3), on a

$$(4)\qquad X'Y' - Z^2 = 0;$$

c'est l'équation d'une conique passant par les points communs aux coniques S et S_1. Or cette conique touche les droites $X' = 0$, $Y' = 0$; les points de contact sont sur la droite AB.

On prouvera de même que les deux droites MP et NQ sont tangentes à une autre conique passant par les points communs aux deux coniques proposées (S) et (S_1).

En interprétant ces calculs dans le système des équations tangentielles, on obtiendra la proposition corrélative.



L'équation (1) représente la conique S rapportée à la corde AB et aux tangentes à ses deux extrémités ; on mène les deux couples de tangentes (AM, AN), (BP, BQ), lesquelles se coupent aux quatre points M, N, P, Q.

Les équations (2) définissant deux de ces points, M et N par exemple, l'équation (3) représentera la conique (S_1) inscrite dans le quadrilatère dont A et B, M et N sont les sommets opposés.

L'équation (4) représentera une conique touchant les quatre tangentes communes aux deux coniques S et S_1 ; or les points $X'=o$, $Y'=o$, ou M et N, sont sur cette conique ; et les tangentes à la conique (4) aux points M et N passant par le point C, pôle de la droite AB par rapport à la conique (S).

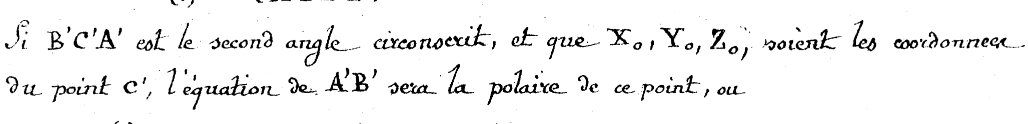
On trouverait de même une seconde conique passant par les points P et Q et touchant les quatre tangentes communes à (S) et (S_1).

VIII°.

968. Quand deux angles sont circonscrits à une conique, les points de contact et les sommets sont sur une même conique ; les quatre côtés et les deux cordes de contact touchent une même conique.

Soit ACB un des angles circonscrits, rapportons la conique aux deux tangentes CA, et CB et à leur corde de contact AB ; l'équation de la conique sera de la forme

$$(1) \qquad 2XY = Z^2.$$



Si B'C'A' est le second angle circonscrit, et que X_o, Y_o, Z_o, soient les coordonnées du point C', l'équation de A'B' sera la polaire de ce point, ou

$$(2) \qquad XY_o + YX_o - ZZ_o = o.$$

L'équation générale des coniques passant par les quatre points A, B, A', B', est

$$(3) \qquad \lambda(2XY - Z^2) + Z(XY_o + YX_o - ZZ_o) = o.$$

Si l'on exprime que cette conique passe par le point C ($X=o$, $Y=o$), on trouve $\lambda = -Z_o$; par conséquent

$$(4) \qquad Z(XY_o + YX_o) - 2Z_oXY = o,$$

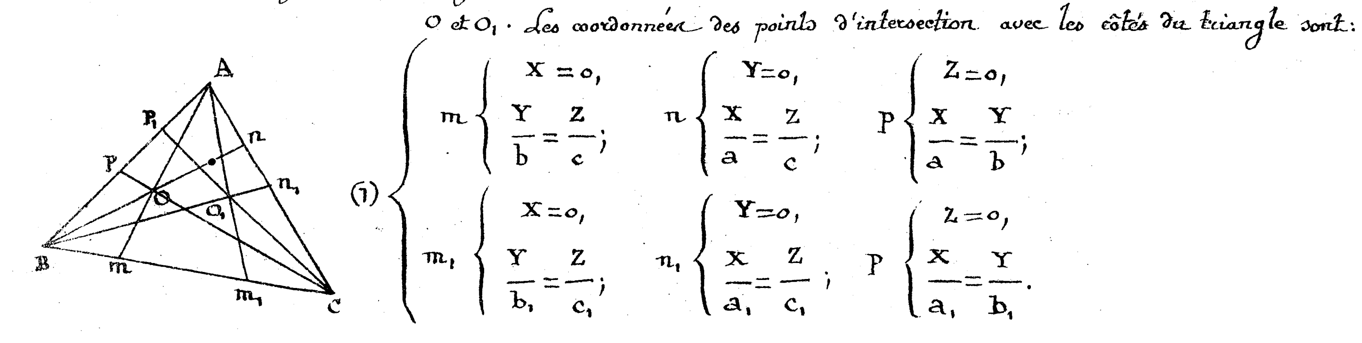
sera l'équation de la conique passant par les cinq points A, B, A', B', C. Or elle passe évidemment par le point C'(X_o, Y_o, Z_o), donc...

Interprétons maintenant ces calculs dans le système des équations tangentielles. L'équation (1) représente une conique touchant les droites CA et CB aux points A et B ; X_o, Y_o, Z_o étant les coordonnées de la droite A'B', l'équation (2) définit le pôle de cette droite, c. à. d. le point C'. L'équation (2) est l'équation générale des coniques touchant les droites CA, CB ; C'A', C'B'. En faisant $\lambda = -Z_o$, on exprime que cette conique touche la droite AB ($X=o$, $Y=o$) ; or la courbe (4) touche évidemment la droite (X_o, Y_o, Z_o) ; la seconde partie de la proposition est donc démontrée.

IX°.

969. Si, de deux points pris arbitrairement, on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, les six points dans lesquels ces droites rencontrent les côtés opposés aux sommets sont sur une conique.

Prenons le triangle pour triangle de référence et soient a, b, c ; a_1, b_1, c_1, les coordonnées des deux points choisis O et O_1. Les coordonnées des points d'intersection avec les côtés du triangle sont :



$$(7) \quad \begin{cases} m \begin{cases} X = o, \\ \dfrac{Y}{b} = \dfrac{Z}{c}; \end{cases} & n \begin{cases} Y = o, \\ \dfrac{X}{a} = \dfrac{Z}{c}; \end{cases} & P \begin{cases} Z = o, \\ \dfrac{X}{a} = \dfrac{Y}{b}; \end{cases} \\ m_1 \begin{cases} X = o, \\ \dfrac{Y}{b_1} = \dfrac{Z}{c_1}; \end{cases} & n_1 \begin{cases} Y = o, \\ \dfrac{X}{a_1} = \dfrac{Z}{c_1}; \end{cases} & P \begin{cases} Z = o, \\ \dfrac{X}{a_1} = \dfrac{Y}{b_1}. \end{cases} \end{cases}$$

Les équations des droites mn et $m_1 n_1$ seront

$$(2)\quad \begin{cases} mn: \dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}-\dfrac{Z}{c}=0, \\ m_1 n_1: \dfrac{X}{a_1}+\dfrac{Y}{b_1}-\dfrac{Z}{c_1}=0; \end{cases}$$

et nous aurons pour l'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère $m\,m_1\,n\,n_1$:

$$(3)\qquad \lambda XY+\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}-\frac{Z}{c}\right)\left(\frac{X}{a_1}+\frac{Y}{b_1}-\frac{Z}{c_1}\right)=0.$$

Si l'on exprime que cette conique passe par le point p, on trouve

$$\lambda ab+2\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}\right)=0;$$

on en déduit pour l'équation de la conique passant par les cinq points $m, m_1; n, n_1; p$:

$$(4)\qquad \frac{X^2}{aa_1}+\frac{Y^2}{bb_1}+\frac{Z^2}{cc_1}-YZ\left(\frac{1}{bc_1}+\frac{1}{b_1c}\right)-XZ\left(\frac{1}{ac_1}+\frac{1}{a_1c}\right)-XY\left(\frac{1}{ab_1}+\frac{1}{a_1b}\right)=0.$$

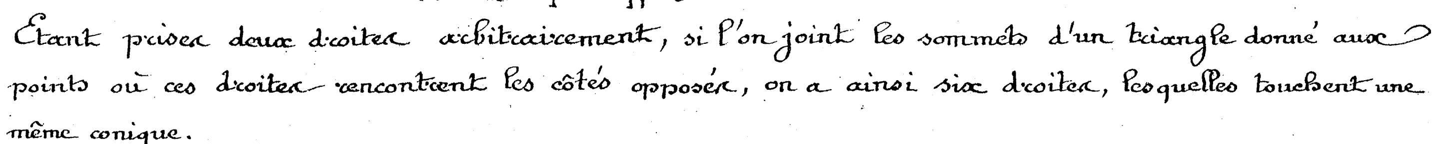
Cette équation étant symétrique par rapport aux quantités a, b, c, a_1, b_1, c_1 ; il en résulte que la conique passe par le $6^{\text{ème}}$ point p_1.

Interprétons ces calculs dans le système des équations tangentielles.

Les quantités (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) seront les coordonnées de deux droites Δ, Δ_1 ; les relations (1) déterminent les coordonnées des droites

$$Am, Am_1;\ Bn, Bn_1;\ Cp, Cp_1,$$

qui joignent les sommets du triangle aux points où les droites Δ et Δ_1 rencontrent les côtés opposés. Les équations (2) représentent les points d'intersection des droites Am et Bn, Am_1 et Bn_1 ; et l'équation (3) sera l'équation générale des coniques touchant les quatre droites $Am, Am_1; Bn, Bn_1$; la conique (4) touche les droites Cp et Cp_1. Donc :


Étant prises deux droites arbitrairement, si l'on joint les sommets d'un triangle donné aux points où ces droites rencontrent les côtés opposés, on a ainsi six droites, lesquelles touchent une même conique.

X°

L'enveloppe des polaires d'un point fixe, par rapport aux diverses coniques circonscrites à un triangle et touchant une droite fixe, est une conique passant par trois points fixes, c.à.d. indépendants de la position de la droite donnée.

Le lieu des pôles d'une droite fixe, par rapport aux diverses coniques inscrites à un triangle et touchant une droite fixe, est une conique touchant trois droites fixes, c.à.d. indépendantes de la position du point donné.

Prenons le triangle pour triangle de référence, l'équation générale des coniques circonscrites est

$$(1)\qquad \lambda YZ+\mu XZ+\nu XY=0;$$

cette conique devant toucher la droite fixe

$$(2)\qquad aX+bY+cZ=0,$$

on a l'équation de condition :

$$(3)\qquad \lambda^2a^2+\mu^2b^2+\nu^2c^2-2ab\lambda\mu-2ac\lambda\nu-2bc\nu\mu=0.$$

Soient X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées d'un point fixe P ; la polaire de ce point est

$$(4)\qquad \lambda(YZ_0+ZY_0)+\mu(ZX_0+XZ_0)+\nu(XY_0+YX_0)=0.$$

Nous obtiendrons l'enveloppe en éliminant λ, μ, ν entre l'équation (4) et les suivantes :

$$(5)\qquad \frac{a(a\lambda-b\mu-c\nu)}{YZ_0+ZY_0}=\frac{b(-a\lambda+b\mu-c\nu)}{ZX_0+XZ_0}=\frac{c(-a\lambda-b\mu+c\nu)}{XY_0+X_0Y}.$$

Le résultat de l'élimination est

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a^2 & -ab & -ac & YZ_0+ZY_0 \\ -ba & b^2 & -bc & ZX_0+XZ_0 \\ -ca & -cb & c^2 & XY_0+YX_0 \\ YZ_0+ZY_0 & ZX_0+XZ_0 & XY_0+YX_0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation développée devient

$$(7)\qquad a(XY_0+YX_0)(XZ_0+ZX_0)+b(XY_0+YX_0)(YZ_0+ZY_0)+c(YZ_0+ZY_0)(XZ_0+ZX_0)=0.$$

Or cette conique passe par les trois points

$$(8)\qquad \begin{cases} YZ_0+ZY_0=0, \\ ZX_0+XZ_0=0; \end{cases} \quad \begin{cases} ZX_0+XZ_0=0, \\ XY_0+YX_0=0; \end{cases} \quad \begin{cases} XY_0+YX_0=0, \\ YZ_0+ZY_0=0, \end{cases}$$

dont les coordonnées sont indépendantes des quantités a, b, c, qui définissent la droite à laquelle sont tangentes les coniques.

Ces calculs se traduisent facilement dans le système des équations tangentielles et donnent ainsi la démonstration de la proposition corrélative.

XI°.

971. Toutes les tangentes à une parabole divisent deux tangentes fixes en parties proportionnelles.

Rapportons la parabole à ces deux tangentes fixes, et supposons les paramètres de référence égaux à l'unité; l'équation de la courbe sera

$$(1)\qquad 2XY=KZ^2;$$

et comme la courbe est une parabole, elle doit toucher la droite de l'infini

$$(2)\qquad X\sin A+Y\sin B+Z\sin C=0,$$

ce qui conduit à la condition

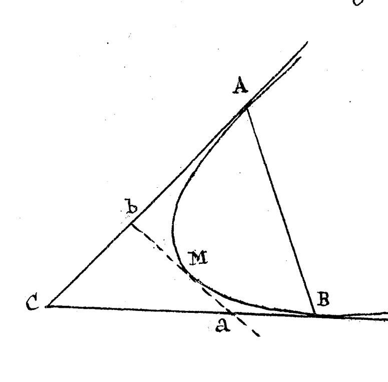
$$(3)\qquad 2K=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque situé sur la courbe peuvent se représenter par

$$(4)\qquad X_0=\frac{K\lambda}{2}Z_0,\quad Y_0=\frac{Z_0}{\lambda};$$

l'équation de la tangente en ce point sera

$$(5)\qquad \frac{X}{\lambda}+\frac{K}{2}\lambda Y-KZ=0.$$



Cherchons maintenant les rapports dans lesquels la tangente (5) divise les segments CA et CB. Remarquons d'abord que, les coordonnées trilatères d'un point devant vérifier la relation

$$X\sin A+Y\sin B+Z\sin C=\frac{S}{R},$$

on a pour les coordonnées des sommets du triangle ABC

$$(A)\ \begin{cases} X_0=\dfrac{S}{R\sin A}, \\ Y_0=0,\ Z_0=0; \end{cases} \quad (B)\ \begin{cases} Y_1=\dfrac{S}{R\sin B}, \\ X_1=0,\ Z_1=0; \end{cases} \quad (C)\ \begin{cases} Z_2=\dfrac{S}{R\sin C}, \\ X_2=0,\ Y_2=0. \end{cases}$$

Or des formules (4) du N.° [90] il résulte que le rapport, dans lequel la droite

$$(D)\qquad aX+bY+cZ=0,$$

divise le segment M_1M_2 a pour expression

$$\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{aX_1+bY_1+cZ_1}{aX_2+bY_2+cZ_2}.$$

Appliquons cette formule au cas actuel où la droite (D) est la tangente (5), on a

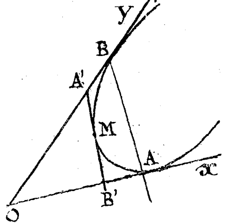
$$\frac{Ab}{bC}=\frac{\sin C}{\lambda K \sin A},\quad \frac{Ca}{aB}=\frac{2\sin B}{\lambda \sin C};\ \text{or}\ 2K=\frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B},$$

il résulte de là :

$$(6)\qquad \frac{Ab}{bC}=\frac{Ca}{aB}.\qquad C.Q.F.D.$$

Autrement :

Prenons pour axes des x et des y les deux tangentes fixes ; l'équation de la courbe sera



$$(7)\qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2+Kxy=0,$$

et cette équation représentera une parabole si

$$(8)\qquad Kab+4=0.$$

L'équation d'une tangente mobile sera

$$(9)\qquad \frac{Kx}{2\lambda}-\frac{\lambda}{2}y+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0.$$

D'après la formule que nous venons de rappeler, les rapports dans lesquels la droite (9) partage les segments OA et OB, seront

$$\frac{B'A}{OB'}=-\frac{Ka}{2\lambda};\quad \frac{A'B}{OA'}=\frac{\lambda b}{2};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard à la relation (8) :

$$\frac{B'A}{OB'}\cdot\frac{A'B}{OA'}=+1,\ \text{ou}\ \frac{B'A}{OB'}=\frac{OA'}{A'B}.$$

XII°.

972. Les six sommets de deux triangles conjugués par rapport à une conique sont sur une autre conique.

Les six côtés de deux triangles conjugués par rapport à une conique touchent une autre conique.

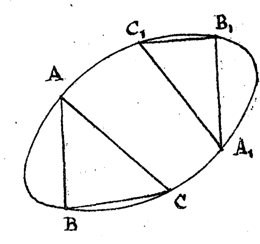
La première proposition a été démontrée au N° [459] ; les mêmes calculs, interprétés dans le système des équations tangentielles fournissent la démonstration de la seconde proposition.

Six points quelconques, appartenant à une conique, peuvent se décomposer en deux groupes de trois points formant deux triangles conjugués par rapport à une certaine conique.

Six tangentes quelconques à une conique peuvent se décomposer en deux groupes de trois tangentes formant deux triangles conjugués par rapport à une certaine conique.

Prenons l'un de ces groupes A, B, C, pour triangle de référence, l'équation de la conique sera

$$(1)\qquad aYZ+bXZ+cXY=0;$$



si X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ; X_3, Y_3, Z_3, sont les coordonnées des trois autres points A_1, B_1, C_1, on devra avoir

$$(2)\qquad \begin{cases} aY_1Z_1+bX_1Z_1+cX_1Y_1=0,\\ aY_2Z_2+bX_2Z_2+cX_2Y_2=0,\\ aY_3Z_3+bX_3Z_3+cX_3Y_3=0.\end{cases}$$

L'équation d'une conique conjuguée par rapport au triangle ABC sera

$$(3)\qquad \lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2=0;$$

cherchons si l'on peut déterminer $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, de manière à ce que $A_1 B_1 C_1$ forme un système conjugué par rapport à cette conique. Pour que le triangle $A_1 B_1 C_1$ soit conjugué par rapport à cette conique, il faut que deux quelconques des sommets soient sur la polaire du troisième ; ce qui entraîne les trois conditions

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda X_2X_3+\mu Y_2Y_3+\nu Z_2Z_3=0, \\ \lambda X_3X_1+\mu Y_3Y_1+\nu Z_3Z_1=0, \\ \lambda X_1X_2+\mu Y_1Y_2+\nu Z_1Z_2=0. \end{cases}$$

Pour qu'on puisse déterminer $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$, il faut que l'une des équations (4) soit une conséquence des deux autres, c.à.d. que

$$\begin{vmatrix} X_2X_3 & Y_2Y_3 & Z_2Z_3 \\ X_3X_1 & Y_3Y_1 & Z_3Z_1 \\ X_1X_2 & Y_1Y_2 & Z_1Z_2 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant :

$$(5)\qquad Y_1Z_1X_2X_3(Y_3Z_2-Y_2Z_3)+X_1Z_1Y_2Y_3(Z_3X_2-Z_2X_3)+X_1Y_1Z_2Z_3(X_3Y_2-X_2Y_3)=0.$$

Or cette relation est vérifiée, car c'est précisément celle qu'on trouve en éliminant a, b, c, entre les trois équations (2); on le voit immédiatement en ordonnant le déterminant ainsi obtenu par rapport aux éléments de la 1ère ligne.

La proposition corrélative se démontre en traduisant ces calculs dans le système des équations tangentielles.

XIII°.

973. ## Coniques ayant un double contact.

Si nous désignons par S le premier membre de l'équation d'une des coniques, et par L une fonction linéaire de la forme

$$(1)\qquad L=ax+by+cz,$$

les équations de deux coniques doublement tangentes seront

$$(2)\qquad S=0,$$

$$(3)\qquad S_1=S+L^2;$$

la droite $L=0$ est la corde de contact.

Les polaires d'un point (x_0, y_0, z_0) par rapport aux deux coniques seront

pour (S) (4) $P=xS'_{x_0}+yS'_{y_0}+zS'_{z_0}=0$, ou $x_0S'_x+y_0S'_y+z_0S'_z=0$,

pour (S_1) (5) $P_1=xS'_{x_0}+yS'_{y_0}+zS'_{z_0}+2LL_0=P+2L_0L=0$.

Les coordonnées du point de rencontre des tangentes communes, c.à.d. du pôle de la droite $L=0$ (ou pôle de contact) sont définies par les équations

$$(6)\qquad \frac{S'_x}{a}=\frac{S'_y}{b}=\frac{S'_z}{c}.$$

Le pôle d'une droite

$$(7)\qquad Ax+By+Cz=0,$$

sera défini par les équations suivantes :

pour (S) (8) $\dfrac{S'_x}{A}=\dfrac{S'_y}{B}=\dfrac{S'_z}{C}$;

pour (S_1) (9) $\dfrac{S'_x+2aL}{A}=\dfrac{S'_y+2bL}{B}=\dfrac{S'_z+2cL}{C}$.

Ces formules étant rappelées, nous démontrerons facilement les propositions suivantes.

974. 1° **Quand deux coniques ont un double contact, les polaires d'un point Q se coupent sur la corde de contact.**

Cette proposition résulte immédiatement des équations (4) et (5); les polaires de ce point sont :

$$P=0,\quad P+2L_0L=0.$$

2° **Lorsque deux coniques ont un double contact, les pôles d'une droite quelconque sont en ligne droite avec le pôle de contact.**

Cette proposition résulte des équations (4) et (5) interprétées dans le système tangentiel, car $L=0$ est alors l'équation du pôle de contact, et les équations (4) et (5) représentent le pôle de la droite (x_0, y_0, z_0).

On peut aussi le conclure des équations (6), (8) et (9); car

$$\frac{S'_x+2aL}{A}-\frac{S'_y+2bL}{B}+\lambda\left(\frac{S'_x+2aL}{A}-\frac{S'_z+2cL}{C}\right)=0;$$

est l'équation générale des droites passant par le point (9), pôle de la droite (7) par rapport à S_1; exprimons que cette droite passe par le pôle de contact (6). Soit

$$\frac{S'_{x_1}}{a}=\frac{S'_{y_1}}{b}=\frac{S'_{z_1}}{c}=2K;$$

et désignons par L_1 la valeur que prend L pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce point, on a alors

$$\frac{a}{A}-\frac{b}{B}+\lambda\left(\frac{a}{A}-\frac{c}{C}\right)=0;$$

d'où l'on déduit pour l'équation de la droite passant par les deux points (6) et (9):

$$(10)\qquad \frac{S'_x+2aL}{A}\left(\frac{b}{B}-\frac{c}{C}\right)+\frac{S'_y+2bL}{B}\left(\frac{c}{C}-\frac{a}{A}\right)+\frac{S'_z+2cL}{C}\left(\frac{a}{A}-\frac{b}{B}\right)=0.$$

Or cette équation est vérifiée par les coordonnées du point (8); car soient x_2, y_2, z_2, les coordonnées de ce point, L_2 la valeur de L, et

$$\frac{S'_{x_2}}{A}=\frac{S'_{y_2}}{B}=\frac{S'_{z_2}}{C}=2K',$$

il reste, après la substitution dans l'équation (10):

$$\frac{AK'+aL_2}{A}\left(\frac{b}{B}-\frac{c}{C}\right)+\frac{BK'+bL_2}{B}\left(\frac{c}{C}-\frac{a}{A}\right)+\frac{CK'+cL_2}{C}\left(\frac{a}{A}-\frac{b}{B}\right);$$

or les coefficients de K' et de L_2 sont visiblement nuls; donc.....

3°. Quand deux coniques ont un double contact, tout point de la corde contact a la même polaire dans les deux courbes.

Ceci résulte des équations (4) et (5); car pour le point considéré L est nul. Ces mêmes équations interprétées dans le système tangentiel nous donnent la proposition corrélative:

Quand deux coniques ont un double contact, toute droite passant par le pôle de contact a le même pôle dans les deux courbes.

975. Quand deux coniques ont un double contact, si par les deux points de contact on fait passer une troisième conique quelconque, les cordes qu'elle intercepte dans les deux courbes concourent en un point de la corde de contact.

L'équation générale des coniques passant par les deux points de contact de

$$(11)\qquad S=0,\quad S_1=S+L^2=0,$$

est

$$(12)\qquad \Sigma=S+LM=0,$$

M étant une fonction linéaire de x, y, z.

Or les cordes interceptées par la conique Σ sur les coniques S et S_1 sont

$$(13)\qquad M=0,\quad L-M=0;$$

ces cordes se coupent évidemment sur la corde de contact.

Interprétant ces équations dans le système tangentiel, nous dirons:

Quand deux coniques ont un double contact, si dans l'angle formé par les tangentes aux points de contact on inscrit une troisième conique, les deux points de concours respectifs des deux autres couples de tangentes communes à cette courbe et à chacune des deux premières, sont en ligne droite avec le pôle de contact de celles-ci.

N. B. Les théorèmes qui précèdent se démontreraient aussi très-facilement en prenant pour triangle de référence le triangle formé par les tangentes communes et la corde de contact.

976. Quand une corde commune à deux coniques a le même pôle dans les deux courbes, ces coniques ont un double contact sur cette droite.

Quand le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques a la même polaire dans les deux courbes, ces coniques ont un double contact sur cette polaire.

Les équations de deux coniques peuvent s'écrire:

$$(14) \qquad S=0,$$

$$(15) \qquad S_1 = S + LM = 0,$$

L et M étant les deux fonctions linéaires

$$(16) \quad \begin{cases} L = ax + by + cz\,; \\ M = a_1x + b_1y + c_1z\,; \end{cases}$$

$L=0$ est une des cordes communes aux deux coniques.

Les pôles de la droite L par rapport à chacune des coniques S et S_1 sont définis par les équations

$$\text{pour } (S): \ (17) \quad \frac{S'_x}{a} = \frac{S'_y}{b} = \frac{S'_z}{c},$$

$$\text{pour } (S_1): \ (18) \quad \frac{S'_x + a_1L + aM}{a} = \frac{S'_y + b_1L + bM}{b} = \frac{S'_z + c_1L + cM}{c}.$$

Exprimons que les coordonnées du premier point (x_1, y_1, z_1) vérifient les équations (18); en désignant par L_1 et M_1 les valeurs de L et M, par K la valeur des rapports (17), on a

$$\frac{Ka + a_1L_1 + aM_1}{a} = \frac{Kb + b_1L_1 + bM_1}{b} = \frac{Kc + c_1L_1 + cM_1}{c},$$

ou

$$(19) \qquad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}\,;$$

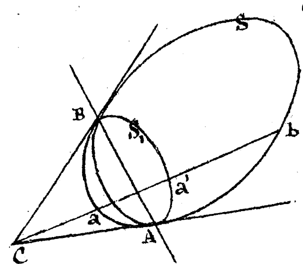
l'équation (15) devient donc, eu égard à ces égalités:

$$(20) \qquad S_1 = S + hL^2 = 0\,;$$

c'est l'équation d'une conique doublement tangente à la première.

La seconde proposition résulte de ces calculs interprétés dans le système des équations tangentielles.

977. Quand deux coniques ont un double contact, si par le pôle de contact C on mène une transversale qui rencontre la première en deux points a et b, et la seconde en deux points dont a' soit l'un, on a toujours l'équation



$$(1) \qquad \frac{Ca}{Cb} : \frac{a'a}{a'b} = \text{Constante}.$$

Rapportons les deux coniques aux deux tangentes communes et à leur corde de contact; les équations de ces deux coniques seront

$$(1) \quad (S) \quad XY = hZ^2,$$

$$(2) \quad (S_1) \quad XY = kZ^2\,;$$

nous supposerons les paramètres de référence égaux à l'unité.

Désignons par (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X', Y', Z') les coordonnées des points a, b, a'; d'après les formules qui déterminent les coordonnées d'un point partageant un segment dans un rapport donné, on aura pour les coordonnées du point C Nº (90):

$$(3) \quad (C) \quad \frac{X_1 + X_2\dfrac{Ca}{bC}}{1+\dfrac{Ca}{bC}}, \quad \frac{Y_1 + Y_2\dfrac{Ca}{bC}}{1+\dfrac{Ca}{bC}}, \quad \frac{Z_1 + Z_2\dfrac{Ca}{bC}}{1+\dfrac{Ca}{bC}}\,;$$

on aura de même pour les coordonnées du point a'

$$(4)\qquad (a)\quad \frac{X_1+X_2\dfrac{a'a}{ba'}}{1+\dfrac{a'a}{ba'}},\quad \frac{Y_1+Y_2\dfrac{a'a}{ba'}}{1+\dfrac{a'a}{ba'}},\quad \frac{Z_1+Z_2\dfrac{a'a}{ba'}}{1+\dfrac{a'a}{ba'}}.$$

Les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ; X', Y', Z', doivent vérifier les relations

$$(5)\qquad X_1Y_1=hZ_1^2,\ X_2Y_2=hZ_2^2,\ X'Y'=KZ'^2;$$

mais l'X et l'Y du point c sont nuls, donc

$$(6)\qquad X_1+X_2\cdot\frac{ca}{bc}=0,\ Y_1+Y_2\cdot\frac{ca}{bc}=0,$$

et les coordonnées du point a' doivent vérifier l'équation (2) ; on a par suite

$$(7)\qquad \left(X_1+X_2\frac{a'a}{ba'}\right)\left(Y_1+Y_2\frac{a'a}{ba}\right)=K\left(Z_1+Z_2\frac{a'a}{ba'}\right)^2.$$

Posons, pour un instant

$$\frac{ca}{bc}=R,\ \frac{a'a}{ba'}=\rho,$$

on déduit des relations (6) et (5):

$$(8)\qquad X_1=-RX_2,\ Y_1=-RY_2,\ R^2Z_2^2=Z_1^2,\ \text{d'où } Z_1=\pm RZ_2.$$

Substituons ces valeurs dans la relation (7), elle devient

$$h(\rho-R)^2=K(\rho\pm R)^2;$$

on ne doit pas prendre le signe − dans le second membre, car il en résultait $h=K$; on aurait pu d'ailleurs déterminer ce signe à priori. On a donc, en définitive

$$\rho-R=\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{h}}(\rho+R),\ \text{ou}\ \frac{R}{\rho}=\frac{\sqrt{h}-\sqrt{K}}{\sqrt{h}+\sqrt{K}},$$

ou enfin:

$$(9)\qquad \frac{ca}{cb}:\frac{aa'}{a'b}=\frac{\sqrt{h}-\sqrt{K}}{\sqrt{h}+\sqrt{K}}.$$

C.Q.F.D.

978. Lorsque deux coniques ont un double contact avec une troisième, les cordes de contact avec la troisième et un système de cordes communes passent par un même point et forment un système harmonique.

Soit l'équation d'une conique

$$(1)\qquad S=0;$$

les équations de deux coniques doublement tangentes à cette première pourront s'écrire

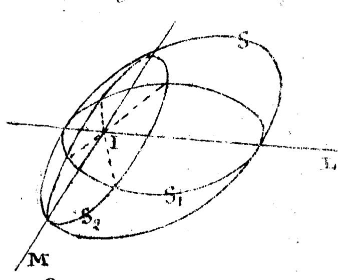
$$(2)\qquad S_1=S+L^2=0,$$

$$(3)\qquad S_2=S+M^2=0;$$

L et M sont des fonctions linéaires qui, égalées à zéro, représentent les cordes de contact.

Un système de cordes communes aux coniques S et S_1 sera

$$(4)\qquad L^2-M^2=0,\ \text{ou}\ (L-M)(L+M)=0;$$

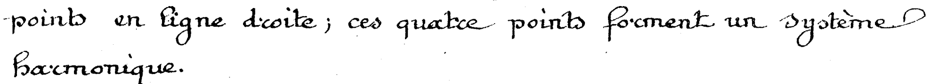


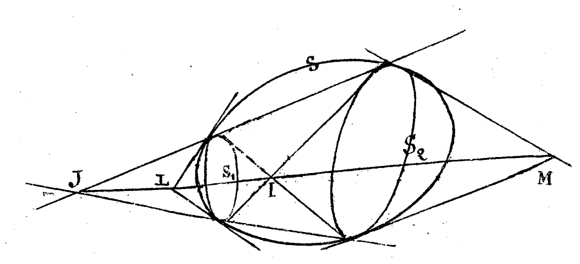
ces droites passent évidemment par le point de concours des cordes de contact et forment avec elles un système harmonique.

Interprétant ces équations dans le système tangentiel, nous aurons la proposition suivante:

Lorsque deux coniques ont un double contact avec une troisième, les pôles de contact L et M

avec la troisième, et un des systèmes des points de concours des tangentes communes, sont quatre


points en ligne droite; ces quatre points forment un système harmonique.



Car $L=0$, $M=0$ sont alors les pôles de contact c.à.d. les points de rencontre des tangentes aux points de contact des coniques S_1 et S_2 avec S; et l'équation (4) représente les points de concours des tangentes communes aux coniques S_1 et S_2; donc.....

979. Lorsque trois coniques ont un double contact avec une quatrième, il y a trois systèmes de cordes communes donnant quatre groupes de trois droites qui sont concourantes; il y a trois systèmes de points ombilicaux donnant quatre groupes de trois points qui sont en ligne droite.

Les équations de trois coniques doublement tangentes à la conique

$$(1) \qquad S=0,$$

pourront s'écrire

$$(2) \qquad S_1=S+L^2=0,\ S_2=S+M^2=0,\ S_3=S+N^2=0.$$

Les trois cordes de contact sont

$$(3) \qquad L=0,\ M=0,\ N=0,$$

et nous aurons les trois systèmes de cordes communes:

$$(4) \qquad (S_2,S_3)\begin{cases}M-N=0,\\ M+N=0;\end{cases} (S_3,S_1)\begin{cases}N-L=0,\\ N+L=0;\end{cases} (S_1,S_2)\begin{cases}L-M=0,\\ L+M=0.\end{cases}$$

Nous avons évidemment les quatre systèmes de trois droites concourantes:

$$(I)\begin{cases}M-N=0,\\ N-L=0,\\ L-M=0;\end{cases}\quad (II)\begin{cases}M-N=0,\\ L+M=0,\\ L+N=0;\end{cases}\quad (III)\begin{cases}N-L=0,\\ M+N=0,\\ M+L=0;\end{cases}\quad (IV)\begin{cases}L-M=0,\\ N+L=0,\\ N+M=0.\end{cases}$$

Les droites de chaque groupe passent respectivement par les sommets du triangle formé par les trois cordes de contact.

La seconde partie de la proposition résulte de l'interprétation des équations précédentes dans le système tangentiel.

N. B. Cette proposition peut fournir une nouvelle démonstration des théorèmes de Pascal et Brianchon.

XIV°.

Quand trois coniques passent par quatre points, si de chaque point m de l'une, on mène à deux points fixes O,O', des droites qui rencontreront les deux autres coniques en des points a et a', b et b': on a la relation

$$(I) \qquad \frac{ma \cdot ma'}{Oa \cdot Oa'} : \frac{mb \cdot mb'}{O'b \cdot O'b'} = \text{Constante}.$$

Etant données trois coniques C, C', et Σ inscrites dans un quadrilatère, et deux droites fixes O et O'; si par les points où une tangente M à la conique Σ rencontre les deux droites O et O', on mène les tangentes A, A' et B, B', aux deux coniques C, C' respectivement, on aura la relation

$$(II) \qquad \frac{\sin(M,A)\sin(M,A')}{\sin(O,A)\sin(O,A')} : \frac{\sin(M,B)\sin(M,B')}{\sin(O',B)\sin(O',B')} = \text{constante},$$

quelle que soit la tangente M.

Chasles: Traité des Sections coniques page. 254, 265.

Les trois coniques données passant par quatre points fixes, sont conjuguées par rapport au triangle formé par les points de concours des trois systèmes de cordes communes N° (903); prenant ce triangle pour triangle de référence les équations des trois coniques seront de la forme:

$$(1)\quad (C)\quad mX^2+nY^2+pZ^2=0,$$
$$(2)\quad (C_1)\quad m_1X^2+n_1Y^2+p_1Z^2=0,$$
$$(3)\quad (\Sigma)\quad \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=0.$$

Soient (X_0, Y_0, Z_0); (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées des points O et O'; X, Y, Z celle du point m situé sur la conique Σ; posons

$$(4)\quad \frac{ma}{aO}=\lambda,\quad \frac{mb}{bO'}=\lambda_1;$$

les coordonnées du point a, divisant le segment mO dans le rapport λ, seront

$$(5)\quad X'=\frac{\lambda X_0+X}{\lambda+1},\quad Y'=\frac{\lambda Y_0+Y}{\lambda+1},\quad Z'=\frac{\lambda Z_0+Z}{\lambda+1}.$$

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation (1); on a donc

$$m(\lambda X_0+X)^2+n(\lambda Y_0+Y)^2+p(\lambda Z_0+Z)^2=0;$$

ou, en développant:

$$(6)\quad \lambda^2(mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2)+2\lambda(mX_0X+nY_0Y+pZ_0Z)+(mX^2+nY^2+pZ^2)=0.$$

Cette équation détermine les rapports λ, ou $\frac{ma}{aO}$ et $\frac{ma'}{a'O}$, correspondant aux deux points d'intersection a et a' de la droite mO avec la conique C; on en conclut

$$(7)\quad \frac{ma}{Oa}\cdot\frac{ma'}{Oa'}=\frac{mX^2+nY^2+pZ^2}{mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2}.$$

De même, les coordonnées du point b, divisant le segment mO' dans le rapport λ_1, seront

$$(8)\quad X''=\frac{\lambda_1X_1+X}{\lambda_1+1},\quad Y''=\frac{\lambda_1Y_1+Y}{\lambda_1+1},\quad Z''=\frac{\lambda_1Z_1+Z}{\lambda_1+1}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on aura une équation de même forme que l'équation (6) qui déterminera les rapports $\frac{mb}{bO'}$, $\frac{mb'}{b'O'}$, correspondant aux points d'intersection de la droite mO' avec la conique C_1; on aura, par suite,

$$(9)\quad \frac{mb}{O'b}\cdot\frac{mb'}{O'b'}=\frac{m_1X^2+n_1Y^2+p_1Z^2}{m_1X_1^2+n_1Y_1^2+p_1Z_1^2}.$$

Il résulte des deux égalités (7) et (9):

$$(10)\quad \frac{ma}{Oa}\cdot\frac{ma'}{Oa'}:\frac{mb}{O'b}\cdot\frac{mb'}{O'b'}=\frac{m_1X_1^2+n_1Y_1^2+p_1Z_1^2}{mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2}\cdot\frac{mX^2+nY^2+pZ^2}{m_1X^2+n_1Y^2+p_1Z^2}.$$

Les équations (1), (2) et (3) représentent bien trois coniques conjuguées par rapport au triangle de référence, mais elles ne passent pas nécessairement par les quatre mêmes points.

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux deux coniques C et C_1 est

$$(m+Km_1)X^2+(n+Kn_1)Y^2+(p+Kp_1)Z^2=0;$$

l'équation (3) devra rentrer dans ce type général, et l'on pourra poser

$$(11)\quad \alpha=m+Km_1,\quad \beta=n+Kn_1,\quad \gamma=p+Kp_1.$$

Le point m ou (X, Y, Z) devant se trouver sur la conique Σ, on aura

$$(m+Km_1)X^2+(n+Kn_1)Y^2+(p+Kp_1)Z^2=0,$$

d'où

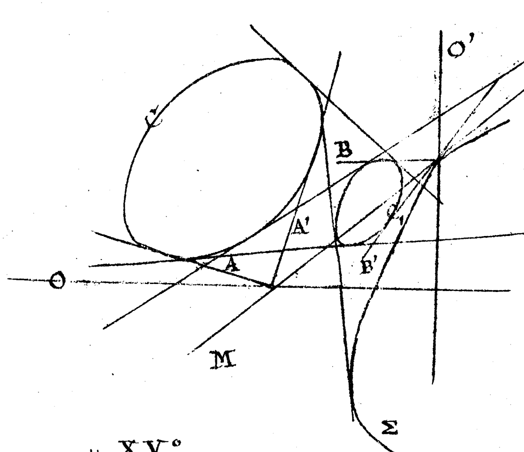
$$\frac{mX^2+nY^2+pZ^2}{m_1X^2+n_1Y^2+p_1Z^2}=-K;$$

l'égalité (10) devient alors:

$$(12)\quad \frac{ma}{Oa}\cdot\frac{ma'}{Oa'}:\frac{mb}{O'b}\cdot\frac{mb'}{O'b'}=-K\,\frac{m_1X_1^2+n_1Y_1^2+p_1Z_1^2}{mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2}=\text{Constante.}$$

C. Q. F. D.

On démontrera la seconde proposition, en interprétant ces calculs dans le système des équations tangentielles.
Les trois coniques étant inscrites dans un même quadrilatère, elles sont conjuguées par rapport au triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère; les équations (1), (2), (3) seront donc les équations tangentielles de ces coniques.
Les coordonnées des droites O et O' étant (X_o, Y_o, Z_o), (X_1, Y_1, Z_1) et celles d'une tangente M à la conique Σ étant



(X, Y, Z), l'équation (6) déterminera les rapports

$$\frac{\sin(M,A)}{\sin(O,A)},\ \frac{\sin(M,A')}{\sin(O,A')};$$

et l'équation semblable, où l'on remplace X_o, Y_o, Z_o, m, n, p, par $X_1, Y_1, Z_1, m_1, n_1, p_1$, déterminera les rapports

$$\frac{\sin(\widehat{M,B})}{\sin(O',B)},\ \frac{\sin(\widehat{M,B'})}{\sin(O',B')}.$$

La suite des calculs s'interprète sans difficulté, et nous sommes ainsi conduits à la seconde proposition.

XV°.

981. Quand quatre coniques C, C', C'', C''' ont les mêmes points d'intersection, si l'on mène une transversale et qu'on représente par a, a' et b, b' les deux couples de points dans lesquels cette droite rencontre les deux premières coniques, et par m et n deux des points dans lesquels elle rencontre la troisième et la quatrième, on a

$$(1)\qquad \frac{ma}{mb}\cdot\frac{ma'}{mb'} : \frac{na}{nb}\cdot\frac{na'}{nb'} = \text{constante},$$

quelle que soit la transversale.

Quand quatre coniques C, C', C'', C''' sont inscrites dans le même quadrilatère, si d'un point P on mène aux deux premières deux couples de tangentes A, A'' et B, B', à la troisième une tangente M, à la quatrième une tangente N, on aura la relation

$$(II)\qquad \frac{\sin(M,A)}{\sin(M,B)}\cdot\frac{\sin(M,A')}{\sin(M,B')} : \frac{\sin(N,A)}{\sin(N,B)}\cdot\frac{\sin(N,A')}{\sin(N,B')} = \text{constante},$$

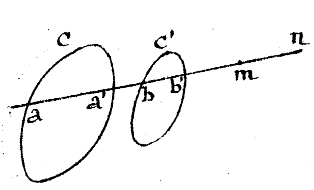
quel que soit le point P par lequel on a mené les tangentes.

Chasles: Sections coniques. page 270.

Les quatre coniques étant circonscrites au même quadrilatère, elles seront conjuguées par rapport au triangle formé par les points de concours des diagonales; leurs équations seront donc de la forme:

$$(C)\qquad (1)\qquad mX^2+nY^2+pZ^2=0,$$
$$(C')\qquad (2)\qquad m_1X^2+n_1Y^2+p_1Z^2=0,$$
$$(C'')\qquad (3)\qquad \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=0,$$
$$(C''')\qquad (4)\qquad \alpha_1X^2+\beta_1Y^2+\gamma_1Z^2=0.$$

De plus, comme les coniques C'' et C''' doivent passer par les quatre points communs aux coniques C et C', on devra avoir



$$(5)\qquad \alpha = m+Km_1,\ \ \beta = n+Kn_1,\ \ \gamma = p+Kp_1,$$
$$(6)\qquad \alpha_1 = m+K_1m_1,\ \ \beta_1 = n+K_1n_1,\ \ \gamma_1 = p+K_1p_1.$$

Désignons par (X_o, Y_o, Z_o), (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées des points m et n, on aura, d'après l'hypothèse:

$$(m+Km_1)X_o^2+(n+Kn_1)Y_o^2+(p+Kp_1)Z_o^2=0,$$
$$(m+K_1m_1)X_1^2+(n+K_1n_1)Y_1^2+(p+K_1p_1)Z_1^2=0.$$

Si l'on pose

$$(9)\qquad \lambda = \frac{ma}{an},\ \mu = \frac{mb}{bn},$$

les coordonnées du point a seront

$$(10)\qquad \frac{X_0+\lambda X_1}{\lambda+1},\ \frac{Y_0+\lambda Y_1}{\lambda+1},\ \frac{Z_0+\lambda Z_1}{\lambda+1}.$$

Ce point se trouvant sur la conique C, on devra avoir

$$(11)\qquad \lambda^2(mX_1^2+nY_1^2+pZ_1^2)+2\lambda(mX_1X_0+nY_1Y_0+pZ_1Z_0)+(mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2)=0,$$

cette équation détermine les rapports $\frac{ma}{an}$, $\frac{ma'}{a'n}$, correspondant aux deux points d'intersection a et a' de la droite mn avec la conique C; on conclut de là:

$$(12)\qquad \frac{ma}{na}\cdot\frac{ma'}{na'}=\frac{mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2}{mX_1^2+nY_1^2+pZ_1^2}.$$

On aura de même pour la conique C', en remplaçant m, n, p, par m_1, n_1, p_1:

$$(13)\qquad \frac{mb}{nb}\cdot\frac{mb'}{nb'}=\frac{m_1X_0^2+n_1Y_0^2+p_1Z_0^2}{m_1X_1^2+n_1Y_1^2+p_1Z_1^2}.$$

On déduit des égalités (12) et (13) divisées membre à membre:

$$\frac{ma}{mb}\cdot\frac{ma'}{mb'}:\frac{na}{nb}\cdot\frac{na'}{nb'}=\frac{(mX_0^2+nY_0^2+pZ_0^2)}{(m_1X_0^2+n_1Y_0^2+p_1Z_0^2)}\cdot\frac{(m_1X_1^2+n_1Y_1^2+p_1Z_1^2)}{(mX_1^2+nY_1^2+pZ_1^2)}.$$

Or, d'après les relations (7) et (8) le second membre de cette égalité est égal à $\frac{K}{K_1}$; donc

$$(14)\qquad \frac{ma}{mb}\cdot\frac{ma'}{mb'}:\frac{na}{nb}\cdot\frac{na'}{nb'}=\frac{K}{K_1}=\text{constante}.$$

C. Q. F. D.

La proposition corrélative résulte immédiatement de ces calculs, en ayant égard, pour leur interprétation, aux remarques déjà faites dans la question précédente.

XVI°.

982. Étant données trois coniques quelconques U, A, A', si l'on en décrit deux autres B et B', dont B passe par les points d'intersection de U et A; et B' par les points d'intersection de U et A'; les quatre points d'intersection de B et B' seront sur une conique Σ passant par les points d'intersection de A et A'.

Étant données trois coniques A, A' et U, si l'on en mène deux autres B et B', dont B soit inscrite dans le quadrilatère circonscrit à U et A, et B' dans le quadrilatère circonscrit à U et A'; les quatre tangentes communes aux coniques données A et A', sont huit tangentes d'une même conique Σ.

Chasles: Sections Coniques page 273.

Soient les équations des trois coniques données

$$(1)\qquad U=0,\ A=0,\ A'=0;$$

l'équation de la conique B, passant par les points d'intersection de U et A, sera

$$(2)\qquad B=U+\lambda A=0,$$

et celle de la conique B', passant par les points d'intersection de U et A', sera

$$(3)\qquad B'=U+\lambda' A'=0.$$

Retranchons les équations (2) et (3) membre à membre, nous aurons

$$(4)\qquad \Sigma=\lambda A-\lambda' A'=0,$$

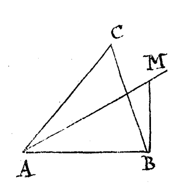
c'est l'équation d'une conique Σ passant par les points communs aux coniques B et B'; or cette conique Σ passe évidemment par les points communs aux coniques A et A'; donc . . . . . .

La proposition corrélative résulte de l'interprétation de ces équations dans le système tangentiel.

§ IV. Génération des Coniques.

Les Coniques admettent évidemment un nombre infini de modes de génération, aussi bornerons-nous cette étude à un très-petit nombre d'exemples; nous citerons les plus importants, parmi les modes de génération connus.

983. 1° Étant donnés deux faisceaux homographiques, le lieu des intersections des rayons homologues est une conique passant par les sommets des deux faisceaux.



Deux faisceaux sont homographiques lorsqu'à une droite de l'un des faisceaux correspond une droite et une seule, dans l'autre faisceau; et réciproquement. Les droites qui se correspondent ainsi sont les rayons homologues; soient A et B les sommets respectifs des deux faisceaux, prenons pour triangle de référence un triangle dont A et B sont deux des sommets, et dont le troisième sommet C sera l'intersection de deux rayons homologues.

Soient AM et BM deux droites homologues, leurs équations seront

$$(1) \qquad (AM) \qquad Y=\lambda Z\,;\ X=\mu Z\,,\ (BM);$$

puisqu'à une droite AM doit correspondre une seule droite BM et réciproquement, on devra avoir entre λ et μ la relation

$$(2) \qquad a\lambda\mu+b\lambda+c\mu+d=0,$$

a, b, c, d, étant des constantes. Mais, d'après notre hypothèse, à la droite AC doit correspondre la droite BC, c.à.d. que, pour $\lambda=0$, on doit avoir $\mu=0$; la relation d'homographie sera donc

$$(3) \qquad a\lambda\mu+b\lambda+c\mu=0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations (1) et (3), ce qui donne

$$(4) \qquad aXY+bYZ+cXZ=0;$$

c'est une conique passant par les sommets A et B des deux faisceaux.

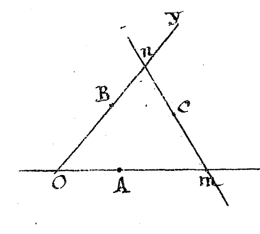
Les tangentes en A et B sont respectivement

$$aY+cZ=0,\quad aX+bZ=0;$$

la 1ère est la droite du faisceau (A) homologue de BA, c.à.d. correspondant à $\mu=\infty$; la 2ème est la droite du faisceau (B) homologue de AB, c.à.d. correspondant à $\lambda=\infty$.

Remarque. Ce mode de génération comprend, comme cas particulier, la description organique de Newton. No. (648).

984. II° Étant donnés deux systèmes de points homographiques sur deux droites fixes, la droite qui joint deux points homologues quelconques enveloppe une conique.



Prenons les deux droites fixes pour axes de coordonnées; soient A et B les origines des divisions sur chacune de ces droites.

Si m et n sont deux points homologues dans les deux divisions, à un point m sur Ox correspond à un seul point n sur Oy, et réciproquement; de sorte que, si l'on pose

$$Am=\lambda,\ Bn=\mu,$$

on aura, entre les variables λ et μ la relation

$$a\lambda\mu+b\lambda+c\mu+d=0,$$

a, b, c, d étant des constantes. Pour obtenir l'enveloppe des droites mn, remarquons que les coordonnées u, v, de cette droite sont

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{u}=OA+Am=\alpha+\lambda, \\[2ex] \dfrac{1}{v}=OB+Bn=\beta+\mu \end{cases}$$

en désignant par α et β les longueurs fixes OA et OB. Éliminant λ et μ entre les équations (2) et (3), il vient

$$a\left(\alpha-\frac{1}{u}\right)\left(\beta-\frac{1}{v}\right)+b\left(\frac{1}{u}-\alpha\right)+c\left(\frac{1}{v}-\beta\right)+d=0,$$

ou, en développant

$$(3)\qquad a(\alpha u-1)(\beta v-1)+b(1-\alpha u)v+c(1-\beta v)u+duv=0;$$

ou

$$(3\,bis)\qquad (a\alpha\beta-\alpha b-\beta c+d)uv-(\alpha a-c)u-(\beta a-b)v+a=0;$$

c'est l'équation d'une conique.

Cette conique touche l'axe Ox $(u=0,\ w=0)$ et l'axe Oy $(v=0,\ w=0)$.

La conique devient une parabole, si $a=0$, car elle touche alors la droite de l'infini $(u=0,\ v=0)$; dans ce cas, la relation (1) exprime que la droite mn divise les droites fixes Ox et Oy en segments proportionnels.

985. III° Un point p, une droite L, et une conique, sont données: une transversale, tournant autour du point p, coupe la droite en un point m, et la conique en deux points a et a'; si l'on prend le point μ conjugué de m par rapport à a et a', le lieu de ce point sera une conique, qui passera par le point p et par le pôle de la droite L; par les points d'intersection de la droite de la conique; et enfin, par les points de contact des tangentes menées du point p à la conique.

2° Étant pris dans le plan d'une conique, un point fixe O et une droite L, par chaque point m de cette droite on mène la droite $m\,O$ et sa conjuguée dans la conique: cette droite conjuguée $m\,\mu$ enveloppe une conique qui est tangente à la droite L, à la polaire du point O, aux deux tangentes à la conique proposée, issues du point O, et aux deux tangentes menées par les points de rencontre de cette Conique et de la droite L.

Chasles: Sections Coniques page 136.

1° Démontrons d'abord la première proposition: prenons pour triangle de référence le triangle formé par le point p et par deux points A et B pris sur la droite fixe L; soit alors

$$(1)\qquad f(X,Y,Z)=0,$$

l'équation de la conique; et

$$(2)\qquad Y=\lambda X$$

l'équation d'une sécante quelconque passant par le point p. Les intersections de cette droite avec la conique seront données par l'équation

$$f(X,\lambda X,Z)=0,$$

équation qui sera de la forme

$$(3)\qquad MZ^2+NZX+PX^2=0;$$

on en déduira par exemple

$$(4)\qquad Z=m_1X,\quad Z=m_2X,$$

ce seront les droites Ba, Ba'. Si maintenant

$$(5)\qquad Z=\mu X,$$

est l'équation de la droite $B\mu$, il faut exprimer que le faisceau

$$(B,\ aa'm\mu),$$

est harmonique, ce qui donne

$$\frac{m_1-0}{m_1-\mu}:\frac{m_2-0}{m_2-\mu}=-1,$$

ou, en développant

$$(6)\qquad 2m_1m_2-\mu(m_1+m_2)=0.$$

Mais il résulte de l'équation (3):

$$m_1 m_2 = \frac{P}{M}, \; m_1 + m_2 = -\frac{N}{M};$$

la relation (6) devient alors

$$2P + N\mu = 0;$$

ou, en remplaçant μ par $\frac{Z}{X}$:

$$(7) \qquad 2PZ + NX = 0.$$

Mais le premier membre de l'équation (7) est la dérivée, par rapport à X du premier membre de l'équation (3), c.à.d. la dérivée par rapport à X du premier membre de l'équation (1) où l'on suppose Y remplacé par λX; on a donc

$$(8) \qquad f'_X + \lambda f'_Y = 0,$$

telle est l'équation équivalente à l'équation (7). On obtiendra l'équation du lieu en éliminant λ entre (2) et (8), ce qui donne

$$(9) \qquad X f'_X + Y f'_Y = 0,$$

ou, d'après le théorème des fonctions homogènes :

$$(9 \text{ bis}) \qquad 2f(X,Y,Z) - Z f'_Z = 0;$$

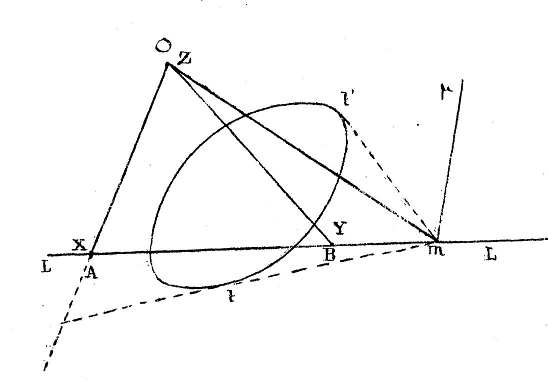
les équations (9) ou (9 bis) représentent la courbe cherchée.

On voit que c'est une conique; cette conique passe: par les intersections de la droite L, ou $Z=0$, avec la conique proposée; par les intersections de la polaire du point ρ, ou $f'_Z = 0$, avec la conique proposée; par le pôle de la droite L, ou $Z=0$, car ce pôle est défini par les équations

$$f'_X = 0, \; f'_Y = 0.$$

Cette question comprend, comme cas particulier, celle qui a été traitée au N° [561].

2° Les mêmes calculs démontrent la proposition corrélative. Prenons pour triangle de référence le triangle formé par le point fixe O et par deux points A et B situés sur la droite fixe L. L'équation (1) représentera la conique, et l'équation (2) un point quelconque m pris sur la droite AB ou L. L'équation (3) déterminera les tangentes à la conique menées par le point m, mt et mt'; les équations (4) définiront les points où les tangentes mt et mt' rencontrent la droite OA du triangle de référence, et (5) est l'équation du point où la droite $m\mu$ rencontre OA. La relation (6) exprime que le système de ces quatre points, ou que le faisceau (mt, mt', mO, $m\mu$)) est harmonique.



Les équations (9) ou (9 bis) représentent alors l'enveloppe des droites $m\mu$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

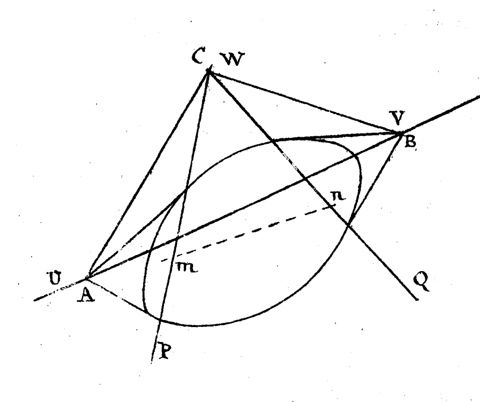
On voit que la courbe est une conique; cette conique touche les tangentes menées à la courbe $f=0$ par le point $Z=0$ ou O; elle touche les tangentes menées à la courbe $f=0$ par le point $f'_Z=0$, c.à.d. par le pôle de la droite L; enfin, elle touche la polaire du point O, car cette polaire est définie par les équations

$$f'_X = 0, \; f'_Y = 0.$$

986. IV° Étant données une conique et deux droites fixes, si sur ces droites on prend deux points conjugués par rapport à la conique, la droite qui joint ces points enveloppe une conique tangente aux deux droites et aux quatre tangentes à la conique proposée menées par les points où ces droites la rencontrent.

2° Si autour de deux points fixes on fait tourner deux droites conjuguées par rapport à une conique, le point d'intersection de ces droites décrit une conique qui passe par les deux points fixes et par les quatre points de contact des tangentes à la conique proposée, menées par les deux points fixes.

Démontrons d'abord la première proposition; prenons pour triange de référence le triangle ayant pour sommets



C le point de concours des deux droites P et Q, et pour côté opposé la polaire du point C; les pôles des droites P et Q, passant par le point C, doivent se trouver sur cette polaire; nous les prendrons pour sommets A et B du triangle de référence.

L'équation tangentielle d'une conique est

$$aU^2+bV^2+cW^2+2dUV+2eVW+2fUW=0;$$

le pôle de la droite AB (U=0, V=0) a pour équation

$$f'_W=0, \text{ ou } cW+eV+fU=0;$$

ce pôle devant coïncider avec le point C, on aura

$$e=0, \; f=0.$$

D'après cela l'équation de la conique donnée se réduira à

$$(1) \qquad F=aU^2+bV^2+cW^2+2dUV=0.$$

Les deux droites P et Q étant respectivement les polaires des points A et B, leurs coordonnées seront définies par les équations

$$(2) \qquad (P) \qquad W=0, \; bV+dU=0,$$

$$(3) \qquad (Q) \qquad W=0, \; aU+dV=0;$$

on obtiendra ces équations en se rappelant que les coordonnées de la polaire d'un point

$$MU+NV+PW=0,$$

sont définies par les équations

$$\frac{f'_U}{M}=\frac{f'_V}{N}=\frac{f'_W}{P}.$$

L'équation d'un point quelconque (m) situé sur la droite CP, sera

$$(4) \qquad (m) \qquad dU+bV+\lambda W=0;$$

et celle d'un point (n), situé sur la droite CQ, sera

$$(5) \qquad (n) \qquad aU+dV+\mu W=0.$$

Exprimons que ces deux points sont conjugués, c.à.d. que la polaire de l'un passe par l'autre. Les coordonnées de la polaire du point (m) sont données par les équations

$$\frac{aU+dV}{d}=\frac{bV+dU}{b}=\frac{cW}{\lambda};$$

d'où l'on déduit

$$U=0, \; cW=\lambda V;$$

ces valeurs doivent vérifier l'équation du point (n); il en résulte

$$(6) \qquad \lambda\mu+cd=0.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe de la droite mn en éliminant λ et μ entre les équations (4), (5) et (6); on aura ainsi

$$(7) \qquad (aU+dV)(dU+bV)=cd.W^2,$$

ou, en développant

$$(7\,bis) \qquad aU^2+bV^2+cW^2+2dUV+\frac{ab-d^2}{d}UV=0; \text{ ou } F(U,V,W)+\frac{ab-d^2}{d}UV=0;$$

c'est l'équation tangentielle de la courbe cherchée.

On voit que c'est une conique touchant les tangentes menées à la conique proposée par les points A et B, ou U=0, V=0, c.à.d. touchant les tangentes menées à la conique aux points où elle est rencontrée par les droites (P) et (Q); ceci est mis en évidence par l'équation (7 bis). L'équation (7) nous montre que cette conique touche aussi les deux droites (P) et (Q) aux points où elles rencontrent la droite AB, polaire du point C.

2° Pour démontrer la seconde proposition, prenons pour triangle de référence le triangle formé par les deux

points fixes A, et B, et par le pôle C de la droite AB. L'équation d'une conique étant

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2dXY+2eYZ+2fXZ=0;$$

la polaire du point C sera

$$f'_Z=0, \text{ ou } cZ+eY+fX=0;$$

comme cette droite doit coïncider avec AB ou $Z=0$, on devra avoir

$$e=0,\ f=0;$$

de sorte que l'équation de la conique est

$$(1)\qquad F=aX^2+bY^2+cZ^2+2dXY=0.$$

Les équations des droites AM et BM, passant respectivement par les points A et B seront

$$(2)\qquad (BM)\ X=\lambda Z,\qquad (AM)\ Y=\mu Z.$$

Il faut exprimer que ces deux droites sont conjuguées, c.à.d. que le pôle de l'une se trouve sur l'autre; or le pôle de la droite BM est donné par les équations

$$\frac{aX+dY}{1}=\frac{bY+dX}{0}=\frac{cZ}{-\lambda};$$

d'où l'on déduit

$$bY+dX=0,\quad aX+dY+\frac{cZ}{\lambda}=0.$$

Ces valeurs doivent vérifier l'équation de la droite AM, on en conclut

$$(3)\qquad cd+(d^2-ab)\lambda\mu=0.$$

L'équation de la courbe cherchée s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations (2) et (3); on trouve

$$(4)\qquad (d^2-ab)XY+cdZ^2=0.$$

C'est une conique; cette conique passe par les deux points A et B et y touche les deux droites CA et CB. L'équation (4) peut encore s'écrire

$$(4\text{bis})\qquad aX^2+bY^2+cZ^2+2dXY-\frac{1}{a}(aX+dY)(bY+dX)=0.$$

Sous cette dernière forme, on voit que la conique passe par les points de contact des tangentes à la conique proposée, menées par les deux points fixes; car les polaires des deux points A et B sont

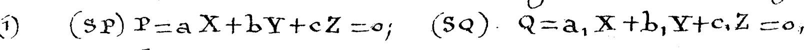
$$aX+dY=0,\quad bY+dX=0.$$

V°

987. 1° Les trois côtés d'un triangle MPQ passant par trois points fixes A, B, C; deux des sommets P et Q se meuvent sur deux droites fixes SP et SQ; le troisième sommet décrit une conique.

2° Les trois sommets d'un triangle décrivent trois droites fixes AB, AC, et BC; deux des côtés passent par des points fixes P et Q; le troisième côté enveloppe une conique.

1° Pour démontrer la première proposition, nous prendrons le triangle ABC pour triangle de référence; soient alors



$$(1)\qquad (SP)\ P=aX+bY+cZ=0;\quad (SQ)\ Q=a_1X+b_1Y+c_1Z=0,$$

les équations des deux droites fixes SP et SQ. Soit MPQ un des triangles satisfaisant à la question; les équations des côtés MP et MQ seront respectivement

$$(2)\begin{cases}(MP) & Z=\lambda X,\\ (MQ) & Y=\mu X,\end{cases}$$

λ et μ étant des indéterminées. Cherchons maintenant les équations des droites PA et QA, puis exprimons que ces deux droites coïncident. L'équation générale des droites passant par les points de concours de MP et SP est

$$aX+bY+cZ+K(Z-\lambda X)=0;$$

cette droite devant passer par le point A $(Y=0, Z=0)$, on aura

$$K\lambda-a=0,\ \text{ ou } K=\frac{a}{\lambda};$$

d'où l'on conclut pour l'équation de PA :

$$(1^o)\qquad (PA)\qquad bY+\left(c+\frac{a}{\lambda}\right)Z=0.$$

On trouvera de même pour l'équation de QA :

$$(2^o)\qquad (QA)\qquad \left(b_1+\frac{a_1}{\mu}\right)Y+c_1Z=0.$$

Ces deux droites devant coïncider, il en résulte l'équation de condition

$$(3)\qquad \left(c+\frac{a}{\lambda}\right)\left(b_1+\frac{a_1}{\mu}\right)=bc_1.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant λ et μ entre les équations (2) et (3), ce qui conduit à

$$(4)\qquad (aX+cZ)(a_1X+b_1Y)=bc_1YZ;$$

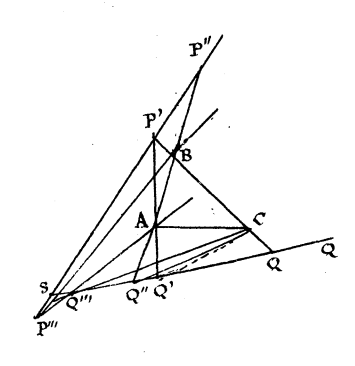
équation qu'on peut encore écrire

$$(4\,bis)\qquad PQ=bQY+c_1PZ.$$

Le lieu est donc une conique ; cette conique passe par les cinq points :

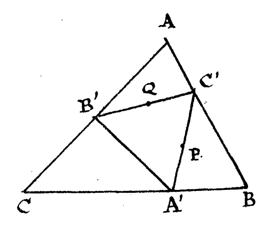
$$(5)\qquad B\begin{cases}X=0,\\ Z=0;\end{cases}\quad C\begin{cases}X=0,\\ Y=0;\end{cases}\quad S\begin{cases}P=0,\\ Q=0;\end{cases}\quad I\begin{cases}Y=0,\\ P=0;\end{cases}\quad J\begin{cases}Z=0,\\ Q=0.\end{cases}$$

On peut se rendre compte comme il suit de l'existence de ces points :



Lorsque le côté PM vient s'appliquer sur BC, en P'BC, le point Q vient en Q' ; le triangle P'Q'C satisfait aux conditions de l'énoncé, le point C fait partie du lieu. Le côté BM continuant à tourner autour de B, et passant maintenant dans l'intérieur de l'angle CBA, il arrivera à coïncider avec BA ou P''B ; alors le côté PA coïncide avec P''B et le point Q vient en Q'' ou J ; deux des côtés du triangle générateur se confondent avec BAQ'', le 3ème côté est CQ'' ; le point Q'' ou J fait donc partie du lieu. Le côté BM continuant à tourner autour de B, le point P viendra en P''' très voisin de S ; on joint P'''A, on aura un point Q''' très-voisin de S sur SQ ; on joint enfin CQ''', cette droite rencontrera BP''' en un point voisin de S ; lorsque BM viendra passer par S, le sommet M du triangle générateur se confondra avec le point S.

2° Pour résoudre la seconde question, prenons pour triangle de référence le triangle formé par les trois droites fixes, et soient



$$(1)\qquad P=aU+bV+cW=0,\quad Q=a_1U+b_1V+c_1W=0,$$

les équations tangentielles des deux points fixes P et Q. Soient, en outre,

$$(2)\qquad (B')\ U=\lambda W,\quad (A')\ V=\mu W,$$

les équations des points B' et A' pris respectivement sur AC et BC, λ et μ sont deux indéterminées. L'équation d'un point quelconque situé sur A'P est

$$aU+bV+cW+K(V-\mu W)=0;$$

exprimons que ce point est sur AB $(U=0,\ V=0)$ on a $c=K\mu$; d'où

$$(1^o)\qquad aU+\left(b+\frac{c}{\mu}\right)V=0;$$

c'est l'équation du point où A'P rencontre AB. On aura de même

$$(2^o)\qquad \left(a_1+\frac{c_1}{\lambda}\right)U+b_1V=0,$$

pour l'équation du point de rencontre de B'Q avec AB. Exprimons que ces deux points coïncident, on a la relation

$$(3)\qquad \left(a_1+\frac{c_1}{\lambda}\right)\left(b+\frac{c}{\mu}\right)=ab_1.$$

Les sommets du triangle générateur sont alors sur le triangle ABC; les coordonnées de la droite A'B' doivent vérifier les équations (2), et λ, μ, sont liées par la relation (3). On aura donc l'enveloppe de A'B' en éliminant λ et μ entre les équations (2) et (3); ce qui conduit à

$$(4)\qquad (a_1 U + c_1 W)(bV + cW) = ab_1 UV;$$

équation qui peut s'écrire

$$(4\,bis)\qquad PQ = b_1 PV + a\,QU.$$

L'enveloppe du côté A'B' est donc une conique. Cette conique touche les cinq droites :

$$(5)\qquad \overline{AC}\begin{cases}U=0,\\ W=0;\end{cases}\quad \overline{BC}\begin{cases}V=0,\\ W=0;\end{cases}\quad \overline{PQ}\begin{cases}P=0,\\ Q=0;\end{cases}\quad \overline{AP}\begin{cases}U=0,\\ P=0;\end{cases}\quad \overline{BQ}\begin{cases}V=0,\\ Q=0.\end{cases}$$

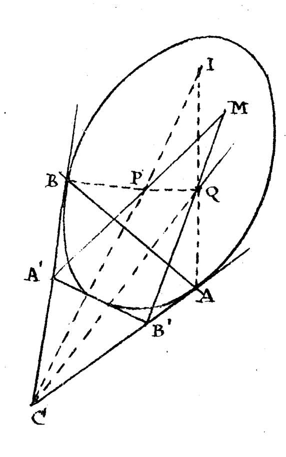
VI°.

988. 1° La base d'un triangle est tangente à une conique donnée, ses deux extrémités se meuvent sur deux tangentes fixes à la conique; les deux autres côtés passent par des points fixes; le troisième sommet décrira une conique.

2° Le sommet d'un triangle se meut sur une conique, les deux côtés qui le forment passent respectivement par deux points fixes situés sur la conique; les deux autres sommets décrivent des droites fixes; le troisième côté enveloppera une conique.

1° Pour résoudre la première question, nous prendrons pour triangle de référence le triangle formé par les tangentes fixes et leur corde de contact; l'équation de la conique donnée sera alors

$$(1)\qquad XY = Z^2;$$



soient (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) les coordonnées des deux points fixes P et Q.

L'équation d'une tangente à la conique pourra se mettre sous la forme

$$(2)\qquad (A'B')\qquad \lambda^2 Y - 2\lambda Z + X = 0,$$

λ étant une constante arbitraire.

L'équation d'une droite passant par le point A' est

$$\lambda^2 Y - 2\lambda Z + X + KX = 0;$$

exprimons qu'elle passe par le point P (a, b, c); on en déduira la valeur de la constante K, et l'équation de A'P sera

$$(3)\qquad (A'P)\quad \lambda(aY - bX) = 2(aZ - cX).$$

L'équation d'une droite passant par le point B' est

$$\lambda^2 Y - 2\lambda Z + X + K_1 Y = 0,$$

on déterminera la constante K_1 en exprimant que cette droite passe par le point Q (a_1, b_1, c_1); on trouve ainsi pour l'équation de B'Q :

$$(4)\qquad (B'Q)\quad (b_1 X - a_1 Y) = 2\lambda(b_1 Z - c_1 Y).$$

L'équation du lieu des points M s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (3) et (4); on a ainsi

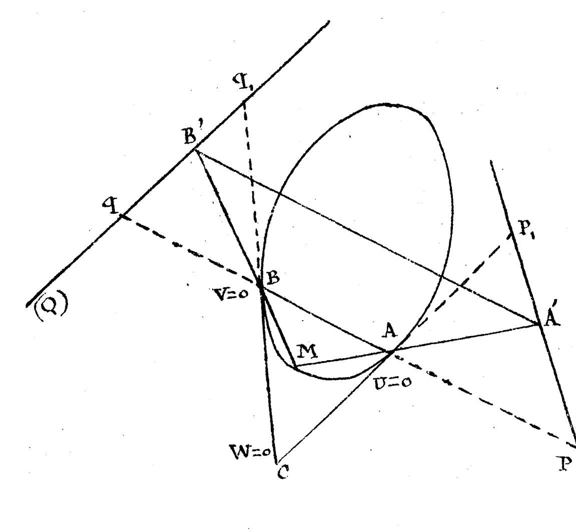
$$(5)\qquad (aY - bX)(b_1 X - a_1 Y) = 4(aZ - cX)(b_1 Z - c_1 Y).$$

c'est l'équation d'une conique; cette conique passe par les points :

$$(6)\qquad P\begin{cases}a\\ b\\ c\end{cases};\quad Q\begin{cases}a_1\\ b_1\\ c_1\end{cases};\quad I\begin{cases}CP\\ AQ\end{cases};\quad J\begin{cases}CQ\\ BP\end{cases}.$$

2° Pour résoudre la seconde question, prenons pour triangle de référence le triangle formé par les tangentes aux points donnés sur la conique et par la droite qui joint ces deux points; l'équation de la conique donnée sera alors

$$(1)\qquad UV = W^2.$$



Soient (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) les coordonnées des deux droites fixes P et Q. L'équation tangentielle d'un point M, situé sur la conique, pourra s'écrire

(2) (M) $\lambda^2 V - 2\lambda W + U = 0.$

L'équation d'un point quelconque, situé sur MA, sera

$$\lambda^2 V - 2\lambda W + U + KU = 0;$$

exprimons que la droite P (a, b, c) passe par ce point, on en déduira la constante K et par suite l'équation du point A':

(3) (A') $\lambda(aV - bU) = 2(aW - cU).$

On trouvera de même pour l'équation du point B':

(4) (B') $(b_1 U - a_1 V) = 2\lambda(b_1 W - c_1 V).$

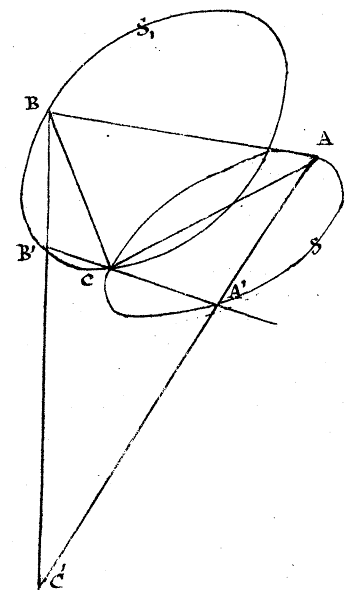
Les coordonnées de la droite A'B' doivent vérifier les équations (3) et (4); on en aura l'enveloppe en éliminant λ entre ces équations, ce qui donne

(5) $(aV - bU)(b_1 U - a_1 V) = 4(aW - cU)(b_1 W - c_1 V).$

C'est l'équation d'une conique; cette conique touche les droites P, Q, pq_1 et $p_1 q$

VII°.

989. 1° Les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes, deux sommets se meuvent sur deux coniques passant chacune par deux des points fixes, le 3ème sommet décrira une conique passant par les deux points autour desquels tournent les côtés dont ce sommet est l'intersection.



Ainsi les trois points fixes étant A, B, C; la première conique S passe par A et C; la deuxième par B et C; un côté du triangle passe par le point C commun aux deux coniques, et rencontre la première en A', la deuxième en B'; on joint AA' et BB', le point d'intersection C' sera le sommet générateur du triangle.

Prenons le triangle fixe ABC pour triangle de référence; les équations des deux coniques seront, d'après les conditions imposées

(1) (S) $bY^2 + dYZ + eXZ + fXY = 0,$

(2) (S_1) $a_1 X^2 + d_1 YZ + e_1 XZ + f_1 XY = 0.$

L'équation d'une droite quelconque passant par le point C est

(3) $Y = \lambda X;$

éliminons X entre (1) et (3), nous aurons l'équation de la droite AA':

(4) $bY + dZ + \dfrac{e}{\lambda} Z + \dfrac{f}{\lambda} Y = 0;$

éliminons Y entre (2) et (3), nous aurons l'équation de la droite BB':

(5) $a_1 X + d_1 \lambda Z + e_1 Z + f_1 \lambda X = 0.$

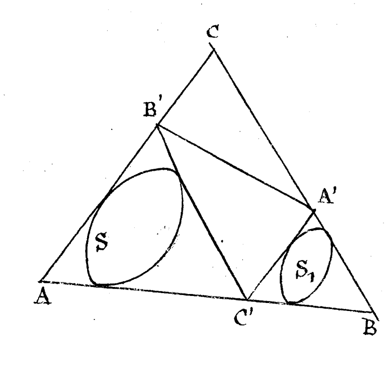
Le lieu du point C', intersection des droites AA' et BB', s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (4) et (5); ce qui donne

(6) $(bY + dZ)(a_1 X + e_1 Z) = (eZ + fY)(d_1 Z + f_1 X).$

C'est l'équation d'une conique; cette conique passe par les points:

(7) A $\begin{cases} Y = 0, \\ Z = 0; \end{cases}$ B $\begin{cases} X = 0, \\ Z = 0; \end{cases}$ I $\begin{cases} bY + dZ = 0, \\ d_1 Z + f_1 X = 0; \end{cases}$ J $\begin{cases} eZ + fY = 0, \\ a_1 X + e_1 Z = 0. \end{cases}$

2° Les trois sommets d'un triangle décrivent trois droites fixes; deux côtés touchent deux coniques, tangentes chacune à deux des droites fixes; le troisième côté enveloppera une conique qui touche les deux droites sur lesquelles se meuvent les extrémités du côté dont elle est l'enveloppe.



Ainsi, les trois droites fixes étant AB, AC, BC; la 1ère conique S touche AB et AC; la 2ème conique S_1 touche AB et BC; un sommet du triangle est sur AB, en C'; les côtés C'B' et C'A' touchent respectivement S et S_1, et rencontrent les droites AC et BC en B' et A'; le côté A'B' sera le côté générateur.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence; les équations tangentielles des deux coniques seront, d'après les conditions imposées:

$$(1)\qquad (S)\qquad aU^2+dVW+eUW+fVU=0;$$

$$(2)\qquad (S_1)\qquad b_1V^2+d_1VW+e_1UW+f_1VU=0.$$

L'équation d'un point quelconque C', situé sur AB, sera

$$(3)\qquad V=\lambda U;$$

éliminons V entre (1) et (3), nous aurons

$$(4)\qquad (B')\qquad aU+d\lambda W+eW+\lambda fU=0,$$

c'est l'équation du point B' où la tangente à S, menée par C', rencontre la droite AC. Éliminons U entre (2) et (3), nous aurons

$$(5)\qquad (A')\qquad b_1V+d_1W+\frac{e_1}{\lambda}W+\frac{f_1}{\lambda}V=0,$$

c'est l'équation du point A' où la tangente à S_1, menée par C', rencontre la droite BC. Les coordonnées de la droite A'B' vérifient les équations (4) et (5); on aura l'enveloppe de cette droite en éliminant λ entre les équations (4) et (5); ce qui donne

$$(6)\qquad (aU+eW)(b_1V+d_1W)=(dW+fU)(e_1W+f_1V).$$

C'est l'équation d'une conique; cette conique touche les droites

$$(7)\qquad \overline{AC}\begin{cases}U=0,\\W=0;\end{cases}\quad \overline{BC}\begin{cases}V=0,\\W=0;\end{cases}\quad (L)\begin{cases}aU+eW=0,\\e_1W+f_1V=0;\end{cases}\quad (L')\begin{cases}dW+fU=0,\\b_1V+d_1W=0.\end{cases}$$

VIII°.

1° Un triangle est circonscrit à une conique; deux de ses sommets se meuvent sur deux droites fixes; le 3ème sommet décrira une conique ayant un double contact avec la première.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les tangentes menées à la conique du point d'intersection des deux droites fixes et par la corde de contact de ces tangentes; l'équation de la conique sera

$$(1)\qquad XY=Z^2.$$



Soient

$$(1)\qquad X=aY,\qquad CP,$$

$$(2)\qquad X=bY,\qquad CQ,$$

les équations des deux droites fixes CP et CQ.

Les équations des tangentes A'M, B'M et A'B' seront

$$(3)\qquad \lambda^2Y-2\lambda Z+X=0,\quad A'M;$$

$$(4)\qquad \mu^2Y-2\mu Z+X=0,\quad B'M;$$

$$(5)\qquad \rho^2Y-2\rho Z+X=0,\quad A'B'.$$

Exprimons que les droites B'A', CP, A'M sont concourantes, on a

$$(6)\qquad \lambda\rho=a;$$

on aura de même, en exprimant que les droites A'B', CQ, B'M, sont concourantes:

$$(7)\qquad \mu\rho=b;$$

d'où l'on conclut

$$(8)\qquad \lambda b=\mu a.$$

On obtiendra maintenant l'équation du lieu en éliminant λ et μ entre les équations (3), (4), (8). Mais, d'après les équations (3) et (4), λ et μ peuvent être regardées comme les racines de l'équation

$$\lambda^2 Y - 2\lambda Z + X = 0;$$

on aura par suite:

$$\lambda\mu = \frac{X}{Y}, \quad \lambda + \mu = \frac{2Z}{Y}, \quad \lambda b = \mu a;$$

l'élimination de λ et μ s'effectue immédiatement, et l'on trouve

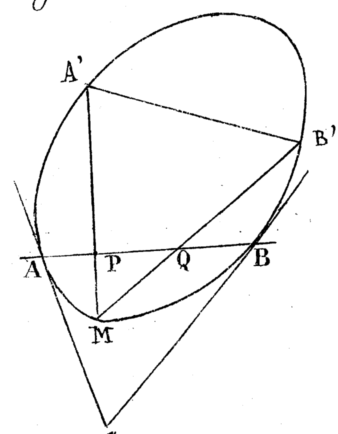
$$(9) \qquad Z^2 = \frac{(a+b)^2}{4ab} XY;$$

c'est l'équation d'une conique doublement tangente à la conique donnée.

2° Un triangle est inscrit dans une conique; deux de ses côtés passent par deux points fixes; l'enveloppe du troisième côté sera une conique doublement tangente à la conique proposée.

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle formé par la droite qui joint les deux points fixes et les tangentes aux extrémités de cette corde; l'équation de la conique sera

$$(1) \qquad XY = Z^2.$$



Les points P et Q seront déterminés par les équations

$$(2) \qquad P \begin{cases} Z = 0, \\ X = aY; \end{cases} \quad Q \begin{cases} Z = 0, \\ X = bY. \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point situé sur la conique pourront se représenter par

$$X = \lambda Z, \quad Y = \frac{1}{\lambda} Z;$$

soient alors λ, λ_1, ρ, les paramètres des points A', B', M, situés sur la conique; les équations des côtés du triangle inscrit seront respectivement:

$$A'B' : \quad \lambda\lambda_1 Y - (\lambda + \lambda_1) Z + X = 0,$$
$$A'M : \quad \lambda\rho Y - (\lambda + \rho) Z + X = 0,$$
$$B'M : \quad \lambda_1\rho Y - (\lambda_1 + \rho) Z + X = 0.$$

Exprimons que les droites A'M et B'N passent respectivement par les points P et Q, on a les relations

$$\lambda = -\frac{a}{\rho}, \quad \lambda_1 = -\frac{b}{\rho}.$$

Transportant ces valeurs de λ et λ_1 dans l'équation de la droite A'B', on a

$$(3) \qquad A'B' : \quad \rho^2 X + (a+b) Z\rho + ab\, Y = 0.$$

L'enveloppe de cette droite sera

$$(4) \qquad XY = \frac{(a+b)^2}{4ab} Z^2;$$

c'est l'équation d'une conique doublement tangente à la conique donnée aux points où elle est rencontrée par la droite qui joint les points fixes.

N. B. Voir pour l'étude de l'inscription des polygones, etc.... le Traité des propriétés projectives, de M. Poncelet.

§ V. Coniques homofocales.

971. Nous avons vu N° [935] que l'équation générale des coniques homofocales rapportées à leurs axes est

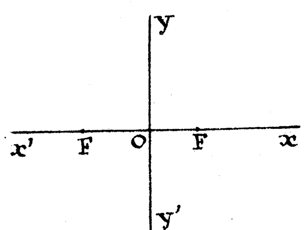
$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0;$$

et l'équation tangentielle de ces mêmes courbes est Nº [952]:

$$\text{(II)} \qquad a^2u^2+b^2v^2-1=\lambda(u^2+v^2).$$

1º **Discussion de l'équation (I).** $a>b$; $c^2=a^2-b^2$;

Lorsque λ varie de $-\infty$ à $+b^2$, l'équation (I) représente des ellipses; ces ellipses, d'abord infiniment grandes, s'aplatissent de plus en plus; pour $\lambda=b^2-\varepsilon$, l'équation devient



$$\frac{x^2}{a^2-b^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{\varepsilon}-1=0,$$

l'axe dirigé suivant Oy devient de plus en plus petit; lorsque λ tend vers b^2, en lui restant inférieur, on a l'ellipse infiniment aplatie FF'; F et F' sont les foyers communs à toutes ces coniques.

Lorsque λ varie de b^2 à a^2, on a des hyperboles dont l'axe imaginaire est toujours dirigé suivant Oy. Si $\lambda=b^2+\varepsilon$, l'équation devient

$$\frac{x^2}{a^2-b^2-\varepsilon}-\frac{y^2}{\varepsilon}-1=0,$$

on a une hyperbole très-aplatie, les asymptotes sont couchées sur l'axe Ox, et lorsque λ tend vers b^2, en lui restant supérieur, on a les deux portions de droite infinies Fx et $F'x'$. Si $\lambda=a^2-\varepsilon$, l'équation devient

$$\frac{x^2}{\varepsilon}-\frac{y^2}{a^2-b^2+\varepsilon}-1=0,$$

on a des hyperboles très-ouvertes, les asymptotes sont presque perpendiculaires à Ox, l'axe focal est très-petit; lorsque λ tend vers ε, on a la droite indéfinie yy'.

Lorsque λ est supérieur à a^2, l'équation (I) représente des ellipses imaginaires.

II° **Discussion de l'équation (II)** $a>b$.

Les intersections de la courbe (II) avec la droite de l'infini $u=0$, $v=0$, seront données par l'équation Nº [423]

$$4f(u_0,v_0,w_0)\cdot f(u,v,w)=[u_0f'_u+v_0f'_v+w_0f'_w]^2,$$

en y supposant $u_0=0$, $v_0=0$, $w=1$; ce qui conduit à

$$(1) \qquad (a^2-\lambda)u^2+(b^2-\lambda)v^2=0.$$

Lorsque λ varie de $-\infty$ à $+b^2$, les points (1) sont imaginaires, on a des ellipses réelles; pour $\lambda=\infty$, l'équation (II) se réduit à $u^2+v^2=0$, ce sont les points circulaires à l'infini; pour $\lambda=b^2$, on a les deux foyers F et F'.

Si λ varie de b^2 à a^2, les points (1) sont réels, les coniques sont des hyperboles; pour $\lambda=a^2$, on les deux foyers imaginaires sur Oy.

Lorsque λ est supérieur à a^2, les courbes sont des ellipses imaginaires, l'équation (II) n'a plus de solutions réelles.

972. **Par un point donné passent une ellipse et une hyperbole homofocales.**

Soient x_0, y_0, les coordonnées du point donné; exprimons que la courbe (I) passe par ce point, on a

$$(2) \qquad \frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}=1,$$

ou

$$(2\text{ Bis}) \qquad \lambda^2+\lambda\left[y_0^2+x_0^2-a^2-b^2\right]+a^2b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2=0;$$

cette équation détermine les valeurs de λ qui correspondent aux coniques passant par le point en question; or l'équation (2) étant mise sous la forme

$$(\lambda-b^2)(\lambda-a^2)+x_0^2(\lambda-b^2)+y_0^2(\lambda-a^2)=0,$$

on voit que (en supposant $a>b$)

pour $\lambda=-\infty$ on a le signe +
$\lambda=b^2$ .... −
$\lambda=a^2$ .... +
$\lambda=+\infty$ .... + ;

les deux valeurs de λ sont donc réelles; l'une, λ_1, est comprise entre $-\infty$ et b^2, et correspond à une ellipse; l'autre, λ_2, est comprise entre b^2 et a^2, et correspond à une hyperbole.

Les équations de cette ellipse et de cette hyperbole seront

$$(3)\quad\begin{cases}\text{Ellipse:}\quad \dfrac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda_1}-1=0,\\[2mm] \text{Hyperbole:}\quad \dfrac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda_2}-1=0,\end{cases}$$

$$-\infty<\lambda_1<b^2;\ b^2<\lambda_2<a^2;$$

on a, en outre, les équations de condition

$$(4)\ \begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2-\lambda_1}+\dfrac{y_0^2}{b^2-\lambda_1}-1=0,\\[2mm] \dfrac{x_0^2}{a^2-\lambda_2}+\dfrac{y_0^2}{b^2-\lambda_2}-1=0.\end{cases}\quad \text{ou (4 bis)}\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a_1^2}+\dfrac{y_0^2}{b_1^2}-1=0,\\[2mm] \dfrac{x_0^2}{a_2^2}-\dfrac{y_0^2}{b_2^2}-1=0,\end{cases}\ \text{d'où (4 ter)}\begin{cases}x_0^2=\dfrac{a_1^2a_2^2}{c^2};\\[2mm] y_0^2=\dfrac{b_1^2b_2^2}{c^2};\end{cases}$$

en représentant par a_1, b_1; a_2, b_2, les axes de l'ellipse et de l'hyperbole passant par le point (x_0, y_0); on aura, d'après cela:

$$\begin{matrix}(5) & a_1^2=a^2-\lambda_1,\quad b_1^2=b^2-\lambda_1; \\ (5\,\text{bis}) & a_2^2=a^2-\lambda_2,\quad b_2^2=\lambda_2-b^2;\end{matrix}\qquad a^2-b^2=c^2.$$

Désignons par α_1, β_1, les angles, avec les axes de coordonnées, de la normale à l'ellipse au point considéré; par α_2, β_2, ceux de la normale à l'hyperbole au même point; par p_1, p_2, les distances du centre aux tangentes à l'une et l'autre courbe.

L'équation de la tangente au point (x_0, y_0) à l'ellipse (3) est

$$\frac{x\,x_0}{a_1^2}+\frac{y\,y_0}{b_1^2}-1=0;$$

d'un autre côté, α_1, β_1 étant les angles avec les axes de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette tangente, et p_1 sa longueur absolue, l'équation de cette tangente pourra s'écrire

$$x\cos\alpha_1++y\cos\beta_1-p_1=0.$$

On conclut de là, en identifiant ces deux équations

$$\frac{\cos\alpha_1}{\dfrac{x_0}{a_1^2}}=\frac{\cos\beta_1}{\dfrac{y_0}{b_1^2}}=p_1.$$

Le même calcul est applicable à l'hyperbole; on aura donc les formules

$$(6)\ \begin{cases}\cos\alpha_1=\dfrac{p_1x_0}{a_1^2},\\[2mm] \cos\beta_1=\dfrac{p_1y_0}{b_1^2},\end{cases}\qquad (6\,\text{bis})\begin{cases}\cos\alpha_2=\dfrac{p_2x_0}{a_2^2},\\[2mm] \cos\beta_2=-\dfrac{p_2y_0}{b_2^2};\end{cases}$$

α_1, β_1, sont les angles de la normale, c.à.d. de la droite menée de l'origine perpendiculairement à la tangente et dirigée vers la tangente; il en est de même pour α_2, β_2.

973. Les coniques homofocales se coupent orthogonalement.

Soient, en effet, x_0, y_0, les coordonnées d'un point où se coupent deux coniques homofocales, et θ l'angle des normales en ce point; on aura, d'après les formules qui précèdent :

$$(7)\qquad \cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 = p_1 p_2\left[\frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2}\right];$$

or si l'on retranche membre à membre les égalités (4bis), il vient :

$$x_0^2\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) + y_0^2\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right) = 0,$$

ou

$$x_0^2\,\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 a_2^2} + y_0^2\,\frac{b_2^2 + b_1^2}{b_1^2 b_2^2} = 0;$$

mais les relations (5) donnent

$$(8)\qquad a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 + b_2^2;$$

l'égalité précédente devient alors

$$(9)\qquad \frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2} = 0.$$

On voit, par là, que la valeur (7) de $\cos\theta$ est nulle; donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. C. Q. F. D.

974. Il n'y a qu'une seule conique homofocale touchant une droite donnée.

En effet, l'équation tangentielle des coniques homofocales est

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda(u^2+v^2);$$

or si l'on assujettit cette courbe à toucher une droite (u_0, v_0), on a

$$(10)\qquad a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - 1 = \lambda(u_0^2+v_0^2);$$

équation qui ne donne qu'une seule valeur pour λ.

La courbe sera une ellipse, si $\lambda < b^2$, c. à. d. si

$$c^2u_0^2 - 1 < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_0} > c;$$

y x

F' O F x

c. à. d. enfin si la droite ne coupe pas l'axe focal entre les foyers F et F', car $\frac{1}{u_0}$ est la distance au centre du point où la droite rencontre l'axe des x.

La courbe sera une hyperbole dans le cas contraire; car si u_0 et v_0 sont réels, il est facile de vérifier que la valeur de λ est toujours inférieure à a^2.

975. Si par un point on mène des tangentes aux diverses courbes homofocales, les bissectrices des angles formés par ces tangentes, sont les normales à l'ellipse et à l'hyperbole qui passent par le point considéré.

Cette proposition résulte immédiatement de cette propriété : que les tangentes menées par un point sont également inclinées sur les droites qui joignent ce point aux foyers.

On peut aussi le constater comme il suit :

Si x_0, y_0, sont les coordonnées du point donné, et si

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} - 1 = 0,$$

est une quelconque des coniques homofocales, l'équation des deux tangentes menées par ce point (x_0, y_0) est

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2-\lambda} + \frac{y_0^2}{b^2-\lambda} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} - 1\right) = \left(\frac{x x_0}{a^2-\lambda} + \frac{y y_0}{b^2-\lambda} - 1\right)^2.$$

L'équation des droites menées par l'origine parallèlement à ces tangentes sera

$$\left(\frac{y_0^2}{b^2-\lambda} - 1\right)\frac{x^2}{a^2-\lambda} - \frac{2x_0y_0}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}xy + \left(\frac{x_0^2}{a^2-\lambda} - 1\right)\frac{y^2}{b^2-\lambda} = 0;$$

ou

$$(y_0^2-b^2+\lambda)x^2-2x_0y_0xy+(x_0^2-a^2+\lambda)y^2=0.$$

L'équation des bissectrices de ce système de droites est alors

$$(10)\qquad x^2-\frac{-y_0^2+x_0^2-a^2+b^2}{x_0y_0}xy-y^2=0.$$

En ayant égard aux valeurs (4 ter) et aux relations (5), cette équation devient

$$(11)\qquad y^2+\frac{a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2}{a_1a_2b_1b_2}xy-x^2=0;$$

en tirant de cette équation les valeurs de $\frac{y}{x}$ on trouve précisément les valeurs (6) de $\tang\alpha_1$ et $\tang\alpha_2$. Donc....

976. 1° Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux diverses coniques homofocales est une droite perpendiculaire à la droite donnée au point où elle touchée par une de ces coniques.

Soit une droite fixe

$$(12)\qquad Ax+By-1=0;$$

et x_0, y_0 les coordonnées de son pôle par rapport à la courbe

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0;$$

la polaire de ce point est

$$\frac{xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{yy_0}{b^2-\lambda}-1=0.$$

Identifions cette équation avec celle de la droite, et supprimons l'indice, on a

$$a^2-\lambda=\frac{x}{A},\quad b^2-\lambda=\frac{y}{B};$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$(13)\qquad \frac{x}{A}-\frac{y}{B}=c^2;$$

ce qui représente une droite perpendiculaire à la droite considérée.

Or, il y aura une des coniques et une seule touchant la droite donnée ; le point de contact sera le pôle de la droite relatif à cette conique ; donc .....

2° L'enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport aux diverses courbes homofocales est une parabole.

Soit l'équation tangentielle d'un point fixe

$$(14)\qquad Au+Bv-1=0,$$

A et B sont les coordonnées de ce point. Si u_0, v_0, sont les coordonnées de sa polaire par rapport à la courbe

$$a^2u^2+b^2v^2-1=\lambda(u^2+v^2)),$$

le pôle de cette droite sera

$$u(a^2u_0-\lambda u_0)+v(b^2v_0-\lambda v_0)-1=0.$$

Identifions cette équation avec celle du point et supprimons les indices, on a

$$a^2u-\lambda u=A,\ b^2v-\lambda v=B;$$

d'où l'on déduit en éliminant λ :

$$(15)\qquad c^2uv=Av-Bu.$$

« Cette équation représente une parabole, car la courbe touche la droite de l'infini ($u=0, v=0$).
« Si P est le point donné (14), le point P' représenté par l'équation $Av-Bu=0$ est à l'infini
« sur une droite perpendiculaire à OP, c'est le point de contact de la droite de l'infini, d'où
« la direction de l'axe de la parabole. Cette parabole touche en outre l'axe Ox ($u=0, w=0$)

« et l'axe Oy ($v=0$, $w=0$); l'axe Ox, au point $(c^2u-A)=0$; l'axe Oy, au point $c^2v+B=0$.

3°. Si par un point donné, on mène des tangentes, les normales correspondantes enveloppent une parabole.

Soit l'équation du point donné

$$(16)\qquad Au+Bv-1=0,$$

et u_0, v_0, les coordonnées d'une tangente passant par ce point; de sorte que

$$(1°)\qquad Au_0+Bv_0-1=0.$$

L'équation du point de contact de cette tangente sera

$$u_0(a^2u-\lambda u)+v_0(b^2v-\lambda v)-1=0;$$

on aura, de plus la condition

$$(2°)\qquad a^2u_0^2+b^2v_0^2-1=\lambda(u_0^2+v_0^2).$$

Si u_1, v_1, sont les coordonnées de la normale correspondante, cette normale doit passer par le point de contact, on a donc

$$(3°)\qquad (a^2-\lambda)u_0u_1+(b^2-\lambda)v_0v_1=1;$$

elle est, en outre, perpendiculaire à la tangente, par suite

$$(4°)\qquad u_0u_1+v_0v_1=0.$$

On obtiendra l'enveloppe cherchée, en éliminant u_0, v_0, et λ entre les équations (1°), (2°), (3°), (4°). Des relations (3°) et (4°) on déduit d'abord

$$(17)\qquad u_0u_1=\frac{1}{c^2},\ v_0v_1=-\frac{1}{c^2};$$

Relations remarquables et faciles à interpréter entre les coordonnées d'une tangente et de la normale correspondante.

Transportant alors dans la relation (1°) les valeurs de u_0 et v_0, puis supprimant l'indice (1), on trouve

$$(18)\qquad c^2uv=Av-Bu.$$

C'est l'équation d'une parabole, cette parabole est la même que celle qui a été obtenue dans la question précédente; résultat qu'il est facile de justifier ou de prévoir en ayant égard à la proposition 1°.

977. Étant données deux coniques homofocales, si par deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, ces quatre droites touchent un même cercle.

Pour démontrer ce théorème, nous résoudrons la question suivante:

Étant donnée une conique; si un cercle la coupe en deux points fixes, le lieu du point d'intersection des tangentes communes au cercle et à la conique est une conique homofocale à la proposée.

Supposons que la conique donnée soit l'ellipse,

$$(1°)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

L'équation des deux tangentes menées à cette courbe par un point (α,β), est

$$(2°)\qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

L'équation générale d'une courbe du second degré tangente à ces deux droites sera

$$(3)\qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2+\left(\frac{\lambda}{a^2}x+\frac{\mu}{b^2}y+\nu\right)^2=0;$$

λ, μ, ν, étant des constantes arbitraires.

Exprimons d'abord que cette courbe est un cercle, c.à.d. égalons à zéro le coefficient de xy, et égalons entre eux les coefficients de x^2 et y^2. On a ainsi

$$(4^\circ)\quad \begin{cases} \lambda\mu = \alpha\beta, \\ \dfrac{\lambda^2}{a^4} + \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{\beta^2}{b^2} - 1\right) = \dfrac{\mu^2}{b^4} + \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2} - 1\right). \end{cases}$$

Il faut exprimer, en second lieu, qu'une des cordes communes au cercle et à l'ellipse reste fixe. Or, si dans l'équation (3°), on fait

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

il vient

$$(5^\circ)\quad \left(\frac{\lambda}{a^2}x + \frac{\mu}{b^2}y + \nu\right)^2 - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0;$$

équation qui représente deux droites passant par les points d'intersection du cercle et de l'ellipse. Prenons par exemple la droite

$$(6^\circ)\quad \frac{x}{a^2}(\lambda - \alpha) + \frac{y}{b^2}(\mu - \beta) + \nu + 1 = 0.$$

Écrivons que le coefficient angulaire est égal à m, et l'ordonnée à l'origine égale à n; on a

$$(7^\circ)\quad \frac{b^2(\lambda - \alpha)}{a^2(\mu - \beta)} = -m,\quad (8^\circ)\ -\frac{b^2(\nu + 1)}{\mu - \beta} = n.$$

Les coordonnées d'un point quelconque du lieu sont α et β; on aura donc l'équation du lieu en éliminant λ, μ, ν, entre les équations (4°), (7°) et (8°).

Remarquons que l'équation (8°) est la seule qui contienne ν; il suffira donc d'éliminer λ et μ entre les équations (4°) et (7°).

« De cette remarque il résulte que l'équation de la courbe est indépendante de la quantité n et ne dépend que du « coefficient angulaire m; donc le lieu reste le même lorsque les deux points fixes communs à l'ellipse et au « cercle se trouvent sur une droite de direction constante, et, par suite, lorsque le cercle est tangent à l'ellipse »

La première des équations (4°) et l'équation (7°) nous donnent:

$$(9^\circ)\quad \begin{matrix} \lambda' = \alpha \\ \mu' = \beta \end{matrix} \quad \begin{cases} \lambda'' = \beta\dfrac{a^2 m}{b^2}, \\ \mu'' = \alpha\dfrac{b^2}{a^2 m}. \end{cases}$$

En remplaçant λ et μ par ces valeurs dans la seconde des équations (4°), on aura l'équation du lieu. La première solution ($\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$) nous donne l'ellipse elle-même; cela tient à ce que, pour ces valeurs, la corde de contact de la courbe (3°) avec les tangentes est précisément la corde des contacts de ces tangentes avec l'ellipse; mais alors la courbe (3°) ne peut être un cercle à moins de se réduire à un point, et les tangentes viennent se confondre avec celles qu'on peut mener de ce point à l'ellipse; on a donc un point de l'ellipse.

La seconde solution $\left(\lambda = \beta\dfrac{a^2 m}{b^2},\ \mu = \alpha\dfrac{b^2}{a^2 m}\right)$, donne

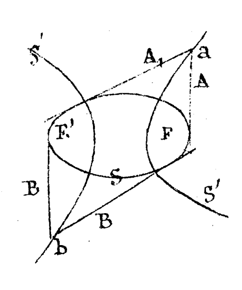
$$\frac{\beta^2 m^2}{b^4} + \frac{\beta^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a^4 m^2} + \frac{\alpha^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{b^2};$$

ou, en remplaçant α et β par x et y:

$$(10^\circ)\quad \frac{x^2}{\dfrac{a^2 c^2 m^2}{a^2 m^2 + b^2}} - \frac{y^2}{\dfrac{b^2 c^2}{a^2 m^2 + b^2}} - 1 = 0.$$

Le lieu est donc une hyperbole homofocale de l'ellipse proposée, car

$$\frac{a^2 c^2 m^2 + b^2 c^2}{a^2 m^2 + b^2} = c^2.$$



Nous conclurons de là la démonstration de la proposition énoncée.

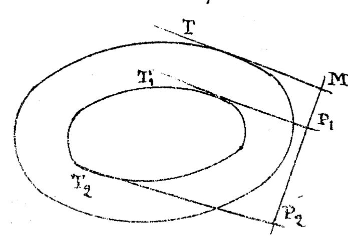
Soit une conique S, et imaginons que, par deux points a et b d'une conique homofocale S', on ait mené les tangentes A, A_1; B, B_1. Construisons le cercle tangent aux trois droites A_1, A, B; ce cercle coupera la conique S, soit pq une des cordes d'intersection. D'après le théorème précédent, si l'on mène les tangentes communes à S et à tous les cercles qui passent par les points p et q, le point de concours de ces tangentes décrira une conique homofocale S''. Or cette conique est précisément S'; en effet, la conique S'' doit avoir pour foyers, les foyers F et F' de la conique S ou S', et passer par le point a intersection des tangentes communes A et A_1, ce qui fait cinq conditions communes aux coniques S'' et S'; donc....

Mais la droite B est tangente commune au cercle décrit et à la conique S; il en résulte que, si par le point b où cette droite vient couper S', on mène une deuxième tangente à S, cette droite touchera le cercle décrit. Donc le cercle tangent aux trois droites A, A_1, B, touchera la droite B_1.

On voit, d'après cette démonstration, que les deux coniques homofocales S et S' sont de genres différents, c.à.d. que l'une est une ellipse et l'autre une hyperbole.

978. **Lorsque deux coniques sont homofocales, si on leur mène des tangentes parallèles, le produit des distances d'une tangente de la 1ère aux deux tangentes de la seconde est constant.**

Soient les équations de deux coniques homofocales



$$(1°)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0,$$

$$(2°)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

l'équation d'une tangente T à la première étant

$$T\qquad y=mx+\sqrt{(a^2+\lambda)m^2+b^2+\lambda};$$

les équations des deux tangentes parallèles à la seconde seront

$$T_1\qquad y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2},$$
$$T_2\qquad y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Le produit des distances MP_1, MP_2 d'un point M aux droites T_1 et T_2 est

$$MP_1\cdot MP_2=\frac{(y-mx)^2-(a^2m^2+b^2)}{1+m^2};$$

si le point (x, y) appartient à la tangente T, cette expression devient

$$(3°)\qquad MP_1\cdot MP_2=\frac{(a^2+\lambda)m^2+(b^2+\lambda)-(a^2m^2+b^2)}{1+m^2}=\lambda;$$

quantité indépendante de m; donc....

979. **Lorsque deux coniques homofocales se coupent, le centre de courbure de l'une est le pôle par rapport à l'autre de la tangente à la première au point d'intersection.**

Soient l'ellipse et l'hyperbole homofocales

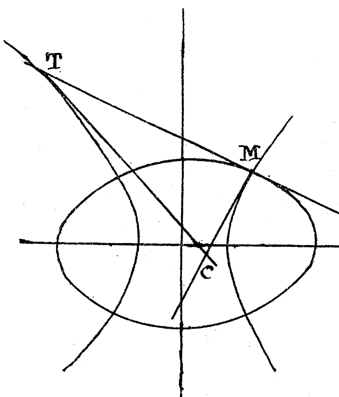
$$\text{Ellipse:}\qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}-1=0,$$

$$\text{Hyperbole:}\qquad \frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}-1=0,$$

se coupant au point $M(x_0, y_0)$. Si l'on pose

$$(1°)\qquad x_0=a_1\cos\varphi,\quad y_0=b_1\sin\varphi,$$

les coordonnées du centre de courbure de l'ellipse en ce point seront No. [836]:



(C) $x' = \dfrac{c^2}{a_1} \cos^3\varphi, \; y' = -\dfrac{c^2}{b_1} \sin^3\varphi.$

Or si l'on a égard aux valeurs (4 ter) du N° [972], on a

(2°) $\cos\varphi = \dfrac{a_2}{c}, \qquad \sin\varphi = \dfrac{b_2}{c};$

les coordonnées du centre de courbure (C) seront en définitive

(3°) $x' = \dfrac{a_2^3}{a_1 c}, \; y' = -\dfrac{b_2^3}{b_1 c}.$

D'un autre côté, l'équation de la tangente en M, à l'ellipse, est

$$\frac{x x_0}{a_1^2} + \frac{y y_0}{b_1^2} - 1 = 0,$$

ou, d'après les valeurs (1°) et (2°):

(4°) $$\frac{a_2 x}{a_1 c} + \frac{b_2 y}{b_1 c} - 1 = 0.$$

Le pôle (x_1, y_1) de la droite (4°) par rapport à l'hyperbole s'obtiendra en identifiant cette équation avec la suivante

$$\frac{x_1 x}{a_2^2} - \frac{y_1 y}{b_2^2} - 1 = 0,$$

polaire du point (x_1, y_1) par rapport à l'hyperbole; on en conclut

$$x_1 = \frac{a_2^3}{a_1 c}, \; y_1 = -\frac{b_2^3}{b_1 c};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

980. Une hyperbole équilatère, homofocale à une ellipse, intercepte, sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse, des cordes égales.

Si l'équation de l'ellipse est

(1°) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle d'une hyperbole homofocale sera

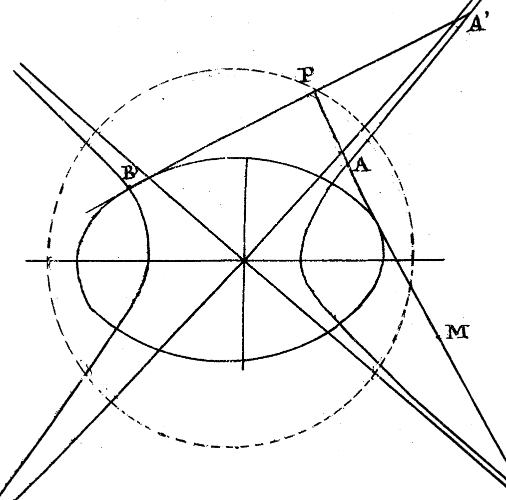
$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0, \text{ où } \lambda > b^2;$$

cette hyperbole sera équilatère si

$$a^2 - \lambda = \lambda - b^2, \text{ ou } \lambda = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

de sorte qu'on a pour l'équation de l'hyperbole équilatère

(2°) $$x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}, \text{ où } c^2 = a^2 - b^2.$$



L'équation d'une tangente à l'ellipse peut s'écrire

(3°) $x \cos\alpha + y \sin\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}$,

cette droite fait, avec l'axe Ox, l'angle $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Par suite, si x_0 et y_0 sont les coordonnées d'un point A situé sur la tangente (3°) et sur l'hyperbole (2°), les coordonnées x, y, d'un point quelconque M de cette tangente pourront s'écrire

(4°) $$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = x_0 - \rho \sin\alpha, \\ y = y_0 + \rho \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = x_0 + \rho \cos\alpha; \end{cases}$$

ρ représente la distance AM; on a les équations de condition :

$$(5°)\qquad x_0^2 - y_0^2 = \frac{c^2}{2},\quad x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}.$$

Si nous exprimons que le point x, y est sur l'hyperbole (2), la valeur correspondante de ρ représentera alors la longueur AB ou l de la corde inscrite dans cette hyperbole. Substituant les valeurs (4°) dans l'équation (2°) et ayant égard aux relations (5°), on trouve immédiatement :

$$(6°)\qquad x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha = -\frac{\rho}{2}\cos 2\alpha.$$

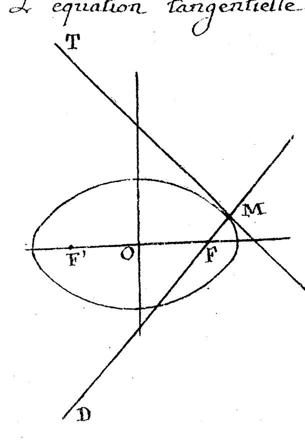
Éliminant x_0 et y_0 entre les équations (5°) et (6°), on trouve définitivement :

$$(7°)\qquad \rho^2 = \frac{2\,(a^2+b^2)}{\cos^2 2\alpha}.$$

Il est évident que cette valeur ne change pas lorsqu'on remplace α par $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, c.à.d. lorsqu'on considère une tangente perpendiculaire à la première tangente.

981. On a une série de coniques homofocales; par un foyer, F, on mène une droite fixe; les tangentes aux points de rencontre de cette droite avec les coniques enveloppent une parabole; cette parabole a pour foyer le second foyer F', et, pour directrice, la droite fixe; la portion de chaque tangente, comprise entre la conique correspondante et la parabole, est vue du foyer F sous un angle droit.

L'équation tangentielle des coniques homofocales est



$$(1°)\qquad a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda\,(u^2+v^2);$$

si u_0, v_0, sont les coordonnées d'une droite fixe, les tangentes aux points où cette droite rencontre la courbe (1°) passent par le pôle de la droite. N° (421). Or l'équation du pôle de la droite (u_0, v_0) est

$$(2°)\qquad a^2u_0u + b^2v_0v - 1 = \lambda\,(uu_0 + vv_0);$$

les équations (1°) et (2°) déterminent la tangente au point où la conique est rencontrée par la droite; on obtiendra l'enveloppe en éliminant λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(3°)\qquad (a^2u^2 + b^2v^2 - 1)(uu_0 + vv_0) = (u^2+v^2)(a^2u_0u + b^2v_0v - 1);$$

« L'enveloppe est donc une courbe de 3ème classe, si la droite a une position quelconque dans le plan. Cette courbe « a pour foyers les points F, F', c.à.d. les foyers communs aux coniques homofocales, car elle touche les droites menées « par les points du cercle à l'infini $u^2+v^2=0$, tangentiellement à la conique :

$$(4°)\qquad a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0.$$

Cette courbe possède également des foyers à l'infini; d'abord le foyer

$$(5°)\qquad uu_0 + vv_0 = 0,$$

sur une direction perpendiculaire à la droite considérée, et de plus les points circulaires. Cette courbe touche encore les droites tangentes à la conique (4°) aux points où la droite (u_0, v_0) rencontre la conique, c.à.d. les droites passant par le pôle

$$(6°)\qquad a^2u_0u + b^2v_0v - 1 = 0,$$

de la droite (u_0, v_0); elle touche la droite menée par ce dernier point perpendiculairement à la sécante (u_0, v_0).

Supposons maintenant que la sécante passe par le foyer F, c.à.d. que

$$(7°)\qquad u_0 = \frac{1}{c},$$

l'équation (3°) devient après avoir supprimé la solution $cu - 1 = 0$:

$$(8°)\qquad v_0v\,(cu+1) - v^2 + \frac{u}{c} = 0;$$

équation qui peut s'écrire

$$(8^\circ\text{bis})\qquad (cu+1)\left(v_0v+\frac{1}{c}u\right)=u^2+v^2.$$

Sous cette dernière forme, on voit d'abord que la courbe est une conique touchant la droite de l'infini, c'est donc une parabole; on constate ensuite, que les tangentes, menées par les points circulaires à l'infini, passent par les points

$$cu+1=0,\quad cv_0v+u=0;$$

ces deux points sont les foyers de la courbe; l'un est le foyer F; et l'autre est un point à l'infini sur une droite perpendiculaire à la sécante FD; donc l'axe de la parabole est perpendiculaire à la sécante.

Enfin cherchons la polaire du point F' par rapport à la courbe (8° bis); si u_1, v_1, sont les coordonnées de cette polaire, on aura, pour les déterminer, les relations

$$cv_0u_1-2v_1+v_0=0,\quad \frac{cv_0v_1+\frac{1}{c}}{c}=\frac{v_0v_1+\frac{u_1}{c}}{1};$$

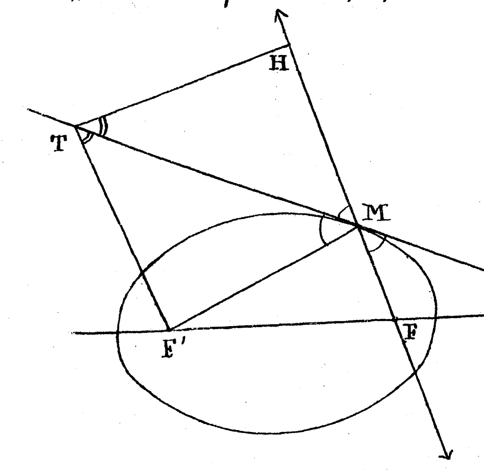
d'où l'on déduit

$$u_1=\frac{1}{c},\quad v_1=v_0,$$

c. à. d. la droite FD.

Quant à la dernière partie de la proposition elle résulte de cette propriété de la directrice: que la polaire d'un point de la directrice passe par le foyer et est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer au point considéré.

Remarque. La proposition énoncée peut encore se conclure comme il suit de la propriété relative aux tangentes.



Soit MT la tangente au point M où la sécante fixe, passant par le foyer F, rencontre une des coniques; menons F'T perpendiculaire en F' à la droite F'M; et, du point T, abaissons TH perpendiculaire sur la sécante FM. Les triangles rectangles MF'T et MTH sont égaux; car MT est commun, et d'ailleurs, $\widehat{TMF'}=\widehat{FMT_1}=\widehat{TMH}$; donc F'T = TH.

Par suite, le lieu des points T, obtenus par la construction indiquée, est une parabole ayant F' pour foyer, et FH pour directrice. Mais la droite TM est tangente à cette parabole, puisque, d'après l'égalité des triangles MF'T et MHT, on a $\widehat{MTF'}=\widehat{MTH}$; donc cette parabole est l'enveloppe de la droite MT.

§ VI. Caractéristiques des Coniques.

982. Nous terminerons cette étude des coniques en disant quelques mots de la méthode de M. Chasles pour déterminer le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions.

(Comptes rendus de l'Académie des sciences, 1er Février 1864).

La méthode donnée par M. Chasles exige la connaissance préalable des *systèmes élémentaires*; comme notre intention est de ne pas sortir des voies habituelles de la Géométrie Analytique, c'est à l'aide du calcul que nous ferons l'étude de ces systèmes élémentaires.

I. Définitions. Formules.

Étant donnée une série de coniques satisfaisant à quatre conditions ou faisceau de coniques, le nombre μ de ces coniques passant par un point donné, le nombre ν de ces coniques touchant une droite donnée, ont été appelés par M. Chasles les *Caractéristiques* de cette série de coniques;

on dira alors que ce sont des coniques du système (μ, ν).

983. Si p est le nombre des coniques de 2ème classe réduites à deux points (ou coniques infiniment aplaties, ou coniques ayant une tangente double, ou coniques formées de deux droites coïncidentes) qui satisfont aux quatre conditions du système; si q est le nombre des courbes de 2ème ordre réduites à deux droites (ou coniques évanouissantes, ou coniques ayant un point double, ou coniques formées de deux points coïncidents) qui satisfont aux quatre conditions du système;
on a, entre les nombres p, q, et les caractéristiques μ, ν, du système, les relations

$$\text{(I)} \quad 2\mu - \nu = p, \quad \text{(II)} \quad 2\nu - \mu = q.$$

1° Supposons, en effet, que μ soit le nombre des coniques du système passant par un point donné arbitrairement, l'équation générale de ces coniques

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

aura pour coefficients des fonctions d'un paramètre K arbitraire; ces fonctions seront entières et du degré μ par rapport à ce paramètre, puisque, lorsqu'on remplace x et y par les coordonnées du point choisi, l'équation (1) doit donner μ coniques passant par ce point. Plus généralement, les coefficients de l'équation (1) pourront être des fonctions entières de n paramètres $K_1, K_2, \ldots, K_n$, liés entre eux par $(n-1)$ relations; ces relations devront être telles que, jointes à l'équation (1) où x et y représenteront les coordonnées d'un point arbitrairement choisi, le système des n équations ainsi obtenues admette μ solutions, et μ solutions seulement, pour le système des n indéterminées $K_1, K_2, \ldots K_n$.

Ceci posé, la condition pour que la conique (1) soit tangente à une droite arbitrairement donnée

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0,$$

est N° (377):

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette relation est du second degré par rapport aux coefficients $A, B, C, \ldots$; elle donnera, par suite, 2μ valeurs pour le paramètre K; ou bien, dans le cas général, cette relation, jointe aux $(n-1)$ relations indiquées ci-dessus, formera un système de n équations qui admettra 2μ solutions.

Donc, le nombre des coniques, tant proprement dites qu'exceptionnelles, tangentes à une droite donnée est égal à 2μ.

Mais, si, parmi ces coniques, il y en a une se composant de deux droites coïncidentes, la droite donnée, quelle que soit sa position, rencontrera cette conique exceptionnelle en deux points coïncidents, car la condition analytique du contact sera vérifiée; cette solution fera donc partie de celles qui sont fournies par la relation (3).

Donc, si ν est le nombre des coniques proprement dites tangentes à la droite considérée, si p est le nombre des coniques composées de deux droites coïncidentes et satisfaisant aux quatre conditions imposées au faisceau, on aura

$$\nu = 2\mu - p;$$

c'est la première des relations qu'il s'agissait de démontrer. Le nombre p dépend des quatre conditions imposées au système et peut avoir, pour une même valeur de μ, des valeurs fort différentes.

2° Supposons maintenant que ν soit le nombre des coniques du système tangentes à une droite choisie arbitrairement; cherchons le nombre des coniques passant par un point donné quelconque.

Regardons l'équation (1) comme l'équation tangentielle de ces coniques; les coefficients de cette équation dépendront d'un paramètre arbitraire K et seront des fonctions entières et de degré ν par rapport à ce paramètre; car, lorsqu'on remplace dans l'équation (1) x et y par les coordonnées d'une tangente choisie arbitrairement, l'équation ainsi obtenue doit donner ν valeurs, et ν seulement, pour le paramètre K.

Plus généralement, il peut arriver que cette équation dépende de n paramètres arbitraires, liés entre eux par $(n-1)$ relations ; et les n équations obtenues, lorsqu'on regardera x et y comme connues, devront admettre ν solutions et seulement ν. Ceci posé, la relation (3) est la condition pour que le point (2) soit sur la courbe ; l'équation (3) étant alors du degré 2ν, il y a 2ν courbes du faisceau, tant proprement dites qu'exceptionnelles, passant par le point donné.

L'équation (3) exprime, dans le cas actuel, que par le point considéré on peut mener à la courbe deux tangentes coïncidentes ; or, si la courbe est une conique proprement dite, on ne peut mener d'un point deux tangentes coïncidentes que si le point est sur la courbe. Mais si, parmi les coniques du faisceau, il y en a qui se composent de deux droites concourantes, les deux droites, menées d'un point quelconque du plan au point de concours des droites qui constituent la conique, forment deux tangentes coïncidentes ; la condition analytique (3) est encore vérifiée.

Donc, si μ est le nombre des coniques proprement dites passant par le point donné, si q est le nombre des coniques composées de deux droites concourantes et satisfaisant aux quatre conditions imposées au faisceau, on aura

$$\mu = 2\nu - q\,;$$

c'est la seconde relation qu'il fallait démontrer.

Remarque. On voit, par les relations (I) et (II), que la connaissance des nombres p et q des coniques singulières qui satisfont aux quatre conditions imposées au faisceau conduira à la détermination des caractéristiques μ et ν du système ; mais la recherche des nombres p et q est une question fort délicate et souvent difficile, parce qu'une même conique singulière peut être et est fréquemment une solution multiple, et il n'est pas toujours facile de préciser, à priori, le degré de multiplicité.

II°. Caractéristiques des systèmes élémentaires.

984. Si l'on désigne par Z, Z', Z'', Z''' les quatre conditions auxquelles sont assujetties les coniques d'un faisceau, M. Chasles indique que μ et ν sont les caractéristiques de ce système en écrivant

$$(Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\mu, \nu)\,;$$

cette égalité symbolique indique que :

« Parmi toutes les coniques, en nombre infini, qui satisfont aux quatre conditions Z, Z', Z'', Z''', il y en a μ passant « par un point arbitrairement donné ; il y en a ν touchant une droite arbitrairement choisie. »

M. Chasles appelle systèmes élémentaires relatifs à des conditions simples, les systèmes de coniques : passant par quatre points ; ou, passant par trois points et touchant une droite ; ou, passant par deux points et touchant deux droites ; ou, passant par un point et touchant trois droites ; ou, touchant quatre points. Ces systèmes seront représentés par la notation

$$\text{(I°)} \qquad (4p),\ (3p, 1d),\ (2p, 2d),\ (1p, 3d),\ (4d).$$

Les systèmes élémentaires relatifs à des conditions doubles sont les systèmes de coniques : passant par deux points et touchant une droite en un point donné ; ou, passant par un point, touchant une droite et touchant une autre droite en un point donné ; ou, touchant deux droites et touchant une autre droite en un point donné ; ou, touchant deux droites en des points donnés. Désignant par $\overline{dp}$ la condition double de toucher une droite en un point, ces systèmes seront représentés par la notation suivante

$$\text{(II°)} \qquad (2p, \overline{dp}),\ (1p, 1d, \overline{dp}),\ (2d, \overline{dp}),\ (\overline{dp}, \overline{dp}).$$

La détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires est le point de départ de la belle méthode de M. Chasles ; nous allons faire d'abord cette recherche.

985. Rappelons encore une fois que, si

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

la relation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & o \end{vmatrix} = o,$$

exprime que la conique (1) touche la droite

$$(3) \qquad mx + ny + p = o,$$

si (1) est l'équation en coordonnées-point de la conique ; elle exprime que la conique passe par le point (3), si (1) est son équation tangentielle.

1° L'équation générale des coniques passant par quatre points est

$$(4) \qquad S + K S_1 = o,$$

K étant un paramètre arbitraire. Si l'on exprime que cette conique passe par un point arbitrairement choisi, on trouve une seule valeur pour K, donc $\mu = 1$; si l'on exprime qu'elle touche une droite, la relation (2) sera du second degré par rapport à K, donc $\nu = 2$.

2° L'équation (4) est aussi l'équation générale tangentielle des coniques touchant quatre droites données, K étant un paramètre arbitraire. Si l'on exprime que cette conique touche une droite, on a une seule valeur pour K, donc $\nu = 1$; si l'on exprime qu'elle passe par un point, la relation (2) est du second degré par rapport à K, donc $\mu = 2$.

3° L'équation générale des coniques passant par trois points fixes que nous prendrons pour les sommets du triangle de référence est

$$(5) \qquad K_1 YZ + K_2 XZ + K_3 XY = o ;$$

et si ces coniques doivent toucher une droite fixe

$$aX + bY + cZ = o,$$

on aura, d'après la relation (2) également applicable au cas des coordonnées trilatères, la condition

$$(6) \qquad a^2K_1^2 + b^2K_2^2 + c^2K_3^2 - 2abK_1K_2 - 2acK_1K_3 - 2bcK_2K_3 = o ;$$

de sorte, qu'en tenant compte de la relation (6), l'équation (5) sera l'équation générale des coniques passant par trois points donnés et touchant une droite donnée.

Si l'on exprime que la conique (5) passe par un point choisi, on aura entre K_1, K_2, K_3, deux relations homogènes, l'une du 1er degré, l'autre du second degré ; donc $\mu = 2$.

Si l'on exprime que la conique (5) touche une droite arbitraire

$$mX + nY + pZ = o,$$

on aura la condition

$$(7) \qquad m^2K_1^2 + n^2K_2^2 + p^2K_3^2 - 2mnK_1K_2 - 2mpK_1K_3 - 2npK_2K_3 = o ;$$

on a ainsi deux relations homogènes et du second degré par rapport à K_1, K_2, K_3 ; donc $\nu = 4$.

4° L'équation (5) est, eu égard à la relation (6), l'équation générale tangentielle des coniques touchant trois droites données prises pour coté du triangle de référence, et passant par un point donné.

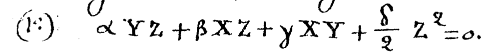
On aura donc $\nu = 2$, $\mu = 4$.

5° Soit un faisceau de coniques passant par deux points et touchant deux droites. La détermination des caractéristiques de ce système résulte des propositions précédentes. En effet, le nombre μ des coniques, passant par deux points, touchant deux droites et passant par un point arbitrairement choisi, est égal au nombre des coniques passant par trois points et touchant deux droites ; donc, d'après la seconde partie du (3°), $\mu = 4$. De même, le nombre ν des coniques, passant par deux points, touchant deux droites et touchant une droite arbitrairement choisie, est égal au nombre des coniques touchant trois droites et passant par deux points ; donc, d'après le (4°), $\nu = 4$.

Nous allons étudier autrement cette question, en cherchant directement les nombres p et q relatifs au faisceau

de coniques considéré.

Prenons pour triangle de référence le triangle ayant pour sommets les deux points donnés A et B, et le point de concours C des deux tangentes ; l'équation générale des coniques passant par A et B sera



$$(1°)\quad \alpha YZ+\beta XZ+\gamma XY+\frac{\delta}{2}Z^2=0.$$

Soient les équations des deux droites données CP et CQ :

$$Y-aX=0,\quad Y-bX=0;$$

écrivons que la conique est tangente à chacune de ces droites, on a les deux équations de condition

$$(2°)\quad (a\alpha+\beta)^2-2a\gamma\delta=0,$$
$$(3°)\quad (b\alpha+\beta)^2-2b\gamma\delta=0.$$

Cherchons maintenant le nombre $\mathfrak{q}$ des coniques évanouissantes ou se réduisant à deux droites qui satisfont aux quatre conditions imposées ; pour cela exprimons que la courbe (1°) se réduit à deux droites, on a la condition

$$(4°)\quad \begin{vmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & \delta \end{vmatrix}=0,\ \text{ou}\ \gamma\left(\gamma\delta-2\alpha\beta\right)=0.$$

Supposons d'abord $\gamma\delta=2\alpha\beta$, les équations (2°) et (3°) se réduisent toutes deux à

$$(a\alpha-b\beta)^2=0,\quad (b\alpha-\beta)^2=0;$$

comme a et b sont des quantités différentes, on aura à la fois :

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \text{d'où}\ \delta=0,$$

puisqu'on a admis implicitement que γ n'était pas nul. Or il est visible que l'ordre de multiplicité de cette solution est quatre ; donc $\mathfrak{q}=4$.

Si l'on suppose, en second lieu, $\gamma=0$, les relations (2°) et (3°) donnent quatre fois la solution $\alpha=0$, $\beta=0$; l'équation (1°) représente alors deux droites confondues ou une conique infiniment aplatie ; donc $\mathfrak{p}=4$.

6° Soit un faisceau de coniques tangentes à deux droites en des points donnés ; l'équation générale de ces coniques est

$$(1°)\quad KYZ=X^2;$$

K étant une constante arbitraire.

Si l'on exprime que ces coniques passent par un point donné, on trouve une seule valeur pour K, donc $\mu=1$.

Si l'on exprime que ces coniques touchent une droite telle que

$$X=mY+nZ,$$

on a l'équation de condition

$$K^2-4mnK=0.$$

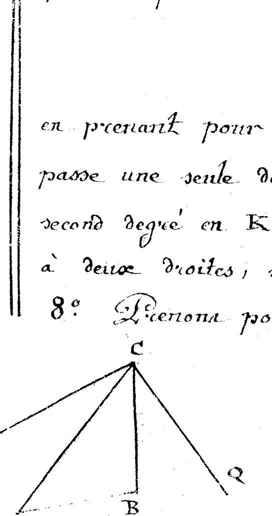
La valeur $K=0$ donne une conique infiniment aplatie ; il reste alors une seule solution ; donc $\nu=1$.

7° L'équation des coniques touchant une droite en un point donné et passant par deux points donnés, sera

$$(1°)\quad (y-mx)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+Kxy=0,$$

en prenant pour axes les droites qui joignent le point de contact aux deux points fixes. Or, par un point, passe une seule de ces coniques ; donc $\mu=1$. L'équation de condition, pour qu'elles touchent une droite, sera du second degré en K ; donc $\nu=2$. A priori, on sait d'ailleurs qu'il y a trois coniques évanouissantes, ou réduites à deux droites, satisfaisant à ces quatre conditions ; c. à. d. que $\mathfrak{q}=3$.

8° Prenons pour triangle de référence les trois tangentes, l'équation tangentielle des coniques touchant ces trois droites sera



$$\alpha VW+\beta UW+\gamma UV=0;$$

le point de contact avec BC est

$$\beta W+\gamma V=0;$$

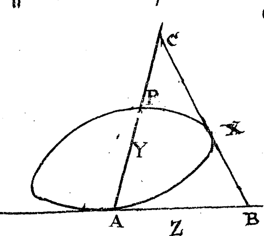
exprimons que ce point est fixe, on aura $\frac{\gamma}{\beta} = a$; l'équation générale des coniques du faisceau sera donc

$$(1°) \qquad \alpha VW + \beta U (aV + W) = 0.$$

Si l'on exprime que cette conique touche une droite, on a une équation du 1er degré en $\frac{\alpha}{\beta}$; donc $\nu = 1$; si l'on exprime qu'elle passe par un point, on a une équation du second degré; donc $\mu = 2$.

9° Étudions enfin le faisceau des coniques touchant une droite en un point donné, touchant une autre droite et passant par un point.

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les deux tangentes et la droite qui joint les deux points;



les coniques doivent toucher la droite BA en A, la droite BC en un point indéterminé, et passer par le point P situé sur AC. L'équation générale des coniques satisfaisant à ces quatre conditions est

$$(1°) \qquad \alpha Y^2 + \beta YZ + \gamma Z(X - aZ) = 0,$$

$$(2°) \qquad \beta^2 + 4a\alpha\gamma = 0;$$

α, β, γ, sont des constantes arbitraires liées entre elles par la relation (2°); les coordonnées du point P sont $(Y = 0,\ X - aZ = 0)$.

Si l'on exprime que ces coniques passent par un point, on a deux relations homogènes entre α, β, γ, l'une du 1er degré, l'autre du second; donc $\mu = 2$.

D'un autre côté, si l'on cherche le nombre des coniques réduites à deux droites, on a la relation

$$(3°) \qquad \alpha\gamma^2 = 0.$$

Les relations (2°) et (3°) fournissent d'abord la double solution $\alpha = 0$, $\beta^2 = 0$; donc $q = 2$, car les autres solutions correspondent à des coniques infiniment aplaties.

D'après la formule $2\nu - \mu = q$, il résulte $\nu = 2$.

986. Ainsi en **Résumé**:

Nous aurons pour les caractéristiques:

des systèmes élémentaires relatifs à des conditions simples:

$$(I°)\left\{\begin{array}{lll} (1) & (4p \qquad) \equiv (1,2), & (p = 0,\ q = 3) \\ (2) & (3p,\ 1d) \equiv (2,4), & (p = 0,\ q = 6) \\ (3) & (2p,\ 2d) \equiv (4,4), & (p = 4,\ q = 4) \\ (4) & (1p,\ 3d) \equiv (4,2); & (p = 6,\ q = 0) \\ (5) & (\qquad 4d) \equiv (2,1): & (p = 3,\ q = 0) \end{array}\right.$$

des systèmes élémentaires relatifs à des conditions doubles:

$$(II°)\left\{\begin{array}{ll} (2p,\ \overline{dp}) \equiv (1,2), & (p = 0,\ q = 3) \\ (1p,\ 1d,\ \overline{dp}) \equiv (2,2), & (p = 2,\ q = 2) \\ (2d,\ \overline{dp}) \equiv (2,1); & (p = 3,\ q = 0) \\ (\overline{dp},\ \overline{dp}) \equiv (1,1). & (p = 1,\ q = 1). \end{array}\right.$$

Rappelons encore les formules établies au N° [983]:

$$(I) \qquad 2\mu - \nu = p, \quad 2\nu - \mu = q.$$

III°. Détermination du nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions.

987. Désignons par Z, Z', Z'', Z''', Z^{iv}, les cinq conditions auxquelles doivent satisfaire les coniques cherchées.

On cherche d'abord les caractéristiques du système des coniques satisfaisant à quatre de ces conditions.

Voici la méthode donnée par M. Chasles. L'application de cette méthode suppose connues certaines propriétés des systèmes (μ, ν) relatives à la condition envisagée, propriétés d'où l'on conclut le nombre

des coniques du système (μ, ν) satisfaisant à cette condition; or M. Chasles a constaté que ce nombre est toujours une expression de la forme

$$\alpha\mu + \beta.\nu,$$

α et β étant des constantes indépendantes des caractéristiques μ et ν; une de ces constantes peut être nulle.

1° Déterminer les caractéristiques du système de coniques qui satisfont à quatre conditions Z, Z', Z'', Z'''.

Pour cela, on calculera d'abord les caractéristiques des systèmes:

$$\text{(a)} \qquad (3p, Z), (2p, 1d, Z), (1p, 2d, Z), (3d, Z),$$

c.à.d. qu'on introduit la condition Z dans les systèmes élémentaires.

On calcule, en second lieu, les caractéristiques des systèmes

$$\text{(b)} \qquad (2p, Z, Z'), (1p, 1d, Z, Z'), (2d, Z, Z'),$$

c.à.d. qu'on introduit la condition Z' dans les systèmes (a).

On calcule, en troisième lieu, les caractéristiques des systèmes

$$\text{(c)} \qquad (1p, Z, Z', Z''), (1d, Z, Z', Z''),$$

c.à.d. qu'on introduit la condition Z'' dans les systèmes (b).

Puis, le système (c) conduit aux caractéristiques du système final

$$\text{(d)} \qquad (Z, Z', Z'', Z''').$$

Et enfin, les caractéristiques de ce dernier système serviront à déterminer le nombre des coniques satisfaisant à la cinquième condition

$$\text{(e)} \qquad \mathcal{N}(Z, Z', Z'', Z''', Z^{\text{IV}}).$$

1° Caractéristiques du système (a).

Soit N le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition Z; N est de la forme

$$(1°) \qquad N = \alpha\mu + \beta\nu.$$

Pour les coniques qui passent par quatre points, on a $\mu = 1$, $\nu = 2$; donc $(\alpha + 2\beta)$ est le nombre des coniques passant par quatre points et satisfaisant à la condition Z; et, par suite, réciproquement: le nombre des coniques qui, (passant par trois points et satisfaisant à la condition Z), passent par un quatrième point arbitrairement choisi, sera $(\alpha + 2\beta)$; c.à.d. que, pour le système $(3p, Z)$, on a $\mu' = \alpha + 2\beta$.

Pour les coniques qui passent par trois points et touchent une droite, on a No. [986] $\mu = 2$, $\nu = 4$; donc $(2\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques passant par trois points, touchant une droite et satisfaisant à la condition Z; et par suite, réciproquement: $(2\alpha + 4\beta)$ sera le nombre des coniques qui, passant par trois points et satisfaisant à la condition Z), touchent une droite arbitrairement choisie; c.à.d. que, pour le système $(3p, Z)$, on a $\nu' = 2\alpha + 4\beta$.

Ainsi

$$(a_1) \qquad (3p, Z) \equiv (\mu', \nu'), \text{ où } \mu' = \alpha + 2\beta, \ \nu' = 2\alpha + 4\beta.$$

D'après ce qui précède, $(2\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques passant par trois points, touchant une droite et satisfaisant à la condition Z; par suite, $(2\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques qui, (passant par deux points, touchant une droite et satisfaisant à la condition Z), passent par un troisième point arbitrairement choisi; c.à.d. que pour le système $(2p, 1d, Z)$, on a $\mu'' = 2\alpha + 4\beta$.

Pour les coniques qui passent par deux points et touchent deux droites, on a No. [986] (3), $\mu = 4$, $\nu = 4$; donc $(4\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques passant par deux points, touchant deux droites, satisfaisant à la condition Z; et, par suite, $(4\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques qui, (passant par deux points, touchant une droite, et satisfaisant à la condition Z), touchent une droite arbitrairement choisie; c.à.d. que, pour le système $(2p, 1d, Z)$, $\nu'' = 4\alpha + 4\beta$.

Ainsi

$$(a_2) \qquad (2p, 1d, Z) \equiv (\mu'', \nu''), \text{ où } \mu'' = 2\alpha + 4\beta, \ \nu'' = 4\alpha + 4\beta.$$

D'après ce qui précède, $(4\alpha + 4\beta)$ est le nombre des coniques passant par deux points, touchant deux droites, et satisfaisant à la condition Z; donc, $(4\alpha + 4\beta)$ sera le nombre des coniques qui, (passant par un point,

touchant deux droites et satisfaisant à la condition Z), passent par un 2ème point arbitrairement choisi; c.à.d. que, pour le système (1p, 2d, Z), on aura $\mu''' = 4\alpha + 4\beta$.

Pour les coniques qui passent par un point et touchent trois droites, on a N° [986] (4), $\mu = 4$, $\nu = 2$; donc $(4\alpha+2\beta)$ est le nombre des coniques passant par un point, touchant trois droites et satisfaisant à la condition Z; et, par suite, $(4\alpha+2\beta)$ est le nombre des coniques qui, (passant par un point, touchant deux droites et satisfaisant à la condition Z), touchent une troisième droite arbitrairement choisie; c.à.d. que, pour le système (1, 2d, Z), on aura $\nu''' = 4\alpha+2\beta$. Ainsi

$$(a_3) \qquad (1p, 2d, Z) \equiv (\mu''', \nu'''), \text{ où } \mu''' = 4\alpha+4\beta,\ \nu''' = 4\alpha+2\beta.$$

D'après ce qui précède, $(4\alpha+2\beta)$ est le nombre des coniques passant par un point, touchant trois droites et satisfaisant à la condition Z; donc $(4\alpha+2\beta)$ est le nombre des coniques qui, (touchant trois droites et satisfaisant à la condition Z) passent par un point arbitrairement choisi; c.à.d. que pour le système (3d, Z), on a $\mu^{IV} = 4\alpha+2\beta$.

Pour les coniques qui touchent quatre droites, on a N° [986] (5) $\mu = 2$, $\nu = 1$; donc $(2\alpha+\beta)$ est le nombre des coniques touchant quatre droites et satisfaisant à la condition Z; par suite, $(2\alpha+\beta)$ est le nombre des coniques qui, (touchant trois droites et satisfaisant à la condition Z), touchent une droite arbitrairement choisie, c.à.d. que, pour le système (3d, Z), on $\nu^{IV} = 2\alpha+\beta$. Ainsi

$$(a_4) \qquad (3d, Z) \equiv (\mu^{IV}, \nu^{IV}), \text{ où } \mu^{IV} = 4\alpha+2\beta,\ \nu^{IV} = 2\alpha+\beta.$$

Donc en résumé, si

$$(1^\circ) \qquad N = \alpha\mu + \beta\nu,$$

est le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition Z, on aura:

$$(a) \begin{cases} (a_1) & (3p, Z) \equiv (\alpha+2\beta,\ 2\alpha+4\beta), \\ (a_2) & (2p, 1d, Z) \equiv (2\alpha+4\beta,\ 4\alpha+4\beta), \\ (a_3) & (1p, 2d, Z) \equiv (4\alpha+4\beta,\ 4\alpha+2\beta), \\ (a_4) & (3d, Z) \equiv (4\alpha+2\beta,\ 2\alpha+\beta). \end{cases}$$

2° Caractéristiques du système (b).

Soit N' le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition (Z'); N' est de la forme

$$(2^\circ) \qquad N' = \alpha'\mu + \beta'\nu.$$

Pour les coniques passant par trois points et satisfaisant à la condition Z, on a (système (a_1)) $\mu = \alpha+2\beta$, $\nu = 2\alpha+4\beta$; par suite $\{\alpha'(\alpha+2\beta) + \beta'(2\alpha+4\beta)\}$ sera le nombre des coniques passant par trois points et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore, ce sera le nombre des coniques qui, (passant par deux points et satisfaisant aux conditions Z et Z'), passent par un point arbitrairement choisi; ce sera enfin le caractéristique μ' du système (2p, Z, Z').

Pour les coniques passant par deux points, touchant une droite et satisfaisant à la condition Z, on a (système (a_2)) $\mu = 2\alpha+4\beta$, $\nu = 4\alpha+4\beta$; par suite $\{\alpha'(2\alpha+4\beta) + \beta'(4\alpha+4\beta)\}$ sera le nombre des coniques passant par deux points, touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore, ce sera le nombre des coniques qui, (passant par deux points, et satisfaisant aux conditions Z et Z'), touchent une droite arbitrairement choisie; ce sera donc la caractéristique ν' du système (2p, Z, Z'). Ainsi

$$(b_1) \qquad (2p, Z, Z') \equiv (\mu', \nu') \text{ où } \begin{cases} \mu' = \alpha\alpha' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta'; \\ \nu' = 2\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta'. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, ν' est le nombre des coniques passant par deux points, touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore ν' sera le nombre des coniques qui, (passant par un point, touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z et Z'), passent par un point arbitrairement choisi; c.à.d. que ν' est la caractéristique μ'' du système (1p, 1d, Z, Z').

Pour les coniques passant par un point, touchant deux droites et satisfaisant à la condition Z, on a (système (a_3)) $\mu = 4\alpha+4\beta$, $\nu = 4\alpha+2\beta$; par suite $\{\alpha'(4\alpha+4\beta) + \beta'(4\alpha+2\beta)\}$ sera le nombre des coniques passant par

un point, touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore, ce sera le nombre des coniques qui, (passant par un point, touchant une droite et satisfaisant aux deux conditions Z et Z'), touchent une droite arbitrairement choisie; ce nombre sera donc la caractéristique ν'' du système (1p, 1d; Z, Z'). Ainsi

$$(b_2)\qquad (1p, 1d, Z, Z') \equiv (\mu'', \nu''), \text{ où } \begin{cases} \mu'' = 2\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta', \\ \nu'' = 4\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2\beta\beta'. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, ν'' est le nombre des coniques passant par un point touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore, ν'' est le nombre des coniques qui, (touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z et Z'), passent par un point arbitrairement choisi; c.à.d. que ν'' est la caractéristique μ''' du système (2d, Z, Z').

Pour les coniques touchant trois droites et satisfaisant à la condition Z, on a (système (a_3)) $\mu = 4\alpha + 2\beta$, $\nu = 2\alpha + \beta$; par suite $\{\alpha'(4\alpha + 2\beta) + \beta'(2\alpha + \beta)\}$ est le nombre des coniques touchant trois droites et satisfaisant aux conditions Z et Z'; ou encore: ce sera le nombre des coniques qui, (touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z et Z'), touchent une droite arbitrairement choisie; c.à.d. que ce nombre sera la caractéristique ν''' du système (2d, Z, Z'). Ainsi

$$(b_3)\qquad (2d, Z, Z') \equiv (\mu''', \nu'''), \text{ où } \begin{cases} \mu''' = 4\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2\beta\beta', \\ \nu''' = 4\alpha\alpha' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + \beta\beta'. \end{cases}$$

Donc, en résumé, si

$$(2°)\qquad N' = \alpha'\mu + \beta'\nu,$$

on aura:

$$(b)\quad \begin{cases} (b_1)\ (2p, Z, Z') \equiv [\alpha\alpha' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta',\ 2\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta'] \equiv (\mu_1, \nu_1), \\ (b_2)\ (1p, 1d, Z, Z') \equiv [2\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 4\beta\beta',\ 4\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2\beta\beta'] \equiv (\mu_2, \nu_2), \\ (b_3)\ (2d, Z, Z') \equiv [4\alpha\alpha' + 4(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2\beta\beta',\ 4\alpha\alpha' + 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + \beta\beta'] \equiv (\mu_3, \nu_3). \end{cases}$$

3° Caractéristiques du système (c).

Soit N'' le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition Z''; N'' sera de la forme

$$(3°)\qquad N'' = \alpha''\mu + \beta''\nu.$$

Pour les coniques passant par deux points et satisfaisant aux conditions Z et Z', on a (système (b_1)) $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$; donc $(\alpha''\mu_1 + \beta''\nu_1)$ sera le nombre des coniques passant par deux points et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z'''; par suite, ce sera le nombre des coniques qui, (passant par un point et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''), passent par un point arbitrairement choisi; c.à.d. que $(\alpha''\mu_1 + \beta''\nu_1)$ est la caractéristique μ' du système (1p, Z, Z', Z'').

Pour les coniques passant par un point, touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z et Z', on a (système (b_2)) $\mu = \mu_2$, $\nu = \nu_2$; donc $(\alpha''\mu_2 + \beta''\nu_2)$ sera le nombre des coniques passant par un point, touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''; par suite, ce sera le nombre des coniques qui, (passant par un point et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''), touchent une droite arbitrairement choisie; c.à.d. que $(\alpha''\mu_2 + \beta''\nu_2)$ sera la caractéristique ν' du système (1p, Z, Z', Z''). Ainsi

$$(c_1)\qquad (1p, Z, Z', Z'') \equiv (\alpha''\mu_1 + \beta''\nu_1, \alpha''\mu_2 + \beta''\nu_2).$$

D'après ce qui précède, $(\alpha''\mu_2 + \beta''\nu_2)$ est aussi le nombre des coniques qui, (touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''), passent par un point arbitrairement choisi; ce nombre est donc la caractéristique μ'' du système (1d, Z, Z', Z'').

Pour les coniques touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z et Z', on a (système (b_3)) $\mu = \mu_3$, $\nu = \nu_3$; donc $(\alpha''\mu_3 + \beta''\nu_3)$ est le nombre des coniques touchant deux droites et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''; par suite, ce sera le nombre des coniques qui, (touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z''), touchent une droite arbitrairement choisie; c.à.d. que $(\alpha''\mu_3 + \beta''\nu_3)$ est la caractéristique ν'' du système (1d, Z, Z', Z'''). Ainsi

$$(c_2)\qquad (1d, Z, Z', Z'') \equiv (\alpha''\mu_2 + \beta''\nu_2, \alpha''\mu_3 + \beta''\nu_3).$$

Ainsi, en résumé, si

$$(3°)\quad N'' = \alpha''\mu + \beta''\nu,$$

on aura

$$(c)\ \begin{cases} (c_1) & (1p,\ Z, Z', Z'') \equiv (\mu_4, \nu_4), \\ (c_2) & (1d,\ Z, Z', Z'') \equiv (\mu_5, \nu_5), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \mu_4 = \alpha\alpha'\alpha'' + 2\left[\alpha'\alpha''\beta + \alpha''\alpha\beta' + \alpha\alpha'\beta''\right] + 4\left[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta\beta'' + \alpha''\beta\beta'\right] + 4\beta\beta'\beta''\,; \\ \nu_4 = \mu_5 = 2\alpha\alpha'\alpha'' + 4\left[\alpha'\alpha''\beta + \alpha''\alpha\beta' + \alpha\alpha'\beta''\right] + 4\left[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta\beta'' + \alpha''\beta\beta'\right] + 2\beta\beta'\beta''\,; \\ \nu_5 = 4\alpha\alpha'\alpha'' + 4\left[\alpha'\alpha''\beta + \alpha''\alpha\beta' + \alpha\alpha'\beta''\right] + 2\left[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta\beta'' + \alpha''\beta\beta'\right] + \beta\beta'\beta''. \end{cases}$$

4° Caractéristiques du système (d).

Soit N''' le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition Z''' ; N''' sera de la forme

$$(4°)\qquad N''' = \alpha'''\mu + \beta'''\nu.$$

Pour les coniques qui passent par un point et satisfont aux conditions Z, Z', Z'' on a $\mu = \mu_4$, $\nu = \nu_4$ (système (c_1)) ; donc $(\alpha'''\mu_4 + \beta'''\nu_4)$ sera le nombre des coniques passant par un point et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z'', Z''' ; par suite, ce sera le nombre des coniques qui, (satisfaisant aux conditions Z, Z', Z'', Z''',) passent par un point arbitrairement choisi ; c.à.d. que ce sera la caractéristique μ' du système (Z, Z', Z'', Z''').

Pour les coniques touchant une droite et satisfaisant aux conditions Z, Z', Z'', Z''', on a $\mu = \mu_5$, $\nu = \nu_5$ (système (c_2)) ; donc $(\alpha'''\mu_5 + \beta'''\nu_5)$ est le nombre des coniques qui, touchent une droite et satisfont aux conditions Z, Z', Z'', Z''' ; ce sera, par suite, la caractéristique ν' du système (Z, Z', Z'', Z'''). Ainsi

$$(d)\qquad (Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\alpha'''\mu_4 + \beta'''\nu_4,\ \alpha'''\mu_5 + \beta'''\nu_5).$$

La première partie de la question est donc résolue ; c.à.d. que nous avons déterminé les caractéristiques du système (Z, Z', Z'', Z'''), c.à.d. des coniques qui satisfont à quatre des conditions imposées.

Nous sommes entrés dans de très-longs détails pour faire bien saisir l'esprit de cette méthode que M. Chasles a nommée Méthode de substitution.

988. Résumons les résultats obtenus par ces calculs.

Si N, N', N'', N''', sont les nombres des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant respectivement aux conditions Z, Z', Z'', Z''', de sorte que

$$(1)\ \begin{cases} N = \alpha\mu + \beta\nu, \\ N' = \alpha'\mu + \beta'\nu, \\ N'' = \alpha''\mu + \beta''\nu, \\ N''' = \alpha'''\mu + \beta'''\nu, \end{cases}$$

les nombres $\alpha, \beta, \alpha', \ldots$ étant des constantes indépendantes des caractéristiques μ, ν ; les caractéristiques μ_0, ν_0, du système des coniques satisfaisant aux quatre conditions Z, Z', Z'', Z''',

$$(2)\qquad (Z, Z', Z'', Z''') \equiv (\mu_0, \nu_0),$$

sont données par les formules générales :

$$(3)\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\left[\beta\alpha'\alpha''\alpha''' + \beta'\alpha\alpha''\alpha''' + \beta''\alpha\alpha'\alpha''' + \beta'''\alpha\alpha'\alpha''\right] \\ +4\left[\alpha\alpha'\beta''\beta''' + \alpha\alpha''\beta'\beta''' + \alpha\alpha'''\beta'\beta'' + \alpha'\alpha''\beta\beta''' + \alpha'\alpha'''\beta\beta'' + \alpha''\alpha'''\beta\beta'\right] \\ +4\left[\alpha\beta'\beta''\beta''' + \alpha'\beta\beta''\beta''' + \alpha''\beta\beta'\beta''' + \alpha'''\beta\beta'\beta''\right] + 2\beta\beta'\beta''\beta''' \end{array} \right\}; \\ \nu_0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\left[\beta\alpha'\alpha''\alpha''' + \beta'\alpha\alpha''\alpha''' + \beta''\alpha\alpha'\alpha''' + \beta'''\alpha\alpha'\alpha''\right] \\ +4\left[\alpha\alpha'\beta''\beta''' + \alpha\alpha''\beta'\beta''' + \alpha\alpha'''\beta'\beta'' + \alpha'\alpha''\beta\beta''' + \alpha'\alpha'''\beta\beta'' + \alpha''\alpha'''\beta\beta'\right] \\ +2\left[\alpha\beta'\beta''\beta''' + \alpha'\beta\beta''\beta''' + \alpha'''\beta\beta'\beta''' + \alpha'''\beta\beta'\beta''\right] + \beta\beta'\beta''\beta''' \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Nous écrirons ces formules sous la forme abrégée :

$$(4)\ \begin{cases} \mu_0 = \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 2\Sigma\beta\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' + 4\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + 2\beta\beta'\beta''\beta'''\,; \\ \nu_0 = 2\alpha\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\Sigma\beta\alpha'\alpha''\alpha''' + 4\Sigma\alpha\alpha'\beta''\beta''' + 2\Sigma\alpha\beta'\beta''\beta''' + \beta\beta'\beta''\beta'''. \end{cases}$$

989. II° Nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions Z, Z', Z'', Z''', Z^{IV}.

La résolution de cette question définitive est maintenant une conséquence très-facile des déterminations qu'on vient d'effectuer.

Désignons par N^{IV} le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à la condition Z^{IV}; N^{IV} sera de la forme

$$(5) \qquad N^{IV} = \alpha^{IV}\mu + \beta^{IV}\nu.$$

Pour les coniques satisfaisant aux quatre conditions Z, Z', Z'', Z''', les caractéristiques μ et ν sont égales respectivement à μ_0 et ν_0; donc le nombre $\mathcal{N}$ des coniques satisfaisant aux cinq conditions Z, Z', Z'', Z''', Z^{IV}, sera

$$(6) \qquad \mathcal{N}(Z, Z', Z'', Z''', Z^{IV}) = \alpha^{IV}\mu_0 + \beta^{IV}\nu_0;$$

ou, en remplaçant μ_0 et ν_0 par les valeurs ci dessus:

$$(7) \qquad \mathcal{N} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{IV} + 2\Sigma\beta\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{IV} + 4\Sigma\beta\beta'\alpha''\alpha'''\alpha^{IV} \\ + 4\Sigma\beta\beta'\beta''\alpha'''\alpha^{IV} + 2\Sigma\beta\beta'\beta''\beta'''\alpha^{IV} + \beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{IV} \end{array} \right\}$$

IV° Exemples.

990. Trouver le nombre des coniques passant par un point, touchant une droite, touchant une conique, semblables à une conique donnée, ayant leur centre sur une courbe d'ordre m.

Pour appliquer la méthode que nous venons de développer, il nous faut auparavant résoudre les questions suivantes:

1° Quel est le nombre des coniques d'un système (μ, ν) touchant une conique donnée?

2° Quel est le nombre des coniques d'un système (μ, ν) semblables à une conique donnée?

3° Quel est le nombre des coniques d'un système (μ, ν) dont le centre est sur une courbe d'ordre m?

Nous savons d'ailleurs, par la définition même des caractéristiques, que, parmi les coniques d'un système (μ, ν), il y en a μ passant par un point donné, et ν touchant une droite donnée.

991. 1° Trouver le nombre des coniques d'un système (μ, ν) touchant une conique donnée

Soit

$$(1) \qquad S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation générale des coniques du système (μ, ν); les coefficients peuvent être regardés comme des fonctions entières et de degré μ d'un paramètre arbitraire K. Soit

$$(2) \qquad S_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

l'équation de la conique donnée. L'équation générale des coniques passant par les points communs à S et S_1 sera

$$(3) \qquad S + \lambda S_1 = 0.$$

Exprimons que l'équation (3) représente un système de droites, on aura une équation de la forme

$$(4) \qquad \delta\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda^2 + N\lambda + \Delta = 0.$$

Pour que les coniques S et S_1 soient tangentes, il faut que l'équation en λ ait deux racines égales; or l'équation de condition ainsi obtenue est, comme il est facile de le voir, du 6ème degré par rapport aux coefficients de S; elle sera, par suite, du degré 6μ par rapport au paramètre K.

Donc 6μ est le nombre des coniques, tant proprement dites qu'exceptionnelles, qui touchent la conique S. Mais une conique infiniment aplatie rencontre la conique S_1 en deux points qui sont les points de contact avec S_1 de cette conique infiniment aplatie; par suite, si p est le nombre des coniques infiniment aplaties appartenant au système (μ, ν), le nombre des coniques proprement dites touchant la conique S, est

$$6\mu - 2p;$$

or $p = 2\mu - \nu$, N° [983]; donc

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν) touchant une conique donnée est égal à $(2\mu + 2\nu)$.

2° Trouver le nombre des coniques d'un système (μ, ν) semblables à une conique donnée.

Nous exprimerons qu'une conique est semblable à une conique donnée en écrivant que l'angle des directions

asymptotiques est égal à celui de la conique donnée; on aura ainsi

$$(5)\qquad \frac{(A+C-2B\cos\theta)^2}{AC-B^2} = \text{constante};$$

c'est une relation du second degré par rapport aux coefficients A, B, C; et, par suite, du degré 2μ par rapport au paramètre K. D'ailleurs, les coniques infiniment aplaties ne peuvent satisfaire à la condition imposée; les coniques réduites à deux droites n'y satisfont pas non plus, puisque l'angle des deux droites est, en général, différent de l'angle des directions asymptotiques de la conique considérée. Donc

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν) semblables à une conique donnée est égal à 2μ.

3° Trouver le nombre des coniques d'un système (μ, ν) ayant leur centre sur une courbe d'ordre m.

Les coordonnées du centre de la conique S sont données par les formules

$$x = \frac{BE-CD}{AC-B^2},\quad y = \frac{BD-AE}{AC-B^2};$$

en exprimant que ces valeurs vérifient l'équation de la courbe donnée

$$(6)\qquad f(x, y) = 0,$$

on aura une équation de degré $2m$ par rapport aux coefficients A, B, C, ... et, par suite, de degré $2m\mu$ par rapport au paramètre K. Le nombre des coniques, tant proprement dites qu'exceptionnelles, est donc égal à $2m\mu$. Mais une conique infiniment aplatie rencontre la courbe f en m points, ces points sont aussi des centres pour ces coniques; par suite, si p est le nombre des coniques infiniment aplaties appartenant au système (μ, ν), le nombre des coniques proprement dites, ayant leur centre sur une courbe d'ordre m est égal à

$$2m\mu - pm;$$

mais $p = 2\mu - \nu$, N° (983), et les coniques réduites à deux droites n'ont pas, en général, leur centre sur la courbe considérée; donc

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν) ayant leur centre sur une courbe d'ordre m, est égal à $2\nu m$.

992 Il est facile maintenant de résoudre la question posée, soit en reprenant les calculs développés dans le N° (987), soit en appliquant la formule générale donnée dans les N°s (988), (989).

I° Trouver le nombre des coniques passant par un point, touchant une droite, touchant une conique donnée, semblables à une conique donnée, ayant leur centre sur une courbe d'ordre m.

On a ici, d'après les notations employées dans ce qui précède:

$$N = \mu,\ N' = \nu,\ N'' = 2\mu + 2\nu,\ N''' = 2\mu,\ N^{IV} = 2m\nu;$$

c.à.d. que

$$\begin{cases} \alpha = 1, & \beta = 0, \\ \alpha' = 0, & \beta' = 1, \\ \alpha'' = 2, & \beta'' = 2, \\ \alpha''' = 2, & \beta''' = 0, \\ \alpha^{IV} = 0, & \beta^{IV} = 2m; \end{cases}$$

la formule générale (7) N° (989) donne alors:

$$(1)\qquad \mathcal{N} = 64m;$$

c'est la réponse à la question.

II° Trouver le nombre des coniques touchant cinq coniques données.

On a

$$N = N' = N'' = N''' = N^{IV} = 2\mu + 2\nu;$$

c. à. d.

$$\alpha=\alpha'=\alpha''=\alpha'''=\alpha^{IV}=2,\ \beta=\beta'=\beta''=\beta'''=\beta^{IV}=2;$$

la formule générale (7) N.° [989] donne alors:

$$2^5+2\cdot\frac{5}{1}\cdot 2^5+4\cdot\frac{5.4}{1.2}2^5+4\cdot\frac{5.4}{1.2}2^5+2.5.2^5+2^5;$$

ou enfin

$$(II)\qquad \mathcal{N}=3264;$$

c'est la réponse à la question.

III.° **Trouver le nombre des coniques passant par deux points et touchant trois coniques données.**

On a ici

$$N=\mu,\ N'=\mu,\ N''=2\mu+2\nu,\ N'''=2\mu+2\nu,\ N^{IV}=2\mu+2\nu,$$

c. à. d.

$$\begin{array}{ll} \alpha=1, & \beta=0, \\ \alpha'=1, & \beta'=0, \\ \alpha''=2, & \beta''=2, \\ \alpha'''=2, & \beta'''=2, \\ \alpha^{IV}=2, & \beta^{IV}=2. \end{array}$$

La formule (7) du N.° [989] donne alors:

$$\mathcal{N}=184.$$

993. **Remarque.** Nous venons de trouver 184 coniques passant par deux points donnés et touchant trois coniques données. Or les cercles sont des coniques passant par deux points fixes (les points circulaires à l'infini); et, on sait que le nombre des cercles touchant trois cercles donnés est égal à 8.

A quoi tient cette différence énorme ? C'est ici le cas de faire une observation extrêmement importante.

Au 1.° du N.° [991], on a trouvé que le nombre des coniques de système (μ,ν) touchant une conique donnée U est égal à $(2\mu+2\nu)$; cette expression, que M. Chasles appelle le **module** du système (μ,ν) relatif à la condition imposée, a été déterminée en supposant que la conique choisie U était complètement indépendante des coniques du système (μ,ν), c.à.d. qu'elle ne satisfaisait à aucune des conditions imposées au système (μ,ν).

Lorsqu'il en est autrement, il faut reprendre la détermination du module $(\alpha\mu+\beta\nu)$.

Pour donner un exemple de ce genre de détermination, résolvons la question suivante:

Trouver le nombre des coniques de système (μ,ν), passant par deux points A et B, et touchant une conique donnée U qui passe par les deux mêmes points.

Nous prendrons, pour triangle de référence, le triangle formé par la droite AB et les tangentes en A et B à la conique donnée U, de sorte que l'équation de cette conique sera

$$(U)\qquad XY+\frac{d}{2}Z^2=0.$$

L'équation d'une conique Σ du système (μ,ν), passant par les deux points A et B, sera

$$(\Sigma)\qquad AYZ+BXZ+CXY+\frac{D}{2}Z^2=0,$$

A, B, C, D, doivent être des fonctions du degré μ d'un certain paramètre arbitraire K.

L'équation générale des coniques, passant par les points communs à U et Σ, sera

$$AYZ+BXZ+(C+\lambda)XY+\frac{D+\lambda d}{2}Z^2=0;$$

et nous aurons pour l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} 0 & C+\lambda & B \\ C+\lambda & 0 & A \\ B & A & D+\lambda d \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant :

$$(2) \qquad (C+\lambda)\left[\lambda^2 d + \lambda(D+dC) + CD - 2AB\right] = 0.$$

Nous exprimerons que la conique Σ touche la conique U, en écrivant N° [880] que l'équation (2) a deux racines égales. Or, on exprimera que l'équation (2) a deux racines égales en écrivant, ou que le second facteur est un carré parfait, ou que le premier facteur divise le second. On a ainsi les deux relations

$$(3) \quad (D-dC)^2 + 8dAB = 0,$$

$$(4) \quad AB = 0.$$

La relation (3) est du degré 2μ par rapport au paramètre arbitraire K, puisqu'elle est du second degré par rapport aux coefficients A, B, ... D'un autre côté, elle n'est pas vérifiée lorsqu'on y fait A, B, C, nuls à la fois, c.à.d. lorsque la conique Σ du système (μ, ν) se réduit à une conique infiniment aplatie. Donc la relation (3) fournit 2μ coniques proprement dites, passant par les deux points A et B, et touchant la conique U.

La relation (4) donne ou $A=0$, ou $B=0$; dans le premier cas, on a μ coniques Σ touchant la conique U en B ; et dans le second on a μ coniques Σ touchant la conique U en A. Mais la relation (4) est vérifiée, s'il y a des coniques infiniment aplaties, c.à.d. si A, B, C, sont nuls à la fois. Une conique infiniment aplatie est une solution double de l'équation (4), puisque A et B sont nuls en même temps ; par conséquent, si p est le nombre des coniques infiniment aplaties du système (μ, ν) ; il faudra retrancher $2p$ du nombre 2μ que nous venons de trouver ; ce qui donne $(2\nu - 2\mu)$, puisque $p = 2\mu - \nu$.

« Donc, parmi les coniques proprement dites du système (μ, ν) et passant par deux points fixes A et B,
« 1° Il y en a 2μ touchant, en un point différent de A ou de B, une conique donnée et passant par les deux mêmes
« points A et B. 2° Il y en a $(2\nu - 2\mu)$ touchant la conique donnée soit en A, soit en B.

Nous pouvons maintenant résoudre la question suivante :

Trouver le nombre des coniques passant par deux points fixes A et B, et touchant trois coniques données qui passent par ces deux mêmes points.

Appliquons ici les formules générales des N°s [988], [989] ; remarquons qu'une conique du système (μ, ν) ne peut pas toucher en A ou en B les trois coniques données, nous devons donc prendre 2μ pour la valeur du module. Par conséquent, nous aurons dans le cas actuel

$$N = \mu, \; N' = \mu, \; N'' = 2\mu, \; N''' = 2\mu, \; N^{IV} = 2\mu,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = \alpha' = 1, \quad \alpha'' = \alpha''' = \alpha^{IV} = 2; \qquad \beta = \beta' = \beta'' = \beta''' = \beta^{IV} = 0;$$

de là nous concluons

$$\mathcal{N} = 8;$$

c'est la réponse à la question.

Nous renverrons, pour de plus amples détails, à l'article publié par M. Prouhet, dans les Nouvelles Annales (Année 1866) ; et au mémoire de M. Zeuthen, inséré dans le même recueil (année 1866).

Chapitre VIII

Construction Géométrique des Courbes du second degré.

§I. Conditions déterminant une courbe.

I° Courbes d'ordre quelconque.

994. Point.

Lorsqu'on assujettit une courbe à passer par un point, on a une seule condition c. à. d. une relation unique entre les coefficients de l'équation de la courbe. Car si $f(x, y)=0$ est l'équation de la courbe, exprimer que cette courbe passe par le point (a, b) revient à écrire l'équation de condition $f(a, b)=0$. Cette relation est linéaire par rapport aux coefficients.

Tangente.

Assujettir une courbe à toucher une droite donnée équivaut à une condition; car on exprimera qu'une droite donnée, $y=mx+n$ par exemple, touche la courbe, en écrivant que l'équation qui résulte de l'élimination de y a une racine double; ce qui exige qu'une seule relation entre les coefficients.

Tangente et son point de contact.

Assujettir une courbe à toucher une droite donnée en un point donné équivaut à deux conditions; car il faudra exprimer que l'équation qui donne les points d'intersection a deux racines égales à une quantité donnée, ce qui entraine deux relations entre les coefficients.

Direction asymptotique.

Donner une direction asymptotique équivaut à une condition; car si l'on donne $y-ax=0$ comme direction asymptotique, c'est assujettir la courbe à passer par le point à l'infini $(y-ax=0, z=0)$.

Asymptote.

Assujettir une courbe à avoir pour asymptote une droite donnée équivaut à deux conditions, car il faut exprimer que la courbe touche cette droite au point à l'infini; ou encore, que l'équation qui donne les points d'intersection avec la droite a deux racines infinies.

Pôle d'une droite.

Se donner une droite et son pôle équivaut à deux conditions. Soit, en effet, $Ax+By+Cz=0$ l'équation d'une droite donnée, et x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point donné qui doit être son pôle, les coordonnées du pôle de la droite sont déterminées par les équations

$$\frac{f'_x}{A}=\frac{f'_y}{B}=\frac{f'_z}{C},$$

lesquelles devront être vérifiées par les coordonnées du point donné. On a donc deux relations entre les coefficients de l'équation de la courbe.

On peut conclure de là qu'une tangente et son point de contact équivalent à deux conditions,

puisqu'une tangente est une droite dont le pôle est précisément le point de contact.

Point double.

Assujettir une courbe à avoir un point double, équivaut à une condition si le point n'est pas déterminé de position; car il faudra éliminer x et y entre les trois équations

$$f'_x=0,\ f'_y=0,\ f'_z=0.$$

On aura trois conditions, si le point double est donné; car ses coordonnées devront vérifier les trois équations qui précèdent.

etc...... etc....... etc.........

II.º Courbes du second ordre.

995. Pour déterminer une courbe du second ordre, il faut cinq conditions, c.à.d. cinq relations distinctes entre les coefficients de son équation. En effet, l'équation générale du second degré (équation en coordonnées-point, ou équation tangentielle) renferme six termes; mais on peut diviser par le coefficient de l'un d'eux et l'équation représentera toujours une courbe parfaitement déterminée; donc celle-ci sera parfaitement déterminée lorsqu'on connaîtra les cinq rapports ainsi obtenus, c.à.d. lorsqu'on aura cinq relations homogènes entre les six coefficients.

Il peut y avoir plusieurs courbes satisfaisant aux conditions imposées, mais le nombre en sera limité, si les cinq relations sont distinctes.

Ellipse. Hyperbole.

Cinq points déterminent une ellipse ou une hyperbole. On a, en effet, cinq relations du premier degré entre les coefficients; il y a donc, en général, une solution et une seule.

Il peut se présenter des cas d'impossibilité. Ainsi, lorsque trois des points donnés, A, B, C, sont en ligne droite; on n'a plus alors une conique proprement dite, mais un système de deux droites; ce système est parfaitement déterminé. Si quatre des points donnés sont en ligne droite, on aura encore un système de deux droites; l'une de ces droites est indéterminée et est seulement assujettie à passer par le cinquième point donné.

Cinq tangentes déterminent une conique et une seule. Car on aura cinq relations du 1.er degré entre les coefficients de l'équation tangentielle de la courbe.

Lorsque trois des tangentes sont concourantes, la courbe se réduit à un système de deux points.

Parabole.

Une parabole est déterminée par quatre points. Car lorsqu'une conique est une parabole, on a entre les coefficients de l'équation de la courbe la relation

$$B^2-AC=0.$$

Lorsqu'on se donnera quatre points, on aura deux paraboles passant par les quatre points; car on aura, entre les coefficients de l'équation, quatre relations du 1.er degré et une du second.

Autrement: Une parabole est une conique touchant la droite de l'infini; or, par quatre points, on peut faire passer deux coniques et deux seulement touchant en même temps une droite donnée.

Lorsqu'on se donne quatre tangentes, il y a une parabole et une seule satisfaisant à la question; car c'est une conique touchant les quatre droites données et la droite de l'infini.

Hyperbole équilatère.

Lorsqu'une conique est une hyperbole équilatère, les coefficients de son équation vérifie la relation

$$A+C-2B\cos\theta=0.$$

Donc quatre points déterminent une hyperbole équilatère et une seule; car les cinq relations

entre les coefficients sont du premier degré.

Cercle.

Lorsqu'une conique est un cercle, les coefficients de l'équation vérifient les deux relations

$$A = C, \frac{B}{A} = \cos\theta;$$

donc trois points déterminent un cercle et un seul.

Autrement: Assujettir une conique à être un cercle, c'est la faire passer par les deux points circulaires à l'infini; par suite, la courbe sera déterminée par trois autres points.

Centre.

Un centre équivaut à **deux conditions**. En effet, les coordonnées du centre d'une conique $f(x, y) = 0$ sont déterminées par les deux équations

$$f'_x = 0, \; f'_y = 0;$$

Assujettir un point à être centre, c'est assujettir ses coordonnées à vérifier les deux équations qui précèdent; on aura donc deux relations entre les coefficients; ces relations sont du 1er degré.

Autrement: le centre est le pôle de la droite de l'infini; on donne donc, en définitive, une droite et son pôle.

Sommet.

Un sommet équivaut à **deux conditions**. En effet, un sommet est l'intersection de la courbe avec un axe; or l'équation de l'axe a pour coefficients des fonctions des coefficients de l'équation de courbe; le point donné doit se trouver sur la courbe et sur cette droite; ce qui fait deux conditions.

Autrement: le point donné doit être sur la courbe, et la tangente doit être perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point; ce qui fait deux conditions.

Un diamètre avec la direction des cordes. Un axe.

Assujettir une droite à être le diamètre des cordes parallèles à une direction donnée revient à **deux conditions**; car si l'on prend cette droite pour axe des x, et, pour axe des y, une parallèle à la direction des cordes, l'équation de la courbe sera de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0;$$

or cette équation ne renferme plus que trois rapports arbitraires; la courbe sera alors déterminée lorsqu'on l'assujettira à passer par trois points; par suite les conditions imposées équivalent à deux conditions.

Le même raisonnement est applicable au cas où l'on donne un axe, car alors la direction des cordes est perpendiculaire à cet axe.

Un système de diamètres conjugués.

Si l'on prend les deux diamètres conjugués pour axes de coordonnées, l'équation de la courbe aura la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0;$$

or cette équation ne renferme que deux rapports arbitraires; par suite, la courbe sera déterminée lorsqu'on l'assujettira à passer par deux points; donc un système de diamètres conjugués équivaut à trois conditions.

Foyer.

Un foyer équivaut à **deux conditions**. En effet, les coordonnées d'un foyer sont des fonctions des coefficients de la courbe; en écrivant que les coordonnées du point donné sont égales à ces fonctions, on a deux relations. On peut le voir encore en prenant le foyer pour origine, l'équation est alors

$$x^2 + y^2 = (mx + ny + p)^2;$$

cette équation ne renferme plus que trois constantes arbitraires.

Directrice.

Se donner une directrice équivaut à deux conditions; car, en identifiant l'équation de la droite donnée avec celle d'une directrice, on aura deux relations entre les coefficients de l'équation de la courbe. Autrement, si l'on prend la directrice pour axe des y, l'équation sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=m^2x^2,$$

équation qui ne renferme plus que trois constantes arbitraires.

Le centre et deux sommets.

Si les deux sommets et le centre sont en ligne droite, ceci équivaut à quatre conditions; on aura cinq conditions, si les trois points ne sont pas en ligne droite.

etc ...... etc...... etc......

---

§II. Construction de coniques.

1°. Données: points, tangentes.

996. Nous n'indiquerons que des questions très-simples relatives à la construction des coniques, questions dont la solution dépendra des propriétés les plus élémentaires des courbes du second ordre; ce seront des exercices qui serviront à faire une révision de ces propriétés. Les véritables principes de la construction des courbes du second ordre ne peuvent être développés que dans un traité de géométrie pure; nous renverrons pour cela au Traité des sections coniques de M. Chasles.

997. 1° Intersection d'une droite avec une ellipse non tracée.

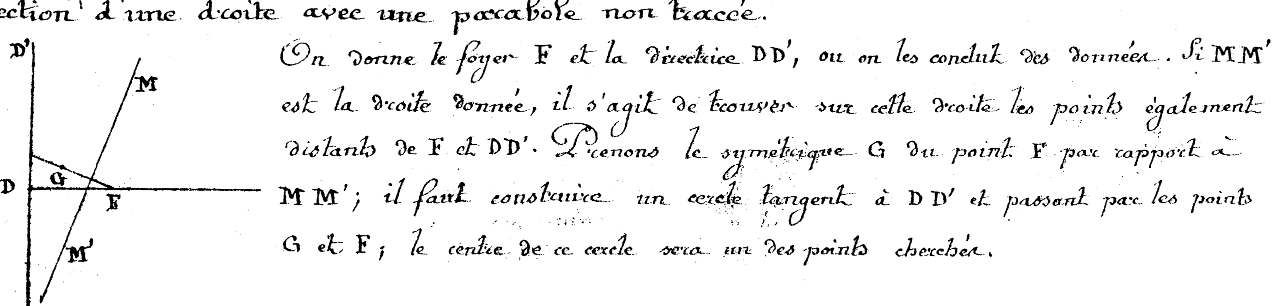
On donne deux diamètres conjugués en grandeur et direction; en opérant comme on l'a fait pour la construction des tangentes, Nº [737] on construira la droite homographique de la droite donnée; on cherchera l'intersection de cette droite avec le cercle, et on en conclura les points sur l'ellipse.

2° Intersection d'une droite avec une hyperbole non tracée.

On donne deux diamètres conjugués en grandeur et direction, on en conduit les asymptotes, puis un foyer F et la directrice DD' correspondante.

Si LL' est la droite donnée et M un de ses points d'intersection avec la courbe, la droite MP parallèle à l'asymptote doit être égale à MF. L étant l'intersection de la droite avec la directrice, et I son intersection avec une des asymptotes, joignons LF; du point I, comme centre, décrivons l'arc DH jusqu'à son intersection H avec LF; alors ID = IH. Par F, menons FM parallèle à HI; puis, par M, MP parallèle à ID; on aura MF = MP; donc M est un point de l'hyperbole; M' sera un second point.

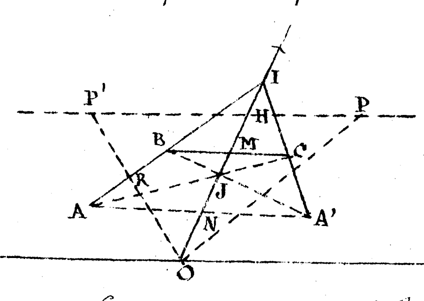
3° Intersection d'une droite avec une parabole non tracée.



On donne le foyer F et la directrice DD', ou on les conduit des données. Si MM' est la droite donnée, il s'agit de trouver sur cette droite les points également distants de F et DD'. Prenons le symétrique G du point F par rapport à MM'; il faut construire un cercle tangent à DD' et passant par les points G et F; le centre de ce cercle sera un des points cherchés.

4°. On donne le centre et trois points.

Joignons le centre O au milieu de la droite qui réunit deux des points donnés B et C; la droite OM est alors le diamètre conjugué de BC. Par le troisième des points donnés, A, menons une parallèle à BC, que nous prolongerons à partir du point d'intersection N avec le diamètre d'une quantité NA' = NA; le point A' appartient à la conique. Les droites AB, CA', se coupent en I sur le diamètre OM; CA, BA', se coupent en J sur le même diamètre; le point J appartient à la polaire du point I par rapport à la conique (d'après la construction de la polaire); on a donc $OI.OJ = b'^2$, b' étant la longueur du diamètre dirigé suivant OM.



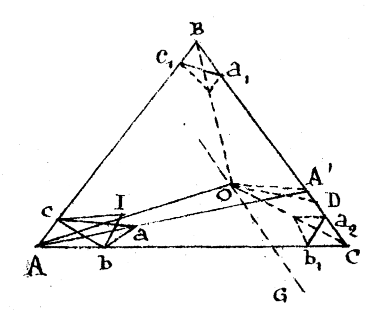
Soit $OH = b'$; menons par H et O des parallèles à BC, HP et OG; HP sera la tangente en H, OG sera le diamètre conjugué de OM.

Si maintenant on joint le point O au milieu R de AB et qu'on mène, par O, une parallèle à AB; les deux droites ainsi obtenues sont deux diamètres conjugués; elles coupent la tangente en H aux points P et P'; et on aura $HP.HP' = a'^2$, si a' est la longueur du diamètre dirigé suivant OG.

On connaît ainsi deux diamètres conjugués en grandeur et direction.

5°. On donne le centre et trois tangentes.

Soient O le centre, AB, BC, AC, les trois tangentes; par un point I de OA menons Ic, Ib, respectivement parallèles à CA et BA; bc sera la direction des cordes conjuguées de OA. On aura de la même manière les directions conjuguées de OB et OC. Pour avoir les points de contact, il faudra inscrire dans ABC un triangle ayant ses côtés parallèles aux trois droites bc, c_1a_1, a_2b_1. Pour cela, par c et b menons ca et ba respectivement parallèles à c_1a_1 et b_1a_2; puis joignons Aa, cette droite rencontre BC en A'; c'est le point de contact de BC. OA' est un diamètre; le diamètre conjugué de OA' sera OG parallèle à BC. Maintenant joignons OB, par O menons une parallèle OD à c_1a_1, coupant BC en D; les deux diamètres OB et OD sont conjugués; de sorte que si b' est la longueur du diamètre OG, on a $b'^2 = A'B.A'D$. N° [743].



6°. On donne cinq points.

On peut d'abord trouver autant de points qu'on voudra en appliquant le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit. N° [956].

On peut aussi déterminer le centre. Pour cela, cherchons la tangente en A. On peut regarder la tangente comme formant avec les cinq droites qui joignent les points donnés A, B, C, D, E, un hexagone inscrit, dans lequel deux des sommets sont venus se confondre. Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, les droites AB, BC, CD, DE, EA, et par 6 la tangente cherchée; les droites (1, 4) se coupent en α; les droites (2, 5) se coupent en β; la droite 3 coupe $\alpha\beta$ en γ; $A\gamma$ sera la tangente cherchée. On déterminera de même la tangente en B. En joignant le point d'intersection de ces deux tangentes au milieu de AB, on aura un premier lieu du centre. De même, après avoir déterminé la tangente en C, on joindra le point de concours Q des tangentes en B et C au milieu de BC, on aura une seconde droite qui passe par le centre.

Autrement: Les droites AC et BE se coupent en P; menons, par le cinquième point D, une parallèle à AC, laquelle rencontrera EB en P', et la courbe en M; d'après le théorème de Newton, N° [627] on aura

$$\frac{P'M.\,P'D}{P'E.\,P'B} = \frac{PA.\,PC}{PE.\,PB};$$

cette relation détermine le point M. Les milieux des cordes parallèles AC et DM déterminent un diamètre. En menant par le point D une parallèle à BE, on obtiendra, par une construction semblable, un second diamètre.

7° On donne cinq tangentes.

En appliquant le théorème de Brianchon N° [957] à l'hexagone formé par les intersections des cinq droites et le point de contact de l'une d'elles, on déterminera ainsi ce point de contact. On construira de même les points de contact des deux tangentes suivantes; on pourra alors construire deux diamètres, lesquels détermineront le centre de la courbe.

8° On donne quatre points et la tangente en l'un deux.

On considérera l'hexagone inscrit formé par les quatre droites qui joignent les points donnés, la tangente donnée, et la tangente en un autre des points donnés; le théorème de Pascal permettra de construire cette dernière tangente. On aura de même la tangente en un troisième point donné; d'où l'on conclura deux diamètres qui déterminent le centre.

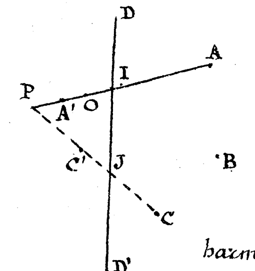
9° On donne quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

On considérera l'hexagone circonscrit formé par quatre des points de rencontre des tangentes données, le point de contact donné, et le point de contact d'une autre tangente; on déterminera ce dernier point de contact en appliquant à cet hexagone le théorème de Brianchon. La construction s'achèvera comme dans le cas précédent.

10° On donne trois points et les tangentes en deux de ces points.

On déterminera la tangente au 3ème point, en se rappelant que:

« Si l'on mène les tangentes aux sommets d'un triangle inscrit dans une conique, les points de rencontre « des côtés opposés de ces deux triangles sont en ligne droite. »



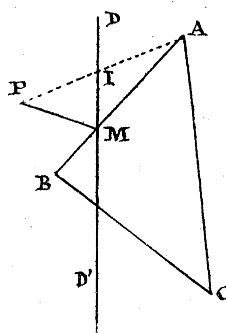
Si A, B, C, sont les trois points donnés, AC' et BC' les tangentes en A et B; AC rencontre BC' en β; BC rencontre AC' en α; AB rencontre αβ en γ; γC sera la tangente en C, elle coupera AC' et BC' en B' et A' respectivement. En joignant le point C' au milieu de AB, le point B' au milieu de AC, on aura deux droites qui déterminent le centre. On conclura de là immédiatement les directions de deux diamètres; et on déterminera leurs longueurs comme il a été fait dans le problème 5°.

11° On donne trois tangentes et les points de contact de deux d'entre elles.

On déterminera le point de contact de la 3ème tangente, en se rappelant que:

« Les droites qui joignent les sommets d'un triangle circonscrit à une conique aux points de contact des côtés « opposés sont concourantes ». On achèvera la construction comme il a été dit au problème précédent.

12° On donne une droite, son pôle, et trois points.



Soient les trois points A, B, C, et P le pôle de la droite DD'. Joignons PA, cette droite rencontre la polaire DD' en I et la conique en deux points dont l'un est A, et l'autre A' est le quatrième harmonique des trois points P, I, A. On construira le point A', en remarquant que, si O est le milieu de PI, on aura $\overline{OI}^2 = OA'.OA$, puisque les quatre points P, I; A', A, forment un système harmonique. On déterminera de même le point C' conjugué harmonique de C par rapport à P et J.

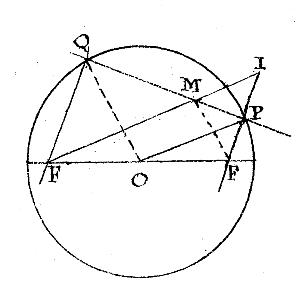
On connaîtra alors cinq points de la conique.

13° On donne une droite, son pôle, et trois tangentes.

Soient AB, BC, CA les trois tangentes; P le point, DD' sa polaire. Si d'un point quelconque d'une polaire on mène deux tangentes, elles forment un système harmonique avec la polaire et la droite qui joint ce point au pôle. Donc MP et MD sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes menées du point M; par conséquent, si l'on détermine le rayon conjugué de MA par rapport aux droites MD et MP, on aura une 4ème tangente à la conique.

On obtiendra cette droite en cherchant le quatrième harmonique des points P, I, et A. De la même manière, on construira une nouvelle tangente, etc.....

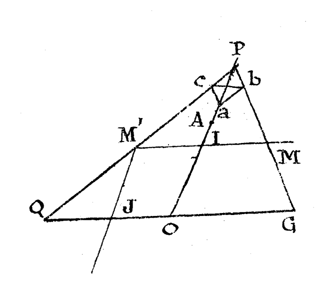
14° On donne le centre, une tangente, son point de contact, la longueur de l'axe focal.



Du centre O avec un rayon égal au demi-axe focal décrivons un cercle, les perpendiculaires à la tangente aux points P et Q, où elle coupe ce cercle, passent respectivement par les foyers. Soit M le point de contact; joignons OP et OQ, les droites MF et MF', respectivement parallèles à OQ et OP, passeront également par les foyers. En effet, si l'on prend le symétrique I du point F par rapport à la tangente, F'I passe par le point M, et OP est parallèle à F'I, car O et P sont les milieux respectifs de FF' et FI.

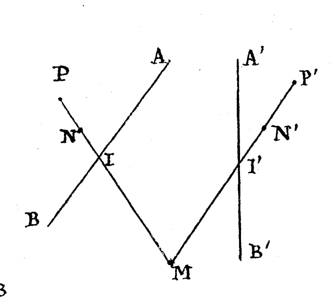
15° On donne le centre, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

Soit O le centre, P le point de rencontre des deux tangentes, M le point de contact. Joignons OP; par un point a de OP, menons ab, ac, respectivement parallèles à PM' et PM; la droite bc sera divisée en deux parties égales par OP, et sera par suite parallèle à la corde de contact MM'. Si a' est la longueur du diamètre dirigé suivant OP, on aura $a'^2 = OI . OP$; soit $OA = a'$.



Par M' menons une parallèle à OP, soit J l'intersection avec OG parallèle à MM', et Q l'intersection de la tangente avec OG. Si b' est la longueur du diamètre suivant OG, on aura $b'^2 = OJ . OQ$.

16° On donne deux droites, leurs pôles et un point.



Soient P et P' les pôles respectifs des droites AB, A'B', et M le point donné. Joignons PM qui rencontre AB en I, et prenons le conjugué harmonique N du point M par rapport aux points P et I; N sera un point de la conique. Joignons P'M qui rencontre A'B' en I', et prenons le conjugué harmonique N' de M par rapport à P' et I'; N' sera un point de la courbe. En joignant PN', on déterminera de même un quatrième point; et on aura un cinquième point à l'aide de P'N.

17° On donne deux systèmes de diamètres conjugués et un point.

Soient OA et OB, OC et OD, les deux systèmes de diamètres conjugués, et M le point donné. Menons MM' parallèle à OB et prenons aM' = aM, M' sera un point de la courbe; on obtiendra de même le point M''; puis le point M'''; puis le point M^{IV}; et ~~enfin le point M^{V}~~.

On est ainsi ramené au problème 6°.

18° On donne le centre, deux tangentes et la longueur de l'axe focal.

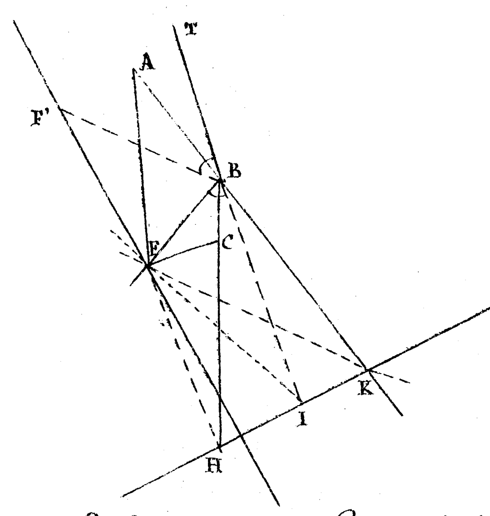
Du centre O, avec un rayon égal au demi-axe focal, on décrit un cercle; les perpendiculaires élevées aux tangentes aux points où elles sont rencontrées par ce cercle, donnent, par leurs intersections, les foyers de la conique.

---

998. ## II. Données: Foyers, Directrices, Sommets.

1° On donne un foyer et trois points.

Soient A, B, C, les trois points, et F le foyer; la bissectrice extérieure de l'angle BFC rencontre la corde BC en un point H situé sur la directrice; de même la bissectrice extérieure de l'angle AFB rencontre la



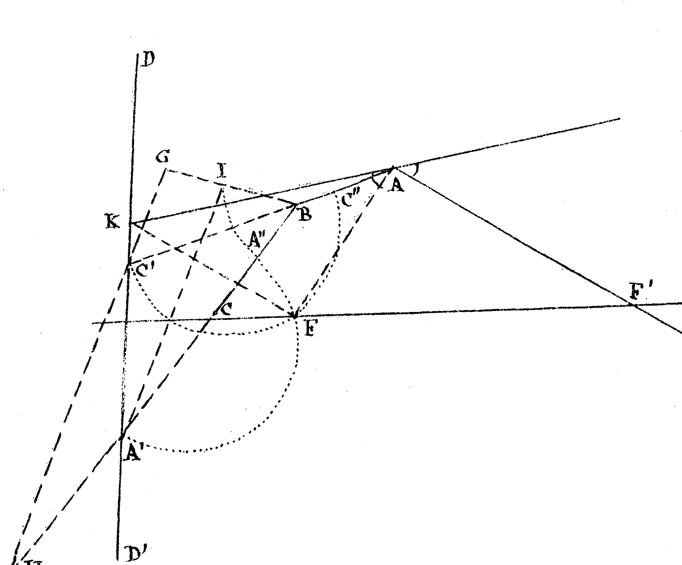
corde AB en un point K situé sur la directrice; KH est donc la directrice correspondante au foyer F. On aura l'axe focal en abaissant du point F une perpendiculaire sur KH. Si nous élevons en F une perpendiculaire à FB, le point I où elle rencontre la directrice appartiendra à la tangente en B; menons alors, par le point B une droite faisant avec BT un angle égal à FBI, cette droite passera par le second foyer F'; son intersection avec l'axe donnera donc le second foyer. On a alors facilement le centre et la seconde directrice. On a en tout quatre solutions; trois solutions sont des hyperboles, la quatrième solution peut être une des trois courbes du second degré.

2° On donne un foyer et trois tangentes.

En projetant le foyer sur les trois tangentes, on aura trois points du cercle homographique; le centre de ce cercle sera le centre de la conique; le rayon sera le demi-axe focal; la construction des autres éléments s'achève sans difficulté. Le problème admet une seule solution. Si les trois projections étaient en ligne droite, la courbe serait une parabole ayant cette droite pour directrice.

Autrement. On pourra déterminer le second foyer en se rappelant que les tangentes menées par un point sont également inclinées sur les droites qui joignent ce point aux deux foyers.

3° On donne une directrice et trois points.



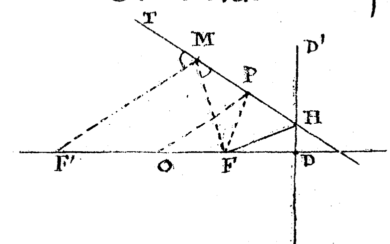
Soient DD' la directrice, A, B, C, les trois points. Prolongeons BC jusqu'à sa rencontre en A' avec la directrice, et prenons sur BC un point A'' tel que $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$. Pour cela, prenons $A'H = AC$, puis, sur une droite quelconque passant par B, $BG = BC$; joignons GH, et par A' menons A'I parallèle à GH; on a $\frac{BI}{IG} = \frac{A'B}{A'H}$ ou $\frac{A'B}{A'C}$. On aura le point A'' en rabattant BI sur BC.

Le cercle, décrit sur A'A'' comme diamètre, est le lieu des points M tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{A''B}{A''C} = \frac{BA'}{CA'} =$ le rapport des distances des points B et C à la directrice; le foyer correspondant à la directrice se trouve donc sur le cercle décrit.

Prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en C' avec la directrice, et prenons sur BA un point C'' tel que $\frac{C''B}{C''A} = \frac{C'B}{C'A}$; le cercle décrit sur C'C'' comme diamètre sera un deuxième lieu du foyer. On aura ainsi le foyer F.

Joignons FA, par exemple, et élevons en F une perpendiculaire à FA, le point K où cette perpendiculaire rencontre la directrice appartient à la tangente en A; on conclura de là le 2ème foyer, voir problème 1° etc...

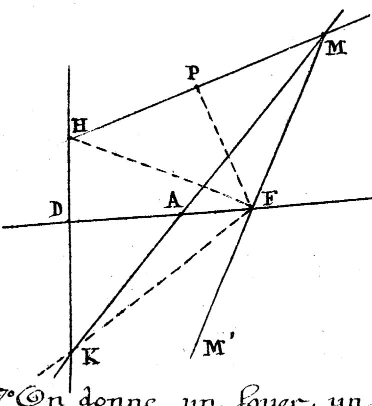
4° On donne un foyer, la directrice correspondante, une tangente.



Soit H le point de rencontre de la tangente avec la directrice; joignons FH, élevons en F une perpendiculaire à FH; l'intersection M de cette perpendiculaire avec la tangente sera le point de contact. Faisons en M un angle TMF' égal à l'angle FMH, on aura le deuxième foyer F'. FP étant perpendiculaire sur la tangente, OP sera le demi axe focal; etc.....

5° On donne un foyer, la directrice correspondante, un point.

Soit M le point, F le foyer, DD' la directrice; joignons FM, menons FH perpendiculaire à FM, l'intersection H avec la directrice sera un point de la tangente en M; etc....



6° On donne un foyer, un sommet, un point.

Soient A le sommet, F le foyer, M le point; joignons FA et FM; la bissectrice de l'angle AFM' rencontre la corde AM sur la directrice; si K est ce point de rencontre, on aura un point de la directrice; cette droite est alors déterminée, puisqu'elle est perpendiculaire à AF. Si en F, on élève une perpendiculaire à FM, l'intersection H avec la directrice donnera un point de la tangente en M; etc.....

7° On donne un foyer, un sommet, une tangente.

La droite qui joint le foyer au sommet est l'axe focal; si P est la projection du foyer sur la tangente, le cercle homographique passe par A et P; la perpendiculaire élevée par le milieu de AP rencontre AF au centre O de la conique.

On aura alors les 2 sommets, puis le second foyer; etc.....

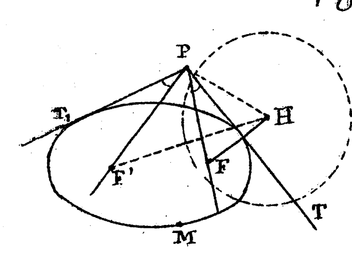
8° On donne deux foyers, une tangente.

En projetant les foyers sur la tangente, on a deux points du cercle homographique; on aura ainsi les sommets, etc...

9° On donne deux foyers, un point.

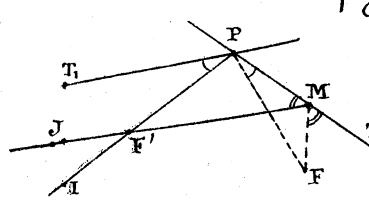
En joignant les foyers F et F' au point donné, M, la somme (FM + MF') sera égale à l'axe focal; etc.....

10° On donne un foyer, deux tangentes, un point.



Soient F le foyer, PT, PT1 les deux tangentes, M le point. Une droite, passant par P et faisant avec PT1 un angle égal à FPT, passera par le second foyer F'. Si H est le symétrique du foyer F par rapport à la tangente TP, la distance F'H = MF + MF'; donc décrivons, du point H comme centre, une circonférence de rayon égal à MF; le point F' sera le centre d'un cercle touchant le cercle qu'on vient de décrire, passant par le point M, et ayant son centre sur une droite connue PF'. Construisons le centre de ce cercle, nous aurons le 2ème foyer; etc.....

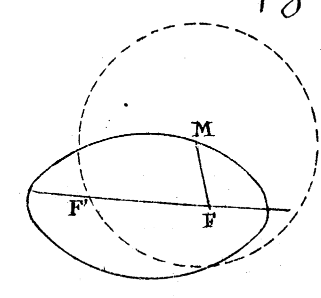
11° On donne un foyer, deux points et la tangente en l'un deux.



Soit F le foyer, M et M1 les deux points, MT la tangente en M. La corde MM1 et la bissectrice de l'angle M1FM' se coupent en un point K situé sur la directrice correspondant au foyer F; la perpendiculaire en F, à FM, rencontre la tangente MT en un point H situé sur la directrice; on connaît donc la directrice correspondant au foyer F.

La construction s'achèvera facilement.

12° On donne un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.



Soient TP, T1P les deux tangentes, M le point de contact de l'une d'elles, F le foyer. Traçons PI de sorte que l'angle T1PI égale l'angle FPT; le second foyer F' sera sur la droite PI. Par le point M menons une droite MJ telle que l'angle $\widehat{PMJ}$ = angle FMT; le foyer F' sera aussi sur cette droite; etc.....

13° On donne un foyer, un point, les longueurs des axes.

Soient a et b les longueurs des demi-axes, a étant l'axe focal.

On a F'M + FM = 2a; MF étant connu, le second foyer F' est sur un cercle décrit de M comme centre avec (2a − MF) comme rayon (Si 2a < MF, la courbe sera une hyperbole). D'un autre côté $c^2 = a^2 - b^2$, ou $c^2 = a^2 + b^2$, suivant que la courbe est une ellipse ou une hyperbole; la distance FF' = 2c; en décrivant le cercle, du point F comme centre, avec 2c pour rayon, on aura le 2ème foyer par l'intersection avec la première circonférence.

14°. On donne un sommet, une tangente et son point de contact, la direction de l'axe focal.

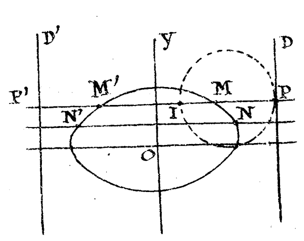
Soient MT la tangente, M le point de contact, A le sommet, Ax la direction de l'axe focal. La tangente au sommet A est perpendiculaire à Ax, soit P le point où elle rencontre MT; la droite qui joint le point P au milieu de AM passe par le centre O de la conique.

On connaît alors l'axe focal OA; en décrivant le cercle homographique, et en menant des perpendiculaires à MT aux points où elle est rencontrée par ce cercle, on aura les foyers.

15°. On donne une directrice, le centre, un point.

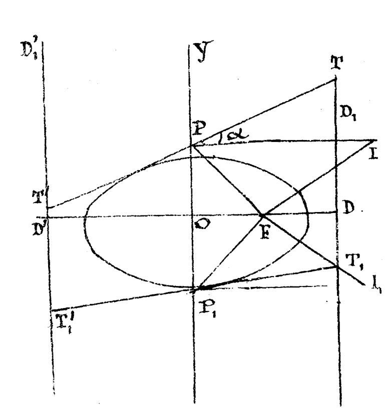
On connait de suite la direction de l'axe focal et la deuxième directrice, ainsi que le point M' symétrique du point donné M par rapport à l'axe Oy parallèle à la directrice. Prenons sur MP un point I tel que $\frac{IM}{IM'} = \frac{PM}{PM'}$; le cercle décrit sur IP comme diamètre passera par le foyer correspondant à la directrice donnée; etc .....

16°. On donne les directrices et deux points.



Soient PD et P'D' les deux directrices, M un des points; si MP est la perpendiculaire commune aux directrices, et si P'M' = PM, M' sera un deuxième point de la conique; la perpendiculaire élevée au milieu de MM' sera le 2ème axe. Si sur MM' on prend un point I tel que $\frac{IM}{IM'} = \frac{PM}{PM'}$, le cercle décrit sur IP comme diamètre passera par le foyer F correspondant à la directrice PD. On opérera de même à l'aide du second point donné N; l'intersection de ces deux cercles donnera un foyer.

17°. On donne les directrices et deux tangentes.



Soient D, D', les deux directrices, et 2d la distance commune, la droite Oy sera la position de l'axe non focal.

« Or, si PT est une tangente, coupant l'axe Oy en P et faisant l'angle α avec « une perpendiculaire à la direction des directrices, si l'on joint le point P au foyer « F, et qu'en F on élève une perpendiculaire à PF, on aura

$$(1) \qquad PI = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}.$$

« Donc le lieu des foyers des coniques, ayant leurs directrices données et touchant « une droite fixe, est un cercle décrit sur PI comme diamètre.»

La ligne PI est facile à construire, et par suite le cercle; on aura de même pour la seconde tangente $T_1T'_1$ un cercle décrit sur P_1I_1 comme diamètre; l'intersection de ces deux cercles donne le foyer F.

18°. Construire une conique homothétique d'une conique donnée et passant par trois points.

Quand la courbe donné est une hyperbole, la question revient à construire une hyperbole connaissant trois points et la direction des asymptotes; problème qui sera résolu plus loin.

Soit S la conique donnée, M, N, P, les trois points donnés. « Le lieu des centres des coniques homothétiques « de la conique proposée S et passant par les deux points fixes M et N est une droite; cette droite passe par « le milieu I de MN, et est parallèle au diamètre conjugué de la direction MN, dans la conique S.»

La détermination du centre est alors facile.

19°. Construire une conique homothétique d'une conique donnée et touchant trois droites données.

Nous pourrons encore déterminer le centre d'après la propriété suivante:

« Le lieu des centres d'une conique, homothétique d'une conique donnée et touchant deux droites données, « est un système de deux droites; ces droites passent par le point de concours des deux droites don- « nées D et D', et sont en outre respectivement parallèles aux diamètres de la conique donnée.»

« passant par les points de rencontre des tangentes à cette conique parallèles aux deux droites données.»

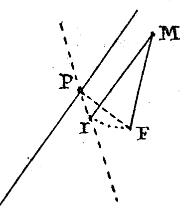
---

999. ## III.e Données: Asymptotes.

1° On donne les deux asymptotes, une tangente.

En remarquant que le point de contact d'une tangente est le milieu de la portion de tangente comprise entre les asymptotes, on ramène le problème à celui-ci: construire une hyperbole dont on donne les asymptotes et un point.

2° On donne une asymptote et trois points.

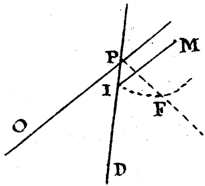


Soient A, B, C les trois points, D'D l'asymptote; joignons AC, et prenons Ca' = Aa; joignons AB, et prenons Ab' = Bb; les deux points a' et b' appartiendront à la seconde asymptote; etc.....

3° On donne trois points et les directions des asymptotes.

Soient les trois points M, N, P; prenons deux points M et N, et par ces points menons des parallèles aux asymptotes; la seconde diagonale du parallélogramme ainsi formé passe par le centre. Une construction semblable, faite à l'aide des deux points M et P, donnera un second lieu du centre, etc.....

4° On donne une asymptote, un foyer, un point.

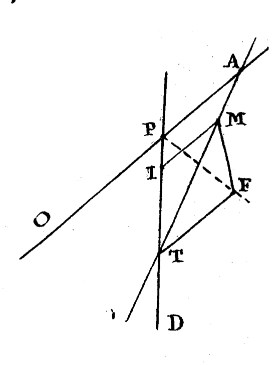


Si du foyer F on abaisse une perpendiculaire sur l'asymptote, le pied P appartiendra à la directrice. Lorsque par le point donné, M, on mène une parallèle à l'asymptote jusqu'à sa rencontre I avec la directrice, la distance MI = MF; comme MF est connu, on en conclura le point I, c.à.d. un second point de la directrice. On aura alors facilement l'axe, le centre; etc.....

5° On donne une asymptote, un foyer, une tangente.

Les projections du foyer sur l'asymptote et la tangente appartiennent à un cercle ayant pour centre celui de l'hyperbole. Joignons ces deux projections, la perpendiculaire à cette droite, menée par son milieu, rencontre l'asymptote au centre de la courbe.

6° On donne une asymptote, une directrice, un point.



Soient PO l'asymptote, PD la directrice, et M le point. En P élevons une perpendiculaire à l'asymptote, on a ainsi un premier lieu du foyer. Par M, menons une parallèle à l'asymptote jusqu'à son intersection I avec la directrice; le cercle décrit du point M comme centre avec MI pour rayon, sera un second lieu du foyer; etc.....

7° On donne une asymptote, une directrice, une tangente.

Soient OA l'asymptote, PD la directrice, MT la tangente. Si M est le point de contact de la tangente, F le foyer, et qu'on mène MI parallèle à l'asymptote, on a MI = MF. D'autre part, la droite MF (corde focale de contact) est perpendiculaire à TF; c.à.d. que TF est tangente au cercle décrit du point M comme centre avec MI pour rayon. Si l'on suppose une suite de cercles, ayant leur centre sur la tangente AT, et pour rayon la distance (comptée parallèlement à l'asymptote) de ce centre à la directrice, tous ces cercles seront tangents à deux droites issues du point T.

La construction de l'un de ces cercles fournira ces deux droites, lesquelles sont un premier lieu du foyer cherché. On aura un second lieu en élevant par le point P une perpendiculaire à l'asymptote.

8° On donne une asymptote, un point, deux tangentes.

On constatera d'abord ces deux propriétés:

1°« La corde de contact de deux tangentes divise en deux parties égales la portion d'asymptote comprise entre « ces deux tangentes.

2°« Si par un point de la courbe, on mène une transversale parallèle à l'une des asymptotes, le segment « compris sur cette transversale, entre la courbe et la corde de contact de deux tangentes, est moyen proportionnel entre les deux segments compris, sur cette même transversale, entre la courbe et les deux tangentes. »

D'après cela soit OA l'asymptote, M le point donné, PI et QI les tangentes données; par le point M, menons MP'Q' parallèle à OA, et prenons un point K tel que $\overline{MK}^2 = \overline{MP'}.\overline{MQ'}$; joignons le point K au milieu E de PQ; la droite KE sera la corde de contact des deux tangentes données.

9° On donne une asymptote, le centre et deux points.

Soient OA l'asymptote, O le centre, M et N les deux points. Joignons MN, puis prenons NJ = MI; le point J sera un point de la seconde asymptote, comme elle passe par le centre, on connaît donc les deux asymptotes; etc.....

10° On donne une asymptote, une directrice, la longueur de l'axe transverse.

Soient OP l'asymptote, PD la directrice. En élevant en P une perpendiculaire à l'asymptote, on aura un premier lieu du foyer. La distance du point P au centre est égale à la longueur du demi-axe transverse; nous aurons alors le centre O; l'axe est une perpendiculaire menée par le point O à la directrice; etc.....

11° On donne la direction d'une asymptote, une directrice, deux points.

La distance d'un point à la directrice comptée parallèlement à une asymptote est égale à la distance de ce point au foyer. Donc menons MH et NI parallèlement à l'asymptote; le foyer se trouvera à l'intersection des cercles décrits des points M et N comme centres avec MH et NI comme rayons. La perpendiculaire abaissée du foyer sur la direction de l'asymptote rencontre la directrice en un point de l'asymptote; on connaîtra donc une asymptote. Le reste s'achèvera facilement.

12° On donne une asymptote, un sommet, un point.

Soient OL l'asymptote, A le sommet, M le point. Joignons AM, et prenons AI = ML, I sera un point de la seconde asymptote. La circonférence décrite du sommet A comme centre, avec AI pour rayon, rencontre l'asymptote en D et D'. La perpendiculaire abaissée du point A sur ID est l'axe transverse d'une hyperbole satisfaisant à la question, car le point D est le symétrique de I par rapport à l'axe transverse; etc.....

13° On donne une asymptote, une directrice, et la distance du centre au foyer.

La perpendiculaire menée à l'asymptote OA au point P où elle est rencontrée par la directrice PD, donne un premier lieu du foyer.

Par un point I de l'asymptote menons une perpendiculaire à la directrice et prenons IH = à la distance donnée c; puis, par le point H, menons une parallèle à l'asymptote; l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire donnera le foyer F, etc.....

14° On donne une asymptote, un foyer, la longueur de l'axe transverse.

En abaissant du foyer F une perpendiculaire sur l'asymptote, le pied P est un point de la directrice; de plus, la distance du point P au centre est égale à la longueur de l'axe transverse, on a ainsi le centre O. On en conclut l'axe transverse OF, la directrice PD; etc.....

IV: Hyperbole équilatère.

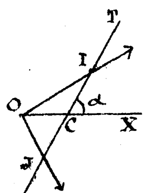
1° On donne trois points, la tangente en l'un d'eux.

« Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf « points du triangle. »

En construisant le cercle des neuf points du triangle ABC (c.à.d. le cercle qui passe par les milieux de ses trois côtés), on aura un premier lieu du centre de l'hyperbole.

« Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère, touchant une droite fixe en un point fixe et « passant par un second point, est un cercle; ce cercle passe par le point de contact de la « tangente, par la projection du second point sur la tangente, par le milieu de la droite qui joint « les deux points. »

En construisant le cercle qui passe par C, B', et le milieu I de BC, on aura un second lieu du centre. Les points d'intersection de ces deux cercles donneront le centre de l'hyperbole. Un de ces points est le milieu I de BC; il ne convient pas à la question, si la corde BC n'est pas un diamètre. Soit O l'autre point d'intersection; on connaît ainsi le centre et trois points. Ou bien encore, on pourra construire les asymptotes; pour cela, il faudra mener par le point O deux droites rectangulaires détachant sur la tangente CT deux longueurs égales à partir du point de contact C. Ce qu'on obtiendra, en menant par le point O une parallèle à la bissectrice de l'angle TCX; alors le triangle OCI est isocèle, et l'on a CI = OC = CJ.

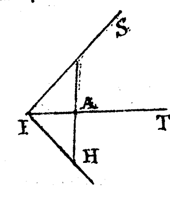


2° On donne deux points, et les tangentes en ces points.

En joignant le point de concours des tangentes au milieu de la corde des contacts, on a un premier lieu du centre; en appliquant le second des théorèmes cités dans le problème qui précède, on aura un second lieu du centre. La construction s'achèvera comme dans le premier problème.

3° On donne deux points, la tangente en l'un d'eux, et une seconde tangente.

En appliquant le second théorème du problème 1° on aura un premier lieu du centre. Or on a la propriété suivante:



« Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère, touchant deux droites dont l'une en un point donné, « est un cercle; ce cercle touche au point de concours des deux tangentes celle dont le contact « est assigné; son rayon s'obtiendra en élevant une perpendiculaire à la tangente dont on donne « le contact, et en prolongeant cette droite jusqu'à la rencontre en H avec la perpendiculaire « à la 2ème tangente. »

D'après cette proposition, on aura un second lieu du centre.

4° On donne quatre points.

On déterminera le centre par l'application du premier théorème énoncé au problème 1°.

5° On donne trois points et une tangente.

On sait qu'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de rencontre des hauteurs; on connaîtra donc quatre points et une tangente.

6° On donne quatre tangentes.

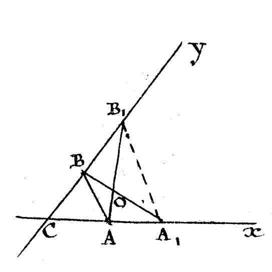
Les centres des deux hyperboles équilatères tangentes à quatre droites données sont sur un cercle passant par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre droites. D'un autre côté, le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales. L'hyperbole cherchée étant une de ces coniques, son centre devra se trouver sur cette droite; donc....

V.° Parabole.

1.° On donne quatre points.

Soient A, A_1, B, B_1 les quatre points donnés; $OA = a$, $OA_1 = a_1$; $OB = b$, $OB_1 = b_1$; l'équation générale des coniques passant par ces quatre points est

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}-1\right)-Kxy=0;$$



ou

$$(1)\qquad \frac{x^2}{aa_1}+xy\left(\frac{1}{ab_1}+\frac{1}{a_1b}-K\right)+\frac{y^2}{bb_1}+\dots\dots=0;$$

pour que l'équation (1) représente une parabole, il faut que

$$(2)\qquad \left(\frac{1}{ab_1}+\frac{1}{a_1b}-K\right)^2-\frac{4}{aa_1bb_1}=0;$$

il est facile, d'après la relation (2), de discuter la possibilité du problème.

Eu égard à cette relation, l'équation (1) devient

$$(3)\qquad \left(\frac{x}{\sqrt{aa_1}}\pm\frac{y}{\sqrt{bb_1}}\right)^2+\dots\dots=0.$$

Il y a donc deux paraboles satisfaisant à la question, et la direction des diamètres est

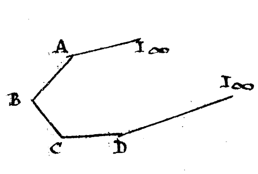
$$(1)\qquad \frac{x}{\sqrt{aa_1}}-\frac{y}{\sqrt{bb_1}}=0,\quad \text{ou}\quad \frac{x}{\sqrt{aa_1}}+\frac{y}{\sqrt{bb_1}}=0.$$

On peut aussi démontrer la proposition suivante:

Par quatre points formant un quadrilatère convexe, on peut faire passer deux paraboles. Les diamètres sont parallèles aux côtés de l'un quelconque des trois parallélogrammes construits en prenant pour diagonales un système de droites passant par les quatre points, et pour sommets des points conjugués harmoniquement aux sommets du quadrilatère.

On peut alors construire facilement la direction des diamètres. On peut encore les construire en s'appuyant sur cette propriété:

« Si un quadrilatère est inscrit à une parabole, les points d'intersection des diamètres, qui passent par les extrémi-
« tés d'un même côté, avec les diagonales, déterminent une parallèle au quatrième côté. »



Connaissant les quatre points et la direction des diamètres, nous pourrons considérer le pentagone $ABCDI_\infty$ comme inscrit dans la parabole; en appliquant à ce pentagone le théorème de Pascal, on en conclura les tangentes en deux des points A, et B, par exemple; ce qui permettra de déterminer le foyer.

2.° On donne quatre tangentes.

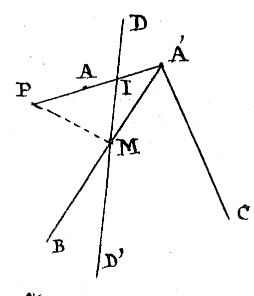
On obtiendra le foyer en remarquant que le cercle circonscrit au triangle, formé par trois tangentes, passe par le foyer; ayant le foyer, on en conclura la tangente au sommet; etc....

3.° On donne une droite, son pôle, et deux points.

On construira la quatrième harmonique A' conjugué de A par rapport au point P et I; et de même le point B' conjugué de B; on aura ainsi quatre points de la parabole.

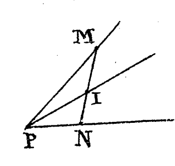
4.° On donne une droite, son pôle, et deux tangentes.

Soient AB, AC, les deux tangentes; P le point donné, DD' sa polaire.



Si d'un point quelconque d'une polaire on mène deux tangentes, elles forment un système harmonique avec la polaire et la droite qui joint ce point au pôle. Donc MP et MD sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes menées du point M. En déterminant le rayon conjugué de MA, c.à.d. le conjugué harmonique de A par rapport aux points P et I, on aura une seconde tangente. En opérant de même avec la tangente AC, on aura quatre tangentes; etc.....

5° On donne deux tangentes et leurs points de contact.



En joignant le point de concours des tangentes au milieu de la corde de contact on aura la direction des diamètres. On mènera alors par le point M une parallèle au diamètre, puis une droite faisant avec la tangente un angle égal à celui qu'elle fait avec le diamètre, on aura ainsi un premier lieu du foyer; etc.....

6° On donne trois tangentes et la direction des diamètres.

Le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes est un premier lieu du foyer. Les trois hauteurs de ce triangle se coupent sur la directrice, on aura donc la directrice en abaissant de ce point une perpendiculaire sur la direction des diamètres. La directrice est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole; par conséquent, en menant une perpendiculaire à l'une des tangentes aux points où elle rencontre la directrice, on aura une quatrième tangente. Le cercle circonscrit au triangle formé par cette dernière tangente et deux des tangentes données fournira un second lieu du foyer.

7° On donne deux points, la tangente en l'un d'eux, la direction de l'axe.

Si par le milieu I de la corde MN on mène une parallèle à la direction des diamètres, le point où elle rencontrera la tangente donnée MT sera un point de la tangente en N; on est ainsi ramené au problème 5°.

8° On donne trois tangentes, dont la tangente au sommet.

La tangente au sommet est le lieu des projections du foyer sur les tangentes; par conséquent, si par le point où chaque tangente rencontre la tangente au sommet on mène des perpendiculaires à ces tangentes, le point de rencontre de ces droites sera le foyer.

9° On donne le foyer et deux points.

Des points A et B comme centres, décrivons des cercles ayant respectivement pour rayons les longueurs AF et BF. La directrice sera une tangente commune à ces deux cercles. Donc deux solutions. Connaissant la directrice et le foyer on pourra construire la courbe par points.

10° On donne le foyer et deux tangentes.

La tangente au sommet s'obtiendra en joignant les pieds P et P' des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes. Si par le point F' symétrique de F par rapport à la tangente au sommet, on mène une parallèle à cette dernière droite, la ligne ainsi obtenue sera la directrice. On connait donc la directrice et le foyer.

11° On donne le foyer, une tangente et un point.

Du point M comme centre avec MF pour rayon, décrivons une circonférence; puis prenons le symétrique F' de F par rapport à la tangente. Les tangentes menées de F' à la circonférence seront les directrices de deux paraboles répondant à la question.

12°. On donne la directrice et deux points.

Des points A et B décrivons des circonférences tangentes à la droite D. Les deux intersections F et F' nous donnent les foyers de deux paraboles.

13°. On donne la directrice et deux tangentes.

Soient T et T' les deux tangentes données et DD' la directrice. Par les points de rencontre des droites T et T' avec la directrice, on mène les lignes AF, A'F, telles que FA'T' = DA'T' et TAF = DAT. Le point de rencontre donne le foyer.

14°. On donne la directrice, une tangente et un point.

Du point M comme centre, décrivons un cercle tangent à la directrice DD', et par le point A intersection de la tangente avec la directrice, menons la ligne AH, telle que TAH = DAT. L'intersection de la droite AH avec le cercle donne le foyer de la courbe. Donc en général deux solutions.

15°. On donne le foyer, le paramètre, un point.

Du point F avec le paramètre pour rayon décrivons une circonférence; de même décrivons un second cercle ayant pour centre M et pour rayon MF. Les deux tangentes communes qu'il est possible de mener à ces deux cercles donnent les directrices de deux paraboles satisfaisant à la question.

16°. On donne le foyer, la direction de l'axe et une tangente.

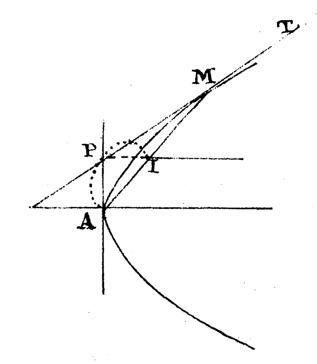
Par le pied P de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente, menons PH perpendiculaire à XY, nous aurons ainsi la tangente au sommet. L'axe sera alors une perpendiculaire menée du foyer à cette droite. La directrice est ensuite facile à déterminer.

17°. On donne le foyer, une tangente et son point de contact.

Le point F' symétrique de F par rapport à la tangente se trouve sur la directrice. On obtiendra donc cette droite en menant en ce point une tangente au cercle décrit du point M avec MF pour rayon.

18°. On donne le sommet, le paramètre et un point.

Supposons le problème résolu, soit tracé l'axe de la parabole. Du point donné M, abaissons la perpendiculaire MP sur l'axe; il s'agit de déterminer le point P. On voit d'abord qu'il se trouve sur un cercle décrit sur AM comme diamètre. Reste à en trouver un autre lieu. On sait pour cela que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse et le double du paramètre, d'où l'on déduit $AP = -p \pm \sqrt{p^2 + \overline{AM}^2}$; or AP est facile à construire. On aura donc le point P par l'intersection du cercle déjà tracé et du cercle décrit du point A comme centre avec AP pour rayon. La courbe se construit alors facilement.



19°. On donne le sommet, une tangente et le point de contact. Soit T la tangente et M son point de contact. Menons AM et prenons le milieu I de AM. Décrivons une demi-circonférence sur AI comme diamètre. Les points où elle coupe la droite MT appartiennent aux tangentes au sommet de deux paraboles satisfaisant à la question.

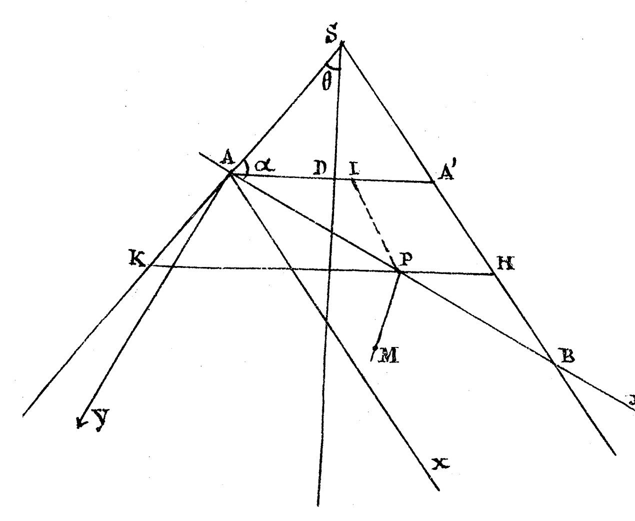
Chapitre IX

Sections du Cône et du Cylindre.

§ I. Sections du Cône et Cylindre droits. Méthode Analytique.

1°. Sections planes du Cône droit.

1001. Pour déterminer la section plane d'un cône droit, considérons la section principale perpendiculaire au plan sécant; il en existe toujours une que l'on détermine en abaissant du sommet une perpendiculaire sur ce plan et en faisant passer un plan par cette droite et l'axe du cône. Prenons cette section principale pour plan de la figure; soit AB la trace du plan sécant sur ce plan, et θ le demi-angle au sommet du cône. Pour que le plan sécant soit parfaitement déterminé, il suffit de déterminer sa trace AB; pour cela, il faut connaître la distance SA que nous désignerons par d, et l'angle SAB que nous désignerons par α, angle qui peut varier de 0 à 180°. Cherchons l'équation de la section du cône par ce plan; pour cela, prenons AB pour axe des x et pour axe des y une perpendiculaire à AB menée par le point A dans le plan sécant.



Soit M un point de la courbe de section; par ce point menons un plan perpendiculaire à l'axe, lequel coupe le plan sécant suivant MP perpendiculaire au plan de la figure et par suite à AB; MP est donc parallèle à l'axe des y et représentera l'y du point M, AP en sera l'x. Ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre est KH, on a par conséquent, la relation:

$$\overline{MP}^2 = PK.PH.$$

Dans le triangle PAK on a:

$$\frac{PK}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\cos\theta}; \text{ d'où } PK = x\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}.$$

Par le point A menons une perpendiculaire AA' sur l'axe, et par le point P une parallèle PI à l'arête SB; on a:

$$PH = IA' = AA' - AI;$$

or $$AA' = 2AD = 2d \sin\theta;$$

et dans le triangle API on a:

$$\frac{AI}{AP} = \frac{\sin API}{\sin AIP}, \text{ d'où } AI = x\frac{\sin(\alpha+2\theta)}{\cos\theta}.$$

En substituant dans la relation $\overline{MP}^2 = PK.PH$, on obtient

$$\text{(I)} \qquad y^2 = 2d\frac{\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\theta)}{\cos^2\theta}x^2;$$

tell est l'équation de la courbe de section du cône par le plan sécant; on voit que c'est une courbe du second degré.

Cette équation ne renferme pas de terme en xy; dans le coefficient de x^2, $\sin\alpha$ et $\cos^2\theta$ sont toujours positifs; donc la courbe sera

une ellipse, si $\sin(\alpha+2\theta) > 0$,
une hyperbole, si $\sin(\alpha+2\theta) < 0$,
une parabole, si $\sin(\alpha+2\theta) = 0$.

On voit ainsi que les sections du cône fournissent les trois genres de courbes du second degré; de là vient le nom général de Coniques données à ces courbes.

On peut encore obtenir d'autres variétés des courbes du second degré; par exemple on aura deux droites qui se coupent, en faisant $d=0$ c.à.d. en prenant un plan passant par le sommet.

Enfin on aura un cercle en faisant $\alpha = 90° - \theta$.

Voyons qu'elle est la position du plan sécant dans les trois cas énoncés ci-dessus.

Pour que la section soit une ellipse, il faut que l'on ait

$$\sin(\alpha+2\theta) > 0;$$

Or l'angle $(\alpha+2\theta)$ ne peut pas être supérieur à 360°; il faut donc que l'on ait $(\alpha+2\theta) < 180°$.

Mais remarquons que, si par le point A, on mène une parallèle AX à la génératrice SB, la somme $(\alpha+2\theta) = 180°$; dans le cas actuel, il faut donc que la trace du plan sécant soit dans l'intérieur de l'angle SAX et par suite que le plan sécant ne rencontre que les génératrices d'une seule nappe.

Pour qu'une courbe soit une hyperbole, il faut que l'on ait

$$\alpha + 2\theta > 180°;$$

et par suite que le plan sécant rencontre les génératrices des deux nappes.

Enfin pour que l'on ait une parabole il faut que

$$\alpha + 2\theta = 180°$$

c.à.d. que le plan soit parallèle à un plan tangent au cône.

1002. Peut-on placer une conique donnée sur un cône droit donné? Nombre des solutions.

Remarquons que l'équation (I) représente la courbe rapportée à son sommet. Soient a, b les axes de la conique donnée, supposons que ce soit une ellipse; cette courbe rapportée à son centre a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

si on la rapporte à son sommet, elle aura pour équation

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ou

$$\text{(II)} \qquad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2;$$

ce qui peut s'écrire, en posant

$$\frac{b^2}{a} = p, \frac{b^2}{a^2} = q,$$

$$y^2 = 2px - qx^2.$$

Si la courbe était une hyperbole, on aurait

$$\text{(II bis)} \quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

ou

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Enfin l'équation de la parabole rapportée à son sommet est

$$y^2 = 2px.$$

Comparons ces courbes avec celle qui est donnée par l'équation (I). On pourrait de cette manière déterminer les axes des courbes de section.

Voyons si l'on peut déterminer d et α de manière à placer une conique donnée sur un cône donné.

Considérons d'abord l'ellipse (II); pourqu'elle coïncide avec la courbe (I), il faut que l'on ait :

$$(1) \qquad \frac{b^2}{a} = \frac{2d \sin\alpha \sin\theta}{\cos\theta},$$

$$(2) \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

D'après la relation (1) on voit qu'à une valeur de α correspond une valeur de d et une seule; donc il suffit d'étudier la relation (2), c.à.d. de voir si cette équation donne pour α des valeurs réelles.

La relation (2) se transforme successivement en les suivantes :

$$\sin\alpha \sin(\alpha + 2\theta) = \frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta;$$

ou

$$\cos 2\theta - \cos(2\alpha + 2\theta) = 2\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta;$$

ou, d'après la formule

$$(\cos 2A = 2\cos^2 A - 1),$$

$$2\cos^2\theta - 2\cos^2(\alpha + \theta) = 2\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta;$$

ou

$$\cos^2\theta\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \cos^2(\alpha + \theta)$$

et enfin

$$\text{(2 bis)} \qquad \cos^2(\alpha + \theta) = \frac{c^2}{a^2}\cos^2\theta.$$

Nous pouvons donc remplacer l'équation (2) par l'équation (2 bis); pour que cette équation donne pour α des valeurs réelles, il faut que le second membre soit < 1; or, dans le cas de l'ellipse, $c < a$; donc l'équation (2 bis) admet toujours des valeurs réelles pour α. Par suite, on peut toujours placer une ellipse donnée sur un cône droit donné.

Voyons maintenant si l'on peut y placer une hyperbole donnée; pour cela, identifions l'équation (II bis) avec l'équation (I) on obtient

$$(3) \qquad \frac{b^2}{a} = 2d\,\frac{\sin\alpha \sin\theta}{\cos\theta};$$

$$(4) \qquad \frac{b^2}{a^2} = -\frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

On voit d'après la relation (3), qu'à une valeur de α correspond une valeur de d et une seule; nous sommes ainsi amenés à étudier l'équation (4). En effectuant les mêmes transformations que ci-dessus, on voit qu'on peut remplacer l'équation (4) par

$$(4 \text{ bis}) \quad \cos^2(\alpha+\theta) = \frac{c^2}{a^2}\cos^2\theta.$$

Or, dans l'hyperbole, on a $c > a$; donc le second membre peut être >1. On ne peut donc pas toujours placer une hyperbole sur un cône donné. Pour qu'on puisse placer l'hyperbole, il faut que l'on ait

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\theta < 1;$$

ou, en valeur absolue

$$\frac{c}{a}\cos\theta < 1;$$

d'où

$$\cos\theta < \frac{a}{c}:$$

Mais $\frac{a}{c}$ a une signification particulière dans l'hyperbole; si φ est le demi-angle des asymptotes où est la courbe, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c};$$

il faut donc que l'on ait

$$\cos\theta < \cos\varphi,$$

ou $\theta > \varphi$ et par suite $2\theta > 2\varphi$.

Donc pour qu'on puisse placer une hyperbole donnée sur un cône droit donné, il faut que l'angle des asymptotes où se trouve la courbe soit plus petit que l'angle des génératrices de la section principale du cône.

1003. Cherchons le nombre des solutions.

Nous avons remarqué que, pour l'ellipse et pour l'hyperbole, à une valeur de α correspondait une seule valeur de d; nous n'avons donc qu'à nous occuper des équations (2 bis) (et 4 bis). Nous nous plaçons, bien entendu, dans le cas où il y a possibilité, il faut que l'on ait

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\theta < 1.$$

Nous poserons

$$\frac{c}{a}\cos\theta = \cos\varphi,$$

nous prendrons pour φ la valeur inférieure à 90° qui satisfait à cette relation. L'équation (2 bis) ou (4 bis) devient alors

$$\cos^2(a+\theta) - \cos^2\varphi = 0;$$

ou

$$[\cos(\alpha+\theta)+\cos\varphi][\cos(\alpha+\theta)-\cos\varphi] = 0;$$

ou enfin

$$(5) \qquad \sin\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\alpha+\theta-\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\alpha+\theta-\varphi}{2} = 0.$$

Cherchons le nombre des solutions de cette équation. — Pour cela, il faut se rappeler que θ est un angle positif $<90°$, que φ est aussi un angle positif que l'on a choisi $<90°$, et enfin que $0° \leq \alpha \leq 180°$. — Pour que le premier facteur $\sin\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2}$ soit nul, il faut que $\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2} = 180°$, mais cela ne peut avoir lieu, car $(\alpha+\theta+\varphi)$ ne peut pas atteindre 360°, puisque θ est toujours plus petit que 90°. Pour que $\sin\frac{\alpha+\theta-\varphi}{2}$ soit nul, il faut que l'on ait

$$\alpha+\theta-\varphi = 0.$$

Pour que $\cos\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2} = 0$ il faut que $\frac{\alpha+\theta+\varphi}{2} = 90°$ ou 270°; or $(\alpha+\theta+\varphi)$ ne peut pas dépasser 360° donc il faut que l'on ait,

$$\alpha + \theta + \varphi = 180°.$$

Enfin, pour que $\cos\frac{\alpha+\theta-\varphi}{2} = 0$, il faut encore que l'on ait

$$\alpha + \theta - \varphi = 180°;$$

car φ étant inférieur à $90°$, l'excès de φ sur $(\alpha+\theta)$ ne peut pas être égal à $360°$.

Nous trouvons ainsi les trois solutions;

$$(1°)\quad \alpha+\theta-\varphi = 0,$$

$$(2°)\quad \alpha+\theta+\varphi = 180°,$$

$$(3°)\quad \alpha+\theta-\varphi = 180°;$$

voyons combien appartiennent à l'ellipse, et combien appartiennent à l'hyperbole.

Pour qu'une solution convienne à l'ellipse, il faut qu'elle vérifie les deux inégalités

$$\begin{cases} 180° > \alpha > 0, \\ \alpha + 2\theta < 180°. \end{cases}$$

La première solution donne $\alpha = \varphi - \theta$;

pour que α soit positif, il faut que l'on ait

$$\varphi > \theta;$$

or φ et θ sont $< 90°$; si nous prenons les cosinus, on devra avoir

$$\cos\varphi < \cos\theta, \text{ ou } \frac{c}{a}\cos\theta < \cos\theta;$$

ce qui a lieu, puisque $c < a$.

D'autre part, $\alpha + 2\theta = \varphi + \theta < 180°$;

donc la première solution convient à l'ellipse.

La deuxième solution donne

$$\alpha = 180° - \varphi - \theta.$$

valeur toujours positive; d'autre part

$$\alpha + 2\theta = 180° - \varphi + \theta;$$

or, on a $\varphi > \theta$; donc $\alpha + 2\theta < 180°$.

Cette deuxième solution convient encore à l'ellipse.

Enfin d'après la 3ème solution on a:

$$\alpha = 180° + \varphi - \theta;$$

cette valeur est positive, mais supérieure à $180°$; d'ailleurs

$$\alpha + 2\theta = 180° + \varphi + \theta > 180°;$$

donc la troisième solution ne convient pas à l'ellipse.

Pour que les solutions conviennent à l'hyperbole il faut que α soit positif et inférieur à $180°$, et que l'on ait

$$\alpha + 2\theta > 180°.$$

La première solution donne $\alpha = \varphi - \theta$,

d'où $\alpha + 2\theta = \varphi + \theta < 180°$,

cette solution ne convient donc pas.

De la deuxième solution on tire $\alpha = 180° - \varphi - \theta$;

par suite $\alpha + 2\theta = 180° - \varphi + \theta$;

or, on a $\theta > \varphi$; en effet θ et φ étant $< 90°$ il faut vérifier que l'on a, $\cos\theta < \cos\varphi$

$$\text{ou } \cos\theta < \frac{c}{a}\cos\theta;$$

mais dans l'hyperbole $c > a$; donc cette inégalité est toujours vérifiée; par suite $\alpha + 2\theta > 180°$; la deuxième solution convient à l'hyperbole.

Enfin la troisième solution fournit

$$\alpha = 180° + \varphi - \theta,$$

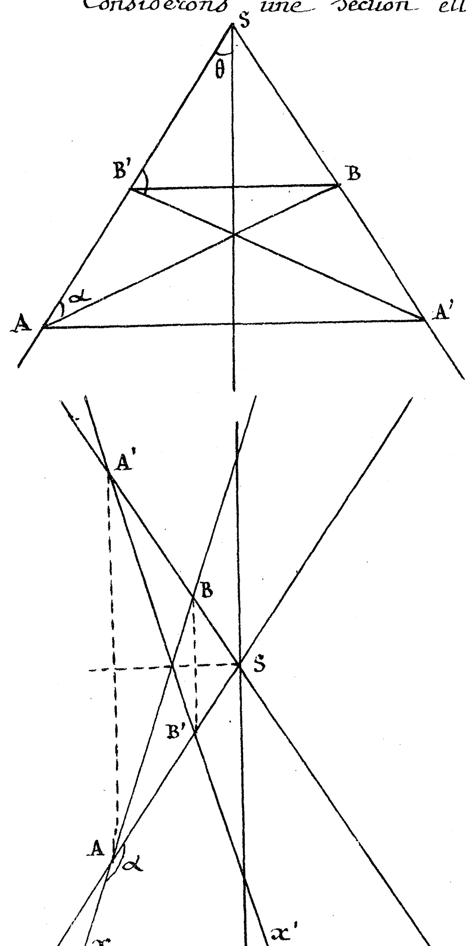
valeur inférieure à 180° puisque $\theta > \varphi$; on en déduit

$$\alpha + 2\theta = 180° + \varphi + \theta > 180° ;$$

la troisième solution convient aussi à l'hyperbole.

Nous trouvons donc deux solutions pour l'ellipse ainsi que pour l'hyperbole ; voyons si elles sont réellement distinctes ; car on ne doit pas regarder comme distinctes les solutions qui donnent pour le plan sécant des positions symétriques par rapport à l'axe.

Considérons une section elliptique ; soit la ligne AB faisant l'angle $\alpha = \varphi - \theta$ donné par la première solution ; la deuxième solution fournira une position symétrique pour le plan sécant, position qu'on obtiendrait en faisant tourner le plan de 180°. En effet, de A et B abaissons les perpendiculaires AA', BB' sur l'axe ; la droite A'B' symétrique de AB correspond précisément à la deuxième solution. Car



$$SB'A' = SBA = 180° - (\varphi - \theta) - 2\theta ;$$

donc $$SB'A' = 180° - \varphi - \theta ;$$

ce qui est la deuxième solution.

De même pour l'hyperbole, soit AB faisant l'angle SAx

ou $$\alpha = 180° + \varphi - \theta ;$$

par les points A et B menons les parallèles AA', BB' à l'axe ; la ligne symétrique A'B' correspond à la première solution.

En effet $$SB'x' = 180° - A'B'S$$

d'où $$SB'x' = 180° - 2\theta + 180° - (180° + \varphi - \theta)$$

d'où

$$SB'x' = 180° - \varphi - \theta .$$

Ce qui est bien la valeur de l'angle donnée par la première solution concernant l'hyperbole.

Donc on ne peut placer que d'une seule manière une ellipse ou une hyperbole donnée sur un cône droit donné.

1004. Occupons nous maintenant de la parabole ; en identifiant son équation $y^2 = 2px$ avec l'équation (I) on a

$$p = \frac{d \sin\alpha \sin\theta}{\cos\theta},$$

et

$$0 = \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

La première relation montre qu'à une valeur de α correspond une seule valeur de d ; et la deuxième relation se réduit à

$$\sin(\alpha + 2\theta) = 0.$$

Elle donne

$$\alpha + 2\theta = 180°,$$

puisque α et θ sont positifs ; d'où

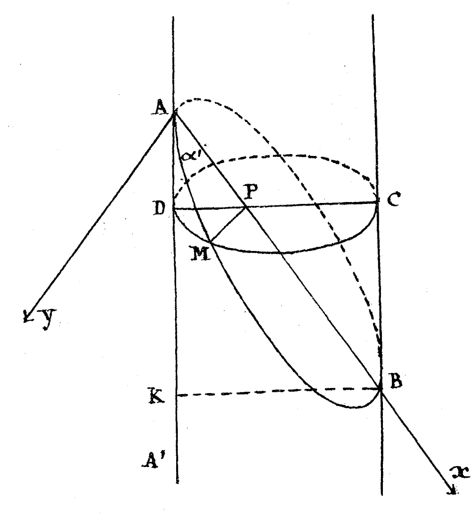
$$\alpha = 180° - 2\theta ;$$

on n'a donc qu'une valeur pour α et par suite une seule pour d.

Ainsi une parabole donnée peut toujours se placer sur un cône droit donné, et ne peut s'y placer que d'une seule manière.

II°. Section du Cylindre droit.

1005. Considérons la section principale perpendiculaire au plan sécant, soit AB la trace du plan sécant sur cette section. Prenons AB pour axe des x, et pour axe des y une perpendiculaire à AB menée au point A dans le plan sécant. Soit M un point de la section; par le point M menons un plan perpendiculaire aux génératrices, lequel coupe le plan sécant suivant MP perpendiculaire au plan de la section et par suite à AB, et le cylindre suivant un cercle dont CD est le diamètre; par conséquent, $MP = y$, $AP = x$. Or dans le cercle CMD, on a



$$\overline{MP}^2 = DP.PC, \quad \text{ou } y^2 = DP.PC.$$

Mais $DP = x \sin\alpha$, en désignant par α l'angle de AB avec la génératrice AA'. Évaluons CP; on a

$$CP = DC - DP = 2r - x\sin\alpha;$$

donc

$$y^2 = x\sin\alpha(2r - x\sin\alpha),$$

ou

$$(I) \qquad x^2\sin^2\alpha + y^2 - 2rx\sin\alpha = 0;$$

équation d'une ellipse. On obtient un cercle lorsque $\alpha = 90°$.

Déterminons les axes de l'ellipse; le grand axe est AB, et le petit axe est le diamètre de la base du cylindre.

En effet, dans l'équation de l'ellipse, laquelle est rapportée à son axe et à la tangente au sommet, faisons $y=0$; on obtient pour la longueur de l'axe dirigé suivant l'axe des x

$$\frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Or si l'on mène BK parallèle à CD, on a

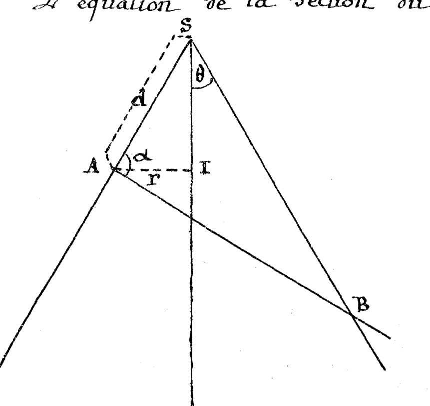
$$BK = AB\sin\alpha, \quad \text{ou } AB = \frac{2r}{\sin\alpha};$$

AB est donc le grand axe.

Si maintenant on fait $x = \frac{r}{\sin\alpha}$ $\left(\frac{r}{\sin\alpha}\text{ est l'abscisse du centre}\right)$, on obtient $y^2 = r^2$; $2r$ est donc le petit axe. Ces résultats sont évidents à priori.

Donc pourqu'une ellipse puisse être placée sur un cône droit donné, il faut que son petit axe soit égal au diamètre du cylindre.

1006. L'équation de la section du cylindre peut se déduire de celle du cône, en regardant un cylindre comme un cône dont l'angle au sommet est nul, l'un des points de la surface conique restant à une distance fixe de l'axe.



Nous avons trouvé pour équation de la section du cône droit

$$y^2 = 2d\frac{\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\theta)}{\cos^2\theta}x^2.$$

Du point A abaissons AI perpendiculaire sur l'axe, et supposons la ligne AI fixe et égale à r; le triangle rectangle AIS donne

$$r = d\sin\theta.$$

Remplaçons $d\sin\theta$ par cette valeur, l'équation de la section devient

$$y^2 = \frac{2r\sin\alpha}{\cos\theta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\theta)}{\cos^2\theta}x^2.$$

Introduisons maintenant l'hypothèse $\theta = 0$, il vient

$$y^2 + x^2\sin^2\alpha - 2r\sin\alpha . x = 0;$$

c'est l'équation déjà trouvée (I). –

III.° Equation de la section d'un cône circulaire oblique.

1007. Menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire à la base soit USV la section résultante, qu'on nomme section principale; prenons cette section pour plan du tableau. Soit TT' la trace du plan sécant sur le plan de la base du cône; du point O, centre du cercle, abaissons la perpendiculaire OG sur cette trace TT'. Par cette perpendiculaire et le sommet du cône menons un plan, lequel coupera le cône suivant les deux générations SA_1, SB_1; les angles SB_1A_1 et SA_1B_1 sont connus, puisque le cône est donné; nous poserons

$$\widehat{SA_1B_1} = \alpha_1\ ,\ \widehat{SB_1A_1} = \beta_1\ .$$

Le plan SA_1B_1 coupera le plan sécant suivant une droite GAB, et le plan sécant sera complètement déterminé, si on joint, à la connaissance de la trace TT', celle de la droite AB. Nous poserons

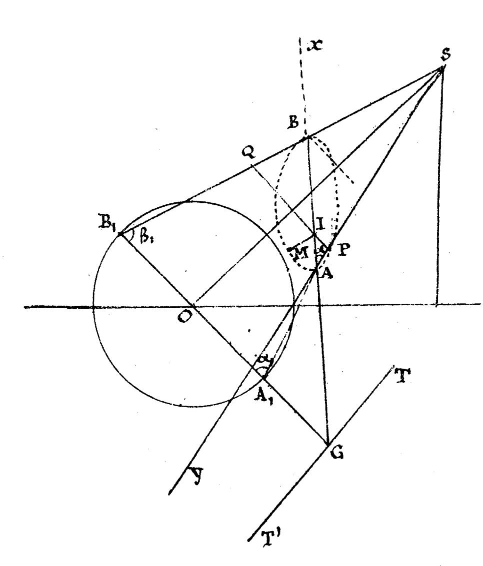
$$AS = d,\ SAB = \alpha,$$

la droite AB sera connue; le point G où elle percera le plan de la base déterminera la position de la trace TT' dont il suffira alors de connaître la direction.

Ceci posé, prenons pour axe des x la droite AB, et pour axe des y une droite menée par le point A parallèlement à TT'.

Soit M un point de la section; par le point M menons un plan parallèle au plan de la base; ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre est PQ; il coupera le plan sécant suivant une droite MI parallèle à TT' et, par suite, perpendiculaire à PQ; on aura donc

$$(1) \qquad \overline{MI}^2 = IP . IQ .$$



Or MI est l'y du point M, et IA en est l'x.

Dans le triangle IAP, on a

$$\frac{IP}{IA} = \frac{\sin\widehat{SAB}}{\sin\widehat{QPS}} = \frac{\sin\widehat{SAB}}{\sin\widehat{B_1A_1S}};\ \text{d'où}\ IP = x\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}.$$

D'un autre côté, on a successivement

$$IQ = PQ - IP;$$

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\beta_1},\ PS = AS - AP = d - AP;$$

$$\frac{AP}{AI} = \frac{\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin\alpha_1}.$$

On conclut de ces égalités:

$$IP = x\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1},\ IQ = d\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\beta_1} - x\frac{\sin\alpha\sin\beta_1 + \sin(\alpha_1+\beta_1)\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin\beta_1\sin\alpha_1}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (1), on trouve pour l'équation de la section du cône:

$$(1) \qquad y^2 = d\frac{\sin\alpha\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\alpha_1\sin\beta_1}x - \frac{\sin^2\alpha\sin\beta_1 + \sin(\alpha_1+\beta_1)\sin(\alpha_1-\alpha)\sin\alpha}{\sin^2\alpha_1\sin\beta_1}x^2;$$

c'est l'équation d'une conique; la droite AB est un diamètre, et Ay est parallèle au diamètre conjugué de AB.

---

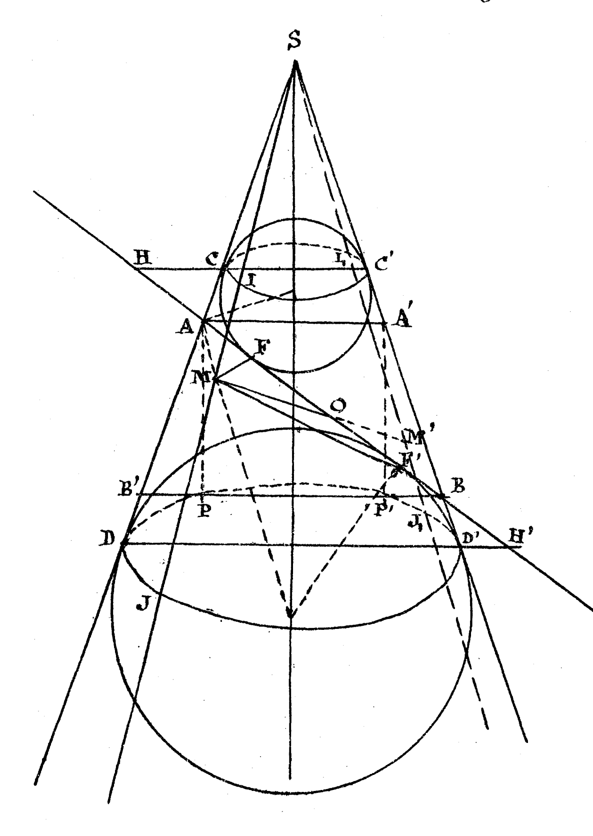
§II. Sections planes du cône et cylindre droits.

Méthode Géométrique.

1°. Section du cône droit. — Section Elliptique.

1008. Prenons d'abord la section du cône droit dans le cas où le plan sécant rencontre toutes les génératrices d'une même nappe.

Choisissons pour plan de la figure, la section principale perpendiculaire au plan sécant; soit AB la trace du plan sécant sur cette section principale. Décrivons le cercle tangent aux trois côtés SA, AB, SB; et le cercle tangent aux trois côtés AB, AD, BD'; soient F et F' les points de contact avec AB.



Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe, on engendrera un cône tangent aux deux sphères décrites par les circonférences, et les plans de contact seront perpendiculaires à l'axe du cône; de plus les sphères seront tangentes au plan sécant aux points F et F'.

Soit M un point de la section; joignons-le aux points F et F' et menons la génératrice SM, laquelle rencontre les cercles de contact des sphères avec le cône en I et J.

On a $MF = MI$, car ce sont des tangentes menées d'un même point à la sphère CC'; de même $MF' = MJ$; par conséquent

$$MF + MF' = MI + MJ = IJ = CD = 2a.$$

Donc la courbe est une ellipse ayant F et F' pour foyers, AB pour axe focal, A et B pour sommets.

Pour déterminer les lignes qui représentent les éléments de la conique, menons BB' et AA' perpendiculaires à l'axe du cône; on a d'abord $AB = CD$. Car

$$CA = AF,\ AD = AF';\ BD' = BF',\ BC' = BF;$$

par suite: $CD = CA + AD = AF + AF'$; $CD = C'D' = BD' + BC' = BF' + BF$;

d'où l'on conclut, en ajoutant ces dernières égalités

$$(1°)\qquad 2CD = 2AB,\ \text{ou}\ CD = AB = 2a.$$

On a, en second lieu

$$AB' = CD - CA - B'D = AB - AF - BD' = AB - AF - BF' = FF';$$

ainsi

$$(2°)\qquad AB' = A'B = FF' = 2c.$$

Nous allons démontrer maintenant que le petit axe est une moyenne proportionnelle entre AA' et BB'.

En effet, dans le triangle ABB' on a:

$$\overline{AB}^2 = 4a^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BB'}^2 - 2BB'.B'P,$$

ou

$$4a^2 = 4c^2 - 2BB'.B'P + \overline{BB'}^2.$$

Mais

$$2B'P = BB' - AA';$$

donc

$$4a^2 = 4c^2 - \overline{BB'}^2 - AA'.BB' + \overline{BB'}^2;$$

ou

$$4(a^2 - c^2) = AA'.BB';$$

ou enfin

$$(3°)\qquad (2b)^2 = AA' . BB'.$$

Pour avoir les pieds des directrices, prolongeons CC' jusqu'à sa rencontre en H avec AB; prolongeons de même DD' jusqu'en H'; H et H' sont les pieds des directrices.

En effet, les deux triangles semblables AHC, ABB' donnent

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a};\ \text{or } AC = AF;$$

par suite

$$(4°)\qquad \frac{AF}{AH} = \frac{c}{a};\ \text{de même } \frac{BF'}{BH'} = \frac{c}{a};$$

H et H' sont donc les pieds des directrices.

Remarque. Si l'on joint le sommet S du cône aux deux extrémités M et M' d'un diamètre quelconque de la section, la somme (SM + SM') est constante.—

Joignons SM et SM', soient I et J, I_1 et J_1 les intersections respectives de ces arêtes avec les cercles de contact; on a

$$SM = SI + IM = SI + MF = SC + MF;$$
$$SM' = SI_1 + IM'_1 = SI_1 + M'F = SC + M'F;$$

or le quadrilatère MM'FF' est un parallélogramme; donc

$$M'F = MF';$$

et par suite

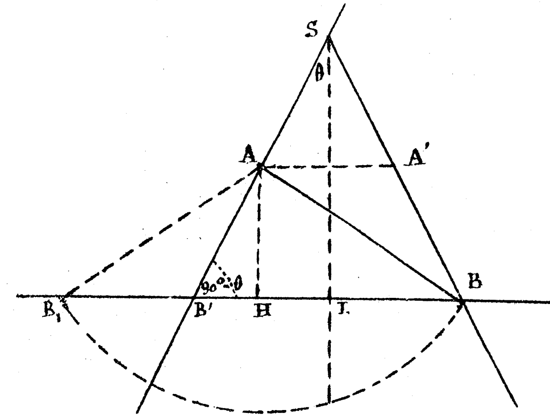
$$SM + SM' = 2SC + MF + MF' = 2SC + 2a = \text{Constante};$$

c'est la proposition énoncée.

1009. Placer une ellipse donnée sur un cône droit donné.

L'ellipse étant donnée, nous pouvons supposer connue la distance focale 2c, et le grand axe 2a.

Si nous nous reportons à la figure précédente, nous voyons que dans le triangle ABB', AB = 2a, AB' = 2c et l'angle AB'B est complémentaire de l'angle au sommet du cône; nous pouvons construire ce triangle ABB'. Pour cela prenons AB' = 2c, menons une droite B'H faisant avec AB' l'angle (90° − θ); puis, du point A comme centre, décrivons une circonférence avec 2a comme rayon, laquelle coupe B'H en deux points B et B_1; le triangle BAB' ainsi construit permet de résoudre la question; car si au point I milieu de BB', on élève une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre avec AB' en S, S sera le sommet du cône dont l'angle au sommet est θ et sur lequel se trouve l'ellipse donnée. Le triangle $AB'B_1$ correspondant au second point B_1 est égal au triangle ABA'; car



$$\text{l'angle } AB_1B' = ABB' = BAA',\ \text{et l'angle } B_1B'A' = B'AA' = AA'B;$$

ce second triangle donnera donc le même cône avec la même section elliptique.

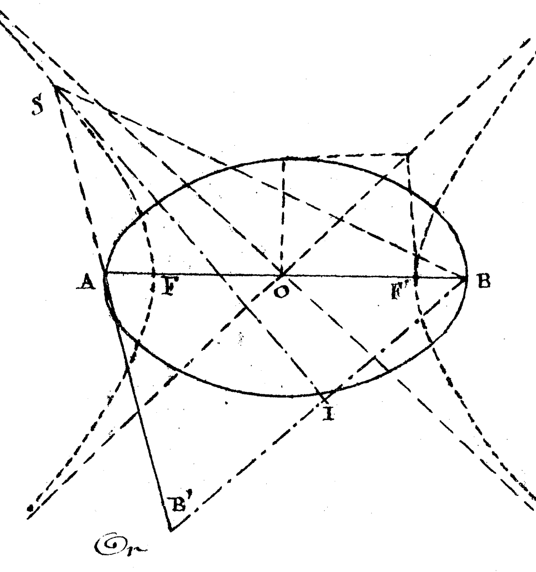
Pour que le triangle soit possible, il faut que

$$AB > AH,\ \text{ou } a > c\cos\theta,\ \text{puisque } AH = AB'\cos\theta;$$

or cette condition est toujours remplie pour l'ellipse.

Remarque. Cette construction nous permet de résoudre la question suivante.

Trouver le lieu des sommets des cônes droits passant par une ellipse donnée.



Prenons le plan de l'ellipse pour plan horizontal, et déterminons, par la construction précédente, le sommet d'un cône droit quelconque passant par cette ellipse. La section principale, perpendiculaire au plan de l'ellipse, passe par l'axe focal; donc les sommets sont dans le plan vertical mené par la droite AB. Dans ce plan vertical traçons une droite $AB' = FF' = 2c < 2a$ faisant un angle arbitraire avec AB, puis élevons une perpendiculaire à BB' en son milieu; l'intersection de cette perpendiculaire avec le prolongement de B'A donnera le sommet S d'un cône droit passant par l'ellipse donnée; SI sera l'axe de ce cône

Or

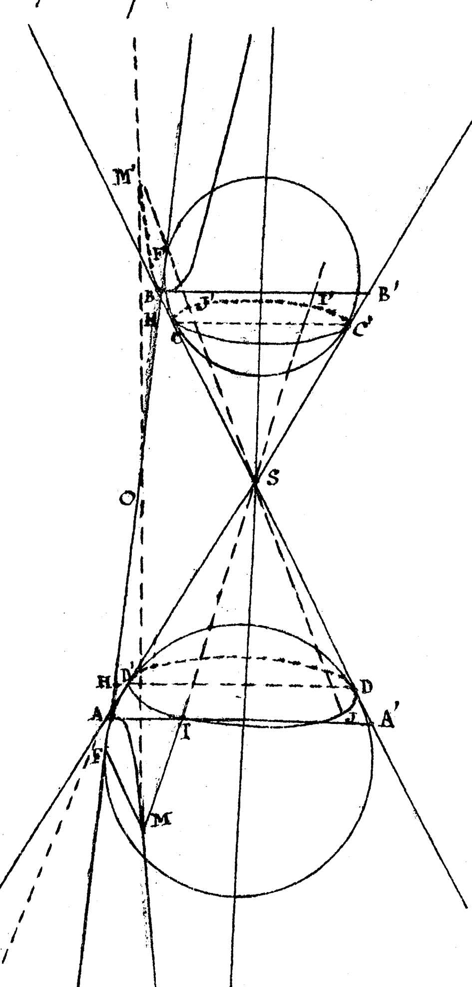
$$SB - SA = SB' - SA = AB' = 2c;$$

donc le lieu des sommets S est une hyperbole ayant pour foyers les sommets A et B de l'ellipse et pour sommets les foyers F et F', puisque la longueur de l'axe transverse est égale à 2c.

En outre, l'axe SI du cône, étant bissectrice de l'angle formé par les rayons focaux SA, SB, est une tangente à l'hyperbole; donc l'axe du cône droit est la tangente à l'hyperbole au point où se trouve le sommet du cône.—

II° Section hyperbolique.

1010. Supposons maintenant que le plan sécant rencontre les deux nappes du cône. Prenons encore pour plan de la figure le plan de la section principale perpendiculaire au plan sécant. Après avoir effectué les constructions indiquées dans le cas de l'ellipse, on voit immédiatement que, si M est un point quelconque de la courbe, on a



$$MF' - MF = MI' - MI = II' = CD;$$

donc la différence des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux points F et F' est constante; par suite la courbe est une hyperbole ayant pour foyers ces deux points.

L'axe transverse de l'hyperbole est AB; les deux sommets sont les points A et B. On a d'abord (voir la démonstration pour le cas de l'ellipse)

$$(1°) \quad AB = CD = 2a.$$

La distance focale FF' est représentée par AB'; en effet

$$2c = FF' = AB + AF + BF'.$$

Or $AF = AD'$, et $BF' = BC = B'C'$; donc

$$(2°) \quad AB' = 2C = A'B.$$

La longueur de l'axe imaginaire 2b est une moyenne proportionnelle entre AA' et BB'

$$(3°) \quad 2b = \sqrt{AA'.BB'}.$$

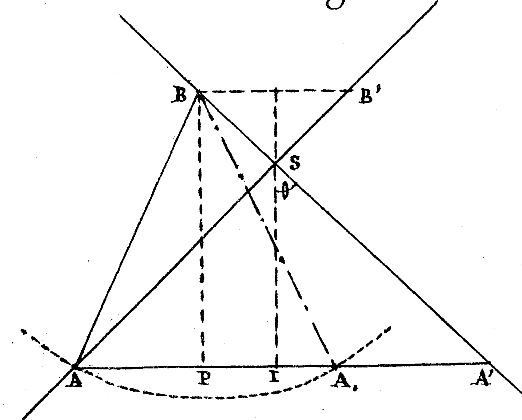
Les pieds des deux directrices sont les points H et H';
on le démontre comme pour l'ellipse.

Remarque. Si l'on joint le sommet S du cône aux deux extrémités M et M' d'un diamètre quelconque de la section, la différence (SM − SM') est constante.

Soient I et I', J et J' les intersections des arêtes SM et SM' avec les cercles de contact des sphères; on a

$$SM = SI + IM = SI + MF,$$
$$SM' = SJ' + J'M' = SI' + M'F';$$
or
$$MF = M'F'$$
donc
$$SM - SM' = SI - SI' = \text{Constante};$$
c'est la proposition énoncée.

1011. Placer une hyperbole donnée sur un cône droit donné.



L'hyperbole et le cône étant donnés, alors, dans le triangle ABA', on connait AB qui est égal à 2a, A'B qui est égal à 2c, et l'angle BA'A qui est le complément de l'angle des génératrices du cône avec l'axe.
On construira donc ce triangle en prenant sur une droite quelconque une longueur $A'B = 2c$, puis en menant la droite AA' telle que $BA'A = (90° - \theta)$; alors du point B comme centre avec 2a pour rayon, on décrit un cercle, lequel coupe AA' en A et A_1; AB est le troisième côté du triangle. Le sommet du cône sera l'intersection de A'B avec la perpendiculaire élevée à AA' par son milieu.

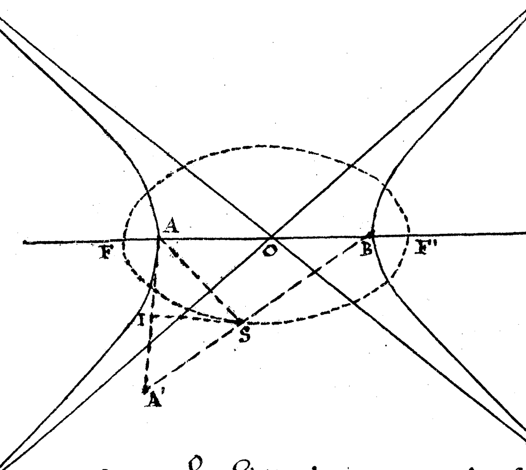
Pour que le problème soit possible, il faut que la ligne BP soit plus petite que le côté AB, ce qui revient à dire que l'on ait

$$AB > A'B \cos\theta, \quad \text{ou } a > c\cos\theta, \quad \text{ou enfin } \cos\theta < \frac{a}{c};$$

condition qui exprime que l'angle au sommet du cône doit être plus grand que l'angle des asymptotes de l'hyperbole.

Le triangle BA_1A' correspondant au second point A_1, est égal au triangle BAB'; car les côtés $BA_1 = BA$, $BA' = B'A$, l'angle $BB'A = BA'A$, ; $\widehat{BAB'} = \widehat{BAA_1} - 90° + \theta$; $\widehat{A'BA_1} = \widehat{AA_1B} - 90° + \theta$; or $\widehat{AA_1B} = \widehat{BAA_1}$; donc l'angle $BAB' = A'BA_1$. Le second triangle A_1BA' donnera donc le même cône avec la même section hyperbolique.

Remarque. Lieu des sommets des cônes droits passant par une hyperbole donnée.



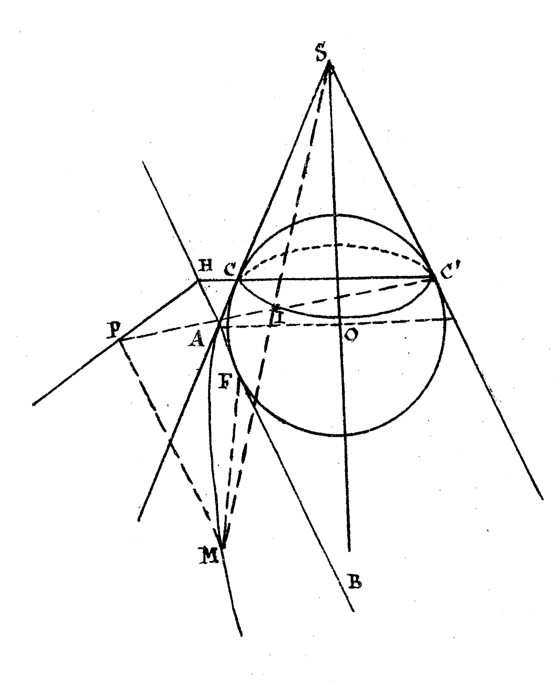
Prenons le plan de l'hyperbole pour plan horizontal et déterminons, par la construction précédente; le sommet d'un cône droit quelconque passant par cette hyperbole. La section principale, perpendiculaire au plan de l'hyperbole, passe par l'axe transverse; donc les sommets sont dans le plan vertical mené par la droite AB. Dans ce plan vertical, traçons une droite $BA' = FF' = 2c > 2a$ faisant un angle arbitraire avec BA; puis élevons une perpendiculaire à AA' en son milieu; l'intersection de cette perpendiculaire avec BA' donnera le sommet S d'un cône droit passant par l'hyperbole donnée; SI sera l'axe du cône. Or

$$SB + SA = SB + SA' = BA' = 2C;$$

donc le lieu des sommets S est une ellipse ayant pour foyers les sommets A et B de l'hyperbole, et pour sommets les foyers F et F', puisque la longueur de l'axe focal de l'ellipse est égale à 2C. En outre, l'axe SI du cône, étant bissectrice de l'angle formé par les rayons focaux SA et SA', est tangent à l'ellipse; donc l'axe du cône droit est la tangente à l'ellipse au point où se trouve le sommet du cône.

III.° Section parabolique.

1012. Supposons que la droite AB soit parallèle à l'une des arêtes SC' de la section principale du cône perpendiculaire au plan sécant; dans ce cas, la section est une parabole; en effet, décrivons le



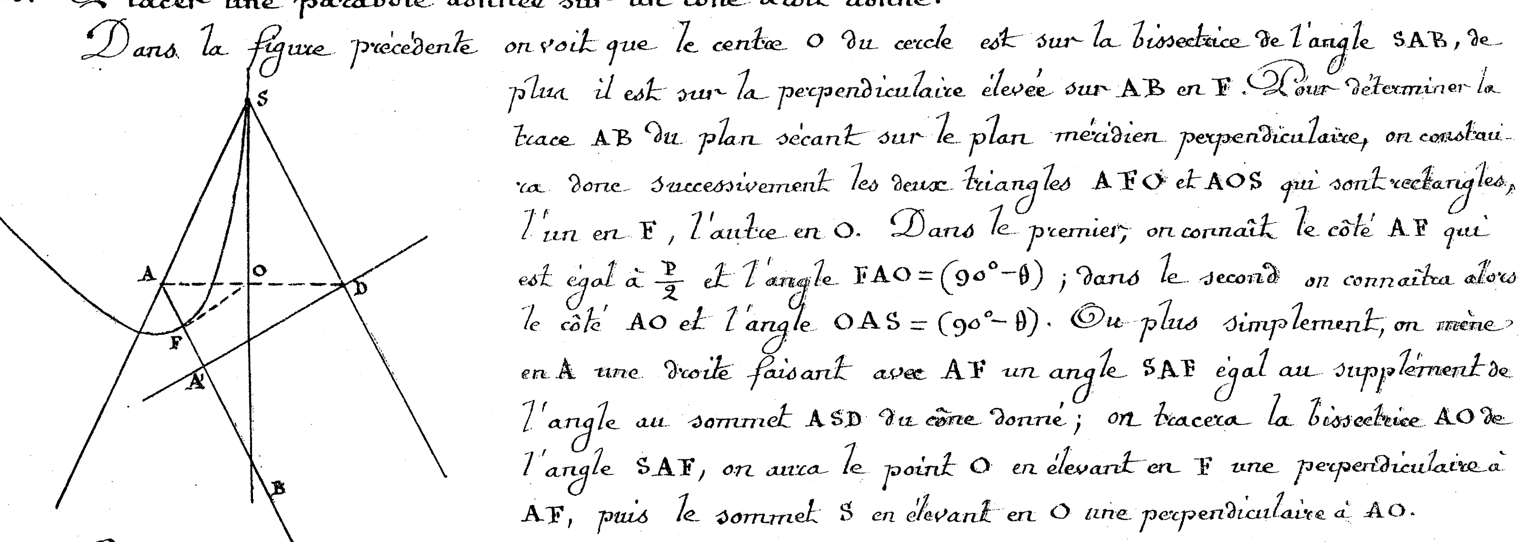
cercle tangent aux trois droites SC, SC' et AB; alors la sphère ayant son centre sur l'axe du cône et passant par ce cercle sera tangente au cône suivant le cercle CIC', et au plan sécant, au point F. Or soit M un point quelconque de la section, joignons MF et menons MP perpendiculaire à la droite d'intersection PH du plan sécant avec le plan CIC'; on aura MF = MP. En effet, les deux droites SC' et MP étant toutes deux parallèles à AB sont parallèles entre elles, donc elles sont dans le même plan; les deux droites joignant les points S et M, P et C' sont aussi dans un même plan, et par conséquent se rencontrent; de plus, SM coupe le cercle CIC' en un point qui doit évidemment être situé sur la droite d'intersection du plan SC'M avec le plan PCC', c. à d. sur la droite PC'; ainsi les deux droites SM et PC' se coupent au même point I du cercle de contact du cône avec la sphère. Cela posé, les deux triangles PMI et SIC' sont semblables, mais comme SIC' est isocèle, il en est de même de PMI; donc on a

$$PM = MI, \text{ ou } MP = MF;$$

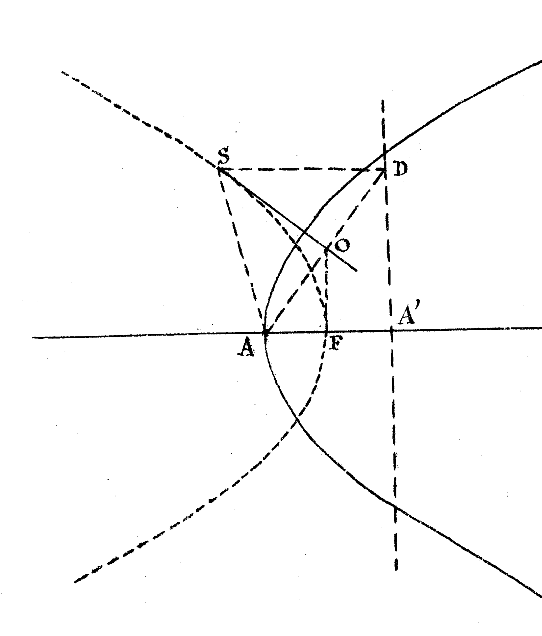
donc la courbe de section est une parabole ayant pour foyer le point F, pour directrice la droite HP et pour axe AF.

1013. Placer une parabole donnée sur un cône droit donné.

Dans la figure précédente on voit que le centre O du cercle est sur la bissectrice de l'angle SAB, de plus il est sur la perpendiculaire élevée sur AB en F. Pour déterminer la trace AB du plan sécant sur le plan méridien perpendiculaire, on construira donc successivement les deux triangles AFO et AOS qui sont rectangles, l'un en F, l'autre en O. Dans le premier, on connaît le côté AF qui est égal à $\frac{p}{2}$ et l'angle $FAO = (90° - \theta)$; dans le second on connaîtra alors le côté AO et l'angle $OAS = (90° - \theta)$. Ou plus simplement, on mène en A une droite faisant avec AF un angle SAF égal au supplément de l'angle au sommet ASD du cône donné; on tracera la bissectrice AO de l'angle SAF, on aura le point O en élevant en F une perpendiculaire à AF, puis le sommet S en élevant en O une perpendiculaire à AO.



Remarque. Lieu des sommets des cônes droits passant par une parabole donnée.

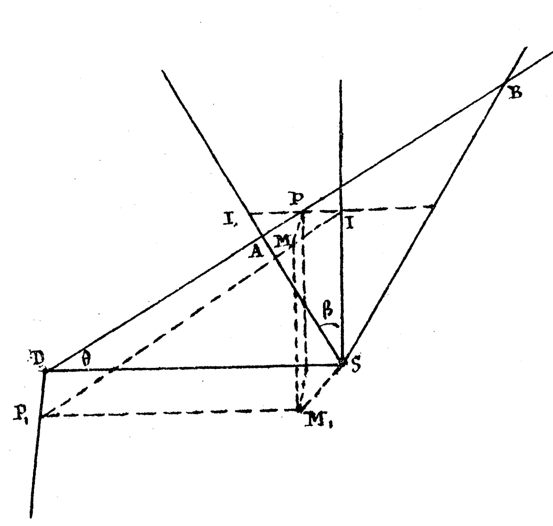


La construction du triangle OAF étant effectuée, le sommet S est à l'intersection de la droite OS perpendiculaire à OA et de AS faisant avec OA un angle égal à FAO. Alors si nous prenons FA' = FA, et, si en A' nous élevons une perpendiculaire à AB, cette droite passera par le point D, puisque AO = OD et que AF = A'F; mais de plus SD sera perpendiculaire à A'D; et quel que soit l'angle FAO, c. à d. quel que soit l'angle au sommet du cône, on aura toujours la relation SA = SD; donc le lieu du point S est une parabole ayant pour foyer le sommet A et pour sommet le foyer F de la parabole considérée. La directrice est la droite A'D.

Les axes de tous les cônes passant par la parabole donnée sont tangents au lieu trouvé et le point de contact est le sommet correspondant.

En effet l'axe OS, par exemple, fait avec le rayon AS et la droite SD perpendiculaire à la directrice deux angles ASO, DSO qui sont égaux, donc OS est tangente à la parabole au point S.

1014. La projection de la section d'un cône droit sur un plan passant par le sommet et perpendiculaire à l'axe, a pour foyer le sommet et pour directrice l'intersection des deux plans.



Prenons pour plan de la figure la section principale du cône perpendiculaire au plan sécant, soit AB la trace de ce plan, M un point de la section, et PI la trace du plan passant par ce point et perpendiculaire à l'axe du cône; soit enfin M_1 la projection du point M sur le plan passant par le sommet perpendiculaire à l'axe du cône et M_1P_1 la distance de ce point à l'intersection DP_1 des deux plans.

Calculons le rapport $\frac{M_1S}{M_1P_1}$. Désignons par β l'angle au sommet du cône, on a dans les triangles MP_1M_1 et MSM_1 :

$$MM_1 = M_1P_1 \text{ tang } \theta ; \quad MM_1 = M_1S \cdot \frac{1}{\text{tang } \beta} ;$$

d'où l'on conclut en divisant membre à membre :

$$\frac{M_1S}{M_1P_1} = \text{tang } \theta \cdot \text{tang } \beta = \text{constante}.$$

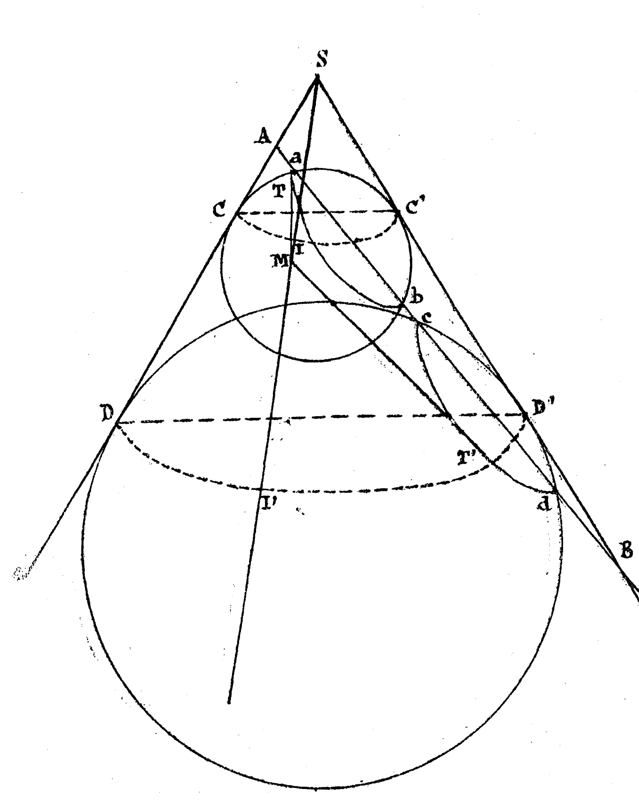
Ce qui démontre la proposition.

Dans le cas de la parabole, $\beta + \theta = \frac{\pi}{2}$; on a alors

$$\frac{M_1S}{M_1P_1} = 1.$$

IV°. Propriétés des cercles focaux.

1015. Nous retrouvons encore par la géométrie les propriétés des cercles focaux.



Soit AB la trace d'un plan sécant; imaginons des sphères inscrites dans le cône, coupant le plan sécant suivant deux cercles ab, cd ; soit M un point de la section conique, joignons SM ; soient I et I' les intersections de cette droite avec les cercles de contact des sphères; soient enfin MT, MT' les tangentes aux cercles ab, cd ; on a

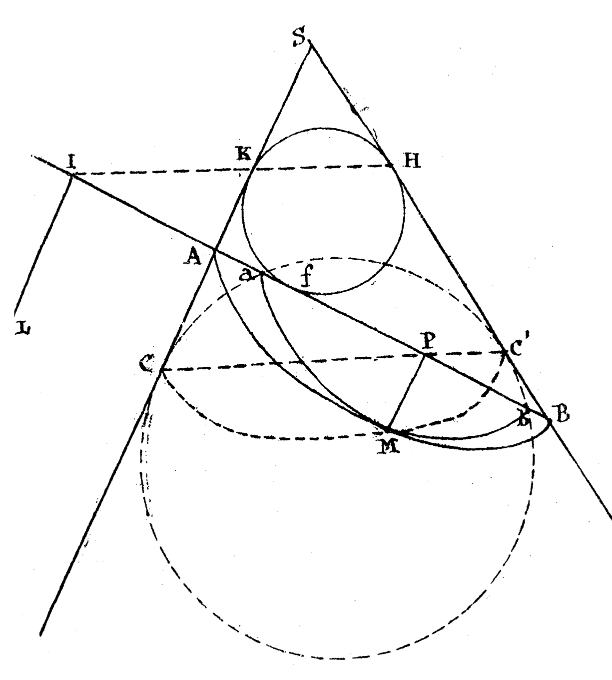
$$MT = MI, \quad MT' = MI' ;$$

donc $\quad MT + MT' = II' = CD ;$

le lieu étant une conique, comme nous l'avons vu, nous trouvons ainsi cette propriété que le lieu des points dont la somme des distances à deux cercles fixes est constante, est une section conique. Ces cercles ont été appelés cercles focaux.

Nous allons démontrer que les cercles focaux sont doublement tangents à la conique.

Considérons une des sphères inscrites au cône telle que la trace CC' de son cercle de contact rencontre la droite AB en un point situé entre A et B ; cette sphère coupe le plan sécant suivant un cercle ab qui est un cercle focal. Or le plan sécant et le plan du cercle de contact se coupent suivant la droite MP perpendiculaire à AB et CC' ; le point M est un point de la section conique et du cercle focal.



Mais le plan tangent en ce point au cône et à la sphère coïncident ; donc les tangentes à la section conique et au cercle focal se confondent. Il en est de même du point symétrique de M par rapport au plan de la section principale ; donc la conique et le cercle focal sont doublement tangents ; la corde de contact est MP. Si la sphère devient tangente au plan sécant, le point de contact f, qui est le foyer de la section conique, est encore un cercle focal mais de rayon nul ; le double contact subsiste encore ; IL est la corde de contact ; c'est la droite que nous avons démontré être la directrice.

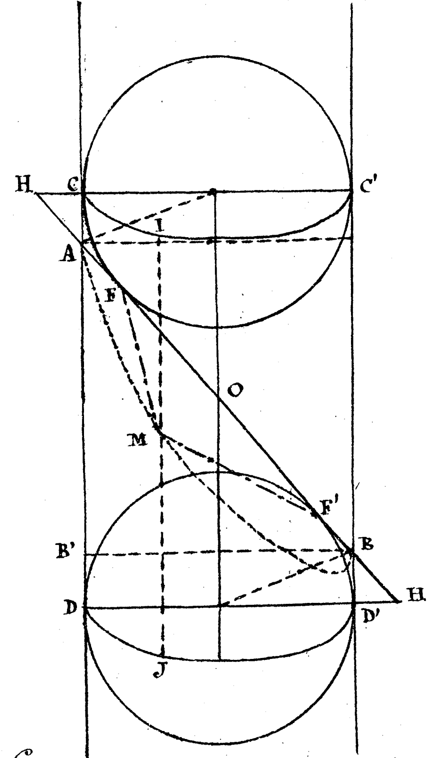
Nous retrouvons ainsi par la géométrie cette définition des foyers dans les coniques :

« Le foyer est un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique « aux points où elle est rencontrée par la directrice.

Lorsque la droite CC' ne rencontre pas la trace AB entre A et B, le contact n'en existe pas moins, d'après le principe de continuité ; mais ici, les points de contact sont imaginaires.

V°. Section plane du cylindre droit.

1016. Choisissons pour plan de la figure la section principale perpendiculaire au plan sécant, et soit AB la trace de ce plan. Décrivons deux cercles tangents : le premier aux lignes AC, AB, BC', et le second, aux lignes AD, AB, BD'.



Soient F et F' les points de contact avec AB. Les sphères ayant leurs centres sur l'axe et passant par ces deux cercles seront inscrites au cylindre ; soient CC' et DD' les traces des plans des cercles de contact. M étant un point quelconque de la section, considérons la génératrice qui passe par ce point, et soient I et J ses intersections avec les cercles de contact ; on a

$$MI = MF, \quad MJ = MF' ;$$

donc

$$MF + MF' = JI = CD ;$$

donc la courbe de section est une ellipse ayant pour foyers les points F et F' ; l'axe focal est donc AB et par suite

$$AB = CD = 2a.$$

On conclut de là $AB' = CD - 2AC = AB - 2AF = 2c$.

Le petit axe est évidemment égal au diamètre du cercle base du cylindre. Les intersections H et H' de la trace AB du plan sécant avec les traces CC' et DD' des plans des cercles de contact sont les pieds des directrices ; on a, en effet,

$$\frac{AF}{AH} = \frac{AC}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} ;$$

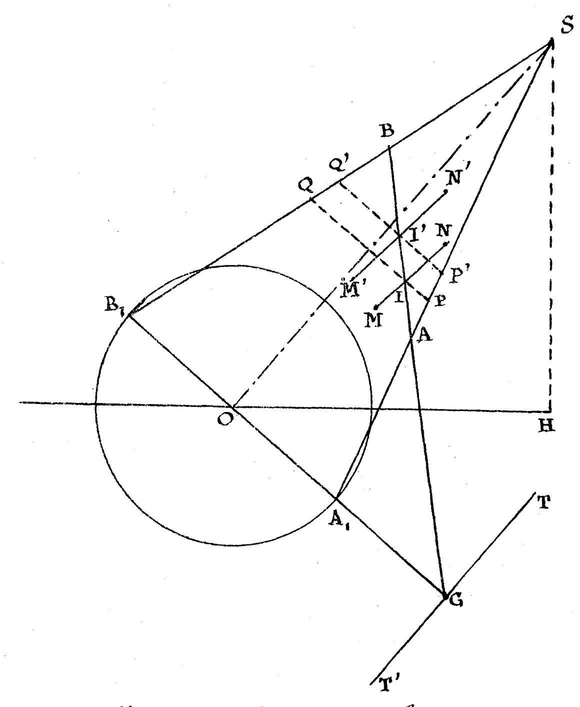
ce qui démontre la proposition.

---

§ III. Sections planes du cône et du cylindre obliques à base circulaire.

1.° Section du cône oblique à base circulaire.

1017. Soit O le centre de la base, S le sommet; la droite SO s'appelle axe du cône; abaissons du sommet une perpendiculaire SH sur le plan de la base; on appelle section principale la section du cône faite par le plan OSH, c. à. d. par le plan passant par l'axe et la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base. Prenons cette section pour plan du tableau.



Coupons le cône par un plan, et supposons que ce plan rencontre toutes les génératrices de la même nappe; soit TT' la trace du plan sécant sur le plan de la base du cône; du centre O on abaisse une perpendiculaire OG sur cette trace TT'. Si par cette perpendiculaire et le sommet du cône, on mène un plan, il coupera le cône suivant les deux génératrices SA_1, SB_1, et le plan sécant suivant une droite passant par le point G; soient A et B les intersections de cette droite avec les deux génératrices SA_1 et SB_1; il s'agit de démontrer que la section obtenue est une ellipse ayant pour diamètre AB, et pour diamètre conjugué de AB une parallèle à TT'. En effet soit M un point quelconque de la section, menons par ce point un plan parallèle au plan de la base, il coupera le plan sécant suivant une droite MN parallèle à TT'; soit N l'intersection de cette droite avec la surface conique et I son intersection avec AB; ce plan auxiliaire coupera en même temps le cône suivant un cercle, dont le centre sera sur SO et dont l'un des diamètres sera PQ parallèle à A_1B_1 menée par le point I. Comme MN est parallèle à TT' et que TT' est perpendiculaire à A_1B_1, MN sera perpendiculaire au diamètre PQ; mais lorsqu'une corde est perpendiculaire à un diamètre, le milieu de la corde est sur le diamètre; donc I est le milieu de MN. Ainsi, la ligne AB divise en deux parties égales toutes les cordes de la section parallèles à la direction TT'. Comme le point M appartient au cercle, on a:

$$\overline{MI}^2 = IP.IQ.$$

Considérons un autre point de la section, M', sur lequel on effectue les mêmes constructions que précédemment; c. à. d. que par ce point on mène un plan parallèle au plan de la base du cône, lequel coupe le plan sécant suivant une droite M'N' rencontrant AB en I', et le cône suivant un cercle dont un des diamètres est P'Q' perpendiculaire sur le milieu de M'N', on a par suite:

$$\overline{M'I'}^2 = I'P'.I'Q';$$

d'où

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IP.IQ}{I'P'.I'Q'}.$$

De la similitude des triangles IAP, I'AP' on déduit

$$\frac{IP}{I'P'} = \frac{IA}{I'A},$$

et de celle des triangles IBQ et I'BQ':

$$\frac{IQ}{I'Q'} = \frac{IB}{I'B};$$

on a donc

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IA.IB}{I'A.I'B};$$

ou

$$\frac{\overline{MI}^2}{IA.IB} = \frac{\overline{M'I'}^2}{I'A.I'B} = \text{Constante}.$$

Or M et M' sont deux points quelconques de la section; donc la courbe de section est le lieu des points tels que le rapport des carrés des ordonnées parallèles à une direction donnée aux produits des segments déterminés sur une droite fixe est constant; c'est donc une ellipse.

On peut le voir autrement; rapportons la courbe à la droite AB que nous prenons pour axe des x et à une droite passant par le milieu de AB et parallèle à TT'; désignons par $\frac{b^2}{a^2}$ la valeur du rapport constant, de sorte que l'on a

$$\frac{\overline{MI}^2}{IA.IB} = \frac{b^2}{a^2};$$

en supposant $AB = 2a$; cette relation devient

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x+a)(a-x);$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

ce qui représente une ellipse ayant, pour diamètres conjugués, AB et une parallèle à TT'.

Si la droite AB rencontrait une génératrice et le prolongement de l'autre, c.à.d. si le plan sécant coupait les deux nappes du cône, la section serait une hyperbole.

Si la trace AB est parallèle à SA_1, on a une parabole. En effet on a trouvé

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IP.IQ}{I'P'.I'Q'};$$

or en supposant que AB devienne parallèle à SA_1, IP devient égal à I'P', et il reste

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IQ}{I'Q'}.$$

Mais

$$\frac{IQ}{I'Q'} = \frac{IB}{I'B};$$

donc

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IB}{I'B};$$

ou enfin

$$\frac{\overline{MI}^2}{IB} = \frac{\overline{M'I'}^2}{I'B} = \text{Constante}.$$

Désignons ce rapport commun par $2p$; prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y une parallèle à TT'; alors $MI = y$, $BI = x$; donc

$$\frac{y^2}{x} = 2p,$$

ou

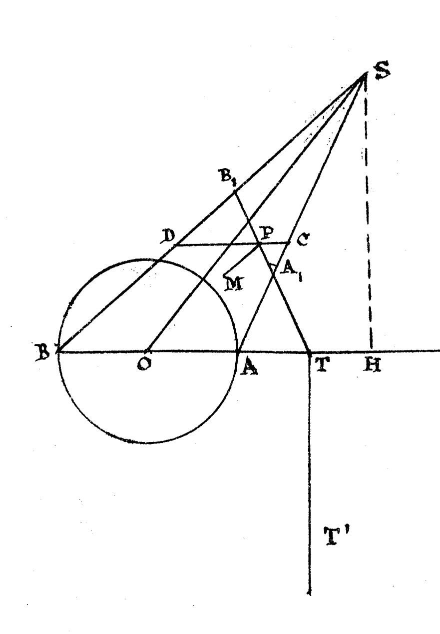
$$y^2 = 2px;$$

ce qui représente une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité.

1018. Cherchons la condition que doit remplir le plan sécant pour que la section soit un cercle. Nous venons de trouver une conique ayant, pour diamètres conjugués, AB et une parallèle à TT'. Les deux droites AB et MI ou TT' doivent être perpendiculaires pour que la section soit un cercle; or MI est déjà perpendiculaire à PQ, elle sera donc perpendiculaire à deux droites situées dans le plan SA_1B_1; et par suite cette droite MI ou sa parallèle TT' devrait être perpendiculaire au plan SA_1B_1. Mais TT' est une horizontale, puisqu'elle est située dans le plan de la base du cône que l'on peut supposer horizontal; donc la section

SA_1B_1 est perpendiculaire au plan horizontal puisqu'elle est perpendiculaire à une droite située dans ce plan; c.à.d. que SA_1B_1 doit coïncider avec la section principale SOH; ainsi un plan ne peut donner un cercle que s'il est perpendiculaire à la section principale. Etudions la section obtenue par un tel plan.

Soit encore SOH la section principale que nous prenons pour plan du tableau; considérons un plan perpendiculaire au plan de cette section principale, soit A_1B_1 sa trace. Cherchons la condition pour que la section que donne ce plan soit un cercle. Soit M un point quelconque de la section; par ce point imaginons un plan horizontal c.à.d. parallèle à la base du cône, ce plan sera perpendiculaire au plan de la section principale et coupera le plan sécant suivant la droite MP, qui sera perpendiculaire à la droite A_1B_1; quant au cône, il le coupera suivant un cercle dont un des diamètres sera CD parallèle à AB; on a donc



$$\overline{MP}^2 = CP.PD.$$

D'un autre côté la courbe de section du plan sécant doit être un cercle; or A_1B_1 est un diamètre de ce cercle, il faut donc que l'on ait

$$\overline{MP}^2 = A_1P.B_1P;$$

par suite, si la section est circulaire, nous aurons

$$CP.DP = A_1P.B_1P,$$

ou

$$\frac{CP}{A_1P} = \frac{B_1P}{DP}.$$

Mais les deux triangles DB_1P, CPA_1, opposés par le sommet, ont les angles en P égaux; d'après cette relation on voit qu'ils sont semblables, et par suite on en déduit l'égalité des angles

$$SA_1P = PDB_1 = SBA;$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la section soit un cercle; il faut que l'angle de A_1B_1 avec SA soit égal à l'angle de SB avec CD; c'est que l'on appelle une section antiparallèle.

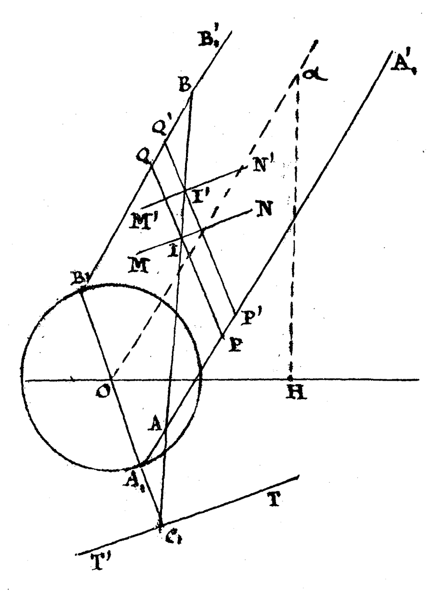
Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan donne pour section un cercle est que ce plan soit perpendiculaire à la section principale du cône et que la trace A_1B_1 du plan sécant soit une droite antiparallèle à AB c.à.d. au diamètre de la base du cône situé dans la section principale.

On ne peut donc avoir que deux systèmes de plans donnant des sections circulaires.

De plus le quadrilatère AA_1B_1B est inscriptible, car les angles en B et en A_1 sont supplémentaires, on peut donc imaginer une sphère dont un grand cercle passerait par les quatre points AA_1B_1B; cette sphère contiendrait les deux sections circulaires AB, A_1B_1; donc deux sections circulaires non parallèles c.à.d. deux cercles de systèmes différents sont toujours situés sur une même sphère.

II°. Section du cylindre oblique à base circulaire.

1019. Soit O le centre de la base du cylindre, Oα une parallèle aux génératrices passant par ce point; cette droite est appelée axe du cylindre. D'un point quelconque α de cet axe abaissons une perpendiculaire αH sur le plan de la base du cylindre, le plan αOH est ce que l'on appelle le plan de la section principale; nous le prendrons pour plan de la figure. Soit TT' la trace du plan sécant sur le plan de base du cylindre que nous pouvons supposer horizontal. Du point O abaissons une perpendiculaire OG sur TT'. Imaginons un plan passant par la droite OG et parallèle aux génératrices du cylindre, il déterminera dans le cylindre les deux génératrices $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ et coupera le plan sécant suivant une certaine droite GAB; la section que nous obtiendrons dans ce cas est nécessairement fermée; démontrons que c'est une ellipse dont AB est un diamètre, et le diamètre conjugué de AB est parallèle à TT'. En effet, soit M un



point de la section; menons par ce point un plan horizontal, il coupera le plan sécant suivant une droite MN parallèle à TT', soit I le point où cette droite MN rencontre AB; il coupera le cylindre suivant un cercle dont un des diamètres sera une droite PQ, parallèle à A_1B_1, menée par le point I. Ce diamètre PQ est perpendiculaire à MN, puisqu'il est parallèle à A_1B_1, droite perpendiculaire à TT', il passe donc par le milieu I de cette corde. Ainsi la droite AB divise en deux parties égales toutes les cordes de la section parallèles à la droite TT'. On a de plus la relation

$$\overline{MI}^2 = IP.IQ.$$

Imaginons un autre point M' de la section; effectuons sur ce point les mêmes constructions que précédemment. Menons par ce point un plan horizontal, lequel coupe le plan sécant suivant M'N' et le cylindre suivant un cercle dont un des diamètres est P'Q'; on a donc:

$$\overline{M'I'}^2 = I'P'.I'Q';$$

d'où

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IP.IQ}{I'P'.I'Q'}.$$

Les deux triangles semblables IAP, I'AP' donnent

$$\frac{IP}{I'P'} = \frac{IA}{I'A};$$

de même les triangles IBQ, I'BQ' donnent

$$\frac{IQ}{I'Q'} = \frac{IB}{I'B};$$

donc

$$\frac{\overline{MI}^2}{\overline{M'I'}^2} = \frac{IA.IB}{I'A.I'B};$$

ou

$$\frac{\overline{MI}^2}{IA.IB} = \frac{\overline{M'I'}^2}{I'A.I'B} = \text{Constante}.$$

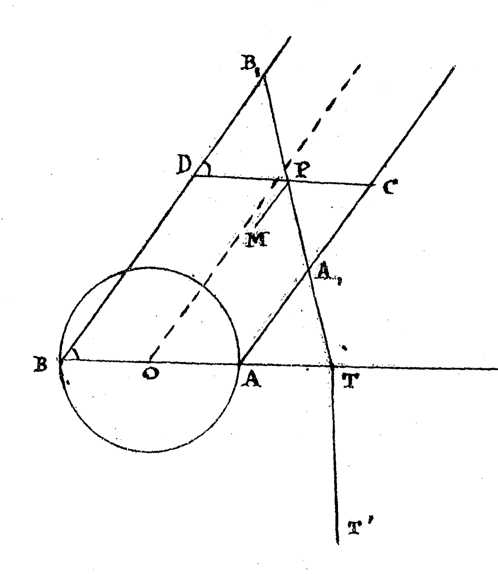
Or M et M' sont deux points de la section; pour un point quelconque on a donc

$$\frac{\overline{MI}^2}{AI.BI} = \text{Constante}.$$

C'est la propriété caractéristique d'une ellipse ou d'une hyperbole; comme ici la courbe est fermée, nous avons une ellipse ayant pour diamètres conjugués AB et une parallèle à TT'.

1020. Pour que la section soit un cercle, comme AB et MN sont deux directions conjuguées, il faut que ces deux directions soient perpendiculaires. Mais MN est déjà perpendiculaire à PQ; donc si la droite MN est perpendiculaire à AB, elle sera perpendiculaire à deux droites situées dans le plan $A_1A_1'B_1B_1'$; or MN est une horizontale, il faut donc que le plan $A_1A_1'B_1B_1'$ soit perpendiculaire au plan horizontal, et il doit, par suite, se confondre avec le plan de la section principale; le plan sécant devra être perpendiculaire au plan de cette section principale.

Soient AA_1, BB_1 les deux génératrices de la section principale que nous prenons pour plan du tableau. Le plan de la base du cylindre est perpendiculaire au plan du tableau; cherchons la condition que doit remplir un plan perpendiculaire à cette section principale pour que la courbe de section soit un cercle. Soit A_1B_1 la trace de ce plan sécant et soit M un point de la section; menons par M un plan horizontal parallèle à la base du cylindre, il coupera le plan sécant suivant MP perpendiculaire au plan du tableau et le cylindre suivant un cercle dont l'un des diamètres sera CD parallèle



à AB. MP étant perpendiculaire au plan du tableau, est perpendiculaire à CD et à A_1B_1; on a donc

$$\overline{MP}^2 = CP.\,DP;$$

mais la section devant être un cercle dont A_1B_1 est le diamètre, on a aussi

$$\overline{MP}^2 = A_1P.\,B_1P;$$

donc $CP.\,DP = A_1P.\,B_1P$,

ou $$\frac{CP}{A_1P} = \frac{B_1P}{DP}.$$

Or les deux triangles PCA_1, PDB_1 ont les angles en P égaux comme opposés par le sommet; donc d'après cette relation ils sont semblables et il en résulte l'égalité des angles B_1DP, CA_1P; c.à.d. que la droite A_1B_1 est antiparallèle à la droite AB.

Donc pour qu'un plan donne pour section un cercle il faut qu'il soit perpendiculaire au plan de la section principale et que sa trace soit antiparallèle du diamètre de la base du cylindre situé dans la section principale. Il n'y a donc que deux systèmes de sections circulaires.

Le quadrilatère BAA_1B_1 est inscriptible, car les angles B et A_1 sont supplémentaires; par suite si nous imaginons une sphère dont un grand cercle passe par les sommets de ce quadrilatère, elle contiendra les cercles AB, A_1B_1; donc deux cercles de systèmes différents sont toujours situés sur une même sphère.

§IV. Principes généraux de la méthode projective

I° Définition et propositions immédiates.

1021. Si l'on joint tous les points d'une figure à un même point S de l'espace, les lignes ainsi déterminées forment un cône ayant pour sommet le point S; la section de ce cône par un plan quelconque est une courbe que l'on appelle projection ou perspective de la figure donnée. Le plan sécant qui la détermine est appelé plan de projection ou plan de perspective.

On reconnaît immédiatement l'évidence des quelques propositions suivantes:

1° Tout point d'une figure a pour projection un point.

2° Une ligne droite se projette suivant une ligne droite.

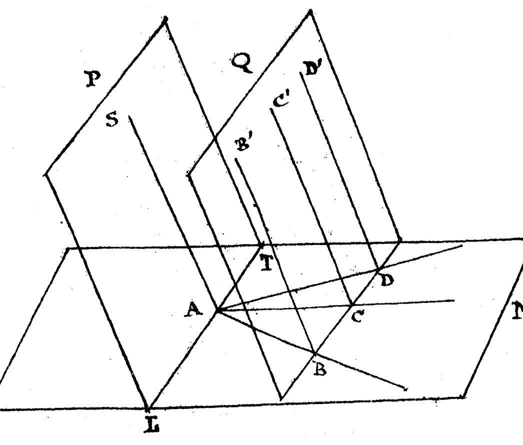
3° Une courbe plane se projette toujours suivant une courbe plane de même ordre que la courbe projetée.

4° Si deux courbes se coupent, leurs projections se coupent en un même nombre de points.

5° Une tangente à une courbe se projette suivant une tangente à la projection de la courbe.

6° Plus généralement, si deux courbes se touchent en un certain nombre de points, leurs projections se touchent en un même nombre de points.

7° On peut toujours projeter un faisceau de droites en un système de droites parallèles entre elles. Soit en effet le faisceau de droites AB, AC, AD etc. et S le point de vue; joignons SA et prenons pour plan de perspective un plan Q parallèle à la droite SA; les projections des droites sont les lignes BB',

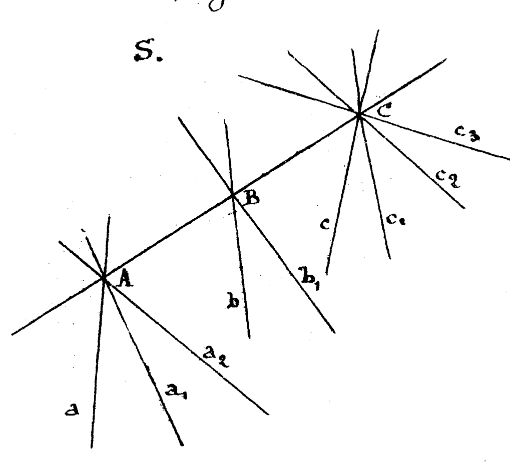


CC', DD'... la projection de leur point de concours A sera à l'infini puisque SA est parallèle au plan Q; donc les droites BB', CC', DD'... sont parallèles.

8° Inversement, un système de droites parallèles peut toujours être projeté en un faisceau de droites.

Ainsi les droites parallèles BB', CC', DD'... situées dans le plan Q, se projettent sur le plan M en un faisceau de droites concourantes en un point A intersection du plan de perspective M avec la droite SA menée par le sommet S parallèlement aux droites BB', CC', DD'....

9° Deux ou plusieurs faisceaux de droites concourantes sur une même droite peuvent toujours se projeter en un même nombre de systèmes de droites parallèles.



En effet il est évident, d'après ce que nous venons de dire, que si l'on prend pour plan de perspective un plan parallèle à SABC, le faisceau A, $a a_1 a_2$ aura pour projection un système de trois droites parallèles; de même les deux droites Bb et Bb_1 se projetteront en deux autres droites parallèles, mais leur direction sera différente de celle des projections des faisceaux A et B.

Inversement, deux ou plusieurs systèmes de droites parallèles peuvent toujours se projeter en un même nombre de faisceaux de droites concourantes, les points de concours étant sur une même ligne droite.

De ce qui vient d'être dit, il résulte que tous les points à l'infini situés dans un plan peuvent être considérés comme étant en ligne droite.

Dans la figure précédente cette droite est la projection de LT sur le plan Q, nous l'avons appelée la droite de l'infini.

Remarque. Les propriétés d'une figure qui ont rapport à certaines positions de lignes ou de points sont évidemment vraies pour la projection de cette figure sur un plan quelconque.

Certaines relations métriques se conservent aussi dans la projection: Ainsi, par exemple, le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite (ABCD) étant mesuré par le rapport du faisceau (S, ABCD) mené par le point de vue S, sera le même que celui des quatre points (A'B'C'D') où le faisceau est coupé par la droite A'D' intersection du plan SAD avec le plan de perspective Q.

Les propriétés qui subsistent pour une figure et pour sa projection s'appellent propriétés projectives.

Si quatre points A, B, C, D, forment un système harmonique, les projections A', B', C', D' formeront aussi un système harmonique.

Si A' est à l'infini, la conjugué C' sera le milieu de B'D'.

Les propriétés anharmoniques des points et des tangentes aux coniques sont projectives: il suffira donc de les démontrer dans le cas du cercle, car nous allons démontrer qu'une conique peut toujours se projeter suivant un cercle.

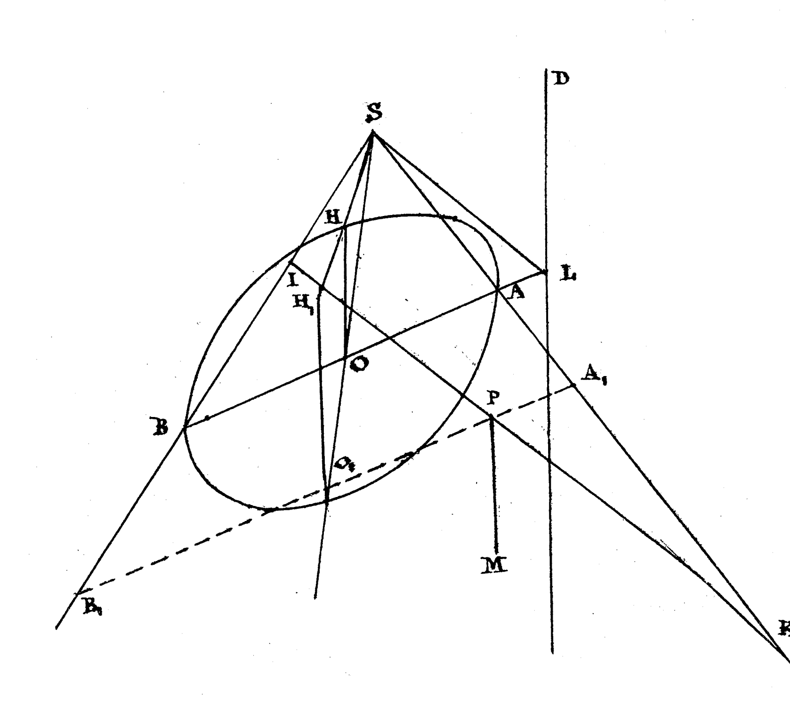
1022. Étant donnée une conique et une droite située dans son plan, on peut d'une infinité de manières projeter le système considéré de façon que la projection de la conique soit un cercle et que la projection de la droite soit à l'infini.

Supposons que la droite donnée DL ne rencontre pas la conique. Soit OA le diamètre conjugué de la direction DL; menons OH parallèle à LD, et représentons par a et b les longueurs des deux diamètres conjugués OA et OH. Cela posé au point L menons une des perpendiculaires à la droite LD et prenons sur cette droite une longueur SL telle que l'on ait

$$\frac{\overline{SL}^2}{AL.BL}=\frac{b^2}{a^2};$$

alors tout plan parallèle à SLD coupera le cône suivant un cercle.

En effet, soit IK la trace d'un de ces plans sur le plan SAB et M un point quelconque de la section, par ce point menons le plan MB_1A_1 parallèle au plan ALD ; alors la droite MP, intersection de ce plan avec le plan MIK, sera perpendiculaire à IK, puisque IK et MP sont respectivement parallèles à SL et LD. Donc pour prouver que la section est un cercle, il suffit de démontrer la relation



$$\overline{MP}^2 = PK.PI.$$

Pour cela remarquons que dans l'ellipse déterminée par le plan MB_1A_1, on a (O_1H_1 étant le diamètre conjugué de O_1A_1)

$$\frac{\overline{MP}^2}{PA_1.PB_1}=\frac{\overline{O_1H_1}^2}{\overline{O_1A_1}^2};$$

Or, il est évident que l'on a la relation

$$\frac{O_1A_1}{O_1H_1}=\frac{OA}{OH}=\frac{a}{b};\ \text{donc}\ \frac{\overline{MP}^2}{PA_1.PB_1}=\frac{b^2}{a^2}.$$

D'un autre côté, les triangles PIB_1 et SBL sont semblables, ainsi que SLA et PA_1K ; par conséquent,

$$\frac{IP}{PB_1}=\frac{SL}{LB},\ \text{et}\ \frac{PK}{PA_1}=\frac{SL}{AL}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{IP.PK}{PA_1.PB_1}=\frac{SL^2}{AL.BL}.$$

Mais puisque nous avons vu que

$$\frac{\overline{MP}^2}{PA_1.PB_1}=\frac{b^2}{a^2};\ \text{et d'après l'hypothèse}\ \frac{\overline{SL}^2}{AL.BL}=\frac{b^2}{a^2};$$

il s'en suit que

$$\overline{MP}^2 = PI.PK.$$

Donc la section du cône par le plan MIK est un cercle décrit sur IK comme diamètre.

Ceci étant démontré, on voit que pour projeter la conique proposée suivant un cercle de manière que la droite LD s'éloigne en même temps à l'infini, il faut prendre le sommet du cône dans un plan perpendiculaire à la droite donnée au point L où elle est coupée par le diamètre OA conjugué de sa direction.

Dans ce plan, le sommet S se trouve sur un cercle décrit du point L comme centre avec SL pour rayon, SL étant déterminé par la relation

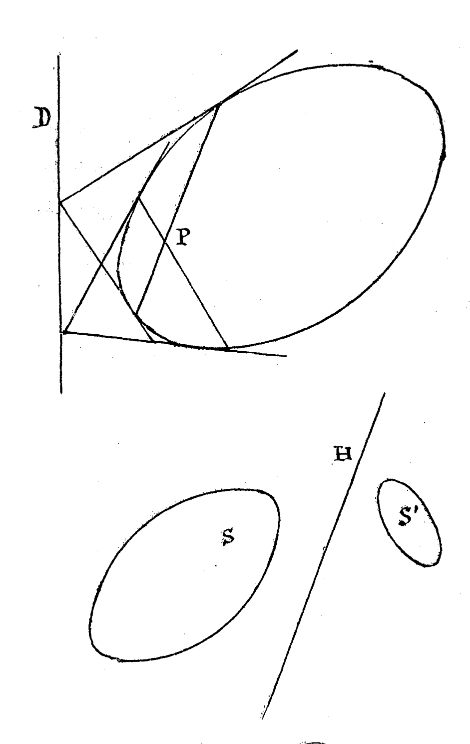
$$\overline{SL}^2=\frac{b^2}{a^2}.LA.LB.$$

Il y a donc une infinité de cônes satisfaisant à la condition imposée. On choisira un de ces cônes, soit S son sommet; et alors sur tout plan parallèle à SLD la perspective de la conique sera un cercle, et la perspective de la droite LD sera la droite de l'infini.

Remarque. Nous avons admis que LD ne rencontrait pas la conique; le principe de continuité nous autorise à appliquer le théorème au cas où LD rencontrerait la courbe.

Nous concluons de là diverses propriétés:

1023. **Corollaire I.** Étant donnée une conique et un point, on peut projeter le système de sorte que la conique se projette suivant un cercle et que la projection du point soit le centre du cercle.



Soit P le point fixe, déterminons sa polaire D; nous avons vu que l'on peut projeter la conique suivant un cercle et la droite D à l'infini; mais alors le pôle de la droite à l'infini, qui est la projection du point P, est le centre du cercle; c'est ce qu'il fallait obtenir.

Corollaire II. Deux coniques peuvent être projetées suivant deux cercles.

Soit H une corde d'intersection commune on peut projeter l'une des coniques S et la droite H de manière que la projection de S soit un cercle et que la droite H se projette à l'infini; les points d'intersection de la conique et de la droite auront alors pour perspective les points circulaires à l'infini, donc la conique S' aura pour perspective une courbe du second degré passant par les points circulaires à l'infini, et par suite sera un cercle.

On voit ainsi que les deux coniques seront projetées suivant deux cercles.

D'après le théorème du N° (1022), pour que la projection puisse se faire suivant des cercles réels, il faut que la corde commune H soit réelle et ne rencontre pas les deux courbes, elle doit alors passer par deux points imaginaires conjugués, ce qui suppose que les coniques se coupent au plus en deux points réels; c'est ce que M. Poncelet appelle une sécante idéale.

Corollaire III. Deux coniques ayant un double contact peuvent toujours se projeter suivant deux cercles concentriques. (La projection est réelle dans le cas seulement où le contact est imaginaire).

On peut projeter l'une des coniques suivant un cercle, et la corde de contact suivant la droite à l'infini; les points de contact deviendront alors les points circulaires à l'infini. La seconde courbe se projètera suivant une courbe tangente au 1er cercle aux points circulaires à l'infini. Donc sa perspective sera un cercle concentrique au premier.

Les coniques ayant en commun un foyer et la directrice correspondante peuvent être projetées suivant des cercles concentriques.

Car, d'après la définition du foyer, toutes ces coniques ont un double contact.

Corollaire IV. Un système de coniques ayant une corde commune peut être regardé comme la perspective d'un même nombre de cercles.

Pour que les projections soient réelles, il faut que les points communs soient imaginaires.

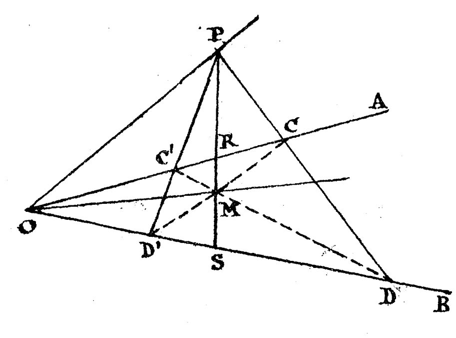
On peut projeter l'une des coniques et la corde commune suivant un cercle et la droite à l'infini, et alors les perspectives des autres coniques seront des courbes du second degré passant par les points circulaires à l'infini c.à.d. des cercles.

Corollaire V. Des coniques circonscrites à un même quadrilatère peuvent être projetées suivant des cercles ayant même axe radical.

Projetons l'une des coniques et l'un des côtés du quadrilatère suivant un cercle et la droite à l'infini, alors les perspectives des coniques passeront par les points circulaires à l'infini, c.à.d. seront des cercles. De plus les coniques ayant deux autres points communs, les perspectives, qui sont des cercles, auront encore deux points communs c.à.d. auront même axe radical.

II.° Applications.

1024. 1° Étant données deux droites OA, OB et un point fixe P, on mène par ce point deux sécantes quelconques: on joint diagonalement les points d'intersection avec OA, OB; trouver le lieu du point M, intersection des diagonales.



Prenons la perspective du système de manière que la droite OP soit projetée à l'infini ; OA, OB ont alors pour perspectives deux parallèles oa, ob ; les sécantes PCD, PC'D' ont pour perspectives deux parallèles cd, c'd' ; le point M se projette suivant m. Or le lieu du point m est évidemment une droite parallèle à oa et ob, également distante de ces deux droites. En prenant la perspective du deuxième système sur le premier plan, la droite OM se projettera suivant une droite Om passant par le point de concours des droites OA, OB.

Cette droite est la polaire du point P c.à.d. que

$$\frac{2}{PM} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{PS} \quad (1) ;$$

en effet, cette relation peut s'écrire

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{PS} = \frac{1}{PR} - \frac{1}{PM},$$

ou

$$\frac{MS}{PS} = \frac{RM}{RP},$$

ou enfin

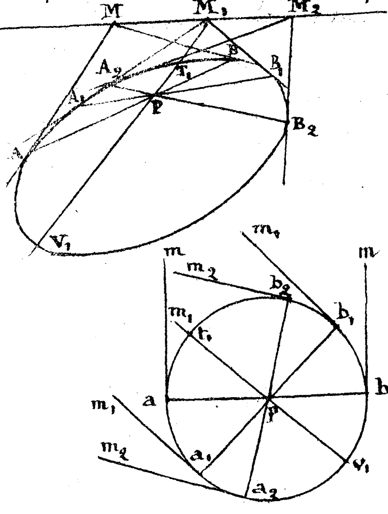
$$\frac{MS.PR}{PS.MR} = -1. \quad (1\text{bis})$$

Dans la perspective, le point P s'éloigne à l'infini, et comme les rapports anharmoniques conservent la même valeur en projection, la relation (1) ou (1bis) devient

$$ms = rm ;$$

c.à.d. que la droite om doit être également distante de oa et ob ; c'est ce qui a lieu en effet. Donc le point M satisfait à la relation $\frac{2}{PM} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{PS}$; par suite, la droite OM est la polaire du point P.

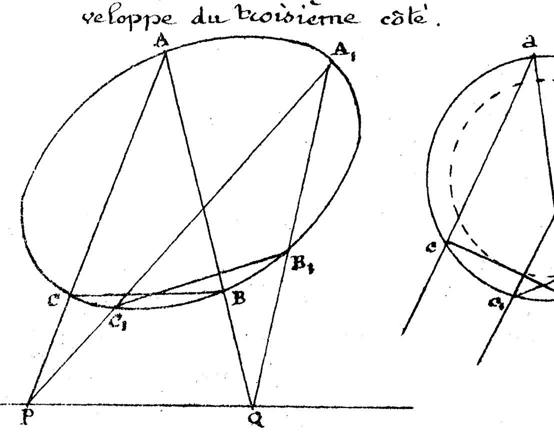
2° Si des différents points d'une droite L on mène des tangentes à une conique, les cordes de contact passeront par un point fixe, qui est le pôle de la droite fixe.



Projetons la conique et la droite suivant un cercle et la droite à l'infini ; les tangentes MA, MB se projettent alors suivant les tangentes parallèles ma, mb ; la corde de contact ab passe donc par le centre du cercle. De même les cordes de contact A_1B_1, A_2B_2 .... se projettent suivant des diamètres a_1b_1, a_2b_2 ... ; ces diamètres étant des droites concourantes, leurs perspectives AB, A_1B_1, A_2B_2 .... sont donc aussi des droites concourantes ; leur point de concours P est la perspective de p ; mais p est le pôle de la droite à l'infini perspective de la droite L : donc P perspective du point p est le pôle de la droite L.

Ou encore, si la relation $\frac{2}{PM_1} = \frac{1}{PT_1} + \frac{1}{PV_1}$ a lieu, elle doit se transformer en la relation $t_1p = v_1p$, ce qui est vrai ; donc P est le quatrième harmonique des trois points M_1, T_1, V_1 ; par suite P est le pôle de la droite L.

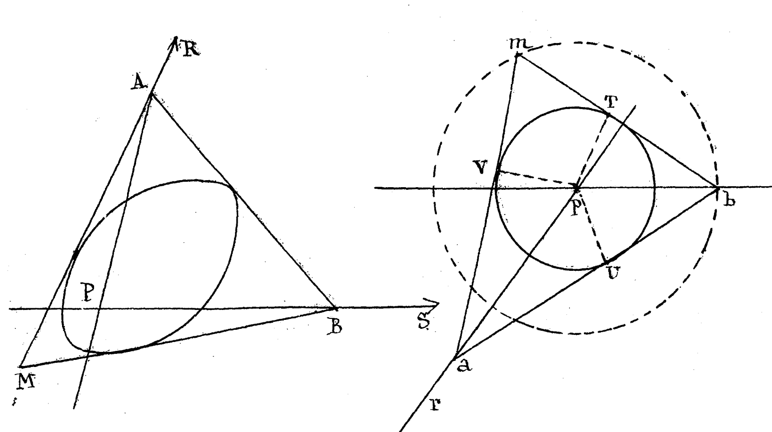
3° Un triangle est inscrit dans une conique ; deux des côtés passent par des points fixes : trouver l'enveloppe du troisième côté.



On peut projeter la conique et la droite joignant les deux points fixes suivant un cercle et la droite à l'infini. Le triangle ABC se projette suivant le triangle abc ; le triangle $A_1B_1C_1$ se projette suivant le triangle $a_1b_1c_1$. Or ac et a_1c_1, ab et a_1b_1 doivent être respectivement parallèles, puisque les points P et Q sont projetés à l'infini ; par suite, les angles $\widehat{cab}$, $\widehat{c_1a_1b_1}$ sont égaux, les arcs bc, b_1c_1,

qui les mesurent sont égaux, donc les cordes bc, b_1c_1 enveloppent un cercle concentrique au premier; par conséquent l'enveloppe du côté BC est une conique doublement tangente à la conique proposée aux points où elle est rencontrée par la droite joignant les points fixes P et Q.

4° Un triangle est circonscrit à une conique; deux des sommets s'appuient sur deux droites fixes? trouver le lieu du troisième sommet.



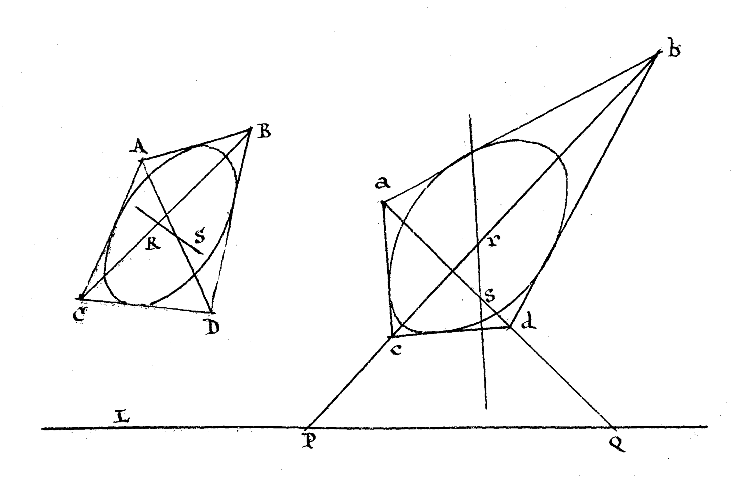
Projetons la conique suivant un cercle, et le point P intersection des deux droites fixes suivant le centre du cercle; les deux droites fixes RP, SP ont pour perspectives deux diamètres pr, ps fixes; le triangle ABM a pour perspective le triangle abm. Or

$$\widehat{VpU} = 2\widehat{rpU};$$
$$\widehat{TpU} = 2\widehat{spU};$$

d'où $\widehat{VpU} + \widehat{TpU} = 2\widehat{rps};$

l'angle supplémentaire $\widehat{TpV}$ est donc constant. Par suite, le lieu du point M est un cercle concentrique au premier; ces deux cercles sont doublement tangents, la corde de contact est la droite à l'infini ou la polaire du point p. Donc le lieu du point M est une conique doublement tangente à la conique donnée, et la corde des contacts est la polaire du point P, intersection des droites fixes données.

5° Nous savons que le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite joignant les milieux des diagonales.



Le centre est le pôle de la droite à l'infini; projetons le système de ces coniques sur un plan non parallèle, la droite de l'infini aura pour perspective une droite à distance finie, L; et les coniques resteront inscrites dans le quadrilatère projeté abcd. Or le lieu des centres se projettera suivant le lieu des pôles de la droite fixe par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère; ce lieu sera donc une ligne droite. Le point R milieu de CB se projettera suivant r, quatrième harmonique des sommets c et b et du point où cb rencontre la droite L c.à.d. tel que

$$\frac{2}{Pr} = \frac{1}{Pc} + \frac{1}{Pb}.$$

Le point S se projette de même en un point s tel que $\frac{2}{Qs} = \frac{1}{Qa} + \frac{1}{Qd}$; le lieu des pôles de la droite L est donc la droite rs.

Nous nous bornerons à ces applications qui indiquent suffisamment l'usage que l'on peut faire de la méthode projective.

Exercices.

1025. 1° Ellipse - Hyperbole.

N. B. Plusieurs des propriétés énoncées appartiennent également à la Parabole.

1° La perpendiculaire abaissée d'un foyer sur une corde et le diamètre conjugué de cette corde se coupent sur la directrice correspondante.

2° La tangente et la normale en un point d'une conique interceptent sur un des axes une longueur égale au produit des distances du point aux foyers réels, divisé par la distance de ce point à l'autre axe.

Dans la parabole, cette longueur est double du rayon vecteur.

3° Sur deux tangentes PM et PM' à une conique, dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF'; la droite QQ' est égale à la longueur de l'axe focal.

4° Si aux extrémités d'une corde focale on mène des normales, et par leur intersection une parallèle à l'axe focal, cette parallèle divise la corde en deux parties égales.

5° Un diamètre et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités du diamètre, des longueurs dont le produit est constant.

6° Si l'on considère deux tangentes fixes et une troisième tangente quelconque, la longueur, interceptée sur cette troisième tangente par les deux tangentes fixes, est vue de chaque foyer sous un angle constant.

7° Si une corde passe par un foyer, la droite, joignant l'intersection des tangentes à l'intersection des normales aux extrémités de la corde, passe par l'autre foyer.

8° Le cercle, qui a pour diamètre la portion d'une tangente interceptée par les tangentes aux extrémités de l'axe focal, passe par les foyers.

9° La distance d'un foyer au pied d'une normale sur l'axe focal est au rayon vecteur du point de contact dans un rapport égal à l'excentricité.

10° Le rapport des distances du pied d'une ordonnée au centre et au pied, sur l'axe focal, de la normale correspondante, est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

11° Si une tangente rencontre l'axe non focal en S, et si Q est la projection du point de contact sur cet axe, on a $CS \cdot CQ = b^2$, C étant le centre de la courbe.

12° Si OA' et OB' sont deux diamètres conjugués, et que la perpendiculaire B'P à OA' rencontre l'axe focal en Q, on a

$$B'P \cdot B'Q = b^2.$$

13° Si OA' et OB' sont deux diamètres conjugués, on a (F et F' étant les foyers.)

$$FA' \cdot F'A' = \overline{OB'}^2.$$

14° Si deux cordes se coupent, les produits de leurs segments sont proportionnels aux carrés des diamètres parallèles à ces cordes.

15° Si MT est une tangente à la courbe au point M, rencontrant l'axe focal au point T, et si la perpendiculaire élevée en T à l'axe focal rencontre en Q et Q' les droites MA et MA', on a QT = Q'T, A et A' sont les sommets.

16° Si MFM' est une corde focale d'une conique dont AA' est l'axe focal ; si l'on prolonge MA et M'A jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q' avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ' est droit.

17° Dans l'ellipse, la somme des carrés des deux normales menées aux extrémités de deux diamètres conjugués, est constante (on prend pour longueur de la normale les distances du point de contact au pied sur l'axe focal).

18° Si d'un point P, pris dans le plan d'une ellipse, on abaisse les perpendiculaires PM et PN sur les deux diamètres conjugués égaux; la diagonale du parallélogramme construit sur PM et PN est perpendiculaire à la polaire du point P.

19° Soient M et M' deux points, AA' l'axe focal; AM et A'M' coupant l'ordonnée MP du point M en deux points Q et Q', on a

$$\overline{MP}^2 = PQ \cdot PQ'.$$

20° Soit une normale MN et la perpendiculaire NI abaissée du point N sur le rayon vecteur FM; le rapport de NI à l'ordonnée MP du point M est égal à l'excentricité de la courbe.

21° Si l'ordonnée MP d'un point M rencontre en Q la tangente menée à l'extrémité de la corde focale principale (c.à.d. perpendiculaire à l'axe focal), on a

$$QP = FM.$$

22° Si M est un point fixe et QQ' une corde quelconque conjuguée au diamètre OM, le cercle QMQ' passe par un point fixe sur la courbe.

23° Par un point M, on mène la corde MM' parallèle à l'axe focal; par le point M', on mène les cordes M'Q, M'Q', faisant des angles égaux avec l'axe focal; la droite QQ' est parallèle à la tangente en M.

24° Si d'un point M on tire des droites aux extrémités d'un diamètre DD', lesquelles coupent son conjugué EE' aux points P et P', on a (O étant le centre)

$$OP \cdot OP' = \overline{OD}^2.$$

25° Si OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, on a

$$(OA - a)^2 + (OB - b)^2 = c^2.$$

26° Si MFM' et NON', sont deux cordes parallèles menées par le foyer et le centre d'une conique, on a

$$\frac{FM \cdot FM'}{ON \cdot ON'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

27° Si les tangentes en trois points P, Q, R, se coupent deux à deux aux points R', Q', P', on a

$$PR' \cdot QP' \cdot RQ' = PQ' \cdot QR' \cdot RP'.$$

28° Si des extrémités des axes on tire dans une direction quelconque quatre droites parallèles, les points où elles rencontrent la courbe sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

29° Si MFM' est une corde focale et D le pied de la directrice correspondante, les droites DM et DM' sont également inclinées sur les axes de la courbe.

30° PM et PM' étant deux tangentes menées par un même point P, et la corde de contact MM' rencontrant les directrices en R et R', on a

$$\frac{RM \cdot R'M}{RM' \cdot R'M'} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PM'}^2}.$$

31° OC et OD étant deux diamètres conjugués, et OD rencontrant les rayons vecteurs FC et F'C en H et H', on a

$$FH = F'H'.$$

32° Si du foyer, F on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres conjugués CC' et DD', ces perpendiculaires prolongées couperont DD' et CC' sur la directrice correspondant au foyer F.

33° Si d'un foyer on abaisse des perpendiculaires sur deux tangentes, la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires est elle-même perpendiculaire à la droite qui joint l'autre foyer au point de concours des deux tangentes.

34° Soit un triangle PQR inscrit dans une conique, et dont le centre de gravité coïncide avec le centre O de la conique; les droites OP, OQ, OR, rencontrent la courbe aux points P', Q', R'; le triangle P'Q'R' est semblable au triangle PQR et a une aire quatre fois plus grande.

35° Soient MP l'ordonnée d'un point et A un sommet; menons PQ parallèle à AM jusqu'à la rencontre de OM; la droite AQ sera parallèle à la tangente en M.

36° Etant données une conique et deux tangentes parallèles, les droites menées du centre aux points où une troisième tangente rencontre les deux premières sont deux diamètres conjugués.

37° Si une droite fixe rencontre une série de coniques ayant même foyer et même directrice, les tangentes à ces coniques aux points où elles rencontrent la droite fixe enveloppent une conique qui a même foyer que les proposées, et qui touche à la fois leur directrice commune et la droite fixe.

38° Si autour d'un point fixe on fait tourner une sécante qui rencontre une conique aux points a et a', la somme algébrique des inverses des distances des points a et a' à la polaire du point fixe est constante.

39° Si θ est l'angle des tangentes menées à une ellipse, ρ et ρ' les distances du point de rencontre aux foyers; on a

$$\cos\theta = \frac{\rho^2+\rho'^2-4a^2}{2\rho\rho'}.$$

40° Si d'un sommet A d'une conique on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales menées à la courbe d'un même point K; les quatre points M, M_1, M_2, M_3, où ces perpendiculaires rencontrent la courbe sont sur une même circonférence.

Si du sommet A on abaisse, sur le diamètre passant par K, une perpendiculaire qui rencontre la conique en N, la tangente en N sera l'axe radical du cercle précédent et du cercle décrit sur l'axe qui passe par A.

41° Soient p, q, r, trois points d'une conique tels que les normales en p, q, r, concourent en un point; si par le sommet A on mène trois parallèles à qr, rp, pq, qui vont rencontrer la courbe en p', q', r'; le centre de gravité de ces trois points sera sur l'axe qui passe par le sommet A.

42° Si, autour de deux points fixes pris sur une ellipse, on fait tourner les côtés d'un angle de grandeur variable dont le sommet glisse sur la courbe; le secteur elliptique, compris entre les deux demi-diamètres parallèles aux côtés de l'angle, conserve une aire constante.

43° Si de chaque point d'une droite on mène deux tangentes à une conique, la somme de leurs distances à un point fixe divisées respectivement par les distances des deux mêmes tangentes au pôle de la droite reste constante.

44° Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les produits des distances de deux sommets opposés à chaque foyer sont entre eux dans le même rapport que les produits des distances des deux autres sommets à ces foyers.

45° Un triangle ABC étant inscrit dans une conique, d'un point M de la conique on mène les droites MA', MB', MC', respectivement conjuguées de BC, CA, AB; ces droites rencontrent ces côtés en A', B', C'; les trois points A', B', C', sont en ligne droite.

46° Par le centre d'une ellipse on mène n diamètres partageant l'aire de l'ellipse en n parties équivalentes; la somme de toutes les cordes parallèles aux n diamètres et passant par le même foyer est constante pour la même valeur de n.

47° Si PM et PM' sont deux tangentes à une conique, si I est le point de rencontre de la corde MM' avec la directrice, la droite FI est perpendiculaire à PF, F étant le foyer correspondant.

48° La somme du produit des rayons vecteurs qui vont à l'extrémité d'un diamètre et du produit de ceux qui vont à l'extrémité du diamètre conjugué est constante.

49° Si deux coniques ont un foyer commun, si l'on joint ce foyer aux extrémités d'un diamètre de l'une des courbes, la somme ou la différence de ces rayons divisés respectivement par les rayons de la seconde est constante.

50° Par un point P d'une ellipse on mène deux droites PA, PB, parallèles aux diamètres conjugués égaux, la circonférence passant par A, B, P, touche la conique en P.

51° D'un point P d'une conique on abaisse les perpendiculaires p, t, t', sur une corde TT' et sur les tangentes TS, T'S, aux extrémités; q, r, r', sont les perpendiculaires abaissées du centre sur la tangente parallèle à TT' et sur les tangentes TS, T'S; on a

$$\frac{t.t'}{p^2} = \frac{r.r'}{q^2}.$$

52° Par un point P, pris dans le plan d'une conique, on mène les tangentes PM, PM'; si R et R' sont les rayons de courbure en M et M', on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{\overline{PM}^3}{\overline{PM}'^3}.$$

53° Par un point A d'une conique passent trois cercles osculateurs ayant leurs contacts respectifs en B, C, D; le centre de la conique est le centre de gravité du triangle BCD.

54° Le lieu des centres d'une conique, inscrite dans un triangle donné et pour laquelle la somme algébrique des carrés des axes est constante, est un cercle; le centre du cercle est le point de rencontre des hauteurs du triangle.

55° On mène dans une ellipse des diamètres faisant entre eux l'angle $\frac{2\pi}{n}$; si $R_1, R_2, \ldots R_n$ sont les longueurs de ces diamètres, on aura, pour une même valeur de n,

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \cdots + \frac{1}{R_n^2} = \text{Constante}.$$

56° Si par un point d'une conique, on mène une normale, le produit des segments interceptés sur cette droite par l'un des axes et par le diamètre perpendiculaire à la droite, est égal au carré de la moitié de l'autre axe.

57° Si, sur la tangente et la normale à une conique prises pour axes principaux, on construit deux autres coniques passant par le centre de la première et normales respectivement à ses axes principaux: 1° ces deux courbes auront les même foyers; 2° leurs axes dirigés suivant la normale à la courbe proposée seront égaux respectivement aux axes de celles-ci auxquels les deux courbes sont normales.

58° Si l'on considère une série d'ellipses homofocales, le lieu des points de contact des tangentes menées par un point P, pris sur l'un des axes, est un cercle. Les cercles qui correspondent à deux points, pris respectivement sur chacun des axes, se coupent orthogonalement.

59° Lorsque deux coniques sont concentriques, la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques de la 1ère divisés respectivement par les carrés des deux diamètres de la seconde, compris sur les directions des deux diamètres conjugués, est constante.

60° Si par un point M d'une conique on mène deux cordes quelconques MA, MB; par A et B, les droites AD et BC respectivement parallèles à MB, MA; la droite CD est parallèle à la tangente en M.

61° Le diamètre parallèle à la tangente au point M d'une conique rencontre le rayon vecteur MF de ce point en un point N; MN est égal au demi-axe focal.

62° Soit MP la tangente en un point M, MN la normale, P la projection du foyer F sur la tangente; si l'on joint OP (O étant le centre), et si N est l'intersection de OP avec la normale, on a NP = MF.

63° Sur le rayon vecteur mené du foyer à une conique, comme diamètre, on décrit un cercle; ce cercle touche celui qui est décrit sur l'axe focal.

64° Par le foyer F d'une conique, on mène la transversale FMN qui rencontre la courbe en M et la directrice correspondante en N; on a

$$\frac{1}{FM} - \frac{1}{FN} = \text{Constante}.$$

65° La projection de la normale à une conique, sur le rayon vecteur correspondant, est constante.

66° La normale à une conique est au demi-diamètre parallèle à la tangente correspondante dans le rapport des axes.

67° Par un point A, dans le plan d'une conique, on mène: le diamètre qui y passe, la droite conjuguée, et une 3ème droite quelconque; les tangentes, aux points où cette 3ème droite rencontre la courbe, coupent la 2ème droite en deux points également distants du point A.

68° La somme des lignes obtenues, en projetant les longueurs de deux normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent orthogonalement la conique, sur les rayons vecteurs qui joignent ces points à un même foyer, est égale à la corde focale parallèle à la droite qui les joint.

69° Parmi tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués ont une aire maximum.

70° Parmi tous les parallélogrammes inscrits dans une ellipse, ceux dont les diagonales forment un système de diamètres conjugués ont une aire maximum.

71° Un rectangle quelconque étant circonscrit à une ellipse, le parallélogramme qui a pour sommets les points de contact a un périmètre constant, et deux côtés consécutifs font avec la tangente des angles égaux.

72° Si par deux points B, C, conjugués par rapport à une conique, on mène deux droites qui se coupent en un point a de la courbe: la corde bc que ces deux droites interceptent sur la conique passe par le pôle A de BC.

73° Si par un point d'une conique on mène deux droites quelconques également inclinées sur un axe fixe, la corde comprise dans la conique entre ces deux droites passe par un point fixe.

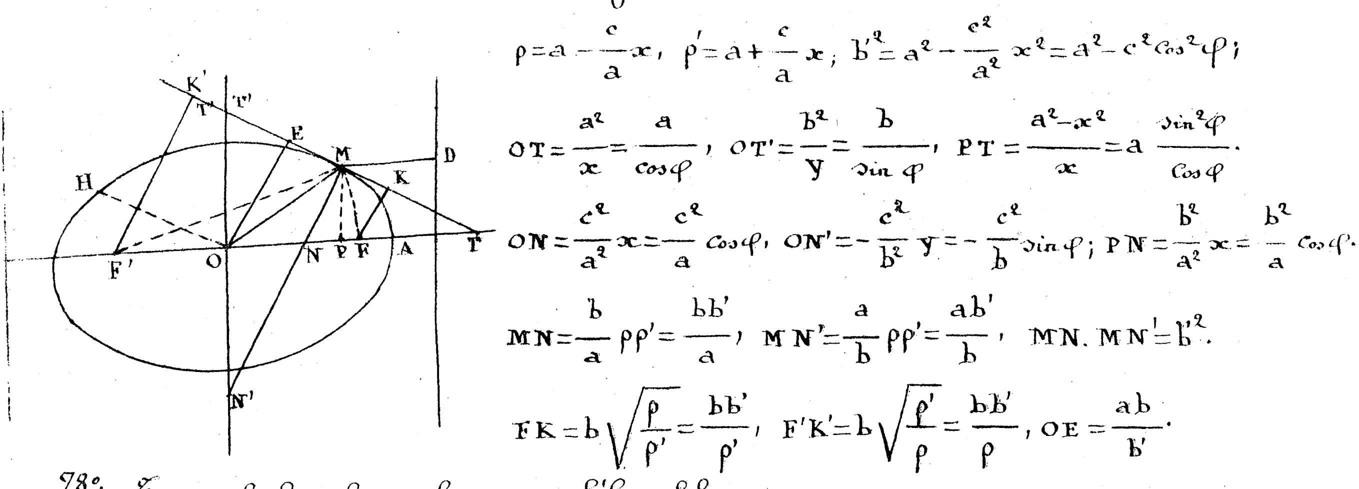
74° Étant pris dans le plan d'une conique deux points fixes a, b, et leurs polaires A, B; puis une droite quelconque M et son pôle m: Le rapport des distances de ce point aux deux droites A et B, est au rapport des distances de sa polaire M aux deux points a et b, en raison constante.

75° On mène par un point M d'une conique la tangente MT et une corde MN; Δ et D représentent les demi-diamètres de la courbe parallèles à ces deux droites; a et b sont les demi-axes de la courbe; α est l'angle compris entre la corde et la tangente; on a

$$\sin\alpha = \frac{ab\cdot\overline{MN}}{2D^2\cdot\Delta}.$$

76° Deux cônes de révolution qui se coupent ont même axe, et l'angle au sommet du cône intérieur est de 60 degrés; le sommet de ce cône est un foyer commun de toutes les sections déterminées sur le cône extérieur par les plans tangents au cône intérieur.

77° Soient O le centre d'une ellipse, M un de ses points, OP et MP ses coordonnées x et y; ρ et ρ' les deux rayons vecteurs MF et MF'; b' la longueur du demi-diamètre conjugué de OM; TMT' une tangente rencontrant les axes OA et OB en T et T'; NMN' une normale, en M, rencontrant les axes OA et OB en N et N'; MD la perpendiculaire sur la directrice; OE, FK, F'K', les perpendiculaires abaissées du centre et des foyers sur la tangente; on a les formules suivantes (φ est le paramètre angulaire du point M):



$$\rho = a - \frac{c}{a}x,\quad \rho' = a + \frac{c}{a}x;\quad b'^2 = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 - c^2\cos^2\varphi;$$

$$OT = \frac{a^2}{x} = \frac{a}{\cos\varphi},\quad OT' = \frac{b^2}{y} = \frac{b}{\sin\varphi},\quad PT = \frac{a^2 - x^2}{x} = a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

$$ON = \frac{c^2}{a^2}x = \frac{c^2}{a}\cos\varphi,\quad ON' = -\frac{c^2}{b^2}y = -\frac{c^2}{b}\sin\varphi;\quad PN = \frac{b^2}{a^2}x = \frac{b^2}{a}\cos\varphi.$$

$$MN = \frac{b}{a}\rho\rho' = \frac{bb'}{a},\quad MN' = \frac{a}{b}\rho\rho' = \frac{ab'}{b},\quad MN.MN' = b'^2.$$

$$FK = b\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} = \frac{bb'}{\rho'},\quad F'K' = b\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \frac{bb'}{\rho},\quad OE = \frac{ab}{b'}.$$

78° Trouver les formules analogues pour l'hyperbole.

79° Soit ABC un triangle inscrit; d'un point O de la courbe on mène les droites OM, ON, OP, respectivement conjuguées des côtés BC, AC, AB et rencontrant ces côtés aux points M, N, P; ces trois points sont en ligne droite.

80° Si un cercle, passant par un foyer, rencontre une conique en quatre points, la somme des inverses de leurs distances au foyer est constante.

81° Étant donnée une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans le plan de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF' rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}.$$

82° Soient F et D le foyer et la directrice correspondante d'une conique; A_1, A_2 deux points fixes sur la conique et M un point variable aussi sur la conique; les droites MA_1, MA_2 rencontrent respectivement la directrice aux points

P et Q ; la distance PQ est vue du foyer F sous un angle constant.

83° Si α et β sont les coordonnées d'un point du plan d'une ellipse rapportée à ses axes, les coordonnées x, y du point de rencontre des deux normales aux points, où la conique est coupée par la polaire du point (α, β), sont données par les formules $x = \dfrac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}$, $y = \dfrac{c^2\alpha(b^2 - \beta^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}$.

84° Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle donné pour points conjugués.

85° L'aire de la podaire du centre de l'ellipse est égale à la moitié de l'aire du cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

II°. Hyperbole.

86° Les sécantes, menées d'un point quelconque d'une hyperbole à deux points fixes sur la courbe, interceptent sur l'une et l'autre asymptote des longueurs constantes.

87° Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

88° Soit K un point de l'asymptote d'une hyperbole, dont l'ordonnée et l'abscisse par rapport aux axes de la courbe sont KP et KR ; si KP coupe l'hyperbole en M et si KR coupe l'hyperbole conjuguée en N, on a

$$\overline{KP}^2 - \overline{MP}^2 = b^2, \text{ et } \overline{KR}^2 - \overline{NR}^2 = a^2.$$

89° Si par le point M d'une hyperbole on tire une sécante quelconque qui coupe les deux asymptotes en P et P', la tangente parallèle à cette sécante et limitée aux deux asymptotes étant LQL', on a

$$MP.MP' = \overline{QL}^2.$$

90° Deux hyperboles conjuguées interceptent sur une sécante quelconque des longueurs égales.

91° Si M et N sont les points de rencontre de deux hyperboles conjuguées avec l'ordonnée et l'abscisse d'un point d'une de leurs asymptotes, les tangentes menées aux deux courbes en M et en N sont respectivement parallèles à ON et à OM (O est le centre).

92° Si l'on mène deux tangentes quelconques à l'hyperbole, les droites déterminées par leurs points d'intersection avec les asymptotes sont parallèles.

93° Si l'on tire une droite par un sommet de l'hyperbole, son second point de rencontre avec la courbe divise en deux parties égales la portion de cette droite interceptée par les parallèles menées de l'autre sommet de l'hyperbole à ses asymptotes.

94° Dans l'hyperbole équilatère, la portion de normale comprise entre le point de contact et l'axe transverse est égale à la distance du centre au point de contact.

95° Les asymptotes de l'hyperbole divisent en parties égales les droites qui unissent les extrémités de deux diamètres conjugués.

96° OC et OD étant deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$FD - DC = a - b.$$

97° Dans l'hyperbole équilatère, les cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués sont égales.

98° Le rayon du cercle qui touche une hyperbole et ses asymptotes est égal à la portion de la corde focale principale prolongée comprise entre la courbe et ses asymptotes.

99° MM' étant une corde de l'hyperbole et OP le demi-diamètre correspondant, si l'on tire par les points M, P, M', des parallèles MH, PK, M'H', à l'une des asymptotes jusqu'à la rencontre de l'autre en H, K, H', on aura

$$OH.OH' = \overline{OK}^2.$$

100° Si deux hyperboles équilatères égales sont décrites de manière que les axes de l'une soient les asymptotes de l'autre, elles se coupent à angle droit.

101.° Si deux tangentes partant d'un même point P coupent l'une des asymptotes de l'hyperbole en R et S, l'autre asymptote en r et s, on a

$$PR.PS = Pr.Ps.$$

102° Si la tangente au point M d'une hyperbole équilatère coupe ses asymptotes en L et en L', et si MG est la normale en M, l'angle LGL' est droit.

103° Soit la corde MM' d'une hyperbole rencontrant ses asymptotes en R et R', et la tangente RN à la courbe; si les parallèles MH, NK, M'H' à l'une des asymptotes rencontrent l'autre asymptote aux points H, K, H', on a

$$MH + M'H' = 2NK.$$

104° Si par le point M d'une hyperbole on mène des parallèles MD et ME à chaque asymptote, jusqu'à la rencontre de l'autre, et si l'on construit une ellipse ayant OD et OE pour demi-diamètres conjugués, OM coupe l'ellipse en N, les tangentes aux deux courbes en M et en N sont parallèles.

105° On donne une série d'ellipses tangentes à une hyperbole équilatère et ayant leurs axes dirigés suivant ses asymptotes; le produit des axes de ces ellipses est constant.

106° Sur deux diamètres conjugués d'une ellipse comme asymptotes on construit deux hyperboles conjuguées l'une à l'autre; si l'une de ces hyperboles touche l'ellipse, il en sera de même de l'autre, et les diamètres tirés aux points de contact sont conjugués aussi bien dans l'ellipse que dans l'hyperbole.

107° Deux cônes de révolution qui ont même sommet, même génératrice, et leurs axes rectangulaires, sont coupés par deux plans menés parallèlement à leurs axes d'un même point de la génératrice commune suivant deux hyperboles conjuguées.

108° Dans l'hyperbole équilatère, les droites menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre sont également inclinées sur les axes de cette hyperbole.

109° Une hyperbole, qui a pour asymptotes deux diamètres conjugués d'une conique, coupe la courbe sur deux autres diamètres conjugués.

110° Si deux diamètres conjugués d'une ellipse sont en même temps les asymptotes d'une hyperbole, les points de contact des tangentes communes à l'ellipse et à l'hyperbole sont sur une ellipse semblable à la proposée.

111° Si l'on joint aux deux foyers de l'hyperbole les points de rencontre d'une tangente à la courbe avec les asymptotes, on obtient un quadrilatère inscriptible.

112° Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe par le point de rencontre des hauteurs.

113° Des hyperboles équilatères concentriques se coupent sous un angle constant, si l'angle de leurs axes est constant.

114° Étant donnés quatre points situés sur une hyperbole équilatère, ces quatre points forment quatre triangles, les points de concours des hauteurs de ces quatre triangles sont sur l'hyperbole; les quatre cercles des neuf points de ces triangles passent par le centre de l'hyperbole.

115° Dans un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères ayant même centre, la somme des angles est égale à deux angles droits.

116° Soient A et B deux points pris dans le plan d'une hyperbole équilatère; par chacun d'eux on mène une parallèle à la polaire de l'autre, soit C le point de rencontre de ces parallèles; les points A, B, C, et le centre de la courbe sont sur un même cercle.

117° Les centres des deux hyperboles équilatères tangentes à quatre droites données sont situés sur un cercle passant par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre droites.

118° Si un quadrilatère est inscrit à une hyperbole équilatère, le cercle passant par les points de rencontre des côtés opposés et celui des diagonales, passe aussi par le centre de la courbe.

119° Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un même triangle est le cercle des neuf points du triangle.

120° Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère touchant une droite fixe en un point fixe et passant par un second point est un cercle.

121° Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère touchant deux droites dont l'une en un point donné est un cercle; ce cercle touche au point de concours des tangentes celle dont le point de contact est assigné.

122° Les droites qui joignent un foyer de l'hyperbole aux points de rencontre d'une tangente avec les asymptotes forment un angle constant.

123° Le point de rencontre d'une asymptote de l'hyperbole avec la corde de contact de deux tangentes est au milieu des points de rencontre de cette asymptote avec les deux tangentes.

124° Le rectangle des segments faits par chaque tangente à une hyperbole sur les deux asymptotes à partir du centre, est constant.

125° Lorsque deux hyperboles ont les mêmes asymptotes, tout angle dont les côtés sont parallèles aux asymptotes intercepte dans les deux courbes deux cordes parallèles.

126° Deux droites parallèles aux asymptotes d'une hyperbole interceptent dans la courbe et entre les asymptotes deux droites parallèles.

127° Si du pied de l'ordonnée d'une hyperbole équilatère on décrit un cercle avec cette ordonnée pour rayon, tous ces cercles coupent orthogonalement le cercle décrit sur l'axe transverse de l'hyperbole.

III° Parabole.

128° La perpendiculaire abaissée du foyer de la parabole sur une tangente à la courbe, est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la moitié du paramètre p.

129° Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, les triangles FPM, FPM' sont semblables, et FP est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs FM, FM', des deux points de contact.

130° Si deux cordes de la parabole se coupent, les produits de leurs segments sont dans le rapport des rayons vecteurs des extrémités des diamètres qui leur sont conjugués.

131° MN étant une tangente commune à la parabole et au cercle décrit sur la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer comme diamètre, les droites FM et FN sont également inclinées sur ces cordes.

132° La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

133° Si l'ordonnée d'un point M de la parabole passe par le milieu de la sous-normale qui correspond à un point M', l'ordonnée du point M est égale à la normale qui correspond au point M'.

134° Si d'un point pris sur une tangente à la parabole on mène une autre tangente à la courbe, l'angle compris entre cette tangente et la droite menée du même point au foyer est constant.

135° Si par le point de contact d'une tangente à la parabole on tire une corde, puis qu'on trace une autre droite parallèle à l'axe, la portion de cette droite comprise entre la tangente et la corde sera divisée par son point de rencontre avec la courbe dans le même rapport que cette droite elle même divise la corde.

136° Si le diamètre de la parabole mené par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

137° Si deux tangentes égales à la parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux; mais les segments égaux ne sont pas placés de même sur les deux tangentes.

138° MFN étant une corde quelconque menée par le foyer de la parabole, si l'on trace du sommet A les droites AM et AN, elles rencontreront la corde focale perpendiculaire à l'axe en deux points P et Q tels, que leurs distances au foyer

soient égales aux ordonnées des points M et N.

139° Si d'un point O pris sur l'axe de la parabole on mène une corde, la distance AO du sommet A au point O est moyenne proportionnelle entre les abscisses des extrémités de la corde.

140° Du sommet A on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M'; le paramètre 2p est la moyenne proportionnelle entre les abscisses des points M et M'.

141° Sur une corde de la parabole comme diamètre on décrit un cercle qui coupe la parabole en deux autres points; si l'on joint ces points, les deux cordes considérées interceptent sur l'axe de la courbe une longueur égale au paramètre 2p.

142° Si un triangle est inscrit dans une parabole, les points où ses côtés prolongés viennent rencontrer les tangentes menées à la courbe par les sommets opposés, sont en ligne droite.

143° Si les tangentes PM, PM', à la parabole sont coupées en Q et en Q' par une troisième tangente, on a

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{Q'M'}{PQ'}.$$

144° Si une parabole roule sur une parabole égale, les sommets étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

145° Des extrémités d'une corde focale de la parabole on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque de son plan; la somme des rapports de chaque perpendiculaire au rayon vecteur correspondant est constante.

146° Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur deux tangentes, sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

147° Si l'on prend sur la corde focale principale d'une parabole deux points également distants du foyer, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur une tangente quelconque à la courbe a une aire constante.

148° Les produits des distances du foyer d'une parabole aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la courbe, sont égaux.

149° Étant données deux tangentes à la parabole, si on leur mène des parallèles par un point quelconque de leur corde de contact, la diagonale du parallélogramme ainsi formé, qui est opposée au point choisi sur la corde de contact, est tangente à la courbe.

150° En un point P de la parabole, la corde du cercle de courbure, qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe, est égale à quatre fois le rayon vecteur du point P.

151° Si un quadrilatère est inscrit à une parabole, les points d'intersection des diamètres, qui passent par les extrémités d'un même côté, avec les diagonales, déterminent une parallèle au quatrième côté.

152° La somme des perpendiculaires abaissées des extrémités de cordes parallèles sur l'axe de la parabole est constante.

153° Un cercle quelconque étant tracé dans le plan d'une parabole, la somme des perpendiculaires abaissées des points d'intersection sur l'axe de la parabole est constamment nulle.

154° Du sommet d'une parabole on abaisse des perpendiculaires sur les normales menées d'un point fixe; les trois points M_1, M_2, M_3, où ces perpendiculaires rencontrent la courbe sont sur un cercle passant par le sommet.

155° Dans un triangle formé par trois axes de paraboles confocales, la somme des angles est égale à deux angles droits.

156° Soient M et M' deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces points, F le foyer; on a

$$\frac{\overline{PM}^2}{MF} = \frac{\overline{PM'}^2}{M'F}.$$

157° Lorsqu'une parabole est inscrite dans un triangle, la directrice passe par un point fixe intersection des trois hauteurs du triangle.

158° Si on coupe deux tangentes à la parabole par une perpendiculaire à l'axe, qu'aux points B et C où elle les rencontre on élève des perpendiculaires à ces tangentes; la droite AD, qui joint le point de concours D de ces perpendiculaires au point de concours A des tangentes, passe par le foyer.

159° Par un point M de la parabole on mène la tangente MT et la normale MN qui coupe la courbe en N; la tangente en N rencontre MT en T; le point I, intersection de MT avec la directrice, est le milieu de MT.

160° Supposons un polygone, dont tous les angles sont égaux entre eux, circonscrit à une parabole:

I° Le rayon vecteur dirigé vers chacun des sommets divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs qui passent par les deux points de contact entre lesquels ce sommet se trouve compris.

II° Le rayon vecteur dirigé vers chacun des points de contact divise aussi en deux parties égales l'angle formé par ceux qui passent par les sommets entre lesquels le point de contact se trouve compris.

III° Tous les angles formés autour du foyer par les rayons vecteurs consécutifs sont égaux entre eux

IV° Le polygone considéré est inscriptible à une hyperbole dont un des foyers est celui de la parabole.

V° Si l'on joint les points de contact du polygone primitif, on aura un nouveau polygone circonscriptible à une ellipse dont un des foyers sera celui de la parabole.

VI° Les droites, qui joignent les sommets du premier polygone aux points de contact correspondant du second polygone avec l'ellipse, passent par le foyer de la parabole.

161° Une parabole étant inscrite dans un angle donné, si la direction des diamètres est donnée, le lieu du foyer est une droite fixe.

162° Quand deux droites sont divisées en parties proportionnelles, les droites qui joignent deux à deux les points homologues enveloppent une parabole tangente aux deux droites.

163° Si de chaque point d'une droite on abaisse des perpendiculaires sur deux autres droites, la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires enveloppent une parabole tangente aux deux droites.

164° Si l'on fait tourner toutes les tangentes à une parabole autour de leurs points de rencontre avec une tangente fixe, dans un même sens de rotation et du même angle: toutes ces droites, dans leurs nouvelles positions, enveloppent une parabole tangente à la droite fixe.

165° Lorsqu'une parabole est tangente à deux droites fixes Ox, Oy:

I° Si la directrice passe par un point fixe, le foyer décrit un cercle circonscrit au triangle formé par les deux droites fixes et ayant le point fixe pour point d'intersection des trois hauteurs.

II° Si le foyer décrit un cercle passant par le sommet O de l'angle, la directrice passe par un point fixe intersection des trois hauteurs du triangle déterminé par les deux droites fixes et le cercle pris pour cercle circonscrit.

166° Lorsqu'une parabole touche trois droites, la directrice passe par le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

167° Lorsqu'une parabole touche deux droites, l'une en un point fixe; la directrice passe par un point fixe, le foyer décrit le cercle circonscrit au triangle déterminé par les deux droites données et ayant pour point de rencontre des hauteurs le point fixe par lequel passe la directrice.

168° Si d'un point quelconque P de la corde de contact d'un angle circonscrit à une parabole on mène des parallèles aux côtés de cet angle, elles iront de nouveau rencontrer ces côtés en deux points qui appartiendront à une tangente à la courbe.

169° Dans la parabole, le rayon de courbure en un point quelconque est le double de la normale correspondante, comptée depuis la directrice, comme axe, et prise en sens contraire.

IV° Propriétés générales et diverses. Systèmes de coniques.

170. Étant pris arbitrairement un point P dans le plan d'une conique, on pourra toujours déterminer deux droites telles, que le carré de la distance de chaque point de la conique au point P, et le produit des distances du même point de la courbe aux deux droites, soient en raison constante.

171° Étant donnés deux points d'une conique et deux tangentes, la ligne qui joint les points de contact des coniques satisfaisant à ces quatre conditions avec les deux tangentes fixes, passe par un point fixe ; le point de rencontre des tangentes aux deux points fixes décrit une droite fixe.

172° Si l'on fait passer des coniques par quatre points pris sur un cercle, leurs centres et les pieds des normales menées du centre du cercle à ces courbes sont sur une même hyperbole.

173° Les centres des coniques tangentes à deux droites données et passant par deux points donnés sont sur une autre conique passant par le point d'intersection des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare les deux points, par le milieu de la partie interceptée par ces droites sur la direction indéfinie de celle qui renferme les deux points donnés.

174° Quand un triangle ABC est inscrit dans une conique, si autour d'un point O de la courbe on fait tourner une droite qui rencontre les côtés du triangle en trois points a, b, c, et la courbe en un quatrième point e, le rapport anharmonique de ces quatre points reste constant.

175° Quatre droites menées par un même point ont leur rapport anharmonique égal à celui des droites conjuguées passant par ce point.

176° Trois systèmes de deux droites conjuguées menées par un même point forment une involution.

177° Si autour de deux points fixes on fait tourner deux droites conjuguées par rapport à une conique, le point d'intersection de ces deux droites décrit une conique qui passe par les deux points fixes et par les quatre points de contact des tangentes à la conique proposée, menées par les deux points fixes.

178° Quand un quadrilatère est inscrit à une conique, si d'un point de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés on mène deux tangentes à la courbe et deux couples de droites aux sommets opposés du quadrilatère ; ces six droites sont en involution.

179° Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, une transversale menée par le point d'intersection des deux diagonales rencontre les côtés opposés et la courbe en trois couples de points en involution.

180° Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, si d'un point de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés on mène deux tangentes à la courbe, ces droites seront tangentes à une conique inscrite dans le quadrilatère.

181° Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, par deux points de cette courbe en ligne droite avec le point d'intersection des deux diagonales, on peut mener une conique circonscrite au quadrilatère.

182° Si, sur les deux diagonales et la droite qui joint les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement les trois droites, ces six points seront une conique.

183° Si par chaque point de concours, soit de deux côtés opposés d'un quadrilatère, soit des deux diagonales, on mène deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux deux côtés, ou aux deux diagonales, les trois couples de droites ainsi déterminées sont tangentes à une conique.

184° Deux triangles étant inscrits à une conique, si cinq de leurs côtés sont tangents à une conique, le sixième côté touchera cette même conique.

185° Deux triangles étant circonscrits à une conique, si cinq de leurs sommets sont sur une conique, le sixième sera sur cette conique.

186° Si, autour d'un point pris dans le plan d'une conique, on fait pivoter un angle dont les côtés sont parallèles à un système de diamètres conjugués d'une seconde conique, les cordes d'intersection de cet angle avec la première conique envelopperont une troisième conique.

187° Un polygone de n côtés est inscrit dans une conique, (n-1) côtés roulent sur des coniques doublement tangentes à la première ; l'enveloppe du $n^{ème}$ côté est une conique. Démontrer le théorème corrélatif.

188° Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit dans une conique, le produit des distances

de chaque point de la courbe aux côtés de rang impair et le produit des distances du même point aux côtés de rang pair, sont dans un rapport constant.

190° Quand trois points a, b, c, situés sur une conique Σ sont conjugués par rapport à une autre conique C, on peut déterminer sur la première courbe une infinité d'autres systèmes de trois points a', b', c', conjugués par rapport à la seconde.

191° Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées de deux sommets opposés au foyers de la courbe sont tangentes à une conique qui a pour foyers les deux autres sommets du quadrilatère.

192° Si deux coniques se touchent, et que par un point quelconque de la tangente commune on mène des tangentes à chacune d'elles, la ligne qui joint les points de contact passe par l'intersection des tangentes communes aux deux coniques.

193° Si deux coniques touchent les côtés d'un quadrilatère, les huit points de contact sont sur une même conique.

194° Si autour d'un point d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur constante, la corde qu'il intercepte dans la conique enveloppe une seconde conique qui a un double contact avec la proposée.

195° Deux courbes du second degré étant doublement tangentes; si par un point quelconque de la corde de contact on mène les quatre tangentes, les quatre points de contact sont en ligne droite.

196° Deux coniques C et C' étant données; un point A étant pris sur la première, on mène par ce point, dans la conique C, deux cordes AP et AQ parallèles à deux diamètres conjugués quelconques de la conique C'; les cordes PQ passent par un point fixe.

197° Étant données deux coniques S et S', et deux tangentes à la conique S'; les six droites, qui joignent deux à deux les quatre points où ces tangentes coupent la conique S, sont deux à deux tangentes à une même conique passant par les points d'intersection des coniques S et S'. Théorème Corrélatif?

198° Étant donnée une conique S, on mène une conique variable S' qui coupe la première en deux points fixes et qui touche deux droites fixes dont le point de rencontre est situé sur la conique S; l'enveloppe de la droite qui passe par les deux autres points d'intersection des coniques S et S' est une conique. Théorème Corrélatif?

199° Quand deux coniques sont circonscrites à un quadrilatère, les trois couples de points dans lesquels une transversale rencontre ces deux courbes et deux opposés du quadrilatère sont en involution.

200° Quand deux coniques sont inscrites dans un quadrilatère, si d'un point quelconque on mène des tangentes aux deux courbes et deux droites aboutissant aux deux sommets du quadrilatère, ces trois couples de droites sont en involution.

201° Lorsque deux coniques passent par quatre points, leurs tangentes en ces points sont huit droites tangentes à une même conique.

202° Étant données deux coniques C et Σ, si l'on prend un point tel que les deux couples de tangentes menées aux coniques, par ce point, forment un faisceau harmonique; le lieu de ce point est une conique qui passe par les huit points où C et Σ touchent les quatre côtés du quadrilatère qui leur est circonscrit.

203° Quand deux coniques ont un double contact, si par le pôle de contact S (c.à.d. le point de rencontre des tangentes aux deux points de contact) on mène une transversale qui rencontre la première en deux points a et b, et la seconde en deux points dont a' soit l'un, on a

$$\frac{Sa}{Sb} : \frac{a'a}{a'b} = \text{Constante}.$$

204° Quand deux coniques ont un double contact, si de chaque point m de la corde de contact L on mène deux tangentes A, B, à l'une, et une tangente A' à l'autre; on a

$$\frac{\sin(L,A)}{\sin(L,B)} : \frac{\sin(A',A)}{\sin(A',B)} = \text{Constante}.$$

205° Si par le point de contact de deux coniques qui se touchent, on mène une corde quelconque, les tangentes aux deux autres points d'intersection se coupent sur la corde commune associée avec la tangente commune.

206° Si A, B, C, sont trois coniques ayant un double contact avec une conique S, et si A et B touchent toutes deux C, les tangentes aux points de contact se coupent sur la corde commune à A et B; la ligne qui joint les points de contact passe par l'intersection des tangentes communes à A et B.

207° Étant données trois coniques ayant quatre points communs, un triangle inscrit dans l'une d'elles a deux de ses côtés tangents respectivement aux deux autres; le troisième côté enveloppe une conique. Théorème Corrélatif?

208° Étant données n coniques ayant quatre points communs, un polygone de n côtés inscrit dans l'une d'elles a (n−1) de ses côtés tangents respectivement aux autres; le $n^{ème}$ côté enveloppe une conique. Théorème Corrélatif?

209° Quand trois coniques sont circonscrites à un quadrilatère, toute transversale les rencontre en six points qui sont en involution.

210° Quand trois coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les tangentes menées d'un point à ces trois courbes forment trois couples en involution.

211° Lorsque deux coniques ont chacune un double contact avec deux autres coniques, si les quatre cordes de contact passent par un même point: les huit points de contact sont situés sur une conique.

212° Lorsque deux coniques ont chacune un double contact avec deux autres coniques, si les quatre pôles de contact (c.à.d. les pôles des cordes de contact) sont sur une même droite: les tangentes aux huit points de contact seront tangentes à une même conique.

213° Quand trois coniques C, C', C'', ont quatre points communs, si de chaque point m de C'' on mène une tangente à chacune des deux C, C', et qu'on joigne les deux points de contact a, a', par une droite qui rencontre les deux courbes en deux nouveaux points b et b': on aura entre les deux cordes ab, a'b' de C et C', et les demi-diamètres de ces courbes, parallèles à la droite aa', la relation

$$\frac{\overline{ab}}{D_2^2} : \frac{\overline{a'b'}}{D'^2} = \text{Constante}$$

214° Quand trois coniques C, C', C'', sont inscrites dans un quadrilatère, si une tangente roule sur la troisième C'' et rencontre les deux premières C, C', en deux couples de points a, b et a', b'; si D et D' sont, dans C et C', les diamètres parallèles à la tangente mobile, on a la relation

$$\frac{\overline{ab}}{D^2} : \frac{\overline{a'b'}}{D'^2} = \text{Constante.}$$

215° Quand trois coniques C, C', Σ, sont inscrites dans un quadrilatère, si une tangente roule sur la troisième Σ et que par les quatre points où cette droite rencontre les deux coniques C, C', on mène les tangentes à ces courbes; les tangentes à la première rencontreront les tangentes à la seconde en quatre points dont le lieu sera une conique passant par les quatre points d'intersection de C et C'.

216° Quand trois coniques passent par quatre points, les tangentes de l'une en ces points et les tangentes communes aux deux autres, sont huit droites tangentes à une même conique.

217° Quand deux coniques ont un double contact, tout angle dont les côtés passent par les deux points de contact, intercepte dans les deux courbes deux cordes qui concourent en un point de la corde de contact.

218° Quand trois coniques S, S', S'', sont telles, qu'un point P ait la même polaire dans les trois courbes, il existe deux coniques qui ont un double contact avec chacune de ces trois courbes.

219° Si l'on considère une série de coniques doublement tangentes à deux coniques données, les polaires d'un point relatives à cette série enveloppent une conique; les pôles d'une droite relatifs à cette série décrivent une conique.

220° Lorsque deux coniques C, C', ont un double contact avec une conique W; si d'un point I d'une des cordes communes de C et C', on mène des tangentes à ces courbes, les quatre points de contact sont sur une conique Σ inscrite dans W, et dont I est le pôle de contact.

221° Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante et égale à celle du triangle primitif.

222° Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, le produit des carrés de ses demi-axes principaux est égal au produit des distances de son centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, multiplié par le double du diamètre du cercle circonscrit.

223° Soient ABC un triangle donné, D un point fixe dans son plan, α, β, γ les trois points où les droites DA, DB, DC, rencontrent les côtés du triangle opposés aux sommets par lesquels elles passent respectivement. Si l'on décrit la conique Σ qui passe par les points α, β, γ, et qui touche les côtés AC, et BC, cette conique touchera aussi le côté AB.

224° Etant données deux coniques, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes menées de ce point aux deux coniques forment un faisceau harmonique est une conique.

225° Si du centre O d'une ellipse on décrit un cercle d'un rayon égal à la somme ou à la différence des deux demi-axes, on peut inscrire une infinité de triangles dans le cercle et circonscrits à l'ellipse.

226° Le lieu des centres des coniques semblables circonscrites à un triangle donné est une ligne du 4ème ordre ayant les milieux des côtés pour points doubles. L'enveloppe de ces coniques est encore une courbe du 4ème ordre ayant les sommets du triangle pour points doubles.

227° Lorsque deux coniques ont un double contact, et que d'un point de l'une on mène des tangentes à l'autre, elles déterminent avec la corde de contact de ces tangentes un triangle tel, que le rapport de son aire au produit des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur la corde de contact commune est constant.

228° Etant donnés une conique et un point O, si l'on mène par ce point deux droites conjuguées et que l'on joigne deux de leurs points d'intersection avec la conique, le rapport de l'aire du triangle ainsi formé au produit des distances de ses sommets à la polaire du point O sera une quantité constante.

229° Quand un faisceau de coniques passant par quatre points fixes est coupé par une conique fixe, les cordes communes enveloppent une courbe de 3ème classe.

230° ABCD est un quadrilatère inscrit dans une conique tels que les normales qui passent par les quatre sommets se coupent en un seul point. Soit O le centre de la conique, P le pôle de AB; prolongeons PO d'une longueur égale à elle même, soit P'O = PO; la droite qui réunit les projections de P' sur les axes principaux se confond avec le côté CD.

231° Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles, qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique.

232° La condition, pour que le point d'intersection des deux droites

$$mx+ny+pz=0, \quad m_1x+n_1y+p_1z=0,$$

soit sur la conique

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$

est

$$\begin{vmatrix} A & B & D & m & m_1 \\ B & C & E & n & n_1 \\ D & E & F & p & p_1 \\ m & n & p & 0 & 0 \\ m_1 & n_1 & p_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

233° Dans une série de coniques homofocales à centre, le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une même droite est une hyperbole équilatère; et les points de contact des tangentes perpendiculaires aux premières sont sur la même hyperbole.

234° Quand des angles circonscrits aux coniques (homofocales) ont leurs côtés parallèles à deux droites données, leurs sommets sont sur une hyperbole équilatère; et les points de contact des tangentes parallèles à la bissectrice de l'angle des deux droites sont sur la même hyperbole.

235° Si l'on mène aux coniques (homofocales) des tangentes parallèles sous des directions différentes, les foyers des hyperboles équilatères lieux des points de contact sont sur une lemniscate. Les sommets de ces mêmes hyperboles sont sur une lemniscate (Volpicelli).

236° Le lieu des foyers d'une série d'hyperboles équilatères concentriques, qui passent par un même point, est une lemniscate; le lieu des sommets des mêmes hyperboles est une lemniscate.

237° Le lieu des sommets d'une série d'ellipses concentriques et semblables entre elles, qui passent par un point fixe, est l'ensemble de deux courbes, lieux des pieds des perpendiculaires abaissées du centre commun sur les tangentes de deux ellipses de la série, dont l'une a pour demi-grand axe la distance du centre au point fixe, et l'autre a pour demi-petit axe la même distance (Volpicelli).

238° Le lieu des foyers des ellipses précédentes est la courbe lieu des perpendiculaires abaissées du centre commun sur les tangentes d'une ellipse semblable et semblablement placée par rapport à l'ellipse de la série qui a pour demi-petit axe la distance du centre au point fixe (Volpicelli).

239° Parmi tous les quadrilatères d'aire maximum inscrit à une ellipse, celui-là a un périmètre maximum qui a les axes de l'ellipse pour diagonales; et celui-là a un périmètre minimum qui a pour diagonales les diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

240° Si a et b sont les deux axes d'une ellipse; R et R_1 les rayons de deux cercles osculateurs; d la distance de leurs centres; p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles; on a la relation

$$2dp = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$

Nota. Il ne m'a pas été possible de citer les auteurs des diverses propositions qui viennent d'être énoncées; je dois dire cependant qu'une grande partie a été extraite des Nouvelles Annales et du Traité des Coniques récemment publié par M. Chasles; j'ai également emprunté plusieurs propositions au traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse.

LIVRE SIXIÈME.

Chapitre I.
Coordonnées Polaires.

§I. Ligne droite. Cercle.

1°. Transformation des coordonnées.

1026. Nous avons vu qu'un point M du plan peut être défini par sa distance OM ou ρ à un point fixe O appelé pôle, et par l'angle ω que la droite OM fait avec une droite fixe Ox nommée axe polaire; les quantités ρ et ω sont les coordonnées polaires du point M.

Un point quelconque du plan peut être défini complètement et sans ambiguité en supposant les valeurs de ρ toujours positives, et l'angle ω compris en 0 et 2π. Mais, lorsqu'il s'agit de la représentation des courbes, il y a avantage à introduire pour le rayon ρ des valeurs positives et négatives; et à faire varier l'angle ω de $-\infty$ à $+\infty$. Les valeurs positives et négatives de ces coordonnées sont introduites avec les conventions suivantes:

« Les angles positifs ω se comptent, à partir de l'axe polaire, dans un certain sens, de Ox vers Oy « par exemple; les angles négatifs seront comptés dans le sens contraire. Si pour une certaine « valeur de ω, la valeur de ρ est positive, on porte, à partir du pôle, une longueur égale à ρ dans « le sens du rayon qui termine l'angle ω; si la valeur de ρ est négative, on porte cette longueur dans « le sens contraire.»

Nous constaterons plus loin que, si ces conventions n'étaient pas introduites, il faudrait souvent plusieurs équations pour représenter les différentes branches d'une même courbe; tandis que, grâce à ces conventions, on pourra représenter par une seule équation toutes les parties d'une même courbe.

On verra encore, dans la Spirale d'Archimède par exemple, que si l'on ne faisait pas varier ω de $-\infty$ à $+\infty$, il faudrait une infinité d'équations pour représenter toutes les spires de cette courbe, il en serait de même pour toutes les courbes dont l'équation renferme ω sous des symboles d'opérations algébriques.

1027. Transformation des coordonnées.

Nous allons d'abord indiquer les relations qui existent entre les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point et les coordonnées polaires du même point.

1° Supposons d'abord que l'origine des coordonnées soit le pôle, et que l'axe Ox soit l'axe polaire. On a immédiatement

$$(1)\ \begin{cases} x=\rho\cos\omega\,, \\ y=\rho\sin\omega\,; \end{cases} \text{ d'où } (2)\ \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \operatorname{tang}\omega=\dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$$

Démontrons la généralité de ces formules ; c.à.d. constatons que ces égalités ont lieu, en grandeur et signe, en tenant compte des conventions faites sur les coordonnées rectilignes et les coordonnées polaires.

Supposons le point M dans l'angle yOx, c.à.d. x et y positifs. Soit d'abord ρ positif, et α l'angle aigu et positif MOP ; les valeurs de x et y sont

$$(1°) \qquad x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \sin\alpha ;$$

mais la valeur la plus générale qu'on puisse donner à ω pour obtenir le rayon OM est

$$\omega = \alpha + 2K\pi,$$

K étant un nombre entier positif ou négatif. Remplaçant α par $(\omega - 2K\pi)$ dans les égalités (1°), on trouve les formules (1).

Soit, en second lieu, ρ négatif, et β l'angle de OM′ avec Ox ; les valeurs de x et y sont alors

$$(2°) \qquad x = \rho \cos\beta, \quad y = \rho \sin\beta .$$

Mais la valeur la plus générale qu'on puisse donner à ω pour obtenir le prolongement du rayon OM c.à.d. OM′, est

$$\omega = \beta + 2K\pi,$$

K étant un nombre positif ou négatif. Remplaçant β par $(\omega - 2K\pi)$ dans les égalités (2°), on retrouve encore les formules (1).

On examinera les trois autres positions que peut avoir le point M par rapport à Ox et Oy ; et on en conclura la généralité des formules (1).

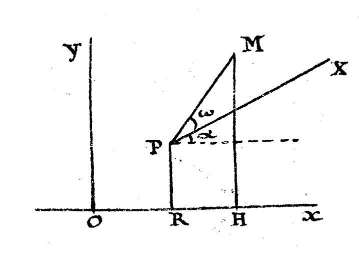
Ainsi les relations (1) sont vraies, non seulement lorsqu'on suppose ρ positif et ω compris entre 0 et 2π, mais encore lorsque ces quantités varient toutes deux de $-\infty$ à $+\infty$, pourvu qu'on ait égard aux conventions posées pour la construction des valeurs négatives.

2° Supposons maintenant que le pôle et l'axe polaire aient une position quelconque par rapport aux axes Ox et Oy.

Soient a et b les coordonnées du pôle P par rapport aux axes Ox et Oy, α l'angle de l'axe polaire PX avec la direction positive Ox ; M un point quelconque du plan dont les coordonnées rectilignes sont x et y, et les coordonnées polaires, ω et ρ ; de sorte que

$$OH = x, \; HM = y ; \; PM = \rho, \; MPX = \omega ; \; OR = a, \; RP = b.$$

Projetons les deux contours OHM et ORPM sur Ox et Oy successivement ; on a



$$(3) \quad \begin{cases} x = a + \rho \cos(\alpha + \omega) ; \\ y = b + \rho \sin(\alpha + \omega) . \end{cases}$$

Les formules (3) permettent de passer des coordonnées rectilignes x et y aux coordonnées polaires ρ et ω. On déduit de ces équations les formules inverses :

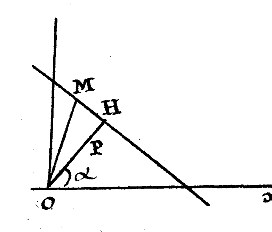
$$(4) \quad \begin{cases} \rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \\ \tang(\alpha + \omega) = \dfrac{y - b}{x - a} ; \end{cases}$$

qui permettent de passer des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes.

II° Équation d'une droite.

1028. On donne la distance de la droite au pôle et l'angle que fait avec l'axe polaire la perpendiculaire abaissée du pôle sur cette droite.

Soient p la valeur absolue de la distance OH ; α l'angle de OH avec la partie Ox de l'axe polaire ; ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la droite. Le triangle rectangle OHM donne



$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)};$$

c'est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de la droite, ou l'équation de la droite.

On voit par là que l'équation d'une droite, en coordonnées polaires, est de la forme

$$(2) \qquad \rho = \frac{A}{B\cos\omega + C\sin\omega};$$

A, B, C, étant des constantes.

Réciproquement : toute équation de la forme (2) représente une droite.

En effet, l'équation (2) peut s'écrire

$$\rho = \frac{\frac{A}{B}}{\cos\omega + \frac{C}{B}\sin\omega};$$

et en posant :

$$(3) \qquad \tang\alpha = \frac{C}{B}, \quad p = \frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}},$$

l'équation précédente devient successivement :

$$\rho = \frac{\frac{A}{B}\cos\alpha}{\cos(\omega-\alpha)} = \frac{\frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}}}{\cos(\omega-\alpha)} = \frac{p}{\cos(\omega-\alpha)}.$$

On retrouve ainsi l'équation (1) ; la distance p du pôle à la droite (2), et l'angle α que fait, avec Ox, la perpendiculaire abaissée du pôle sur cette droite, sont donnés par les équations (3).

Remarque I. Les équations

$$(4) \qquad \rho = \frac{p}{\cos\omega}, \quad \rho = -\frac{p}{\cos\omega},$$

représentent des droites perpendiculaires à l'axe polaire.

Les équations

$$(5) \qquad \rho = \frac{p}{\sin\omega}, \quad \rho = -\frac{p}{\sin\omega},$$

représentent des parallèles à l'axe polaire.

L'équation

$$(6) \qquad \omega = \text{constante},$$

représente une droite passant par le pôle.

Remarque II. On construira la droite représentée par l'équation

$$\rho = \frac{A}{B\cos\omega + C\sin\omega},$$

en donnant à ω deux valeurs particulières, $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ par exemple ; et, en construisant les valeurs correspondantes de ρ.

1029. 2° Équation d'une droite passant par un point donné P et faisant un angle θ avec le rayon vecteur qui passe par ce point.

L'équation de la droite cherchée peut s'écrire

$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega-\alpha)},$$

où $p = OH$, et $\alpha = \widehat{HOx}$.

Or, si ρ_1 et ω_1 sont les coordonnées du point P, on a

$$p = \rho_1 \sin\theta,\quad \omega_1 - \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta;$$

remplaçons, dans l'équation de la droite, p et α par les valeurs que fournissent ces dernières relations, nous trouvons

$$(7)\qquad \rho = \frac{\rho_1 \sin\theta}{\sin\left[\theta + \omega_1 - \omega\right]};$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$(7\,bis)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \cos(\omega_1 - \omega) + \frac{1}{\tan\theta}\sin(\omega_1 - \omega).$$

1030. 3° Équation d'une droite passant par deux points.

Soient (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2) les coordonnées de deux points donnés; exprimons que la droite

$$\rho = \frac{1}{A\cos\omega + B\sin\omega},$$

passe par ces deux points; on a

$$\begin{cases} A\cos\omega + B\sin\omega = \dfrac{1}{\rho}, \\ A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1 = \dfrac{1}{\rho_1}, \\ A\cos\omega_2 + B\sin\omega_2 = \dfrac{1}{\rho_2}. \end{cases}$$

Éliminons A et B entre ces trois équations, nous trouvons pour l'équation cherchée de la droite

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \cos\omega & \sin\omega & \dfrac{1}{\rho} \\ \cos\omega_1 & \sin\omega_1 & \dfrac{1}{\rho_1} \\ \cos\omega_2 & \sin\omega_2 & \dfrac{1}{\rho_2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant:

$$(8\,bis)\qquad \rho = \frac{\rho_1\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega_1)}{\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega) - \rho_1 \sin(\omega_1 - \omega)}.$$

III.° Équation d'un cercle.

1031. Si r et α sont les coordonnées du centre du cercle et R son rayon; si ρ et ω sont les coordonnées d'un point quelconque M de ce cercle, on a, dans le triangle OCM:

$$(1)\qquad \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\omega - \alpha) = R^2,$$

ou

$$(1\,bis)\qquad \rho^2 - 2r(\cos\alpha\cos\omega + \sin\alpha\sin\omega)\rho + r^2 - R^2 = 0;$$

c'est une relation entre les coordonnées ω et ρ d'un point quelconque du cercle, ou l'équation du cercle.

Toute équation de la forme

$$\rho^2 - \rho(A\cos\omega + B\sin\omega) + C = 0,$$

représente un cercle. En effet, posons

$$\tan\alpha = \frac{B}{A},$$

l'équation (2) se transforme en la suivante:

$$\rho^2 - \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega - \alpha)\cdot\rho + C = 0.$$

Or cette équation se ramène à la forme (1), en posant

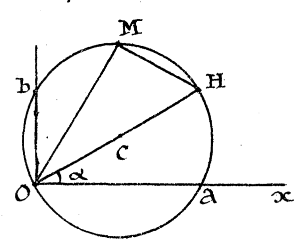
$$(3)\qquad \tan\alpha = \frac{B}{A},\quad 2r = \sqrt{A^2 + B^2},\quad r^2 - R^2 = C;$$

l'équation (2) représente donc un cercle dont les coordonnées du centre α et r, et dont le rayon R sont déterminés par les égalités (3). Ce cercle sera réel si

$$(3\ bis)\qquad \frac{A^2+B^2}{4}-C>0;$$

il sera imaginaire dans le cas contraire.

1032. Équation d'un cercle passant par le pôle.



Soient R le rayon du cercle; α l'angle, avec l'axe polaire, du diamètre qui passe par le pôle; ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque du cercle; le triangle rectangle OMH donne

$$(4)\qquad \rho = 2R\cos(\omega-\alpha),$$

telle est l'équation du cercle.

Toute équation de la forme

$$(5)\qquad \rho = A\cos\omega + B\sin\omega,$$

représente un cercle passant par le pôle.

Posons, en effet,

$$(6)\qquad \tan\alpha = \frac{B}{A} \quad\text{et}\quad 2R=\sqrt{A^2+B^2},$$

l'équation (5) se transforme en la suivante

$$\rho = 2R\cos(\omega-\alpha);$$

équation identique avec l'équation (4).

Remarque I. Les équations

$$(7)\qquad \rho = 2R\cos\omega,\quad \rho=-2R\cos\omega,$$

représentent des cercles passant par le pôle et tangents à la perpendiculaire à l'axe polaire.

Les équations

$$(8)\qquad \rho = 2R\sin\omega,\quad \rho=-2R\sin\omega,$$

représentent des cercles passant par le pôle et tangents à l'axe polaire.

L'équation

$$(9)\qquad \rho = \text{constante},$$

représente un cercle ayant pour centre le pôle.

Remarque II. Pour construire le cercle représenté par l'équation

$$\rho = A\cos\omega + B\sin\omega,$$

on donnera à ω les valeurs particulières 0 et $\frac{\pi}{2}$; on obtiendra ainsi deux points a et b situés, le premier sur l'axe polaire, le second sur une perpendiculaire à l'axe polaire; la droite ab sera un diamètre de ce cercle.

---

§II. Équations des sections coniques.

1° Le pôle est un foyer, l'axe polaire est l'axe focal.

1033. 1ère Méthode (par la transformation des coordonnées).

Prenons d'abord l'ellipse; l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;\quad\text{et } c^2=a^2-b^2.$$

Rapportons la courbe au foyer de gauche, c.à.d. remplaçons x par $(x-c)$, il vient

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

ou

$$(1)\qquad b^2x^2+a^2y^2-2b^2cx-b^4=0.$$

Si maintenant on remplace x et y par les valeurs

$$(2)\qquad x=\rho\cos\omega,\ y=\rho\sin\omega,$$

l'équation (1) devient:

$$\rho^2(b^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega)-2b^2c\cos\omega\cdot\rho-b^4=0;$$

ou, en résolvant par rapport à ρ, après avoir remplacé $\sin^2\omega$ par $(1-\cos^2\omega)$:

$$\rho=\frac{b^2(c\cos\omega\pm a)}{a^2-c^2\cos^2\omega}.$$

On déduit de là les deux équations, en prenant successivement les signes + et −;

$$\rho=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}\cos\omega},\quad \rho=\frac{-\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cos\omega};$$

ou, en posant:

$$(3)\qquad P=\frac{b^2}{a},\quad e=\frac{c}{a},$$

$$(4)\quad \rho=\frac{P}{1-e\cos\omega};\quad (5)\quad \rho=\frac{-P}{1+e\cos\omega}.$$

Remarque. Si l'on suppose que l'on ne donne à ρ que des valeurs positives, l'équation (4) représentera l'ellipse complètement; l'équation (5) ne représentera rien, puisque les valeurs de ρ sont négatives quelle que soit la valeur de ω.

Si l'on admet, au contraire, pour ρ des valeurs négatives, en les interprétant comme il a été convenu, les deux équations (4) et (5) représenteront toutes deux la même courbe. En effet, soient ω_1 et ρ_1 les coordonnées d'un point M quelconque de la courbe définie par l'équation (4); on a

$$(5)\qquad \rho_1=\frac{P}{1-e\cos\omega_1};$$

supposons, par exemple, ρ_1 positif. Faisons, dans l'équation (5),

$$(5)\qquad \omega=\omega_1+\pi,$$

cette équation donne alors

$$(5)\qquad \rho'=\frac{-P}{1+e\cos(\omega_1+\pi)}=-\frac{P}{1-e\cos\omega_1}=-\rho_1,$$

valeur égale et de signe contraire à ρ_1. Mais à l'angle $(\omega_1+\pi)$ correspond un rayon vecteur OM' situé sur le prolongement de OM; comme la valeur ρ' est négative, elle devra être portée sur le prolongement de OM' c.à.d. dans le sens OM; or la valeur numérique de ρ' est égale à celle de ρ_1; on retrouve donc ainsi le point M. Par suite l'équation (5) donnera tous les points fournis par l'équation (4); ces deux équations représentent donc la même courbe.

1032. Prenons, en second lieu, l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \text{et}\ c^2=a^2+b^2;$$

rapportons la à son foyer de droite; il vient, en remplaçant x par $(x+c)$:

$$(6)\qquad b^2x^2-a^2y^2+2b^2cx+b^4=0.$$

En remplaçant, dans cette équation, x et y par les valeurs (2), on trouve

$$\rho^2(b^2\cos^2\omega - a^2\sin^2\omega) + 2b^2c\rho\cos\omega + b^4 = 0,$$

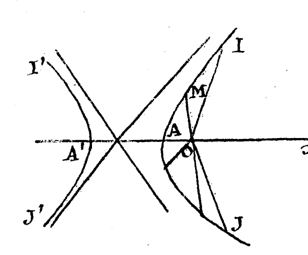
ou

$$\rho^2(c^2\cos^2\omega - a^2) + 2b^2c\rho\cos\omega + b^4 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à ρ, prenant successivement les signes + et −, et adoptant les notations (3), on obtient encore les deux équations

$$(7)\qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},\qquad (8)\qquad \rho = \frac{-p}{1 + e\cos\omega}.$$

Remarque. Supposons que l'on ne donne à ρ que des valeurs positives, et construisons successivement les courbes représentées par les équations (7) et (8). Soit α l'angle positif et aigu dont le cosinus est $\frac{1}{e}$; lorsque ω varie de 0 à α, les valeurs de ρ sont négatives, il n'y a pas de points correspondants. Lorsque ω varie de α à $(2\pi - \alpha)$, ρ est positif, on obtient la branche IAJ ; quand ω varie de $(2\pi - \alpha)$ à 2π, ρ redevient négatif. Ainsi l'équation (7) ne représente que la branche de droite de l'hyperbole. On verra de même que l'équation (8) ne peut représenter que la branche de gauche I'A'J'.



Si l'on admet, au contraire, pour ρ des valeurs négatives, en les interprétant comme il a été convenu ; on constate d'abord, en construisant la courbe, que l'équation (7) représente toute l'hyperbole. En reproduisant ensuite le raisonnement déjà fait dans la remarque précédente, on voit que l'équation (8) représente la même courbe que l'équation (7).

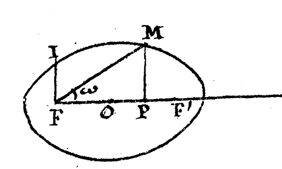
« Cette discussion et les discussions semblables qu'on pourra faire sur les équations en coordonnées po-
« laires justifient pleinement l'introduction des valeurs négatives pour la coordonnée ρ ; l'introduction des
« valeurs négatives pour la coordonnée ω sera justifiée par la discussion des équations où ω entre algébrique-
« ment. »

Les mêmes calculs s'appliquent à la parabole.

1035. **Deuxième Méthode.**

Ellipse. Prenant pour pôle le foyer de gauche, nous avons

$$FM = a + \frac{cx}{a};$$



or en désignant par ρ et ω les coordonnées du point M, on a :

$$FM = \rho,\quad x = FP - OF = \rho\cos\omega - c;$$

la relation qui précède devient donc

$$\rho = a + \frac{c}{a}(\rho\cos\omega - c);$$

ou, en résolvant par rapport à ρ et posant

$$(1)\qquad p = \frac{b^2}{a},\quad e = \frac{c}{a},$$

on a définitivement

$$(2)\qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

La constante e est l'excentricité ; dans l'ellipse, $e < 1$, puisque $a > c$.

La constante p est le demi-paramètre ; si l'on élève au point F une perpendiculaire FI à l'axe polaire, on a $FI = p$; car, en faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (2), il vient

$$\rho = FI = p.$$

Hyperbole. Dans le cas de l'hyperbole, nous prendrons pour pôle le foyer de droite ; on a alors

$$FM = \frac{c}{a}x - a;$$

or, en désignant par ρ et ω les coordonnées du point M, on a

$$FM=\rho\,,\ x=OF+FP=c+\rho\cos\omega\,;$$

la relation qui précède devient donc

$$\rho=-a+\frac{c}{a}\,(c+\rho\cos\omega)\,;$$

ou, en résolvant par rapport à ρ et posant encore

$$(3)\qquad p=\frac{b^2}{a}\,,\quad e=\frac{c}{a}\,,$$

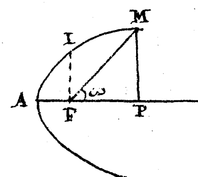
on a définitivement

$$(4)\qquad \rho=\frac{p}{1-e\cos\omega}.$$

L'excentricité e est ici plus grande que l'unité; le demi-paramètre p est encore égal à l'ordonnée au foyer FI.

Parabole. Prenons pour pôle le foyer de la parabole, on a

$$FM=x+\frac{p}{2}\,;$$



or, en désignant par ω et ρ les coordonnées du point M, on a

$$FM=\rho\,,\ x=AF+FP=\frac{p}{2}+\rho\cos\omega\,;$$

la relation qui précède devient donc

$$\rho=p+\rho\cos\omega\,;$$

d'où l'on déduit

$$(5)\qquad \rho=\frac{p}{1-\cos\omega}.$$

L'excentricité de la parabole est égale à l'unité; le demi-paramètre p est encore égal à l'ordonnée FI au foyer.

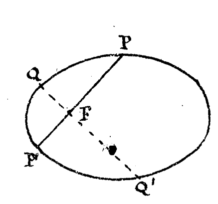
Remarque. L'équation en coordonnées polaires d'une conique

$$(1)\qquad \rho=\frac{p}{1-e\cos\omega},$$

fournit une démonstration facile et immédiate des propositions suivantes:

La somme des inverses des segments d'une corde focale est constante; ainsi:

$$(1^\circ)\qquad \frac{1}{FP}+\frac{1}{FP'}=\frac{2}{p}.$$



La somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante; ainsi

$$\frac{1}{PP'}+\frac{1}{QQ'}=\frac{2-e^2}{2p}.$$

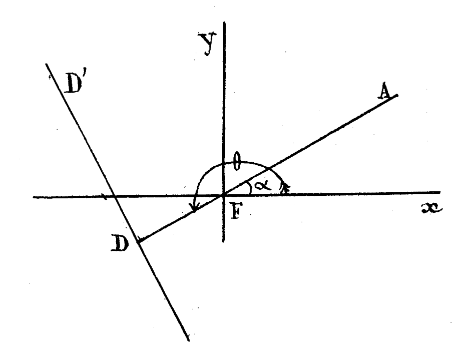
II.° Le pôle est un foyer, et l'axe polaire est différent de l'axe focal.

1036. On a vu que l'équation des coniques ayant pour foyer l'origine est

$$(1)\qquad x^2+y^2=\lambda^2(x\cos\theta+y\sin\theta-r)^2,$$

λ est l'excentricité, et l'on a

$$(2)\qquad \lambda=\frac{c}{a}.$$



La droite représentée par l'équation

$$x \cos\theta + y \sin\theta - r = 0,$$

est la directrice correspondant au foyer F ; de sorte que si α est l'angle, avec l'axe polaire, de la partie FA de l'axe focal dirigée vers le second foyer pour le cas de l'ellipse, opposée au second foyer pour le cas de l'hyperbole, on aura

$$(3) \qquad \theta = \pi + \alpha.$$

La constante r représente la distance du foyer F à la directrice correspondante ; on aura donc

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{pour l'ellipse} : & r = \dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{b^2}{c}, \\ \text{pour l'hyperbole} : & r = c - \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{b^2}{c}. \end{cases}$$

Ces résultats déjà connus étant rappelés, appliquons à l'équation (1) les formules de transformation

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega ;$$

nous aurons pour l'équation, en coordonnées polaires, de la conique :

$$\rho^2 = \lambda^2 \left[\rho \cos(\theta - \omega) - r \right]^2 ;$$

extrayant la racine carrée, puis remplaçant λ, θ et r par leurs valeurs respectives (2), (3) et (4), on obtient

$$\pm \rho = \frac{c}{a} \rho \cos(\omega - \alpha) + \frac{b^2}{a} ;$$

d'où l'on conclut, après avoir posé :

$$(5) \qquad p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a},$$

les deux équations :

$$(6) \qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)}, \quad (7) \quad \rho = \frac{-p}{1 + e\cos(\omega - \alpha)}.$$

Les deux équations (6) et (7) représentent la même courbe, si l'on introduit les valeurs négatives pour le rayon vecteur ρ ; on le démontrera de la même manière que précédemment. Nous pouvons donc prendre pour l'équation des coniques :

$$(8) \qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)} ;$$

p est le demi paramètre ou $\frac{b^2}{a}$; e est l'excentricité, cette quantité est inférieure, supérieure ou égale à l'unité suivant que la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole ; le pôle est un foyer de la conique ; α est l'angle de l'axe focal avec l'axe polaire.

Remarque I. On voit que l'équation des coniques, ayant un foyer au pôle, est de la forme

$$(9) \qquad \rho = \frac{1}{A\cos\omega + B\sin\omega + C}.$$

Réciproquement : toute équation de cette forme représente une conique ayant le pôle pour foyer ; on le démontre en ramenant l'équation (9) à la forme (8) ; pour cela, on posera $\operatorname{tang}\alpha\ \frac{B}{A}$ et on continuera les transformations déjà indiquées plusieurs fois.

Remarque II. En rapprochant les diverses formes d'équations polaires que nous avons rencontrées jusqu'ici, on voit que plusieurs d'entre elles se rattachent aux deux suivantes :

$$(I) \qquad \rho = A\cos\omega + B\sin\omega + C ;$$

$$(II) \qquad \rho = \frac{1}{A\cos\omega + B\sin\omega + C}.$$

La première représente la conchoïde du cercle, lorsque C est différent de zéro; elle représente un cercle, si $C=0$.

La seconde représente une conique ayant le pôle pour foyer, lorsque C est différent de zéro; elle représente une droite, si $C=0$.

Nous remarquerons encore que l'une de ces équations se déduit de l'autre en changeant ρ en $\frac{1}{\rho}$; c.à.d. que l'une est la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'autre.

III.° Le pôle est au centre.

1037. L'équation des coniques rapportées à leur centre est

$$(1) \qquad A x^2 + 2B x y + C y^2 = H;$$

en remplaçant x et y par $\rho \cos\omega$ et $\rho \sin\omega$, on trouve pour l'équation, en coordonnées polaires, de la courbe;

$$(2) \qquad \rho^2 = \frac{H}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Il est évident que ρ représente le diamètre correspondant à l'angle ω, puisque le pôle est le centre de la courbe.

On déduit facilement de là la démonstration du théorème suivant déjà énoncé plusieurs fois:

La somme algébrique des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.

Si l'on suppose que l'axe polaire soit un axe de la courbe, c.à.d. si l'on fait

$$A = \frac{1}{a^2}, \; B = 0, \; C = \pm\frac{1}{b^2}, \; H = 1,$$

on trouve que l'équation de la conique peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{Ellipse: } \rho^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\omega}, \text{ où } e = \dfrac{c}{a}, \\ \text{Hyperbole: } \rho^2 = \dfrac{b^2}{e^2\cos^2\omega - 1}, \text{ où } e = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

IV.° Le pôle est à l'un des sommets.

1038. Si l'on rapporte l'ellipse au sommet de gauche, par exemple, son équation devient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} = 0;$$

remplaçons x et y par $\rho \cos\omega$ et $\rho \sin\omega$, on trouvera pour l'équation, en coordonnées polaires, de la courbe:

$$(2) \qquad \rho = \frac{2p\cos\omega}{1 - e^2\cos^2\omega}, \text{ où } p = \frac{b^2}{a}, \; e = \frac{c}{a}.$$

On obtiendra la même équation en rapportant l'hyperbole au sommet de droite.

Enfin, l'équation de la parabole rapportée à son sommet est

$$(3) \qquad y^2 = 2px;$$

on en déduit par la substitution indiquée:

$$(4) \qquad \rho = \frac{2p\cos\omega}{\sin^2\omega};$$

c'est l'équation de la parabole ayant le pôle pour sommet, et pour axe l'axe polaire.

§ III. Tangentes ; Asymptotes.

1039. Une relation entre les coordonnées polaires ρ, ω, d'un point quelconque d'une courbe,

$$(1) \qquad f(\rho, \omega) = 0,$$

par exemple, est dite l'équation polaire de la courbe.

Nous ferons d'abord les remarques suivantes :

1° Le pôle est centre de la courbe, lorsqu'à une même valeur quelconque de ω correspondent pour ρ deux valeurs égales et de signes contraires ; ou bien, lorsqu'à deux valeurs quelconques de ω différant d'un multiple impair de π, ω et $[\omega + (2K+1)\pi]$, correspondent pour ρ deux valeurs égales et de même signe.

2° L'axe polaire est un axe de la courbe, lorsqu'à deux valeurs quelconques de ω dont la somme est un multiple pair de π, ω et $(2K\pi - \omega)$, correspondent pour ρ des valeurs égales et de même signe ; ou bien, lorsqu'à deux valeurs quelconques de ω dont la somme est un multiple impair de π, ω et $[(2K+1)\pi - \omega]$, correspondent pour ρ des valeurs égales et de signes contraires.

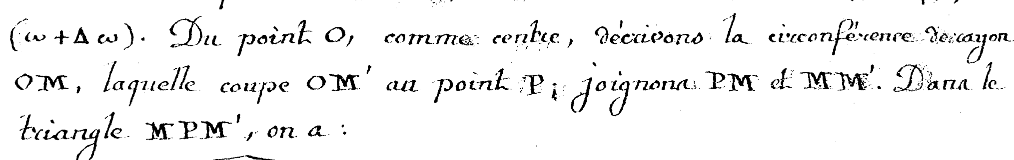
3° La perpendiculaire à l'axe polaire est un axe de la courbe, lorsqu'à deux valeurs quelconques de ω dont la somme est un multiple impair de π, ω et $[(2K+1)\pi - \omega]$, correspondent pour ρ deux valeurs égales et de même signe ; ou bien, lorsqu'à deux valeurs quelconques de ω dont la somme est un multiple pair de π, ω et $(2K\pi - \omega)$, correspondent pour ρ deux valeurs égales et de signes contraires.

1° Angle de la tangente avec le rayon vecteur.

1040. Pour déterminer la tangente en un point, on détermine l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur qui passe par ce point.

L'angle que nous déterminerons sera l'angle du rayon vecteur avec la partie de la tangente qui se trouve au-dessous de l'axe polaire lorsqu'on rabat le rayon vecteur sur la partie positive de l'axe polaire.

Soient V l'angle de la tangente MT avec le rayon vecteur OM ; ρ et ω les coordonnées du point M ; considérons un point voisin M', dont les coordonnées seront $(\rho + \Delta\rho)$, $(\omega + \Delta\omega)$. Du point O, comme centre, décrivons la circonférence de rayon OM, laquelle coupe OM' au point P ; joignons PM et MM'. Dans le triangle MPM', on a :



$$(1°) \quad \frac{\sin \widehat{PM'M}}{\sin \widehat{PMM'}} = \frac{PM}{PM'}.$$

Or

$$(2°) \quad \frac{PM}{PM'} = \frac{2IM}{\Delta\rho} = \frac{2\rho \sin\frac{\Delta\omega}{2}}{\Delta\rho} = \rho \frac{\left(\dfrac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta\omega}{2}}\right)}{\left(\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\omega}\right)}.$$

D'un autre côté, si par le pôle O on mène OS parallèle à PM, on a

$$(3°) \quad \frac{\sin \widehat{PM'M}}{\sin \widehat{PMM'}} = \frac{\sin \widehat{OM'S}}{\sin \widehat{OSM}} ;$$

par conséquent

$$(4°)\quad \frac{\sin \widehat{OM'S}}{\sin \widehat{OSM}} = \rho \frac{\left(\frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta\omega}{2}}\right)}{\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}\right)}.$$

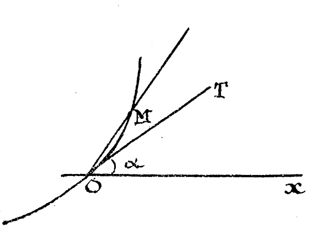
Passons maintenant à la limite, c.à.d. supposons que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, ou que $\Delta\omega$ tende vers zéro; l'angle $\widehat{OM'S}$ a pour limite l'angle V; la sécante MP devient tangente en M au cercle de rayon MO et, par suite, perpendiculaire à OM; l'angle $\widehat{OSM}$ a donc pour limite $\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$; et l'égalité (4°) devient alors

$$(1)\qquad \text{tang}\, V = \frac{\rho}{\rho'_\omega};$$

c'est l'expression qu'il s'agissait de déterminer; ρ'_ω est la dérivée de ρ par rapport à ω; ρ est une fonction de ω définie par l'équation de la courbe.

1041. Tangente à l'origine ou au pôle.

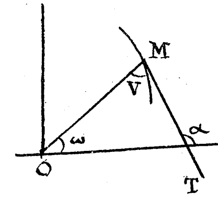
Lorsque la courbe passe par le pôle, c.à.d. lorsque, pour une certaine valeur α de ω, ρ est nul, la tangente en ce point fait l'angle α avec l'axe polaire.



Considérons, en effet, un point M voisin du pôle, pour lequel $\omega = \alpha + h$; l'angle MOx diffère très-peu de α, lorsque h est très-petit. Or, si le point M se rapproche indéfiniment de O en restant sur la courbe, l'angle MOx a pour valeur limite α; et, d'un autre côté, la sécante MO devient la tangente à la courbe en O; donc.....

Cette conséquence est visiblement fournie par la formule (1).

1042. On peut encore démontrer la formule (1) en s'appuyant sur la transformation des coordonnées.



Soient MT la tangente en un point x, y, de la courbe, ω et ρ les coordonnées polaires de ce point; on a

$$V = \alpha - \omega, \quad \text{tang}\, \alpha = y'_x;$$

d'où

$$(1°)\quad \text{tang}\, V = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\omega}{1 + \text{tang}\,\alpha\, \text{tang}\,\omega} = \frac{y'_x - \text{tang}\,\omega}{1 + y'_x\, \text{tang}\,\omega}.$$

Mais les coordonnées x et y sont liées à ρ et ω par les relations

$$(2°)\qquad x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega;$$

et l'on peut regarder, eu égard à l'équation polaire $f(\rho, \omega) = 0$ de la courbe, x, y, et ρ comme des fonctions de ω; d'après cela, on conclut

$$(3°)\quad y'_x = y'_\omega \cdot \omega'_x = \frac{y'_\omega}{x'_\omega} = \frac{\rho'_\omega \sin\omega + \rho\cos\omega}{\rho'_\omega \cos\omega - \rho\sin\omega} = \frac{\rho + \text{tang}\,\omega \cdot \rho'_\omega}{\rho'_\omega - \rho\,\text{tang}\,\omega}.$$

Transportant cette valeur dans l'expression (1°) de tang V, il vient

$$(1)\qquad \text{tang}\, V = \frac{\rho}{\rho'_\omega};$$

c'est la formule qu'il s'agissait de démontrer.

1043. Autrement.

L'équation d'une droite passant par le point (ω_1, ρ_1) et faisant l'angle V avec le rayon vecteur correspondant à ce point, est 96°, [1029]:

$$(1°)\qquad \rho = \frac{\rho_1 \sin V}{\sin(\omega_1 - \omega + V)},$$

Si cette droite est tangente en (ω_1, ρ_1), l'équation obtenue en remplaçant, dans (1°), ρ par la fonction de ω que définit l'équation de la courbe, devra admettre deux racines égales à ω_1 ; c.à.d. que la dérivée par rapport à ω du premier membre de l'équation

$$\rho \sin(\omega_1 - \omega + V) - \rho_1 \sin V = 0,$$

devra s'annuler pour $\omega = \omega_1$. Or la dérivée par rapport à ω est

$$\rho'_\omega \sin(\omega_1 - \omega + V) - \rho \cos(\omega_1 - \omega + V);$$

pour $\omega = \omega_1$ on aura

$$(1) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\rho_1}{\rho'_{\omega_1}};$$

c'est la formule qu'on devait trouver.

1044. Application.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

ou, en coordonnées polaires:

$$(1°) \qquad a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega = \frac{a^2b^2}{\rho^2}.$$

Remplaçons $\cos^2\omega$ et $\sin^2\omega$ respectivement par $\frac{1+\cos 2\omega}{2}$ et $\frac{1-\cos 2\omega}{2}$, on a

$$(2°) \qquad c^2\cos 2\omega = \frac{2a^2b^2}{\rho^2} - (a^2+b^2).$$

Prenons la dérivée par rapport à ω et remplaçons ρ'_ω par $\frac{\rho}{\operatorname{tang} V}$, il vient

$$(3°) \qquad c^2\sin 2\omega = \frac{2a^2b^2}{\rho^2 \operatorname{tang} V}.$$

Éliminons maintenant ω entre les équations (2°) et (3°), ce qui se fera en ajoutant la somme des carrés, on trouve

$$c^4 = \frac{4a^4b^4}{\rho^4}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 V}\right) - \frac{4a^2b^2(a^2+b^2)}{\rho^2} + (a^2+b^2)^2;$$

cette équation ordonnée par rapport à ρ^2 devient

$$(2) \qquad \rho^4 - (a^2+b^2)\rho^2 + \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

C'est l'équation de l'ellipse, lorsqu'on prend pour coordonnées le rayon vecteur et l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur.

Ou encore, cette équation donne les longueurs des diamètres avec lesquels la tangente fait un angle égal à V. Nous nous sommes déjà servi de cette relation, et nous en avons conclu les théorèmes d'Apollonius.

Le même calcul est applicable à l'hyperbole et donnera

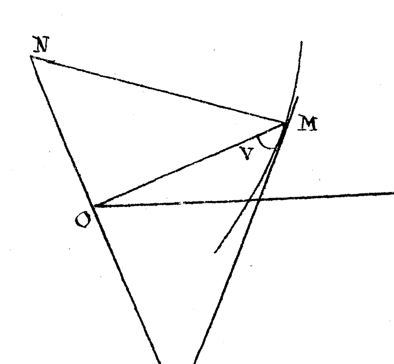
$$(3) \qquad \rho^4 - (a^2-b^2)\rho^2 - \frac{a^2b^2}{\sin^2 V} = 0.$$

II°. Sous-tangente. Sous-normale.

1045. Soit M un point de la courbe, MT la tangente en M, et MN la normale; si au point O on élève une perpendiculaire au rayon vecteur OM, cette perpendiculaire rencontrera la tangente et la normale en T et N respectivement; la longueur OT est appelée sous-tangente, la longueur ON est dite sous-normale.

Nous désignerons OT par S_t, ON par S_n. Le triangle rectangle OMT donne

$$OT = S_t = \rho \tan V\,;\quad \text{or } \tan V = \frac{\rho}{\rho'_\omega}\,;$$



par conséquent

$$(4)\qquad S_t = \frac{\rho^2}{\rho'_\omega}\,;$$

c'est la valeur de la sous-normale.

Le triangle rectangle OMN donne encore

$$ON = S_n = \frac{\rho}{\tan V}\,;\ \text{d'où}$$

d'où $$(5)\qquad S_n = \rho'_\omega\,;$$

c'est la valeur de la sous normale.

On a la relation évidente

$$(6)\qquad S_n \cdot S_t = \rho^2.$$

Il nous faut maintenant préciser le sens dans lequel il faut porter la sous-tangente et la sous-normale sur la perpendiculaire au rayon vecteur.

Dans le cas de la figure précédente, on voit que ρ croît avec ω, et que la sous-tangente OT se trouve alors au-dessous du rayon vecteur rabattu sur l'axe polaire. Mais, d'un autre côté, ρ croissant avec ω, la dérivée ρ'_ω est positive; il en est donc de même de la quantité $\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}$.

Lorsque, ω croissant, ρ décroît, on voit, par la figure ci-contre, que la sous-tangente OT se trouve au-dessus du rayon vecteur rabattu sur l'axe polaire; mais alors, la dérivée ρ'_ω est négative, et il en est de même de la quantité $\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}$.

De là nous concluons que:

La sous-tangente doit être portée au-dessous ou au-dessus du rayon vecteur rabattu sur la partie positive de l'axe polaire, suivant que l'expression $\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}$ est positive ou négative.

Par une discussion semblable, on voit que:

La sous-normale doit être portée au-dessus et au-dessous du rayon vecteur rabattu sur la partie positive de l'axe polaire, suivant que l'expression ρ'_ω est positive ou négative.

Remarque. On voit que les expressions

$$y'_x\,,\ \rho'_\omega\,,$$

ont des significations géométriques fort différentes; car la première représente un rapport, et la seconde une ligne. C'est un fait dont on peut d'ailleurs se rendre compte à priori; puisque la première est la limite du quotient de deux lignes; et la seconde, est la limite du quotient d'une ligne par un rapport.

III. Équation de la tangente.

1046. Soit (ρ_1, ω_1) les coordonnées d'un point de la courbe; V l'angle de la tangente en ce point avec le rayon vecteur; ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque N de la tangente. Le triangle OMN donne

$$\frac{OM}{ON} = \frac{\sin \widehat{ONM}}{\sin \widehat{OMN}}\,,\quad \text{ou}\quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sin(V - \omega + \omega_1)}{\sin V}\,,$$

ou, en développant:

$$(7)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \cos(\omega_1-\omega) + \frac{1}{\tang V}\sin(\omega_1-\omega);$$

et enfin, en remplaçant tang V par sa valeur N.° [1040]

$$(8)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \cos(\omega_1-\omega) + \frac{\rho'_{\omega_1}}{\rho_1}\sin(\omega_1-\omega);$$

telle est l'équation de la tangente au point (ω_1, ρ_1).

1047. Autrement.

L'équation d'une droite passant par les deux points (ω_1, ρ_1), (ω_2, ρ_2), est N.° [1030]

$$(1°)\qquad \rho = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\omega_2-\omega_1)}{\rho_2 \sin(\omega_2-\omega) - \rho_1 \sin(\omega_1-\omega)};$$

nous exprimerons que cette droite est tangente en écrivant que le second point (ω_2, ρ_2) vient se confondre avec le premier (ω_1, ρ_1). La valeur de ρ se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$; posons

$$(2°)\qquad \rho_2 = \rho_1 + K,\ \omega_2 = \omega_1 + h,\ \text{d'où}\ \lim \frac{K}{h} = \rho'_{\omega_1};$$

l'équation (1°) devient

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin h}{\rho_1 \left[\sin(\omega_2-\omega) - \sin(\omega_1-\omega)\right] + K \sin(\omega_2-\omega)}.$$

Le second membre s'écrira successivement sous les formes suivantes:

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \sin h}{2\rho_1 \sin\frac{h}{2} \cos\left(\frac{h}{2}+\omega_1-\omega\right) + K \sin(\omega_1-\omega+h)};$$

$$\frac{\rho_1\rho_2 \frac{\sin h}{h}}{\rho_1 \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{h}{2}+\omega_1-\omega\right) + \frac{K}{h}\sin(\omega_1-\omega+h)}.$$

Si maintenant on passe à la limite, il vient

$$\rho = \frac{\rho_1^2}{\rho_1 \cos(\omega_1-\omega) + \rho'_{\omega_1}\sin(\omega_1-\omega)};$$

on retrouve bien ainsi l'équation (8).

1048. Appliquons cette formule à l'équation d'un conique.

$$(9)\qquad \rho = \frac{P}{1-e\cos\omega},$$

pour laquelle le pôle est un foyer, et l'axe polaire est l'axe focal.

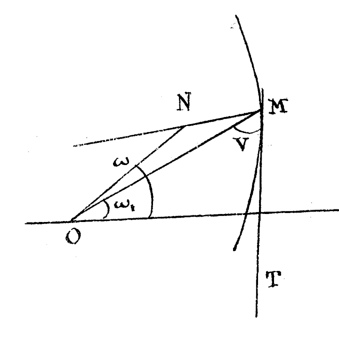
On trouve pour l'équation de la tangente en un point (ω_1, ρ_1) de la conique

$$(10)\qquad \frac{P}{\rho} = \cos(\omega_1-\omega) - e\cos\omega;\ \text{avec}\ \rho_1 = \frac{P}{1-e\cos\omega_1}.$$

1049. Équation de la normale en un point d'une courbe quelconque.

Soient ω_1, ρ_1 les coordonnées du pied M de la normale; V l'angle de la tangente avec le rayon vecteur qui passe par ce point; ω et ρ les coordonnées d'un point quelconque N de cette normale. Le triangle MON donne lieu à la relation

$$\frac{OM}{ON} = \frac{\sin \widehat{ONM}}{\sin OMN},\ \text{ou}\ \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2}-V\right) - (\omega-\omega_1)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-V\right)};$$



ou, en développant

$$(11)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\cos[-V-\omega_1+\omega]}{\cos V} = \cos(\omega-\omega_1) + \tang V \sin(\omega-\omega_1);$$

puis, remplaçant tang V par sa valeur N.º [1040]:

$$(12)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \cos(\omega_1-\omega) - \frac{\rho_1}{\rho'_{\omega_1}} \sin(\omega_1-\omega).$$

Application. Dans le cas des coniques dont l'équation a la forme

$$\rho = \frac{P}{1-e\cos\omega},$$

on trouvera pour l'équation de la normale en un point (ω_1, ρ_1):

$$(13)\qquad \frac{\rho_1}{\rho} e\sin\omega_1 = e\sin\omega + \sin(\omega_1-\omega), \text{ avec } \rho_1 = \frac{P}{1-e\cos\omega_1}.$$

IV.º Tangentes menées par un point donné. Tangentes parallèles à une droite donnée.

1050. Tangentes menées par un point donné.

Soient (r, α) les coordonnées du point donné P; (ω_1, ρ_1) les coordonnées du point de contact d'une des tangentes passant par ce point; l'équation de la tangente sera N.º [1046]

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \cos(\omega_1-\omega) + \frac{\rho'_{\omega_1}}{\rho_1} \sin(\omega_1-\omega);$$

avec la condition

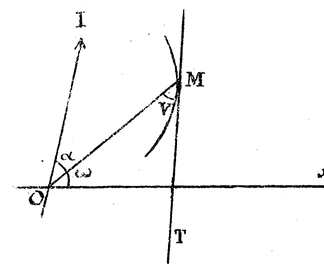
$$f(\rho_1, \omega_1) = 0.$$

Exprimons que cette droite passe par le point (r, α), on aura, pour déterminer les coordonnées des points de contact des tangentes passant par le point (r, α), les deux équations:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\rho}{r} = \cos(\omega-\alpha) + \dfrac{\rho'_{\omega}}{\rho} \sin(\omega-\alpha), \\ f(\rho, \omega) = 0; \end{cases}$$

la question se trouve donc ramenée à la résolution de ces deux équations.

1051. Tangentes parallèles à une droite donnée.



Soit α l'angle que fait avec l'axe polaire une droite menée par le pôle et parallèle à la direction donnée; si MT est une des tangentes satisfaisant à la question, on aura

$$V = \alpha - \omega;$$

la question sera donc résolue à l'aide des deux équations

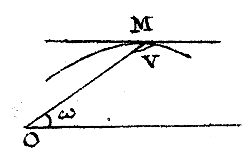
$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\rho}{\rho'_{\omega}} = \tang(\alpha-\omega) \\ f(\rho, \omega) = 0. \end{cases}$$

1052. La question précédente renferme, comme cas particulier, la recherche des points maximum ou minimum par rapport à l'axe polaire c.à.d. des points en lesquels la tangente est parallèle à l'axe polaire.

Si ρ et ω sont les coordonnées d'un de ces points, puisque la tangente MT doit être parallèle à l'axe polaire, on aura

$$V + \omega = \pi, \text{ ou } V = \pi - \omega;$$

les coordonnées des points cherchés seront donc déterminées par les deux équations



$$\frac{\rho}{\rho'_\omega} = -\operatorname{tang} \omega,$$

$$f(\rho, \omega) = 0.$$

V° Concavité. Points d'inflexion.

1053. Nous dirons que, aux environs d'un point M, une courbe tourne sa concavité vers le pôle, lorsqu'aux environs de ce point le rayon vecteur de la courbe est moindre que le rayon vecteur de la tangente au point considéré.

Soient ω_1, ρ_1, les coordonnées du point considéré, l'équation de la tangente en ce point est No. (1046):

$$(1°) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos(\omega_1 - \omega)}{\rho_1} + \frac{\rho'_{\omega_1}}{\rho_1^2} \sin(\omega_1 - \omega),$$

en désignant par r et ω les coordonnées d'un point quelconque de cette tangente.

Soient ρ le rayon vecteur de la courbe correspondant à une valeur de ω voisine de ω_1, r le rayon vecteur de la tangente correspondant à la même valeur de ω; étudions les variations de la différence

$$(2°) \qquad \delta = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r},$$

pour des valeurs de ω très-voisines de ω_1.

Prenons d'abord les dérivées première et seconde de δ par rapport à ω:

$$(3°) \qquad \delta' = \left(\frac{1}{\rho}\right)' - \left(\frac{1}{r}\right)';$$

or, d'après l'équation (1°):

$$(4°) \left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{\rho_1} \sin(\omega_1 - \omega) - \frac{\rho'_{\omega_1}}{\rho_1^2} \cos(\omega_1 - \omega); \text{ et } \left(\frac{1}{\rho}\right)' = -\frac{\rho'_\omega}{\rho^2};$$

on voit donc que la dérivée δ' s'annule pour $\omega = \omega_1$.

Nous aurons pour la dérivée seconde:

$$(5°) \qquad \delta'' = \left(\frac{1}{\rho}\right)'' - \left(\frac{1}{r}\right)'';$$

d'un autre côté, il résulte de l'équation (4°):

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' = -\frac{1}{\rho_1} \cos(\omega_1 - \omega) - \frac{\rho'_{\omega_1}}{\rho_1^2} \sin(\omega_1 - \omega).$$

De sorte que, pour $\omega = \omega_1$, la dérivée δ'' devient

$$(6°) \qquad \delta_1'' = \left(\frac{1}{\rho_1}\right)'' + \frac{1}{\rho_1}.$$

Nous aurons maintenant les trois cas suivants à distinguer:

δ_1'' est positif, δ_1'' est négatif, δ_1'' est nul.

1° δ_1'' est positif.

Nous pouvons supposer ω assez voisin de ω_1 pour que δ'' ne change pas de signe dans cet intervalle, soit $\omega = \omega_1 + h$. Lorsque ω variera de $(\omega_1 - h)$ à $(\omega_1 + h)$, la dérivée seconde, „δ''", restera constamment positive; par suite, la dérivée première, δ', ira toujours en croissant; or δ' s'annule pour $\omega = \omega_1$; donc: de $(\omega_1 - h)$ à ω_1, la dérivée δ' est négative, de ω_1 à $(\omega_1 + h)$, cette même dérivée est positive. De là il résulte que la fonction δ décroît, lorsque ω varie de $(\omega_1 - h)$ à ω_1; et que cette même fonction croît, lorsque ω varie de ω_1 à $(\omega_1 + h)$. Mais la fonction δ

s'annule pour $\omega = \omega_1$; donc

lorsque ω varie de $(\omega_1 - h)$ à ω_1, la fonction δ est positive;

lorsque ω varie de ω_1 à $(\omega_1 + h)$, la fonction δ est encore positive.

Ainsi, dans l'intervalle de $(\omega_1 - h)$ à $(\omega_1 + h)$, la fonction δ est toujours positive, pourvu que h soit suffisamment petit; c.à.d. que dans l'hypothèse actuelle, on a

$$\frac{r-\rho}{r\rho} > 0;$$

d'où l'on conclut,

$$r - \rho > 0,$$

car r et ρ sont de même signe pour des valeurs voisines de ω_1, puisque ces valeurs doivent devenir égales pour $\omega = \omega_1$. Nous en conclurons, en supposant r et ρ positifs, que la courbe tourne sa concavité vers le pôle.

2° δ_1'' est négatif.

On constate, en reproduisant le même raisonnement, que la convexité est tournée vers le pôle.

3° δ_1'' est nul.

Dans ce cas, la concavité change de sens; le point (ω_1, ρ_1) est un point d'inflexion.

Ainsi, en résumé:

Si l'expression

$$(17)\quad \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' \quad ou \quad \left[\frac{\rho^2 + 2\rho'^2_\omega - \rho\rho''_\omega}{\rho^3}\right];$$

est **positive**, la courbe tourne sa **concavité** vers le pôle; si cette expression est **négative**, la courbe tourne sa **convexité** vers le pôle; on suppose le rayon vecteur positif. Les conclusions seront inverses, si le rayon vecteur est négatif. Lorsque l'expression (17) est nulle, le point (ω, ρ) est un **point d'inflexion** de la courbe $f(\rho, \omega) = 0$.

1054 Si l'on ne veut effectuer que la recherche des points d'inflexion, on peut aborder la question comme il suit.

En un point d'inflexion la concavité change de sens, la tangente traverse la courbe; nous voyons qu'en un tel point la tangente à la courbe fait, avec l'axe polaire, un angle maximum ou minimum. Nous avons vu, en effet, en coordonnées rectilignes, que les points d'inflexion étaient déterminés par l'équation $y''_x = 0$; or cette relation exprime que le coefficient angulaire, y'_x, de la tangente acquiert, en ce point, une valeur maximum ou minimum. Ainsi, α étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire, la valeur de α, en un point d'inflexion, doit être maximum ou minimum. Or

$$\alpha = V + \omega;$$

la dérivée de $(V+\omega)$ doit donc être nulle.

Par conséquent, les points d'inflexion sont déterminés par les deux équations

$$(18)\quad \begin{cases} (V+\omega)' = 0, \\ f(\rho, \omega) = 0; \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} V'_\omega = -1, \\ f(\rho, \omega) = 0; \end{cases}$$

la dernière étant l'équation de la courbe.

Si maintenant on se rappelle que

$$\text{tang}\, V = \frac{\rho}{\rho'_\omega},$$

on en déduit, en différentiant par rapport à ω:

$$\frac{V'_\omega}{\cos^2 V} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}\,; \text{ or } \cos^2 V = \frac{\rho'^2}{\rho^2+\rho'^2}\,;$$

il vient, eu égard à la première des équations (18) :

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0.$$

Les points d'inflexion sont donc déterminés par les deux équations :

$$(19)\quad \begin{cases} \rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=0, \\ f(\rho,\omega)=0. \end{cases}$$

VI°. Détermination des Asymptotes.

1055. Soit l'équation polaire d'une courbe,

$$f(\rho,\omega)=0\,;$$

supposons que, pour $\omega=\alpha$, ρ devienne infini ; on a alors un point à l'infini sur cette direction ; α est l'angle, avec l'axe polaire, de la direction asymptotique ; l'asymptote fera donc l'angle α avec l'axe polaire.

On peut encore le démontrer comme il suit. Le coefficient angulaire d'une asymptote s'obtient en prenant la limite de $\frac{y}{x}$, lorsque x et y, ou ρ, croissent indéfiniment ; or

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin\omega}{\rho\cos\omega} = \operatorname{tang}\omega\,;$$

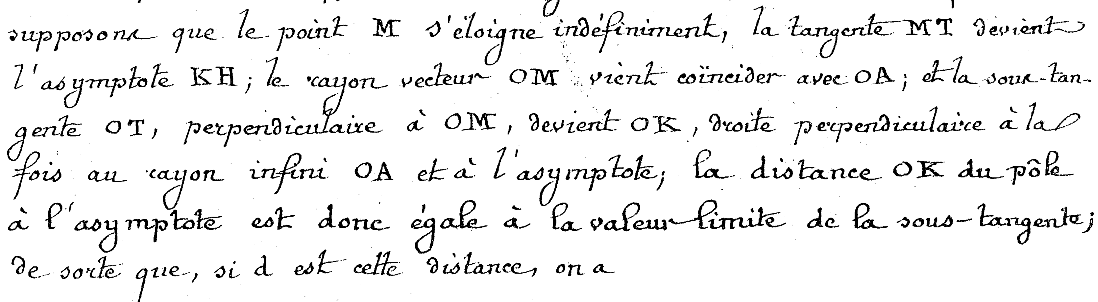
mais ρ devient infini pour $\omega=\alpha$; donc

$$\lim \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha\,;$$

c.à.d. que l'asymptote fait, avec l'axe polaire, un angle égal à α.

Nous déterminerons complètement l'asymptote en cherchant sa distance au pôle.

1°. Nous pouvons considérer une asymptote comme une tangente dont le point de contact est à l'infini. Soit alors une tangente en un point $M(\omega,\rho)$, la sous-tangente OT a pour expression $\frac{\rho^2}{\rho'}$; or si nous



supposons que le point M s'éloigne indéfiniment, la tangente MT devient l'asymptote KH ; le rayon vecteur OM vient coïncider avec OA ; et la sous-tangente OT, perpendiculaire à OM, devient OK, droite perpendiculaire à la fois au rayon infini OA et à l'asymptote ; la distance OK du pôle à l'asymptote est donc égale à la valeur limite de la sous-tangente ; de sorte que, si d est cette distance, on a

$$d = \lim.\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}, \text{ pour } \omega=\alpha.$$

On devra appliquer ici la règle donnée pour fixer la position de la sous-tangente ; par suite on devra porter l'asymptote au-dessous ou au-dessus du rayon vecteur infini rabattu sur la partie positive de l'axe polaire, suivant que l'expression $\lim.\frac{\rho^2}{\rho'}$ est positive ou négative.

2°. La distance d peut encore se calculer de la manière suivante.

La distance d'un point de la courbe à l'asymptote tend vers zéro, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe. D'après cela, soit la direction asymptotique OA correspondant à l'angle α, et KH l'asymptote ; OK la distance du pôle à l'asymptote.

On aura, en supposant d'abord l'asymptote au-dessous de OA rabattu sur l'axe polaire

$$OK = MP \mp MH;\quad MP = \rho \sin(\alpha - \omega);\quad \lim MH = 0;$$

d'où

$$OK = \rho \sin(\alpha - \omega) \mp MH.$$

Lorsque ω devient égal à α, ρ devient infini, et l'on a

$$(21)\qquad d = \lim \left[\rho \sin(\alpha - \omega)\right].$$

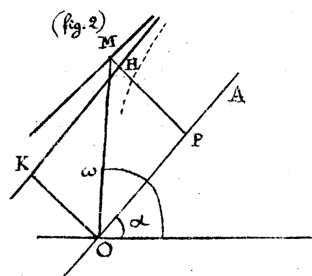
Mais on peut aussi écrire :

$$\rho \sin(\alpha - \omega) = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)};$$

prenons le rapport des dérivées, et faisons $\omega = \alpha$, on trouve

$$(22)\qquad d = -\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{\rho}\right)'},\quad \text{pour } \omega = \alpha.$$

Si l'asymptote est à gauche de OA, c.à.d. si l'asymptote est au-dessus de OA rabattu sur l'axe polaire, on a alors



$$OK = MP \pm MH;\quad MP = \rho \sin(\omega - \alpha),\ \lim MH = 0,$$

d'où

$$(21\,bis)\qquad d = \lim \left[\rho \sin(\omega - \alpha)\right].$$

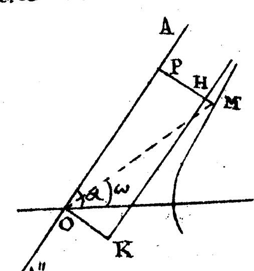
Pour avoir la limite de MP, on peut encore écrire

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\frac{1}{\rho}};$$

prenons le rapport des dérivées, et faisons $\omega = \alpha$, on trouve

$$(22\,bis)\qquad d = +\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{\rho}\right)'}.$$

Donc en résumé, nous pourrons déterminer la distance d d'une asymptote au pôle, par l'une ou l'autre des trois formules qui suivent :



$$\left.\begin{aligned} &(I)\qquad d = \lim \frac{\rho^2}{\rho'},\\ &(II)\qquad d = -\frac{1}{\lim\left(\frac{1}{\rho}\right)'},\\ &(III)\qquad d = \lim\left[\rho \sin(\alpha - \omega)\right] \end{aligned}\right\}\ \text{pour } \omega = \alpha;$$

L'asymptote devra être portée au-dessous et au-dessus du rayon vecteur infini rabattu sur la partie positive de l'axe polaire, suivant que l'expression de d (fournie par une quelconque de ces formules) est positive ou négative.

L'emploi de l'une ou de l'autre de ces formules est subordonné à la forme sous laquelle se présente l'équation de la courbe; dans un grand nombre de cas, l'expression (III) est préférable aux premières.

En effectuant la différentiation indiquée dans la formule (II), on retrouve la formule (I).

1056. **Remarque I.** Nous avons admis implicitement, dans la discussion précédente, que le rayon vecteur ρ était positif. Supposons ρ négatif, et reprenons le cas de la figure (1), par exemple; ρ étant négatif et donnant un point tel que M, ρ devient infini pour $\omega = \beta = \pi + \alpha$. Or

$$OK = MP \mp MH,\ \text{et}\ MP = -\rho \sin(\alpha - \omega'),\ \text{où}\ \begin{cases} \omega = \pi + \omega', \\ \beta = \pi + \alpha; \end{cases}$$

exprimant MP à l'aide de β et ω, il vient

$$MP = -\rho \sin(\beta-\omega) = \rho \sin(+\omega-\beta);\ \text{donc}\ d = \frac{1}{\lim\left(\frac{1}{\rho}\right)'}.$$

Pour $\omega=\beta$, nous aurons évidemment la même limite que dans le second des cas considérés au N° [1055]; c. à d. que (22 bis) donnera ici une valeur négative pour d; mais la direction asymptotique est OA″ en la rabattant sur l'axe polaire, on voit que l'asymptote KH est au-dessous de l'axe polaire. Ainsi la formule (II) est générale et convient à tous les cas.

Il ne faut pas oublier qu'on doit toujours supposer rabattu sur l'axe polaire le demi-rayon vecteur qui correspond à la valeur même de ω pour laquelle ρ est infini.

Remarque II. On peut déterminer, par une recherche directe, la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Reprenons, par exemple, le cas qui correspond à la figure (1). On a, d étant calculé :

$$(22)\qquad \delta = MH = \rho \sin(\alpha-\omega) - d;$$

nous poserons $\omega=\alpha-h$, et nous étudierons le signe de δ pour h très-petit; la courbe sera à droite ou à gauche de l'asymptote KH suivant que la quantité δ sera positive ou négative.

Remarque III. Supposons que l'équation de la courbe soit de la forme

$$(23)\qquad \rho = \frac{f(\omega)}{\varphi(\omega)},\quad \text{d'où}\ \frac{1}{\rho} = \frac{\varphi(\omega)}{f(\omega)};$$

et que, pour $\omega=\alpha$, on ait $\varphi(\alpha)=0$, et $f(\alpha) \gtrless 0$; on a alors, pour déterminer l'asymptote correspondante, la formule :

$$(24)\qquad d = -\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)};$$

on déduit cette relation de la formule (II).

1057. Dans les courbes représentées par une équation en coordonnées polaires, les asymptotes rectilignes correspondent au cas où ρ devient infini par une valeur finie de ω, $\omega=\alpha$; la droite définie par cette valeur de ω est la direction asymptotique, l'asymptote est parallèle à cette direction.

Mais il peut arriver, lorsque l'équation de la courbe renferme ω algébriquement, que ω devienne infinie pour une valeur finie de ρ, $\rho=R$; la courbe s'enroule alors autour du cercle $\rho-R=0$, qui porte le nom de cercle asymptote.

La recherche des cercles asymptotes, en coordonnées polaires, est analogue à la recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y, en coordonnées rectilignes. Nous n'entrerons donc pas dans de plus amples détails sur ce sujet; et nous nous contenterons de dire que, si l'équation de la courbe, de degré m par rapport à ω et ρ, se présente sous la forme

$$\omega^{m-p} A_p + \omega^{m-p-1} A_{p+1} + \cdots + \omega A_{m-1} + A_m = 0,$$

A_i étant une fonction entière et du degré i au plus par rapport à ρ, cette courbe possèdera p cercles asymptotes; ces p cercles seront donnés par l'équation

$$A_p = (\rho-r_0)(\rho-r_1)\cdots(\rho-r_{p-1}) = 0,$$

$r_0, r_1, r_2, \ldots$ étant des constantes.

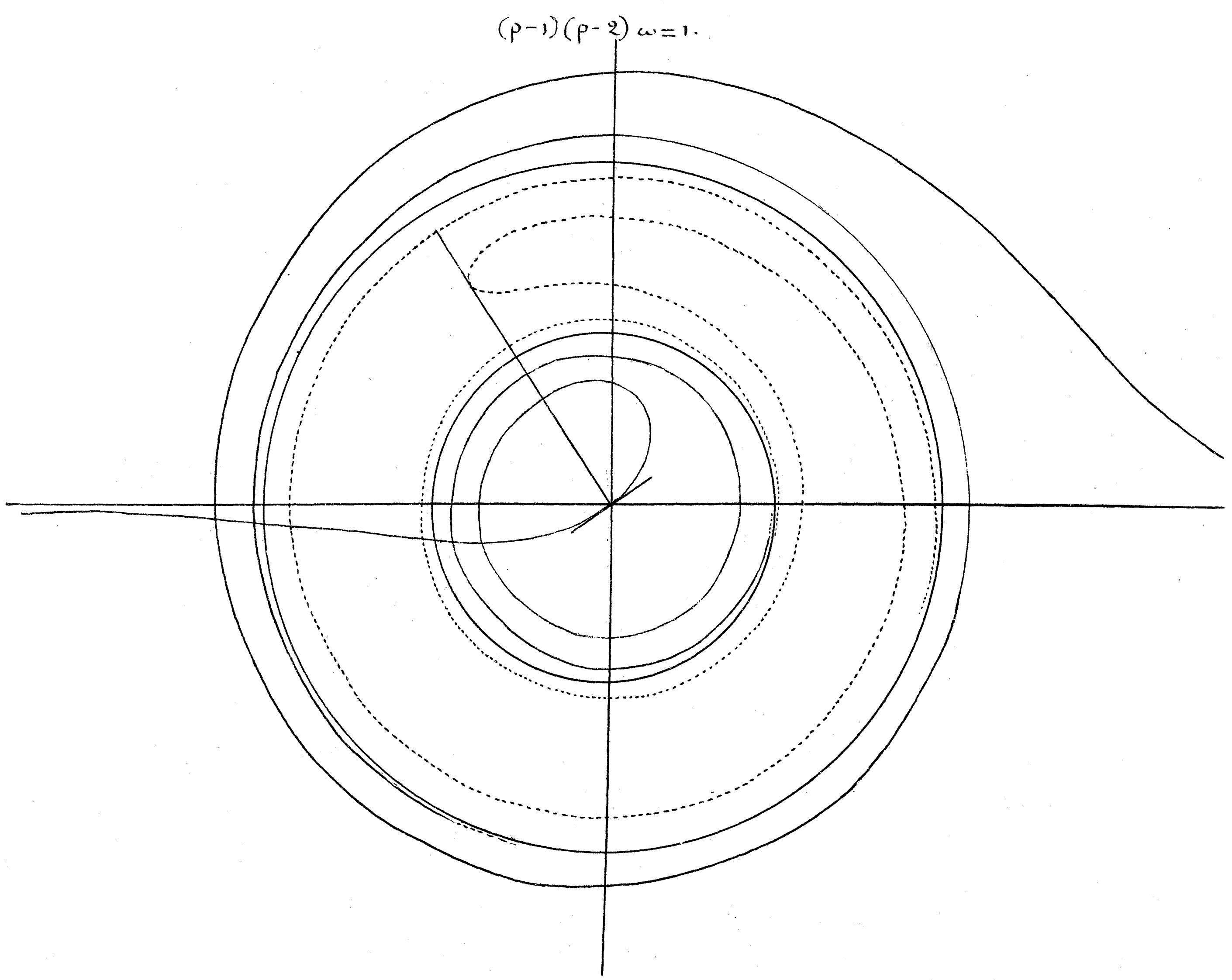
Ainsi, la courbe (figure ci-contre)

$$(\rho-1)(\rho-2)\,\omega - 1 = 0,$$

a deux cercles asymptotes, qui sont

$$\rho-1=0,\quad \rho-2=0.$$

$(\rho-1)(\rho-2)\,\omega=1.$



1058. Nous ferons les remarques suivantes sur la construction des courbes en coordonnées polaires.

1° Si l'équation est résoluble par rapport à ρ (ω est habituellement la variable indépendante) on effectuera cette résolution. Ensuite, il faudra avoir soin de constater si les équations obtenues sont toutes nécessaires pour représenter la courbe, ou si une seule d'entre elles est suffisante. On procédera comme il a été fait au N.° {1034}.

2° Si l'équation de la courbe renferme ω algébriquement, il faudra, en général, faire varier ω depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

3° Supposons que l'équation de la courbe ne renferme l'angle ω que sous des lignes trigonométriques; soit, par exemple,

$$(1)\qquad f\left(\rho,\ \sin\frac{m}{n}\omega,\ \cos\frac{m_1}{n_1}\omega,\ \tan\frac{m_2}{n_2}\omega,\ldots\right)=0,$$

$m, n, m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ étant des nombres entiers positifs.

On posera

$$\frac{m}{n}\omega=2\pi,\quad \frac{m_1}{n_1}\omega=2\pi,\quad \frac{m_2}{n_2}\omega=2\pi,\ldots$$

d'où l'on conclura

$$\omega=\frac{2n}{m}\pi,\quad \omega=\frac{2n_1}{m_1}\pi,\quad \omega=\frac{2n_2}{m_2}\pi,\ldots$$

On cherchera ensuite le plus petit nombre entier divisible à la fois par les fractions

$$\frac{2n}{m},\ \frac{2n_1}{m_1},\ \frac{2n_2}{m_2},\ldots,$$

soit N ce nombre entier. Alors, il faudra, en général, faire varier ω depuis zéro jusqu'à $N\pi$, car, pour une valeur de ω supérieure à $N\pi$, telle que

$$\omega' = N\pi + \omega,$$

toutes les fonctions trigonométriques qui entrent dans l'équation (1) reprendront les valeurs déja obtenues. En effet, on a,

$$\sin\frac{m}{n}\omega' = \sin\left(\frac{mN}{n}\pi + \frac{m}{n}\omega\right);\ \text{or}\ N : \frac{2n}{m} = \text{un nombre entier} = q,$$

d'où

$$\frac{m}{n}N = 2q;$$

et, par suite:

$$\sin\frac{m}{n}\omega' = \sin\left(\frac{mN}{n}\pi + \frac{m}{n}\omega\right) = \sin\left(2q\pi + \frac{m}{n}\omega\right) = \sin\frac{m}{n}\omega;$$

et ainsi des autres fonctions $\cos\frac{m_1}{n_1}\omega$, $\tang\frac{m_2}{n_2}\omega$, etc....

De plus les valeurs ω' donnent des rayons vecteurs coïncidant avec les rayons vecteurs déja considérés; ou avec leurs prolongements; on retrouvera donc les mêmes branches de courbe, ou les branches symétriques par rapport au pôle.

Il peut arriver, d'après la nature des lignes trigonométriques qui entrent dans la fonction f, qu'on puisse diminuer le nombre N.

Pour se reconnaître dans la construction d'une courbe donnée, il sera bon de faire d'avance le tableau des valeurs de ω qui annulent, ou rendent infinies, ou rendent égales à ± 1, les fonctions trigonométriques qui entrent dans l'équation donnée; il faudra avoir soin d'écrire ces valeurs par ordre croissant de grandeur.

Alors, en parcourant ce tableau et notant les valeurs successives du rayon vecteur ρ, on aura une première idée de la forme de la courbe.

On aura ensuite à s'occuper des branches infinies; des points multiples, s'il y a lieu; des points d'inflexion; des valeurs maximum ou minimum du rayon vecteur; etc....

VII: Construction et propriétés de plusieurs courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires.

1059. **Coniques.**

L'équation d'une conique rapportée à son foyer et à son axe est

$$(1)\qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

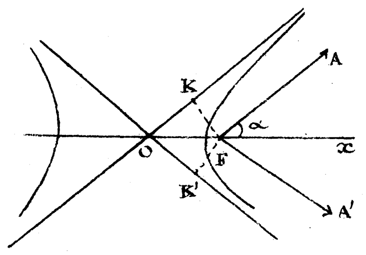
Dans le cas de l'ellipse, où $e<1$, ρ ne devient pas infini.

Dans le cas de l'hyperbole, $e>1$; ρ devient infini pour $\cos\omega = \frac{1}{e}$. Cette équation donne pour ω deux valeurs égales et de signes contraires, soit α la valeur absolue de cet angle, on aura

$$\cos\alpha = \frac{1}{e},\quad \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$$

La distance au pôle des asymptotes correspondant à ces valeurs seront

$$d = -b,\quad d = +b.$$



Pour la première valeur α, d est une quantité négative ; l'asymptote doit donc être placée au-dessus du rayon vecteur FA rabattu sur l'axe polaire Fx ; on a ainsi le point K. Pour la seconde valeur $(2\pi-\alpha)$, d est une quantité positive ; l'asymptote doit donc être placée au-dessous du rayon vecteur FA' rabattu sur l'axe polaire ; on a ainsi le point K'.

Dans le cas de la parabole, $e=1$; ρ devient infini pour $\cos\omega=1$, ou $\omega=0$.

Mais alors d est infini ; l'asymptote est donc rejetée à l'infini parallèlement à son axe.

1060. 1° Spirale d'Archimède.

L'équation de la spirale d'Archimède est

$$(1)\qquad \rho=a\omega.$$

Cette courbe est tangente à l'axe polaire au pôle. En faisant varier ω de zéro à $+\infty$, on obtiendra toutes les spires de la courbe qui tournent autour du pôle dans le sens de rotation de Ox vers Oy. En faisant varier ω de zéro à $-\infty$, on obtiendra une partie symétrique de la première par rapport à Oy.

La valeur de la sous-normale est

$$S_n=\rho'_\omega=a\,;$$

donc, dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante.

Réciproquement : L'équation générale des courbes pour lesquelles la sous-normale est constante, est

$$(2)\qquad \rho=a\omega+b.$$

En effet, on a, d'après l'hypothèse :

$$\rho'_\omega=a\,;$$

d'où l'on conclut en remontant aux fonctions primitives

$$\rho=a\omega+b.$$

Cette équation représente une conchoïde, relative au pôle, de la spirale d'Archimède proprement dite.

2° Spirale Logarithmique.

L'équation de la spirale logarithmique est

$$(1)\qquad \rho=a^\omega.$$

Si l'on suppose $a>1$, et qu'on fasse varier ω depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et ensuite depuis 0 jusqu'à $-\infty$; on obtiendra d'abord une infinité de spires qui s'enroulent en s'élargissant indéfiniment ; et ensuite une infinité de spires qui s'enroulent autour du pôle en se rétrécissant de plus en plus ; le pôle est ce qu'on peut appeler un point asymptote.

Les spires se développeront dans un sens inverse, si $a<1$.

L'angle de la tangente avec le rayon vecteur est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V=\frac{\rho}{\rho'_\omega}=\frac{a^\omega}{la.a^\omega}=\frac{1}{la}\,;$$

donc, dans la spirale logarithmique, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est constant.

Réciproquement : L'équation générale des courbes, pour lesquelles l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est constant, est

$$(2)\qquad \rho=A.a^\omega.$$

En effet, on a d'après l'hypothèse

$$\operatorname{tang} V \text{ ou } \frac{\rho}{\rho'_\omega}=\frac{1}{b}\,;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\rho'_\omega}{\rho}=b\,;$$

et, en remontant aux fonctions primitives

$$l\rho = l\omega + lA;\ \text{d'où}\ \frac{\rho}{A} = e^{b\omega} = (e^b)^\omega;$$

par conséquent

$$\rho = A\, a^\omega.$$

3° Spirale Hyperbolique.

L'équation de la spirale hyperbolique est

$$(1) \qquad \omega\rho = a, \ \text{ou}\ \rho = \frac{a}{\omega}.$$

Faisant varier ω de 0 à $+\infty$, on obtient une courbe asymptote à la droite PA, puis s'enroulant autour du pôle suivant un nombre infini de spires qui se rétrécissent de plus en plus; le pôle est un point asymptote.

En faisant varier ω de 0 à $-\infty$, on obtiendra une partie symétrique par rapport à Oy.

La sous-tangente a pour valeur

$$S_t = \frac{\rho^2}{\rho'_\omega} = -a;$$

donc, dans la spirale hyperbolique, la sous-tangente est constante.

Réciproquement: L'équation générale des courbes, pour lesquelles la sous-tangente est constante, est

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = a\omega + b.$$

En effet, on a d'après l'hypothèse

$$S_t \ \text{ou}\ \frac{\rho^2}{\rho'} = -a;$$

cette équation peut s'écrire

$$-\frac{\rho'}{\rho^2} = a;$$

ou, en remontant aux fonctions primitives

$$\frac{1}{\rho} = a\omega + b.$$

1061. Limaçon de Pascal ou Conchoïde du cercle.

L'équation du Limaçon de Pascal est

$$(1) \qquad \rho = a\cos\omega + b;$$

nous laissons à faire la construction et la discussion de cette courbe.

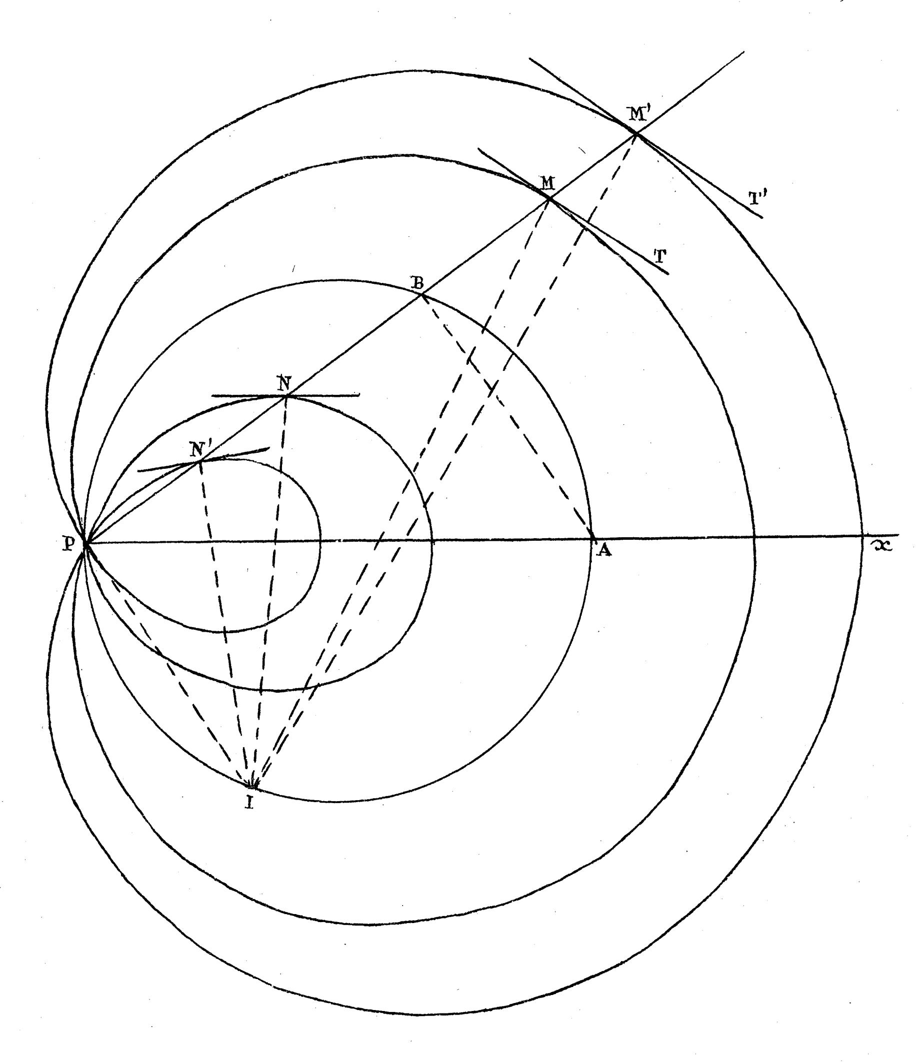
La sous-normale S_n a pour valeur

$$S_n = \rho'_\omega = -a\sin\omega.$$

Cette quantité est indépendante de la constante b; donc pour tous les limaçons ayant même cercle directeur, les normales aux points situés sur un même rayon vecteur sont concourantes.

On voit que $AB = a\sin\omega$; la sous-normale étant négative, elle doit être portée au dessous du rayon vecteur PI parallèle à AB, PI sera la sous-normale.

Les normales aux différents points situés sur le rayon vecteur PB passeront par le point fixe I.



Nous concluons de cette propriété que les tangentes aux limaçons aux points N, N', M, M',..sont tangentes à une même parabole ayant I pour foyer et P pour sommet. En effet, le lieu des projections du point fixe I sur les tangentes MT, M'T' est la droite PB; donc les lignes MT, M'T', ... enveloppent une parabole.

Remarque. La propriété que nous venons de signaler appartient à toutes les courbes représentées par une équation de la forme

$$(2) \qquad \rho = f(\omega) + b;$$

ces courbes sont, par rapport au pôle P, les Conchoïdes de la courbe

$$(3) \qquad \rho = f(\omega).$$

L'expression de la sous-normale pour les courbes (2) est

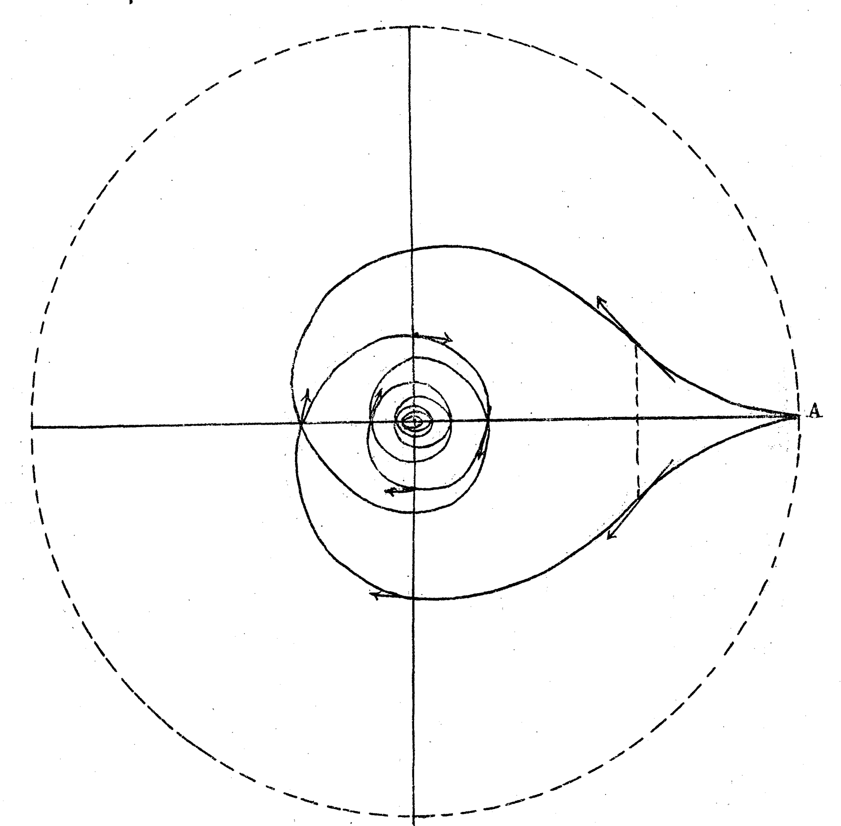
$$S_n = \rho'_\omega = f'(\omega);$$

expression indépendante de la constante b. Par conséquent, pour toutes les courbes représentées par l'équation

$$\rho = f(\omega) + b,$$

où b est une constante arbitraire, les normales aux points, situés sur un même rayon vecteur, sont concourantes; et, par suite, les tangentes en ces différents points enveloppent une parabole.

1062. Spirale Tractrice.



L'équation de cette spirale est

$$(1) \qquad \omega = \text{arc cos}\frac{\rho}{a} - \frac{1}{\rho}\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

La longueur de la tangente, en coordonnées polaires, est l'hypoténuse du triangle rectangle formé par le rayon vecteur et la sous-tangente; par suite

$$T = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right)^2}.$$

Or, en prenant la dérivée par rapport à ω, du 1er membre de l'équation de la courbe, on trouve

$$1 = \frac{\rho'}{\rho^2}\sqrt{a^2-\rho^2}, \text{ d'où } \frac{\rho^2}{\rho'} = \sqrt{a^2-\rho^2},$$

donc

$$T = \rho^2 + \left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right)^2 = a^2;$$

c.à.d. que dans la spirale tractrice la longueur de la tangente est constante.

Posons $\rho = a \cos\varphi$; alors $\omega = \varphi - \text{Tang}\,\varphi$.

On construira la spirale en prenant φ pour inconnue auxiliaire, et on remarquera que φ est

l'angle de la tangente avec le rayon vecteur.

Il suffit de faire varier φ de o à $+\frac{\pi}{2}$, puis de o à $-\frac{\pi}{2}$; dans le premier cas ρ part de la valeur a, décroît constamment jusqu'à zéro, ce qui a lieu pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ou $\omega=\infty$; l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est d'abord nul, il augmente constamment jusqu'à 90°, valeur limite qu'il n'acquiert que lorsque ω est infini; le pôle est un point asymptotique.

Les variations de φ depuis o jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ fourniront une courbe symétrique par rapport à l'axe polaire.

Cette spirale possède deux points d'inflexion, symétriques par rapport à l'axe polaire; pour ces points $\left(\varphi=\frac{\pi}{4};\ \omega=\frac{\pi}{4}-1;\ \rho=\frac{a}{\sqrt{2}}.\right)$

1063. Courbes $\rho=f(\cos m\omega)$, ou $\rho=f(\sin m\omega)$.

Nous ferons seulement remarquer que ces courbes possèdent plusieurs axes de symétrie. Prenons la première équation:

1°. Soit m entier; si l'on donne à ω les valeurs

$$\omega=\frac{K\pi}{m}+\omega_1,\ \omega=\frac{K\pi}{m}-\omega_1,$$

o x

les valeurs de $\cos m\omega$ sont égales; celles de ρ sont donc égales et de même signe; et cela, quel que soit ω_1. Donc la droite

$$\omega=\frac{K\pi}{m},$$

est un axe de symétrie. On peut donner à K les valeurs o, 1, 2, ... (m-1); la courbe possède donc m axes de symétrie.

2°. Soit m fractionnaire, $m=\frac{p}{q}$; si l'on donne à ω les valeurs

$$\omega=\frac{Kq}{p}\pi+\omega_1,\ \omega=\frac{Kq}{p}\pi-\omega_1,$$

les valeurs de ρ sont égales et de même signe; la droite

$$\omega=\frac{q}{p}K\pi,$$

est donc un axe de symétrie.... On peut donner à K les valeurs o, 1, 2, ... (p-1); la courbe possède donc p axes de symétrie.

1064. Podaire du pôle.

Soit l'équation d'une courbe

$$(1)\quad f(\rho,\omega)=0;$$

cherchons le lieu des projections du pôle sur les tangentes à cette courbe, c.à.d. la podaire du pôle.

Si (ρ,ω) sont les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe; si r et θ sont les coordonnées du pied P de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente en M; on a

M V P ω r θ O T

$$(1°)\quad r=\rho\sin V,$$
$$(2°)\quad \omega-\theta=\frac{\pi}{2}-V,$$
$$(3°)\quad \operatorname{tang} V=\frac{\rho}{\rho'_\omega}.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant ρ,ω,V, entre les quatre équations (1), (1°), (2°), (3°).

1065. Les courbes

$$(1)\quad \rho^n\cos n\omega=\alpha^n,\quad (2)\quad \rho^n\cos(n\omega-\varphi)=\beta^n;$$

se coupent sous un angle constant, quelles que soient les constantes arbitraires α et β, φ étant une quantité fixe.

Soient ρ et ω les coordonnées d'un point commun aux deux courbes; V et V_1 les angles, avec le rayon vecteur, de leurs tangentes respectives en ce point; on aura

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{\operatorname{tang} n\omega}; \quad \operatorname{tang} V_1 = \frac{1}{\operatorname{tang}(n\omega - \varphi)}.$$

Si, entre ces deux relations, on élimine $\operatorname{tang} n\omega$, on trouve, toutes réductions faites:

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(V_1 - V) = \operatorname{tang}\varphi, \text{ d'où } V_1 - V = \varphi.$$

C. Q. F. D.

Corollaires.

1° Un système d'hyperboles équilatères concentriques se coupent sous un angle double de celui des axes.

2° Des paraboles de même foyer se coupent sous un angle égal à la moitié de celui des axes.

1066. Les courbes

$$(1) \qquad \rho^{2n} - 2a^n\rho^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n},$$

$$(2) \qquad \rho^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta;$$

se coupent orthogonalement.

En effet, soient ρ et ω les coordonnées d'un point commun aux deux courbes; V et V_1 les angles que font, avec le rayon vecteur, les tangentes respectives aux deux courbes en ce point. Différentions la 1ère équation par rapport à ω, nous trouvons

$$\rho^n \rho'_\omega - a^n \cos n\omega \, \rho'_\omega + a^n \rho \sin n\omega = 0;$$

et, comme $\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'_\omega}$, on conclut de là

$$\operatorname{tang} V = \frac{a^n \cos n\omega - \rho^n}{a^n \sin n\omega}.$$

Remplaçons, dans le second membre, ρ^n par la valeur que fournit l'équation (2), il vient définitivement

$$(1°) \qquad \operatorname{tang} V = -\operatorname{tang} n(\omega - \theta).$$

Différentions maintenant l'équation (2) par rapport à ω, on trouve

$$\rho'_\omega \cos n(\omega - \theta) - \rho \sin n(\omega - \theta) = 0;$$

et, comme $\operatorname{tang} V_1 = \frac{\rho}{\rho'_\omega}$, nous en concluons:

$$(2°) \qquad \operatorname{tang} V_1 = \frac{1}{\operatorname{tang} n(\omega - \theta)}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1°) et (2°), il en résulte

$$(3) \qquad \operatorname{tang} V \cdot \operatorname{tang} V_1 = -1.$$

Ce qui démontre la proposition, car $\operatorname{tang} V$ et $\operatorname{tang} V_1$ sont les coefficients angulaires des deux tangentes par rapport au rayon vecteur qui passe par le point commun aux deux courbes.

VIII. Courbes à construire et à discuter.

1067.

$$\rho = \frac{1}{1 + 2\cos 2\omega};$$

$$\rho = \frac{1}{1 + 3\cos 3\omega};$$

$$\rho = \frac{1}{1 - 2\sin\frac{\omega}{2}};$$

$$\rho^K = 2\cos K\omega;$$

$$\rho^K = 2\sin K\omega;$$

$$\rho^K \sin K\omega = \sin\theta; \ \theta \text{ constante.}$$

$$\rho = A\cos^2\omega + B\sin^2\omega + C;$$

$$\rho^2 = A\cos^2\omega + B\sin^2\omega + C;$$

$$\rho = A\cos^2\omega + B\cos\omega + C;$$

$$\rho=\frac{\cos\omega-\cos 2\omega}{\cos\omega+\cos 2\omega};$$

$$\rho=\frac{1}{\sin\frac{\omega}{3}}.$$

$$\rho^2=1+\sin 2\omega,$$

$$\rho^2=\frac{1}{1+\sin 3\omega};$$

$$\rho=\frac{1}{\cos^2\omega-2\cos\omega+1};$$

$$\rho=\frac{1}{\sin^2\omega};$$

$$\rho=\frac{1}{\tan^2\omega};$$

$$\rho=\sin^3\omega-\sin^5\omega;$$

$$\rho=\sin^2\omega-\sin^4\omega;$$

$$\rho=\frac{\sin\frac{6}{5}\omega}{\sin 2\omega}.$$

$$A\rho^2+2B\omega\rho+C\omega^2+2D\rho+2E\omega+F=0;$$

$$\rho=\frac{\cos^3\omega}{\cos^2\omega};$$

$$\rho=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\cos\frac{3}{4}\omega};$$

$$\rho=\frac{1}{1+2\sin\omega};$$

$$\rho^2=\frac{a^2}{1-\tan\omega};$$

$$\rho=a\frac{\sin\omega}{1-\cos\omega};$$

$$\rho=\frac{\tan\omega}{\sqrt{1-\sin 2\omega}};$$

$$\rho=\frac{\sin\omega}{\sqrt{1-2\cos\omega}};$$

$$\rho=a\frac{1-\tan\omega}{\tan\omega};$$

$$\rho=\frac{2\tan\omega}{\sqrt{1-2\sin\omega}};$$

$$\rho=\frac{1-\cos\omega}{\sqrt{1-\tan\omega}};$$

$$\rho=a\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega};$$

$$\rho=\frac{1-\cos\omega}{\sin 2\omega+\cos 2\omega};$$

$$\rho=\frac{\sin\omega}{\cos\alpha-\cos\omega},$$

$$\rho=A\cos^2\omega+B\cos\omega+C;$$

$$\rho^2=A\cos^2\omega+B\cos\omega+C.$$

$$\rho=\frac{\omega}{\sin\omega};$$

$$\rho=\frac{\sin\omega}{\omega};$$

$$\rho=\omega\tan\omega;$$

$$\rho=\frac{\omega}{\tan\omega};$$

$$\rho=\frac{\tan\omega}{\omega};$$

$$\rho=\omega\sin\omega;$$

$$\rho=\frac{1}{\omega\sin\omega};$$

$$\rho=\frac{4\omega}{4\omega+\pi};$$

$$\rho=1+\frac{1}{\omega};$$

$$\sin\rho=\omega;$$

$$\tan\rho=\omega;$$

$$\rho^4-\omega^4+\omega\rho=0.$$

$$\rho=\log\omega;$$

$$\rho=\arcsin=2\omega;$$

$$\rho=\frac{2a\omega}{2\omega-1};$$

$$\rho=b+\cos\frac{3}{4}\omega;$$

$$\rho=\frac{1}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}\pm\sqrt{1-a^2\sin^2 2\omega}.$$

$$\rho=\frac{e^\omega}{\omega};$$

$$\sin\omega\sin\rho=\frac{1}{2}.$$

$$\rho=\frac{\sin\omega}{2\cos\omega-1};$$

$$\rho=1\pm\sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}};$$

$$\rho=\cos\omega\pm\sqrt{\frac{1-2\cos\omega}{\sin\omega}};$$

$$\rho^2\cos^2\omega-2\rho\sin\omega+\cos^2\omega=0;$$

$$\rho^2\cos\omega-4\rho\sin\omega-\tan\omega=0;$$

$$\rho=\sin\alpha-\sin\omega;$$

$$\rho=\frac{1-\sin\omega}{1+\sin\omega};$$

$$\frac{1}{\rho^2}=A\cos\omega+B\sin\omega+C;$$

$$\rho^2 = \frac{\sin\omega}{\cos\alpha - \cos\omega};$$

$$\rho = \frac{1 + \sin\omega\cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega};$$

$$\rho = \frac{1 - \cos\omega}{\sin\omega - \cos\omega};$$

$$\rho = \frac{1}{1 - \operatorname{tang}\omega};$$

$$\rho = \sin 2\omega + 2\cos\omega;$$

$$\rho = a\,\frac{1 - \cos\omega}{\cos 2\omega};$$

$$\rho = \frac{\sin 2\omega}{1 - \operatorname{tang}\omega};$$

$$\rho = \frac{a}{1 + \cos 2\omega};$$

$$\rho^2 = \frac{\sin 2\omega}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\omega};$$

$$\rho = \operatorname{tang} 3\omega;$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tang} 3\omega}{\operatorname{tang}^3\omega};$$

$$\rho = \cos\frac{\omega}{3}.$$

$$\rho^2 - \rho + \omega^2 = 0;$$

$$\rho^2\cos^2 3\omega = 1;$$

$$\rho = \omega^\omega;$$

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{2\sin\omega - 1}{\sin\omega}};$$

$$\rho = \frac{a\sin(2\omega - \alpha)}{\sin\omega};$$

$$\rho = 4 + \cos 5\omega.$$

$$\rho^2\ 2\rho\cos\omega + 2\cos 2\omega = 0;$$

$$\rho^2 - 2\rho\sin\omega + \sin\frac{2\omega}{3} = 0;$$

$$\rho^2 - 2\rho\sin\omega + 2\sin^3\omega = 0;$$

$$(\rho - 1)^2 = \frac{1}{\cos\omega};$$

$$(\rho - 1)^2 = 2\sin\frac{2\omega}{3};$$

$$\rho^2\operatorname{tang}\omega - 4\rho\sin\omega + \cos\omega = 0;$$

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega\cos 2\omega};$$

$$\rho^2 = \frac{a^2\sin^2\omega}{1 - \sin\omega};$$

$$\rho(\rho - 1)\omega^2 = 1;$$

$$(\rho - 2)(\rho - 3)\omega = \rho^2.$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\omega^2 - 3\omega + 2}.$$

$$\rho^2 = \operatorname{tang}\frac{2\omega}{3};$$

$$(\rho^2 - \omega)^2 = \omega^5.$$

Remarque. Lorsque l'équation d'une courbe est donnée en coordonnées rectilignes et qu'il s'agit d'en faire la discussion, les éléments principaux de la classification sont, comme on l'a vu : 1° le nombre des points à l'infini ; 2° la classe, c.à.d. le nombre et la nature des points multiples ; ainsi, lorsqu'on a un point double, ce point peut être un point double ordinaire, ou un point double isolé, ou un point de rebroussement ; etc....

Mais, lorsque l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, les éléments de la classification ne sont plus indiqués par une règle aussi simple.

La nature très-variée des fonctions qui composent ces sortes d'équations ne permet plus de donner une théorie générale des courbes qu'elles représentent.

Chapitre II

Construction des Racines.

Usage des courbes pour la Construction des racines des équations

1°. Exposé de la méthode générale.

1068. Soit une équation à une seule variable,

$$(1) \quad f(x)=0;$$

considérons les deux équations à deux variables,

$$(2) \quad \varphi(x,y)=0,$$

$$(3) \quad \psi(x,y)=0,$$

telles que l'équation donnée (1) soit le résultat de l'élimination de y entre les équations choisies (2) et (3); alors si on regarde x et y comme les coordonnées d'un point, les abscisses des points d'intersection réels des courbes (2) et (3) donneront, en général, les racines de l'équation (1).

Remarquons qu'à une intersection réelle (x_0, y_0) de ces deux courbes correspond toujours une racine réelle de l'équation (1); en effet les équations (2) et (3) admettent la solution réelle (x_0, y_0); or l'équation (1) est une conséquence de ces deux équations, donc elle sera vérifiée par la valeur réelle x_0.

La réciproque n'est pas toujours vraie, c.à.d. qu'à une racine réelle de (1) ne correspond pas toujours une intersection réelle des courbes (2) et (3).

En effet, pour qu'on ait une intersection réelle, il faut qu'à la valeur x_0 de l'équation (1) corresponde pour y une valeur réelle; or ceci peut ne pas arriver. Donc, lorsqu'on voudra construire les racines d'une équation par des intersections de courbes, il faudra après avoir choisi les équations (2) et (3) s'assurer qu'à une valeur réelle de x, comprise dans l'intervalle où se trouvent les racines de l'équation (1), correspond toujours une valeur réelle de y.—

L'exemple suivant fera bien comprendre la nécessité de cette précaution: Soit l'équation

$$(1) \quad x^4(x^2-1)+x^2-4=0,$$

dont on veut déterminer les racines par des intersections de courbes.

Prenons les deux équations

$$(2) \quad y^2=x^2-4,$$

$$(3) \quad x^4(x^2-1)+y^2=0;$$

le résultat de l'élimination de y entre elles est l'équation (1).

Or l'équation (2) représente une hyperbole équilatère ayant pour axes les axes de coordonnées et dont le sommet a pour abscisse 2.

Pour construire la courbe représentée par l'équation (3), résolvons par rapport à y;

$$y^2 = x^4(1-x^2),$$

d'où $\quad y = \pm x^2\sqrt{1-x^2}.$

Cette courbe symétrique par rapport aux axes de coordonnées a son sommet sur l'axe des x au point $x=1$ et n'a pas de points au-delà, donc elle ne peut pas rencontrer l'hyperbole ; par suite les deux courbes (2) et (3) n'ont pas de points d'intersection réels.

Or il est évident que l'équation (1) a au moins deux racines réelles, puisqu'elle est de degré pair et que le dernier terme est négatif.

On voit donc, que lorsqu'on prend arbitrairement les équations des courbes (2) et (3), il peut arriver qu'à une racine réelle de l'équation proposée (1) ne corresponde pas une intersection réelle des courbes choisies.

Le choix le plus simple des courbes (2) et (3) serait

$$y = f(x),$$

$$y = 0;$$

mais il n'y a là aucun avantage, car il est aussi difficile de construire la courbe $y = f(x)$ que de discuter l'équation $f(x) = 0$.

II° Applications aux équations du 2e, 3e, 4e, 5e et 6e degré.

1069. 1° Second degré. Soit l'équation du second degré

$$(1) \quad x^2 + px + q = 0;$$

supposons $q > 0$; en mettant les signes en évidence on peut écrire l'équation

$$x^2 - px + q^2 = 0;$$

ou $\quad q^2 = x(p - x);$

on est alors amené à construire un rectangle dont la somme des côtés, p, est donnée, ainsi que la surface q^2.

Soit $q < 0$, nous mettrons l'équation sous la forme

$$x^2 + px - q^2 = 0,$$

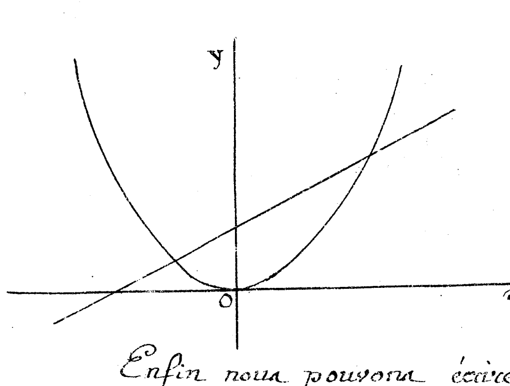
d'où $\quad q^2 = x(p + x);$

il faut déterminer un rectangle dont on connaît la différence des côtés, p, et la surface q^2.

On peut construire les racines autrement ;

posons $\quad (2)\ y = x^2,$

alors on a $\quad (3)\ y + px + q = 0;$



les racines de l'équation du second degré seront toujours données par l'intersection de ces deux courbes ; car pour une valeur réelle de x l'équation (2) donne toujours une valeur réelle de y, et par suite l'équation (3) admet une solution réelle.

On peut déduire de là la condition pour que les racines soient égales, il faut exprimer que la droite (3) est tangente à la parabole (2).

Enfin nous pouvons écrire l'équation (1) sous la forme

$$(1\,bis)\quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q;$$

et alors prendre les deux courbes

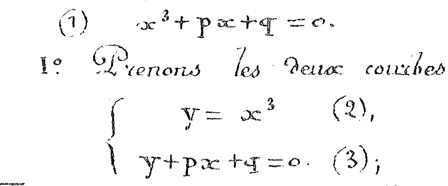
$$(2\,bis)\quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$(3\,bis)\quad y = 0.$$

l'équation (1 bis) est évidemment le résultat de l'élimination de y entre ces deux dernières équations. Or l'équation (2 bis) représente un cercle ayant son centre sur l'axe des x; les intersections de ce cercle avec l'axe des x donneront les racines de l'équation du second degré.

On voit ainsi que ces racines seront réelles, si $\frac{p^2}{4} - q > 0$; égales, si $\frac{p^2}{4} - q = 0$; imaginaires, si $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

1070. 2° Troisième degré. — Supposons l'équation débarrassée de son terme du second degré,



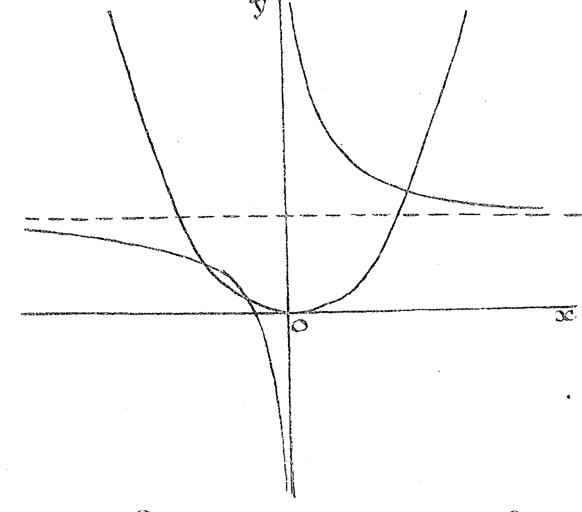
$$(1) \quad x^3 + px + q = 0.$$

I° Prenons les deux courbes

$$\begin{cases} y = x^3 & (2), \\ y + px + q = 0. & (3); \end{cases}$$

à une racine réelle de l'équation (1) correspond toujours une intersection réelle des deux courbes (2) et (3); car, pour une valeur réelle de x, l'équation (2) donne une valeur réelle de y, et par suite l'équation (3) admet une solution réelle.

On peut déduire de là la condition pour que deux racines soient égales, il faut exprimer que la droite (3) est tangente à la parabole cubique (2).



II° Choisissons les deux courbes

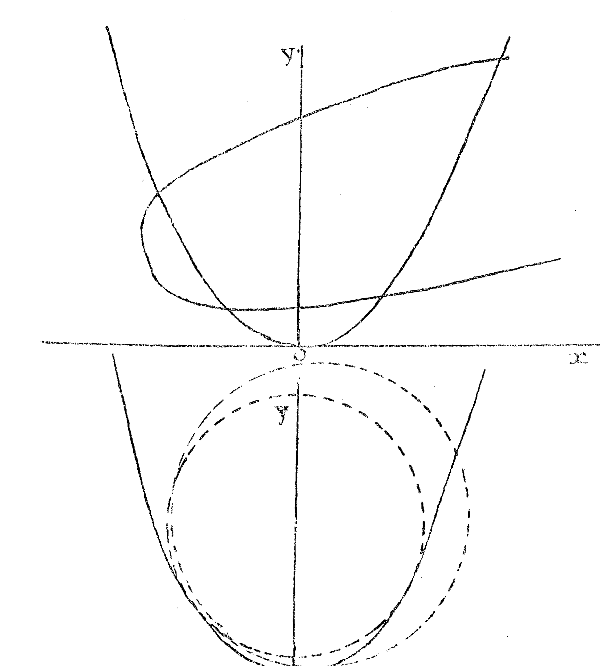
$$\begin{cases} y = x^2 & (2 \text{ bis}), \\ xy + px + q = 0 & (3 \text{ bis}); \end{cases}$$

Pour toute valeur réelle de x fournie par l'équation (1), l'équation (2 bis) donne pour y une valeur réelle, et par suite l'équation (3 bis) admet une solution réelle; donc les racines de l'équation (1) seront données par les intersections de ces deux courbes; la 1re est une parabole fixe, et la seconde une hyperbole ayant pour asymptotes l'axe des y et une parallèle à l'axe des x.

Enfin nous pourrions construire ces racines à l'aide d'un cercle et d'une parabole fixe, cette méthode sera donnée dans la construction des racines des équations du quatrième degré.

1071. Quatrième degré. — Supposons l'équation débarrassée de son second terme,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (1).$$



Prenons $y = x^2$ (2),

$$y^2 + py + qx + r = 0 \; (3);$$

à une valeur réelle de x donnée par l'équation (1), correspond toujours une valeur réelle de y d'après l'équation (2); donc l'équation (3), qui est une conséquence de ces deux équations, admettra une solution réelle; par suite toutes les racines de l'équation (1) seront données par les intersections des courbes (2) et (3). La 1re est une parabole fixe, et la seconde une parabole variable.

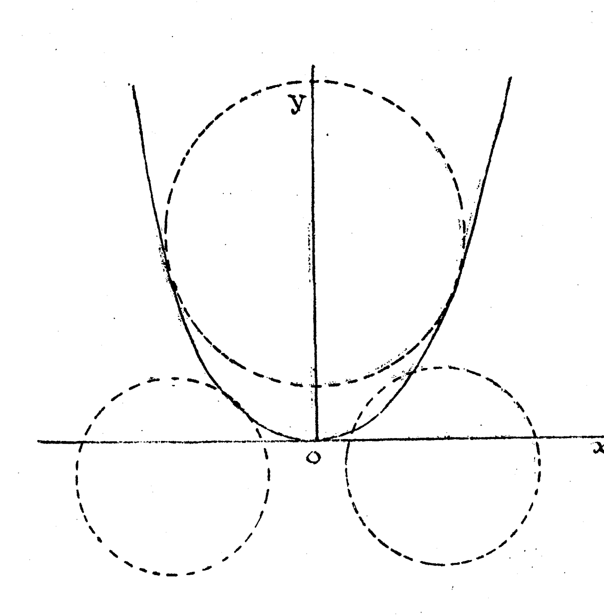
On peut remplacer la parabole (3) par un cercle; prenons, en effet, les deux équations

$$(2 \text{ bis}) \quad y = x^2,$$

$$(3 \text{ bis}) \quad x^2 + y^2 + (p-1)y + qx + r = 0;$$

la seconde étant obtenue en ajoutant les équations (2) et (3) membre à membre, après avoir changé l'ordre des membres de l'une d'elles.

A une racine réelle de l'équation (1) correspond une valeur réelle de y



donnée par l'équation (2 bis); par suite, l'équation (3 bis), qui en est une conséquence, admet une solution réelle; donc toutes les racines réelles de l'équation (1) seront données par les intersections des deux courbes (2 bis) et (3 bis). Or (2 bis) est une parabole fixe, (3 bis) est un cercle variable.

Si ce cercle est réel, il peut arriver qu'il rencontre la parabole en quatre points, alors l'équation (1) a 4 racines réelles; il peut arriver qu'il coupe la parabole en deux points et la touche en un autre; l'équation (1) admet encore 4 racines réelles, mais deux sont égales; le cercle peut être doublement tangent à la parabole, l'équation (1) a alors deux couples de racines égales; le cercle peut être osculateur, alors l'équation (1) a trois racines égales et une racine simple; enfin il peut arriver que le cercle osculateur ait un contact du 3ème ordre, l'équation (1) a, dans ce cas, quatre racines égales. Si le cercle ne rencontre la courbe qu'en deux points, l'équation (1) n'a que deux racines réelles; s'il est simplement tangent, l'équation (1) n'a que deux racines réelles égales.

Enfin si le cercle ne rencontre pas du tout la parabole, l'équation (1) n'a pas de racines réelles.

Si le cercle était imaginaire, il est évident que l'équation (1) n'aurait alors que des racines imaginaires.

Cette construction nous permet d'obtenir les racines de l'équation du 3ème degré; il suffit de supposer $r=0$, alors le cercle passe par l'origine. Il donne encore quatre points d'intersection, mais il y en a un qui ne convient pas, c'est précisément l'origine. Donc, pour construire les racines de l'équation du 3ème degré, on multiplie par x et on obtient ainsi une équation du 4ème degré dont on construit les racines par la méthode indiquée et on supprime la racine nulle qui se présente nécessairement.

Remarque. Lorsque l'équation du 4ème degré renferme le terme du 3ème degré, on peut encore construire les racines à l'aide d'un cercle; seulement ici la parabole n'est plus fixe. Soit l'équation:

$$(1)\qquad x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0;$$

on pourrait écrire immédiatement les équations des deux courbes, en préparant convenablement l'équation (1), nous adopterons la marche suivante. Prenons la parabole

$$(2)\qquad y=x^2+px,$$

et cherchons si on peut déterminer les racines de l'équation (1) par l'intersection de cette parabole avec un cercle dont l'équation est

$$(3)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0;$$

p, α, β, r sont indéterminées.

Pour cela, il faut qu'en éliminant y entre les équations (2) et (3) on retrouve l'équation (1); effectuons l'élimination, nous obtenons

$$(x-\alpha)^2+(x^2+px-\beta)^2-r^2=0,$$

ou

$$(4)\qquad x^4+2px^3+x^2(p^2+1-2\beta)-2x(\beta p+\alpha)+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

En identifiant cette équation avec l'équation (1), on trouve d'abord

$$2p=A;$$

l'équation de la parabole est donc

$$(1°)\qquad y=x^2+\frac{A}{2}x.$$

Il reste trois équations de condition entre α, β, r, qui pourront toujours être satisfaites par des valeurs

réelles et finies de α et β. On voit pourquoi l'on a introduit quatre indéterminées ; c'est qu'en identifiant les équations (1) et (4), on obtient quatre équations de condition, lesquelles exigent quatre indéterminées pour être satisfaites.

Les coordonnées du centre du cercle (3) seront alors déterminées par les relations

$$(2°)\begin{cases} \frac{A^2}{4}+1-2\beta = B, \\ -A\beta - 2\alpha = C ; \end{cases}$$

et le rayon sera donné par

$$(3°) \qquad \alpha^2+\beta^2-r^2 = D.$$

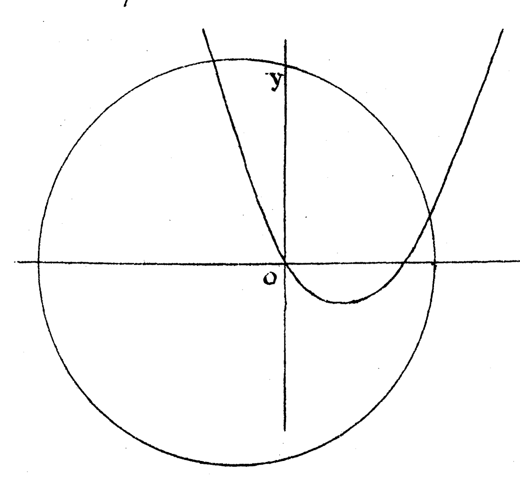
Application numérique. Soit l'équation

$$x^4-2x^3+2x^2+x-4=0 ;$$

$$p=\frac{A}{2}=-1 ;$$

l'équation de la parabole devient

$$y=x^2-x.$$



Les coordonnées du centre du cercle sont

$$\begin{cases} \beta=0, \\ \alpha=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

et le rayon est

$$r^2=\frac{1}{4}+4 ; \text{ d'où } r=\frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

On peut par cette méthode construire les racines de l'équation du 3ème degré, lorsque le carré de x ne manque pas ; il suffit de supposer $D=0$.

On obtient ainsi quatre racines, et il faudra supprimer la racine nulle.

1071. Sixième degré. — Supposons l'équation débarrassée du second terme

$$(1) \qquad x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 ;$$

et prenons les deux courbes

$$y=x^3 \qquad (2),$$

$$y^2+axy+by+cx^2+dx+e=0 \ (3).$$

Remarquons qu'à une racine réelle de l'équation de l'équation (1) correspond pour y une valeur réelle fournie par l'équation (2) ; par suite, l'équation (3), qui en est une conséquence, admet une solution réelle ; donc les racines de l'équation seront données par les intersections des courbes (2) et (3).

De là, on conclut la construction des racines des équations du 5ème degré. Il suffit de supposer $e=0$; alors, en supprimant la racine nulle, on a les racines de l'équation du 5ème degré dans laquelle on suppose qu'on a fait disparaître le 2ème terme.

III°. Construire les pieds des normales menées d'un point fixe à une parabole.

Application à quelques équations transcendantes.

1072. 1° Normales à la parabole. — Prenons l'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet,

$$y^2=2px ;$$

soient (x_1, y_1) les coordonnées du pied de la normale, son équation sera

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

avec la condition $y_1^2 = 2px_1$.

Cette normale passant par le point donné $P(\alpha,\beta)$, on a :

$$\beta - y_1 = -\frac{y_1}{p}(\alpha - x_1).$$

Si l'on supprime les indices, on voit que les coordonnées des pieds des normales sont données par les intersections des deux courbes

$$(1) \qquad y^2 = 2px,$$

$$(2) \qquad p(\beta - y) + y(\alpha - x) = o.$$

Transformons l'équation (2); pour cela, remplaçons d'abord x par sa valeur tirée de l'équation (1) $x = \frac{y^2}{2p}$, ce qui donne

$$p(\beta - y) + \alpha y - \frac{y^3}{2p} = o,$$

ou

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = o.$$

On a ainsi une équation du troisième degré qu'on amène au 4ème en multipliant par y,

$$y^4 - 2p(\alpha - p)y^2 - 2p^2\beta y = o;$$

cette équation donne les ordonnées des pieds des normales, en faisant abstraction de la valeur $y=o$, à laquelle correspond d'après l'équation (1) $x=o$, c.à.d. le sommet. Mais cette équation peut encore s'écrire

$$y^4 + 4p^2y^2 - 2p(\alpha + p)y^2 - 2p^2\beta y = o;$$

d'où, en remplaçant y^2 par sa valeur $2px$ dans le premier et troisième terme, on a :

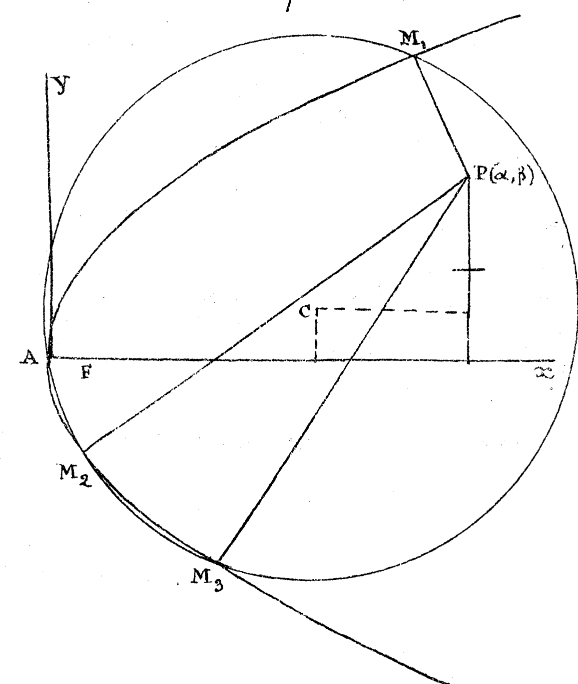
$$4p^2x^2 + 4p^2y^2 - 4p^2(\alpha + p)x - 2p^2\beta y = o,$$

$$\text{ou (2bis)} \qquad x^2 + y^2 - (\alpha - p)x + \frac{\beta}{2}y = o.$$

On peut donc remplacer l'équation (2) par cette équation (2bis); par suite, en tenant compte de la remarque faite ci-dessus, on voit que les pieds des normales menées par le point P seront donnés par les intersections des deux courbes :

$$\begin{cases} (1) & y^2 = 2px, \\ (2\text{bis}) & x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta}{2}y = o; \end{cases}$$

la 1ère est la parabole elle-même; la seconde est un cercle passant par l'origine et dont les coordonnées du centre sont $\left(\frac{p}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ et $\frac{\beta}{4}$. Ce cercle coupe la parabole en quatre points dont fait partie le sommet de la parabole.



On conclut de là cette propriété géométrique déjà démontrée :

Les pieds des trois normales menées d'un point à la parabole sont sur un cercle passant par le sommet.

Et inversement les normales aux points d'intersection d'une parabole avec un cercle quelconque C passant par le sommet concourent en un même point P.

Menons les normales à la parabole en deux des points M_2 et M_3 elles se couperont en un point P; joignons PM_1; cette droite est la normale à la parabole en M_1, car les pieds des trois normales issues du point P, devant être sur un cercle passant par le sommet (d'après le théorème précédent), seront précisément sur le cercle C qui passe par les pieds M_2 et M_3 de deux de ces normales et par le sommet A.

Remarque. On peut aussi démontrer cette propriété par un calcul direct. Soient en effet (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), les coordonnées des points d'intersection d'un cercle C avec la parabole, l'équation de ce cercle sera

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La condition pour que ce cercle passe par le sommet est

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on a les relations

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p}, \quad x_3 = \frac{y_3^2}{2p};$$

en remplaçant, il vient

$$\begin{vmatrix} y_1(x_1+2p) & p\,y_1 & p \\ y_2(x_2+2p) & p\,y_2 & p \\ y_3(x_3+2p) & p\,y_3 & p \end{vmatrix} = 0;$$

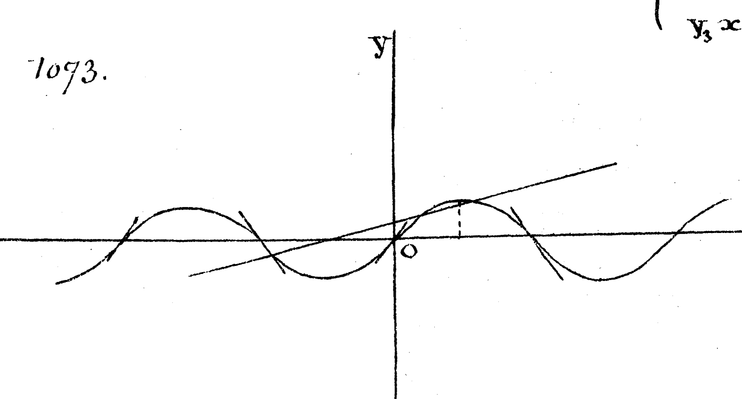
ou, en retranchant la seconde colonne de la première

$$\begin{vmatrix} y_1(x_1+p) & y_1 & p \\ y_2(x_2+p) & y_2 & p \\ y_3(x_3+p) & y_3 & p \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation de condition exprime précisément que les trois normales en M_1, M_2, M_3, sont concourantes, car leurs équations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} y_1 x + p\,y - p\,y_1 - x_1 y_1 = 0, \\ y_2 x + p\,y - p\,y_2 - x_2 y_2 = 0, \\ y_3 x + p\,y - p\,y_3 - x_3 y_3 = 0. \end{cases}$$

1073. 1er Exemple. Construire les racines de l'équation



$$(1) \quad ax - \sin x + b = 0.$$

Les racines sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes

$$\begin{cases} (2) \quad y = \sin x, \text{ la sinusoïde}; \\ (3) \quad y = ax + b, \text{ une droite}. \end{cases}$$

Le nombre des points d'intersection indique le nombre des racines.

2ème Exemple. – Construire les racines de l'équation

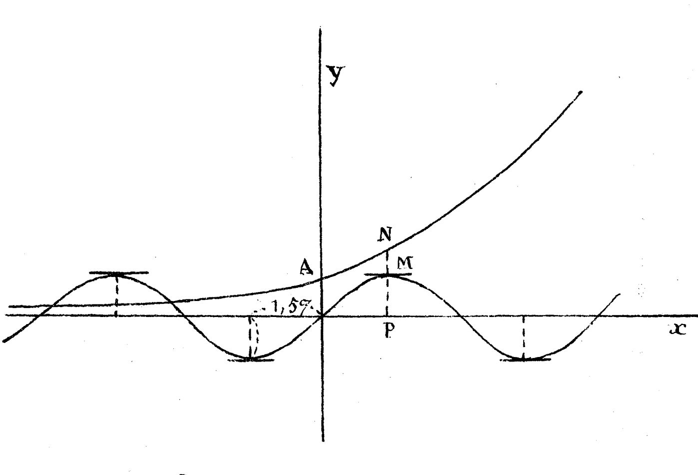
$$(1) \quad e^x - e^{-x} = ax + b.$$

Posons

$$\begin{cases} (2) \quad y = e^x - e^{-x}, \\ (3) \quad y = ax + b. \end{cases}$$

Les racines réelles de l'équation proposée sont les abscisses des points d'intersection réels de ces deux courbes.

Dans le cas où nous nous sommes placés, il n'y a qu'une intersection réelle, et, par suite, qu'une racine réelle. –



3ème Exemple. Construire les racines de l'équation

$$(1) \quad e^x = m \sin x.$$

Les racines de cette équation seront données par l'intersection de la sinussoïde $y = \sin x$ (2),

avec la courbe $e^x = my$ (3).

On voit que l'équation proposée a une infinité de racines négatives. De plus on peut reconnaître facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation admette des racines positives est que l'on ait $m > e^{\frac{\pi}{2}}$; en effet, dans ce cas les deux courbes considérées se coupent dans l'angle yOx. Si $m = e^{\frac{\pi}{2}}$; elles sont tangentes, et par suite

$$e^x - m \sin x = 0,$$

a deux racines égales; enfin si $m < e^{\frac{\pi}{2}}$ il n'y a pas de racines positives.

4ème Exemple. Construire les racines de l'équation

$$(1) \quad x^x - \operatorname{tang} x = 0.$$

Les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes,

$$(2) \quad y = \operatorname{tang} x, \quad \text{et} \quad y = x^x \quad (3).$$

La première se compose d'une infinité de branches égales qui ont des asymptotes perpendiculaires à Ox.

La seconde a un point d'arrêt A sur l'axe Oy; la tangente en ce point est Oy; elle présente un point minimum correspondant à l'abscisse $\frac{1}{e}$.

La forme des deux courbes montre que l'équation proposée a une infinité de racines positives comprises dans les premier, troisième, cinquième, septième .... quadrants. Elle n'a pas de racines négatives; l'équation ne représente plus une suite continue de points pour des valeurs négatives de x.

N. B. Voir une note sur la résolution graphique des équations: Nouvelles Annales, année 1857, p. 359.

Chapitre III
Notions sur les Polaires Réciproques.

§I. Cas où la courbe directrice est une conique quelconque.

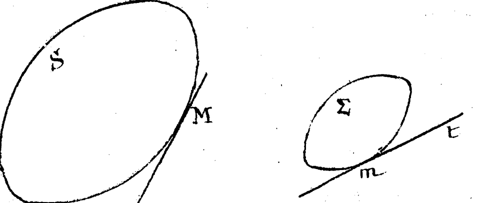
1° Définition.

1074. Nous avons vu déjà que la polaire d'une courbe est le lieu des pôles des tangentes à cette courbe pris par rapport à une courbe directrice donnée N° [445] et suivants.

Lorsque la directrice D est une conique, le lieu des pôles des tangentes à une conique S est une conique Σ; et inversement, le lieu des pôles des tangentes à la conique Σ est la conique S; à cause de cette propriété, on a donné aux deux courbes S et Σ le nom de Polaires réciproques.

Pour abréger, nous dirons que la courbe Σ est la réciproque de la courbe S.

Les propriétés déjà démontrées aux N.os cités nous ont fait voir qu'à une tangente MT de S correspond un point m de Σ; qu'au point de contact M correspond la tangente mt; et inversement, à la tangente mt correspond le point M, et au point m correspond la tangente MT.



Ainsi, en général, à une droite du système S correspond un point dans le système Σ, à un point du système S correspond une droite du système Σ; et inversement.

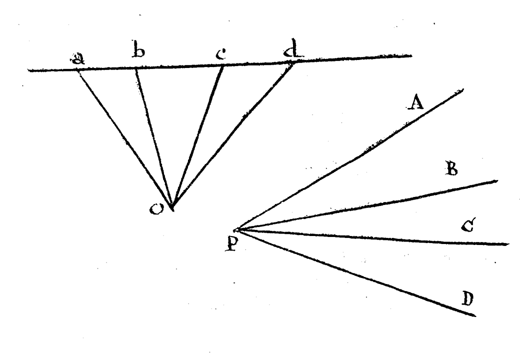
Dans toute cette théorie, il ne faut pas oublier la proposition fondamentale:

Quand plusieurs points sont en ligne droite, leurs polaires sont concourantes; et inversement quand plusieurs droites sont concourantes, leurs pôles sont en ligne droite.

II.e Propriétés Générales.

1075. 1° Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique des droites correspondantes; et inversement.

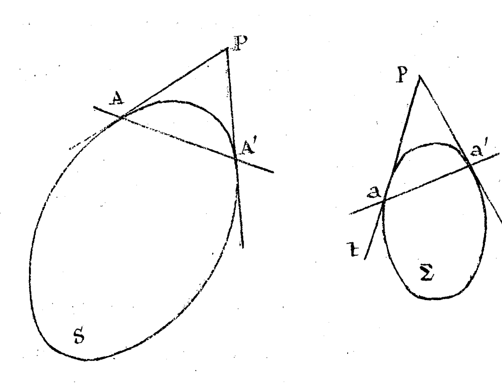
Soit O le centre de la conique directrice; a, b, c, d les quatre points donnés, nous savons que leurs polaires concourent en un point qui est le pôle de la droite abcd. — Soient PA, PB, PC, PD les droites correspondantes des points a, b, c, d; c.à.d. que a, b, c, d sont respectivement les pôles de PA, PB, PC, PD; par suite, les droites Oa, Ob, Oc, Od sont respectivement conjuguées des droites PA, PB, PC, PD. Or nous avons démontré que le rapport anharmonique de quatre diamètres d'une conique était égal au rapport anharmonique des quatre directions conjuguées; par conséquent, (O, abcd) = (P, ABCD); mais le rapport anharmonique des droites (O, abcd) est égal au rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d déterminés sur ces droites par une sécante; donc le rapport anharmonique des droites PA, PB, PC, PD est égal au rapport anharmonique des points a, b, c, d.



Cette démonstration est évidemment applicable au théorème inverse, car nous pouvons regarder les droites PA, PB, PC, PD, comme appartenant au système primitif.

1076. 2° Si un point P a pour polaire par rapport à la conique S la droite AA', au point P correspond une droite aa' et à la droite AA' correspond un point p, la droite aa' sera par rapport à la réciproque Σ la polaire du point p.

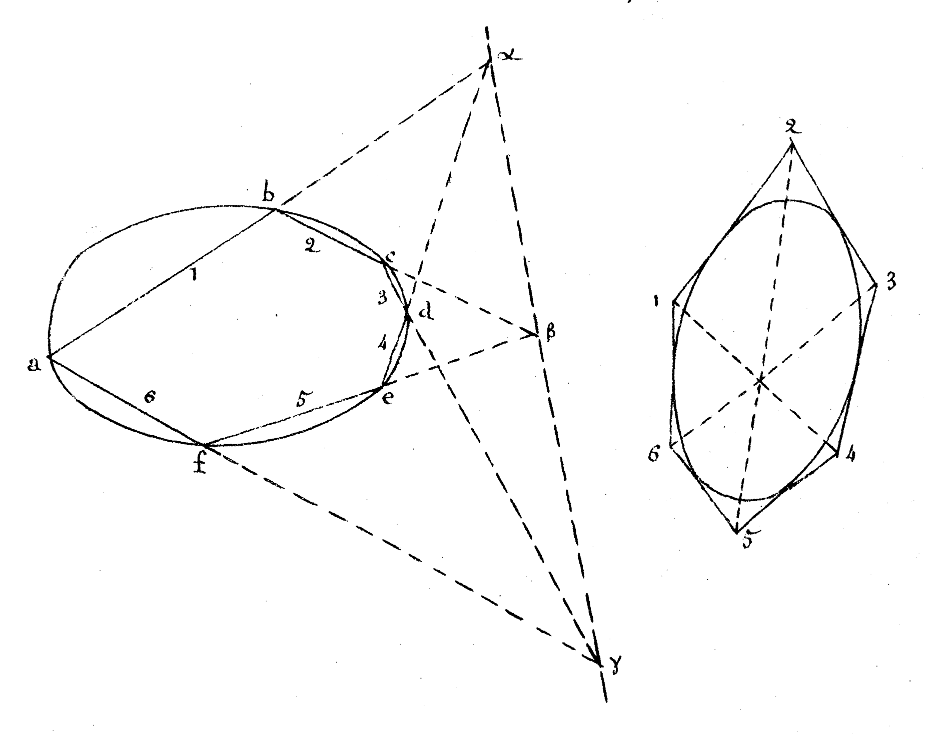
En effet, au point A de S correspond une tangente tp à Σ; au point A' correspond la tangente t'p; donc, à la droite AA' correspond le point p, intersection des tangentes tp, t'p à Σ. — D'après une propriété rappelée au commencement de ce paragraphe, le point correspondant à la tangente AP est le point de contact a de tp; a' est le correspondant de la droite A'P; donc aa' est la droite correspondante du point P.



Ainsi p est le point correspondant de AA', aa' est la droite correspondante du point P; mais aa' étant la corde de contact des tangentes issues du point p; aa' est donc la polaire de ce point, ce qui démontre le théorème.

1077. 3° Nous pouvons résumer de la manière suivante les propriétés de la transformation par polaires réciproques:

A une figure inscrite correspond une figure circonscrite et inversement;
Au lieu géométrique d'un point correspond l'enveloppe de sa polaire;
A l'enveloppe d'une droite correspond le lieu de son pôle.
Nous allons, comme application de ces principes, déduire du théorème de Pascal le théorème de Brianchon.



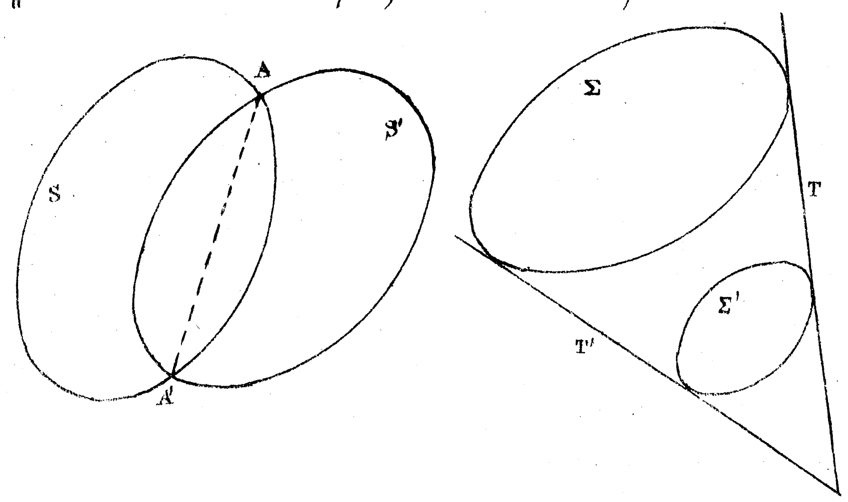
Dans une conique, les intersections des côtés opposés d'un hexagone inscrit sont en ligne droite; c'est le théorème de Pascal.
Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, les côtés; a, b, c, d, e, f, les sommets de l'hexagone inscrit;
α l'intersection de (1,4),
β l'intersection de (2,5),
γ l'intersection de (3,6);
les trois points (α, β, γ) sont en ligne droite.
Transformons le système de la conique et de l'hexagone par polaires réciproques. La réciproque de la conique est une conique; à l'hexagone inscrit correspond un hexagone circonscrit dont les côtés sont les droites correspondantes des sommets a, b, c, d, e, f, de l'hexagone inscrit; par suite, les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6 de l'hexagone circonscrit correspondent aux côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6 de l'hexagone inscrit.

Nous voyons donc qu'au point α (1,4) correspond la droite (1,4),
.... " .... " .... au point β (2,5) correspond la droite (2,5),
.... " .... " .... au point γ (3,6) correspond la droite (3,6);

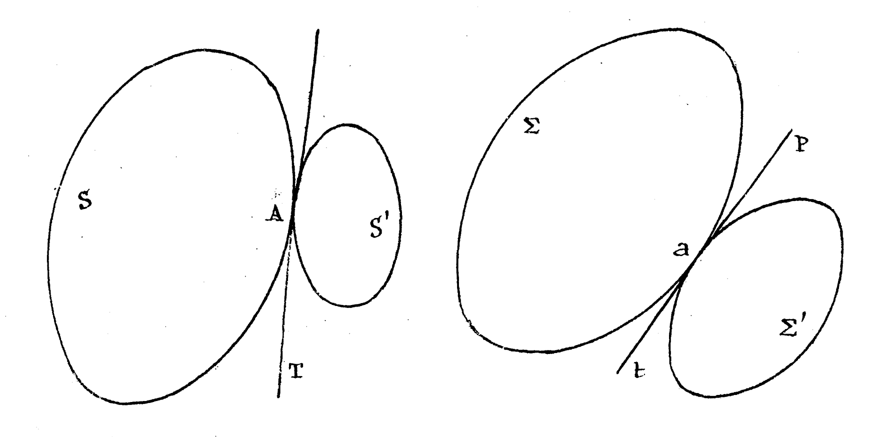
les trois points α, β, γ étant en ligne droite, les droites correspondantes (1,4), (2,5), (3,6) sont concourantes; c. à. d. que les droites qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit sont concourantes; c'est le théorème de Brianchon.

III.° Systèmes de Coniques.

1078. A un point d'intersection de deux coniques correspond une tangente commune aux réciproques.
Soient S, S' deux coniques, Σ et Σ' leurs coniques.



Au point d'intersection A considéré comme appartenant à S correspond une tangente à Σ; au point A considéré comme appartenant à S' correspond une tangente à Σ'; au point A, commun à S et S', correspond donc une tangente T commune à Σ et à Σ'.
De là nous concluons:
Qu'à deux points communs aux coniques S et S' correspondent deux tangentes communes aux réciproques Σ et Σ'; et inversement.



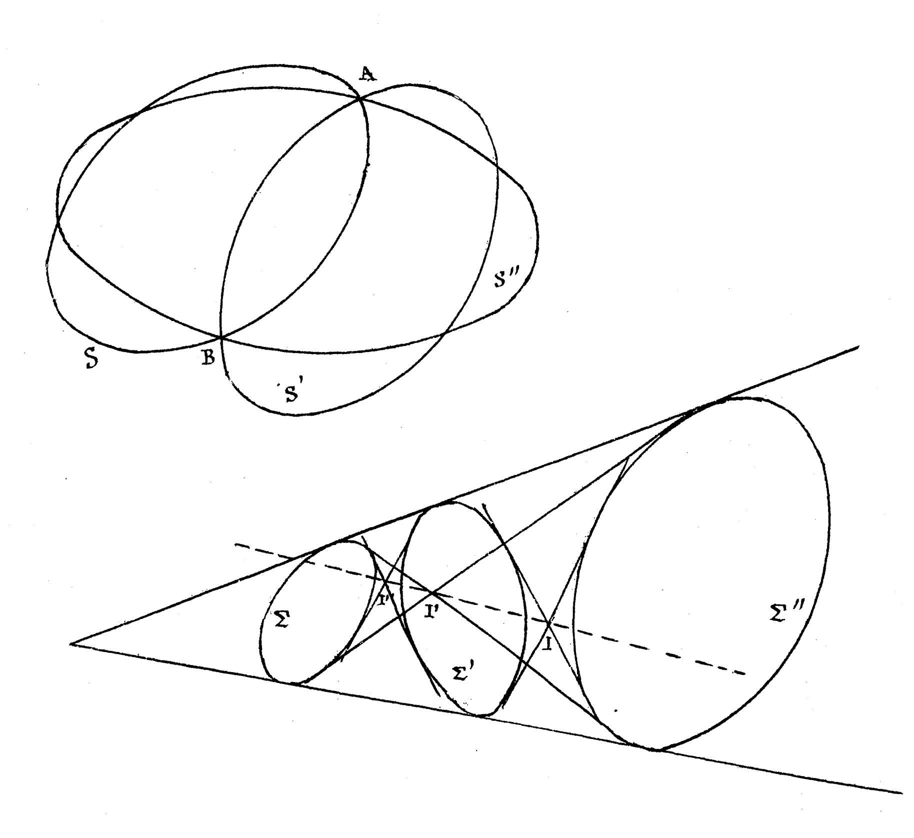
Lorsque deux coniques sont tangentes, les réciproques sont aussi tangentes.

Au point A et à la droite AT de la conique S correspondent dans la conique Σ la tangente at et le point a, a est le point de contact. Or AT touche à la fois S et S', donc le point a appartient aux deux réciproques Σ et Σ'; le point A est commun à S et à S', donc la droite at touche les deux coniques Σ et Σ'; par conséquent les réciproques Σ et Σ' sont tangentes.

De là nous concluons encore que.

Les réciproques de deux coniques doublement tangentes sont elles-mêmes doublement tangentes.

1079. Application. — Nous avons vu que si trois coniques S, S', S" ont une corde commune, les trois autres cordes d'intersection sont concourantes.



Transformons cette propriété par polaires réciproques. Les trois coniques S, S', S" ayant deux points communs, leurs réciproques Σ, Σ', Σ" auront deux tangentes communes.

A la seconde corde commune de S et de S' correspond le point I", intersection des tangentes communes à Σ et à Σ'; à la seconde corde commune à S et S" correspond le point I' intersection des tangentes à Σ et Σ"; enfin, à la corde commune à S' et S" correspond le point I intersection des tangentes à Σ' et Σ".

Or les trois cordes communes considérées étant concourantes, les points correspondants I, I', I" sont en ligne droite,

Nous avons ainsi ce théorème:

Lorsque trois coniques ont deux tangentes communes, les points d'intersection des trois autres couples de tangentes communes sont en ligne droite.

---

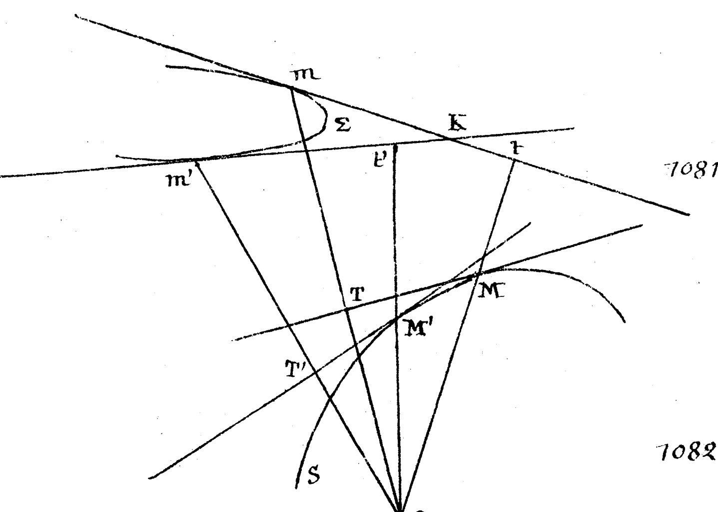
§II. Cas où la courbe directrice est un Cercle.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la courbe directrice est un cercle de rayon R; ce qui nous permettra de transformer par polaires réciproques, non seulement les théorèmes de position, mais encore les théorèmes relatifs aux propriétés métriques; et en outre les propriétés des circonférences pourront nous conduire à des propriétés sur les coniques.

1°. Principes de la transformation.

1080. Le centre O du cercle directeur est ce que nous appellerons l'origine.

1° La droite correspondante à un point M est perpendiculaire à la ligne OM qui joint l'origine O à ce point, et elle coupe OM en un point t tel que l'on ait $OM.Ot = R^2$.



Ceci résulte de la propriété démontrée dans l'étude du cercle.

Inversement, le point m correspondant à une droite M'T est sur une perpendiculaire OT menée du point O à la droite MT et l'on a la relation

$$OT.Om = R^2.$$

1081. 2° L'angle de deux droites mt, m't' est égal à l'angle MOM' que font les deux lignes qui joignent l'origine aux points correspondants M et M'.

Ce théorème, dont l'inverse est aussi vrai, est évident sur la figure, puisque les deux angles mKm' et MOM' ont leurs côtés perpendiculaires.

1082. 3° A quatre points M, M_1, M_2, M_3 en ligne droite correspondent quatre droites passant par un même point, et le rapport anharmonique du faisceau ainsi obtenu est le même que celui des quatre points.

Soit P le pôle de la droite MM_3, alors les quatre droites correspondantes aux points M, M_1, M_2, M_3, passent toutes par le point P; soient Pm, Pm_1, Pm_2, Pm_3. Cela posé, on a $(MM_1M_2M_3) = (O, MM_1M_2M_3)$; or il est évident que $(O, MM_1M_2M_3) = (P, mm_1m_2m_3)$ puisque les quatre droites $Pm, Pm_1, \ldots\ldots$ sont respectivement perpendiculaires à $OM, OM_1, \ldots$ donc on a

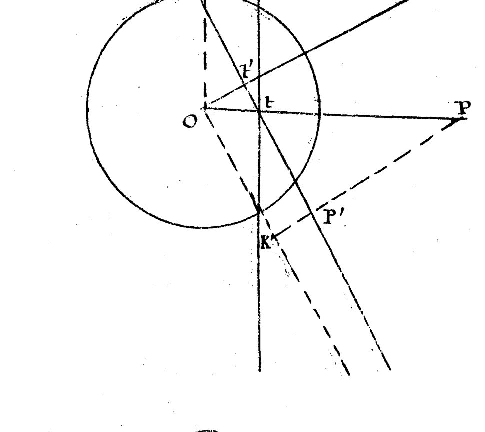
$$(MM_1M_2M_3) = (P, mm_1m_2m_3). \qquad C.Q.F.D.$$

1083. 4° Transformations métriques.

Soient P et P' deux points ayant pour lignes correspondantes tp et t'p', le cercle directeur étant le cercle tracé ci-dessus; les propriétés métriques des figures se transforment à l'aide des relations

$$\text{(I)} \quad OP.Ot = R^2;$$

$$\text{(II)} \quad \frac{Pp'}{P'p} = \frac{PO}{P'O}.$$



La première a déjà été démontrée; la seconde s'établit facilement en observant que les angles OPp' et OP'p sont égaux, et que par suite les deux triangles OP'K et OPK' sont semblables, donc

$$\frac{P'p + Ot}{Pp' + Ot'} = \frac{OP'}{OP}.$$

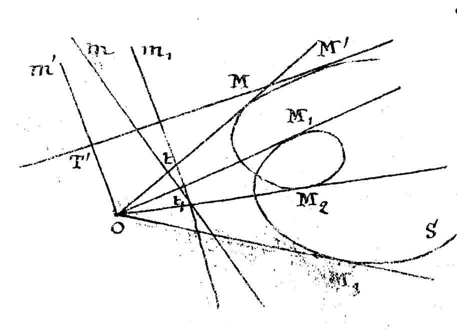
D'un autre côté on a

$$Ot.OP = R^2 \text{ et } Ot'.OP' = R^2,$$

donc cette relation devient

$$\frac{Pp'}{P'p} = \frac{PO}{P'O}. \qquad C.Q.F.D.$$

1084. 5° Points à l'infini. Asymptotes.



Si nous considérons la tangente M'T' très voisine de OM, le point correspondant m' est sur la perpendiculaire OT' et à une distance du point O telle que l'on ait

$$Om' = \frac{R^2}{OT'};$$

donc si nous considérons les tangentes issues de l'origine, les points correspondants sont à l'infini. Ainsi la polaire réciproque de S a un nombre de points à l'infini égal au nombre des tangentes issues du point O c.à.d. à la classe de la courbe S.

Ces points à l'infini seront réels ou imaginaires, suivant que les tangentes issues du point O sont réelles ou imaginaires. Les directions asymptotiques de la réciproque Σ sont respectivement perpendiculaires aux tangentes menées de l'origine à la courbe S. — Les asymptotes de Σ étant les tangentes aux points à l'infini, il est évident que ces asymptotes sont les perpendiculaires tm, tm_1 ...... aux tangentes OM, OM_1 ...... à la courbe S; les points t, t_1, t_2, ... étant déterminés par les relations:

$$OM.Ot = R^2,\quad OM_1.Ot_1 = R^2 \ldots\ldots$$

Ceci résulte en effet de ce que la tangente au point m de Σ doit être la ligne correspondante du point M de S, ainsi que nous l'avons démontré précédemment.

Si le point M était à l'infini, c.à.d. si OM était une asymptote de la courbe S, l'asymptote tm correspondante au point M, dans la courbe Σ, passerait par le point O, puisque l'on a

$$Ot = \frac{R^2}{OM}.$$

Pour la même raison, si le point M était à l'origine, l'asymptote tm serait transportée à l'infini en restant toujours perpendiculaire à la tangente à la courbe S au point M, c.à.d. à la tangente à l'origine.

Si l'origine O était un point double de la courbe S, il y aurait évidemment deux branches de la courbe Σ qui auraient pour asymptotes la droite de l'infini; cette droite serait donc une tangente double pour la polaire réciproque de S.

En général, si l'origine est un point multiple d'ordre p de la courbe S, la droite à l'infini est tangente multiple d'ordre p pour la courbe Σ polaire réciproque de S.

1085. 6°. La polaire réciproque d'un cercle C est une conique ayant pour foyer l'origine, et pour directrice correspondante la polaire du centre C du cercle. Cette conique est une ellipse ou une hyperbole suivant que l'origine est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle directeur; c'est une parabole, si l'origine est sur ce cercle.

Chercher la polaire réciproque du cercle C revient à chercher le lieu du pôle m d'une tangente quelconque MT par rapport au cercle directeur O. Or prenons la polaire PH du point C par rapport au cercle directeur et appliquons la formule (II) démontrée précédemment (4°), nous avons alors

$$\frac{mO}{mP} = \frac{CO}{CM} \text{ ou } = \frac{CO}{CA}.$$

Donc, puisque CO et CA sont constants, le rapport $\frac{mO}{mP}$ est constant; par suite, le lieu du point M est une conique ayant pour foyer le point O et pour directrice la droite DH.

L'excentricité e de la conique est égale au rapport $\frac{CO}{CA}$; lorsque CO sera < CA, c.à.d. lorsque le point O sera à l'intérieur du cercle C, la polaire réciproque de ce cercle sera une ellipse, puisqu'alors e sera < 1.

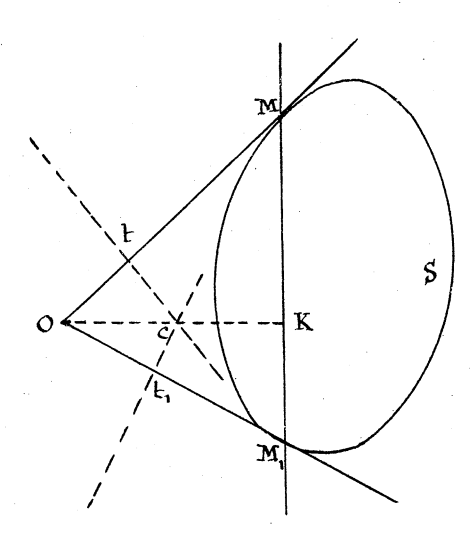
Ce sera une hyperbole dans le cas où l'on aura CO > CA, et une parabole lorsque CO = CA; ce qui démontre complètement le théorème énoncé.

Remarque. Ce théorème résulte d'ailleurs immédiatement des considérations qui le précèdent (5°). Nous pouvons même l'appliquer au cas où l'on chercherait la polaire réciproque d'une conique quelconque S, car il est clair que si l'origine O est à l'intérieur de la courbe S, la polaire réciproque Σ sera nécessairement une ellipse, puisque dans ce cas, on ne peut pas mener par le point O des tangentes réelles à la courbe S.

Mais si le point O est à l'extérieur de S, alors la réciproque Σ aura deux points réels à l'infini, ces points correspondent aux deux tangentes réelles menées par le point O à la conique considérée S, la polaire réciproque Σ sera donc une hyperbole.

Enfin lorsque l'origine est sur la courbe S, il est évident, et cela résulte encore de ce qui a été démontré (5°), que la courbe Σ est une parabole puisque cette courbe est tangente à la droite de l'infini.

1086. 7° Détermination du centre C de la conique réciproque Σ.



Le centre de Σ est à l'intersection de ses asymptotes; donc si nous prenons sur les droites OM et OM_1 les deux points t et t_1 de telle manière que l'on ait (5°)

$$OM \cdot Ot = R^2, \quad \text{et} \quad OM_1 \, Ot_1 = R^2,$$

alors le point d'intersection C des deux perpendiculaires Ct et Ct_1 à OM et OM_1 sera le centre de Σ. Ce point est en même temps le pôle de la corde de contact MM_1 des tangentes issues de l'origine puisqu'il est l'intersection des polaires des deux points M et M_1. On pouvait donc le construire encore en abaissant du point O une perpendiculaire OK sur MM_1 et en prenant

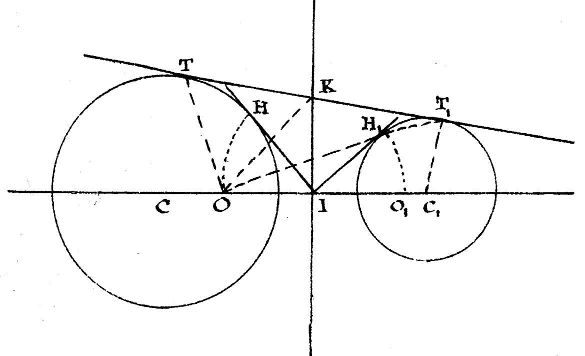
$$OC = \frac{R^2}{OK}.$$

Cette dernière construction est préférable, car elle est toujours applicable quelle que soit la position de l'origine, puisque la droite MM_1 est toujours réelle.

1087. 8° Deux cercles concentriques ont pour polaires réciproques deux coniques ayant un foyer commun et une directrice commune.

Le foyer commun est l'origine, et la directrice commune est la ligne correspondante au centre commun des deux cercles.

1088. 9° Étant donnés deux cercles, on peut toujours trouver une origine telle que leurs polaires réciproques soient deux coniques biconfocales.



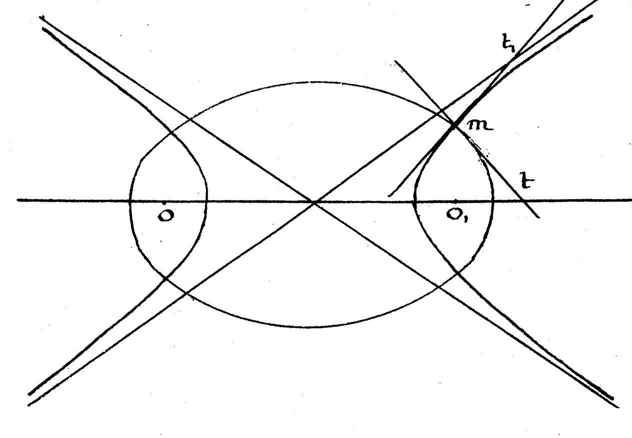
En effet, quelle que soit l'origine O, il est évident que les polaires réciproques des deux cercles auront un foyer commun qui sera le point O; pour qu'elles aient les mêmes foyers, il suffira donc de choisir l'origine O de telle manière qu'elles aient le même centre. La polaire du point O par rapport aux deux cercles C et C_1 devra donc être la même. On a vu qu'il existe deux points O et O_1 satisfaisant à cette condition; on les obtient en prenant sur la ligne des centres à partir du pied I de l'axe radical des longueurs IO et IO_1 égales aux longueurs des tangentes IH et IH_1.

Remarque. Si les deux cercles ne se coupent pas, leurs polaires réciproques seront réelles et seront l'une une ellipse et l'autre une hyperbole puisque l'origine est intérieure à l'un des cercles et extérieure à l'autre.

Si les deux cercles sont tangents, l'origine sera leur point de tangence et leurs polaires réciproques seront deux paraboles ayant le même axe.

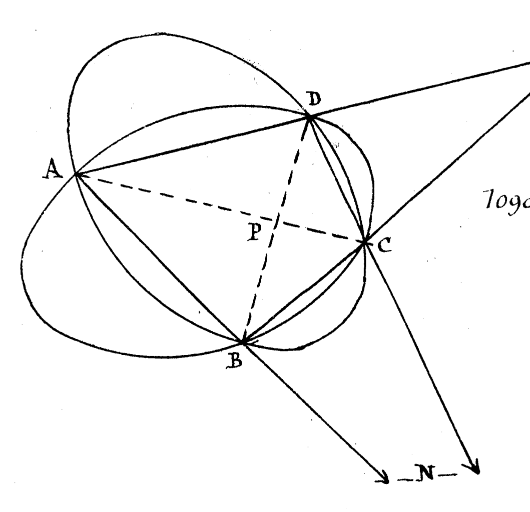
Enfin si les deux cercles se coupent, les points O et O_1 sont imaginaires.

1089. **Application.** L'orthogonalité des coniques biconfocales se déduit par polaires réciproques de la propriété suivante: Si l'on mène la tangente commune TT_1 aux deux cercles C et C_1, l'angle TOT_1 est droit.



Pour démontrer cette propriété on remarquera que si d'un point quelconque de l'axe radical de deux cercles on mène des tangentes à ces cercles, les longueurs de ces tangentes sont égales. D'après cela, on voit que les points O et O_1 peuvent être considérés comme deux cercles de rayon nul ayant le même axe radical que les cercles C et C_1, puisque l'on a pris $IO = IH$, et $IO_1 = IH_1$; par suite $KO = KT$, de même $KO_1 = KT_1$; donc l'angle TOT_1 est égal à la somme des deux angles OTT_1 et OT_1T, par suite, $TOT_1 = 90°$.

Cela posé, si nous prenons pour origine le point O, la polaire réciproque du cercle C est une ellipse, celle du cercle C_1 est une hyperbole ayant les mêmes foyers que cette ellipse; à la tangente commune TT_1 correspond le point m commun à l'ellipse et à l'hyperbole, et aux points T et T_1 correspondent



les deux tangentes mt, mt₁. Or l'angle TOT₁ est droit, donc l'angle des deux droites mt et mt₁ est aussi droit; ainsi une ellipse et une hyperbole biconfocales se coupent orthogonalement.

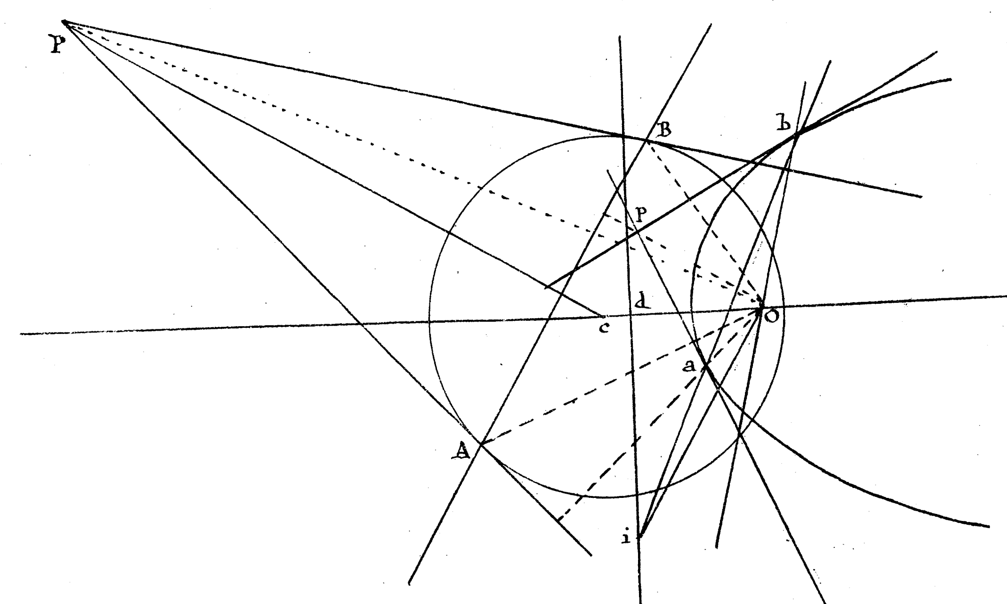
1090. 10° Étant données deux coniques, il y a trois points tels que leurs polaires réciproques par rapport à l'un d'eux sont des coniques concentriques.

Car il y a trois points M, N, P dont les polaires par rapport aux deux coniques sont les mêmes, donc (7°) ....

Il y a toujours un de ces points qui est réel, même lorsque les coniques se coupent en des points imaginaires.

II° Applications.

1091. Transformons par polaires réciproques quelques propriétés presque évidentes du cercle.



1° Deux tangentes quelconques à un cercle font des angles égaux avec la corde de contact.

Prenons pour origine un point quelconque O. Dans la figure le point O est à l'intérieur du cercle C, donc la polaire réciproque de ce cercle sera une ellipse ayant pour foyer le point O et pour axe OC. A la tangente PA correspond le point a, à la tangente PB le point b, et à la droite AB correspond le point p intersection des polaires réciproques pa et pb des points A et B.

Or l'angle PAB = PBA; donc d'après le théorème démontré ci-dessus (1081), l'angle pOb = pOa. Nous retrouvons ainsi ce théorème déjà démontré:

La droite qui joint le foyer d'une conique au point d'intersection de deux tangentes quelconques divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs qui joignent le foyer aux points de contact.

2° La ligne qui joint le centre d'un cercle à un point quelconque P est bissectrice de l'angle des deux tangentes issues du point P.

A la droite CP, qui passe par le point C et le point P, correspond le point d'intersection i de la directrice et de la droite ab; et, comme l'angle CPA = CPB, il s'ensuit que Oi est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs aO et bO, propriété que nous avons démontrée par le calcul.

1092. Les transformations des théorèmes suivants sont évidentes:

1. La tangente au cercle est perpendiculaire à la ligne qui joint le centre au point de contact.

Propriété corrélative: Si au point M d'une conique on mène la tangente MT prolongée jusqu'à son intersection T avec la directrice, l'angle MFT est droit.

2. Le lieu des sommets des angles constants circonscrits à un cercle est un cercle concentrique.

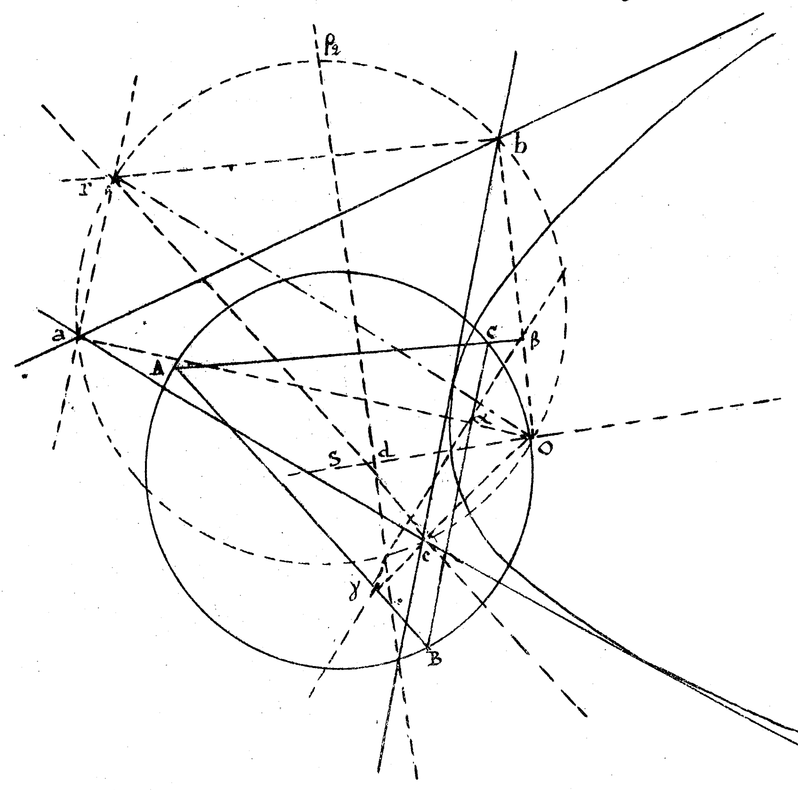
L'enveloppe des cordes vues du foyer dans un angle constant est une conique ayant le même foyer et la même directrice.

3. L'enveloppe de la corde des contacts des tangentes à un cercle faisant entre elles un angle constant

est un cercle concentrique.—

Le lieu des intersections des tangentes dont la corde des contacts est vue du foyer sous un angle constant est une conique ayant même foyer et même directrice.

1093. Si du point O pris sur un cercle on abaisse des perpendiculaires $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ sur les côtés d'un triangle inscrit, les points α, β, γ, sont en ligne droite.



Prenons le point O pour centre du cercle directeur; le cercle se transforme en une parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice dh. Aux trois points α, β, γ qui sont en ligne droite correspondent trois droites ar, br, cr qui se coupent au même point r. En second lieu, au point A qui est à l'intersection des deux droites AB et AC correspond la droite bc qui joint les pôles b et c de ces deux droites, et comme A est sur le cercle, bc est une tangente à la parabole de même pour ab et ac. Nous arrivons donc à cette conclusion que

Si l'on joint le foyer O aux sommets a, b, c, d'un triangle circonscrit à la parabole, et si on élève des perpendiculaires à ces droites aux points a, b, c, ces perpendiculaires se coupent au même point r. Cela posé, comme les angles Oar, Obr et Ocr sont droits, le cercle décrit sur Or comme diamètre passera par les trois points a, b, c, donc

Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer; ou bien: Étant données trois tangentes à la parabole, le lieu du foyer est le cercle circonscrit.

1094. Citons encore quelques transformations presque évidentes:

1° La somme des perpendiculaires abaissées de l'origine sur deux tangentes parallèles à un cercle est constante et égale au diamètre du cercle.

Propriété corrélative: La somme des inverses des segments d'une corde focale quelconque est constante.

Car

$$OT.Om = R^2, \quad OT_1.Om_1 = R^2;$$

d'où

$$\frac{1}{Om} + \frac{1}{Om_1} = \frac{OT + OT_1}{R^2} = \frac{2r}{R^2};$$

2r étant le diamètre du cercle transformé.

En considérant la corde focale qui se confond avec l'axe, on voit que cette somme est égale à $\frac{2}{p}$, p étant le paramètre; d'un autre côté, puisque r est le rayon du cercle transformé et R celui du cercle directeur, on a d'après la relation qui précède

$$R^2 = p.r;$$

donc les polaires réciproques de deux cercles égaux, par rapport à la même origine, ont le même paramètre.

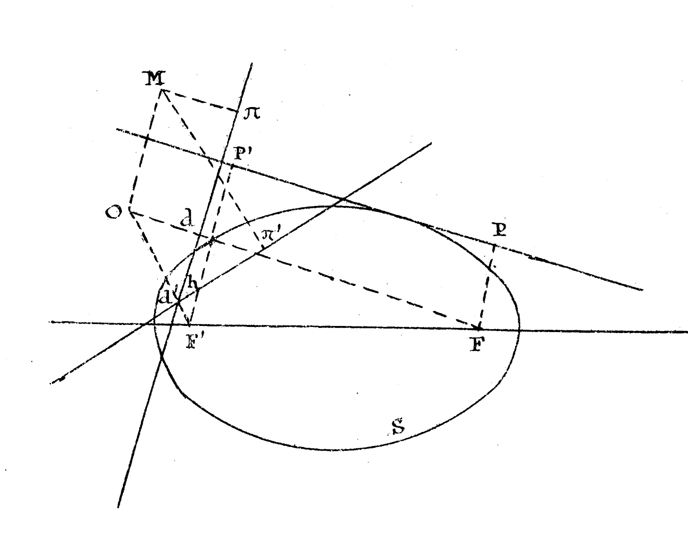
2° Le produit des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque d'une conique sur deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette courbe, est dans un rapport constant avec le produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés.

Propriété corrélative: Si un quadrilatère fixe est circonscrit à une conique, le produit des perpendiculaires abaissées de deux sommets opposés sur une tangente variable est dans un rapport constant avec

le produit des perpendiculaires abaissées des deux autres sommets.

1095. Nous terminerons enfin par une propriété générale et importante des coniques, que nous déduirons de la proposition suivante :

Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers d'une conique sur une tangente quelconque est constant, c. à d. $FP.F'P' = b^2$.



Prenons pour origine un point quelconque O ; la conique considérée se transforme en une autre conique ayant pour foyer le point O ; à la tangente PP' correspond un point M de la polaire réciproque ; aux deux points F et F' correspondent deux droites d'd et d'h.

Cela posé abaissons du point M les perpendiculaires Mπ et Mπ' sur d'd et d'h, et appliquons le théorème démontré ci-dessus N° (1083) ; nous aurons

$$\frac{M\pi}{FP} = \frac{OM}{OF}\,; \quad \frac{M\pi'}{F'P'} = \frac{OM}{OF'}\,;$$

donc

$$\frac{\overline{MO}^2}{M\pi . M\pi'} = \frac{b^2}{OF.OF'}\,;$$

or le second membre est une constante ; donc

On peut considérer une conique quelconque comme le lieu des points M tels que le rapport du carré de leur distance à un point fixe O, au produit de leurs distances à deux droites fixes est constant.

Remarque. Nous nous contenterons de ces notions très-succinctes sur les Polaires réciproques ; c'est dans le traité de M. Poncelet (Traité des Propriétés Projectives des Figures, 1866) qu'il faut étudier cette théorie, ainsi que celle de la Méthode Projective.

Chapitre IV.

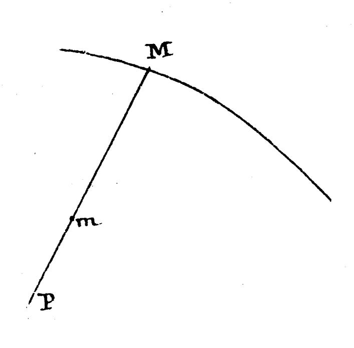
Notions sur la Transformation par rayons vecteurs réciproques.

Cette méthode de transformation est loin d'avoir l'importance de la méthode des polaires réciproques ; mais elle conduit souvent, quoique par une voie détournée, à des démonstrations simples et élégantes ; elle peut aussi être employée comme méthode d'investigation.

1° Définitions. - Principes généraux.

1096. Définitions. Étant donnée une courbe et un point fixe, on joint un point quelconque de la courbe, M, au point fixe P et on prend un point m tel que

$$(1) \quad PM.Pm = K^2\,;$$



le lieu des points m ainsi déterminés est dite la Courbe inverse de la courbe proposée ; cette méthode de transformation est appelée transformation par rayons vecteurs réciproques ; le point fixe P est le pôle, la constante K le module de la transformation.

Formules de Transformation.

I° Coordonnées polaires. - Traitons d'abord la question en coordonnées polaires en prenant le pôle de la transformation pour pôle des coordonnées.

L'équation de la courbe donnée est, par exemple, $f(\omega, \rho)=0$, or, pour une certaine valeur de ω, le rayon vecteur ρ_1 de la courbe inverse est défini par la relation

$$\rho\rho_1 = K^2, \text{ d'où } \rho = \frac{K^2}{\rho_1}.$$

En remplaçant ρ par cette valeur, on a $f\left(\omega, \frac{K^2}{\rho_1}\right)=0$, ou en supprimant l'indice, $f\left(\omega, \frac{K^2}{\rho}\right)=0$; c'est l'équation de la courbe inverse. On prend souvent le module égal à l'unité ; il suffit alors de changer ρ en $\frac{1}{\rho}$.

II° Coordonnées rectilignes. Soient X, Y les coordonnées d'un point M de la courbe

$$f(X, Y)=0,$$

et soient x et y celles du point correspondant m de la courbe inverse, nous prendrons le pôle pour origine des coordonnées. Si $Om=r$, $OM=R$, on doit avoir :

$$R.r=K^2 ;$$

or, en construisant les coordonnées des points M et m, on voit facilement que

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{R}{r}=\frac{K^2}{r^2} ; \text{ or } r^2=x^2+y^2 ;$$

donc

$$\text{(II)} \quad X=\frac{K^2x}{x^2+y^2}, \; Y=\frac{K^2y}{x^2+y^2} ;$$

ce sont les formules de transformation.

L'équation de l'inverse est, par conséquent,

$$f\left(\frac{K^2x}{x^2+y^2}, \frac{Ky}{x^2+y^2}\right)=0.$$

1097. L'inverse d'une droite est une circonférence passant par le pôle ; l'inverse d'une droite passant par le pôle est une droite.

L'équation d'une droite, en coordonnées polaires est,

$$\rho=\frac{1}{A\cos\omega+B\sin\omega} ;$$

l'inverse aura pour équation

$$\rho=K^2(A\cos\omega+B\sin\omega) ;$$

c'est une circonférence passant par le pôle.

En coordonnées rectilignes, l'équation d'une droite est

$$AX+BY+C=0 ;$$

l'équation de l'inverse sera

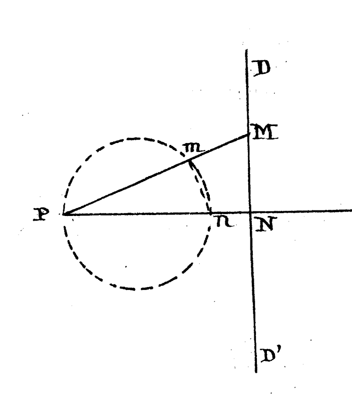
$$K^2\frac{Ax+By}{x^2+y^2}+C=0,$$

ou

$$C(x^2+y^2)+K^2(Ax+By)=0 ;$$

équation d'une circonférence passant par l'origine ou le pôle.

On peut encore le voir géométriquement.



Soit DD' la droite donnée et P le pôle. Menons PN perpendiculaire à cette droite, et prenons un point n tel que

$$PN.Pn = K^2.$$

Maintenant soit M un point quelconque de DD' et m le point correspondant; on a aussi

$$PM.Pm = K^2.$$

Des relations $PN.Pn = K^2$, $PM.Pm = K^2$;
il résulte

$$PN.Pn = PM.Pm, \text{ ou } \frac{PN}{Pm} = \frac{PM}{Pn};$$

c.à.d. que les deux triangles Pmn, PMN sont semblables; par suite l'angle $\widehat{Pmn} = \widehat{PNM}$; or l'angle $\widehat{PNM}$ est droit, par suite, le point m est le sommet d'un angle droit dont les côtés passent par les deux points fixes P et n; le lieu du point m c.à.d. l'inverse de la droite DD' est donc une circonférence décrite sur Pn comme diamètre.

1098. L'inverse d'une circonférence est une circonférence; l'inverse d'une circonférence passant par le pôle est une droite.

L'équation d'une circonférence est

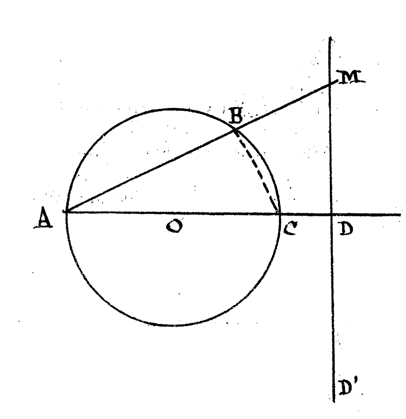
$$X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0;$$

remplaçons X et Y par $\frac{K^2 x}{x^2+y^2}$ et $\frac{K^2 y}{x^2+y^2}$, on obtient pour la courbe inverse

$$K^4 + aK^2x + bK^2y + c(x^2+y^2) = 0;$$

c'est l'équation d'une circonférence.

Si la circonférence donnée passe par le pôle, on a c = 0; l'inverse est alors une ligne droite. C'est ce que l'on peut encore démontrer par la Géométrie.



Par un point A situé sur la circonférence menons la transversale ABM sur laquelle on prend le point M de sorte que $AB.AM = K^2$. Traçons ensuite le diamètre AOC et abaissons sur ce diamètre la perpendiculaire MD; enfin joignons BC; les deux triangles semblables ABC et AMD donnent

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AD}, \text{ ou } AC.AD = AB.AM = K^2;$$

d'où

$$AD = \frac{K^2}{AC};$$

or le point D est fixe; donc le lieu du point M est la droite DD' perpendiculaire au diamètre AC.

Exercice. Démontrer par la géométrie la proposition générale.

1099. Une courbe et son inverse coupent sous le même angle le rayon vecteur joignant deux points correspondants.

Soit, en effet, $\rho = f(\omega)$ l'équation de la courbe; l'équation de la courbe inverse sera $\rho_1 = f(\omega)$, où $\rho_1 = \frac{K^2}{\rho}$. L'angle V de la tangente en un point de la courbe est déterminé par l'équation

$$\text{tang } V = \frac{\rho}{\rho'};$$

l'angle V_1 de la tangente au point correspondant sera déterminé par

$$\text{tang } V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1'}.$$

Or $\rho_1 = \frac{K^2}{\rho}$; donc $\rho_1' = -K^2 \frac{\rho'}{\rho^2}$; par conséquent

$$\text{tang } V_1 = -\frac{\rho}{\rho'} = -\text{tang } V.$$

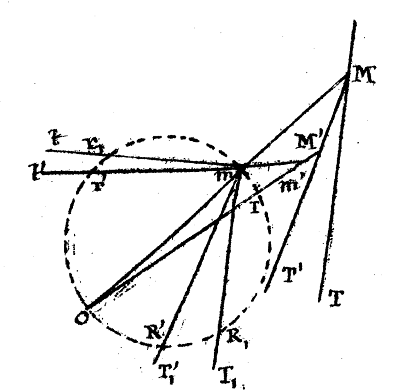
Les parties des tangentes situées de part et d'autre du rayon vecteur, font donc des angles égaux avec ce rayon vecteur; c.à.d. qu'une courbe et son inverse coupent le rayon vecteur sous le même angle; mais les tangentes sont inversement disposées.

On peut démontrer cette proposition géométriquement.

Soient M et M' deux points voisins, m et m' les points correspondants, de sorte que

$$OM.Om = K^2,\quad OM'.Om' = K^2;$$

$$\text{d'où}\qquad OM.Om = OM'.Om';$$



c.à.d. que les deux triangles OMM' et Omm' sont semblables; donc $\widehat{OMM'} = \widehat{mm'O}$. Menons mT_1' parallèle à MM', il s'en suit que $\widehat{OmT_1'} = \widehat{t'm'O}$. Sur Om comme diamètre décrivons une circonférence, laquelle coupe en r', I et R' les droites mm', Om', mT_1'.

Les angles $\widehat{OmT_1'}$, $\widehat{t'm'O}$ étant égaux, leurs mesures sont égales; par conséquent

$$\text{arc } OR' = \text{arc } Or' - \text{arc } Im.$$

Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M; la droite MM' devient la tangente en M, et mm' devient la tangente à la courbe inverse en m; mais alors lim Im = 0. Soit donc MT la tangente à la courbe, et mt la tangente à l'inverse; soit encore mT_1 une parallèle à MT; puisqu'à la limite l'arc Im est nul, la relation

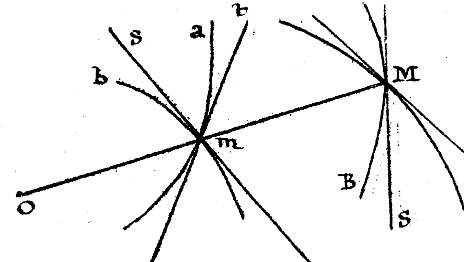
$$OR' = Or' - Im,$$

devient

$$\text{arc } OR_1 = \text{arc } Or_1;$$

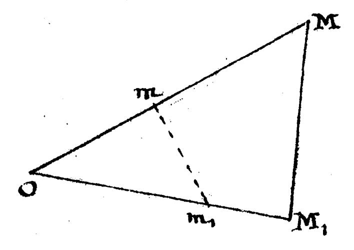
c.à.d. que les tangentes sont également inclinées sur le rayon vecteur OM, mais disposées en sens inverse.

De là nous concluons que les inverses de deux courbes se coupent sous le même angle que les courbes primitives.



Soient MA, MB deux courbes se coupant en M; ma, mb leurs inverses; soient en outre MT et MS, mt et ms les tangentes à ces courbes; d'après le théorème précédent $\widehat{OMT} = \widehat{Omt}$, $\widehat{OMS} = \widehat{Oms}$; par suite les angles $\widehat{smt}$ et $\widehat{SMT}$, différences d'angles égaux, sont égaux; or ce sont les angles des tangentes aux courbes; donc les courbes MA et MB se coupent sous le même angle que les courbes inverses ma et mb.

1100. **Relations entre les distances de deux points correspondants.**



Soient M et M_1 deux points ayant pour inverses m et m_1; désignons par Δ et δ les distances MM_1 et mm_1; par (R, r), (R_1, r_1) les rayons vecteurs (OM, Om), (OM_1, Om_1). Alors, si K est le module de la transformation, on a les relations

$$R.r = K^2,\quad R_1.r_1 = K^2.$$

$$\text{Or}\qquad \Delta^2 = R^2 + R_1^2 - 2RR_1\cos\theta;$$

en remplaçant R et R_1 en fonction de r et de r_1, on trouve

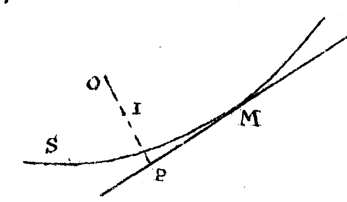
$$\Delta^2 = \frac{K^4\delta^2}{r^2 r_1^2},\ \text{ou}\ \Delta^2 = \frac{R^2R_1^2}{K^4}\delta^2;$$

ou enfin

$$(1)\qquad \frac{\Delta}{\delta} = \frac{RR_1}{K^2}.$$

II.° Recherche de quelques courbes inverses.

1101. 1°. La polaire réciproque d'une courbe plane S, par rapport à un cercle directeur O, est l'inverse de la podaire du centre de ce cercle.

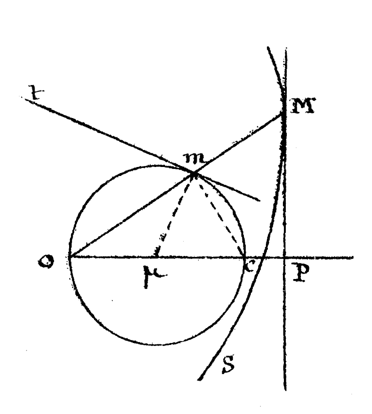


En effet, si du point O on abaisse une perpendiculaire OP sur une tangente quelconque à la courbe considérée, le lieu du point P est la podaire du point O. D'un autre côté, si R est le rayon du cercle directeur, la polaire réciproque de la courbe S est le lieu des points I tels que l'on ait

$$OP.OI = R^2;$$

donc la polaire réciproque de S est l'inverse de la podaire du point O par rapport à S.

La polaire réciproque Σ d'une courbe S par rapport à l'origine O est le lieu des centres des cercles passant par le point O et touchant la courbe inverse de S.



Soit m un point de la courbe inverse de S; la tangente en m sera mt en prenant $\widehat{Omt} = \widehat{OMP}$, donc le centre du cercle tangent à la courbe inverse en m aura son centre sur la droite mμ perpendiculaire à mt : or si nous menons OP perpendiculaire à la tangente MP, on détermine ainsi le point μ qui est le centre cherché, car l'angle $\widehat{MOP}$ étant complémentaire de $\widehat{OMP}$, de même que $\widehat{Om\mu}$ est complémentaire de $\widehat{Omt}$, il s'en suit que les angles $\mu\widehat{Om}$ et $\mu\widehat{mO}$ sont égaux, donc $\mu O = \mu m$, par suite μ est le centre du cercle. Cela posé, les deux triangles Omc et OMP sont semblables, donc

$$\frac{OM}{OC} = \frac{OP}{Om} \text{ ou } O\mu . OP = \frac{1}{2} . OM . Om.$$

Donc, si K est le module de transformation, on a

$$O\mu . OP = \frac{K^2}{2};$$

par conséquent le lieu des points μ sera la polaire réciproque de S en prenant pour rayon du cercle directeur $R = \frac{K}{\sqrt{2}}$.

1102. 2°. L'inverse d'une conique S ayant son centre au pôle est égale à la podaire d'une conique.

En effet, soit Σ la polaire réciproque de S, et P la podaire du point O par rapport à Σ. D'après le théorème précédent, S est l'inverse de P, donc l'inverse de S est égale à P.

L'inverse de la podaire du centre d'une conique est une conique.

Ceci résulte encore immédiatement du théorème démontré ci-dessus (1°).

1103. 3°. L'inverse d'une conique ayant pour foyer le pôle est une conchoïde circulaire.

L'équation de la conique est

$$\rho = \frac{P}{1 - e \cos\omega};$$

si on transforme par rayons vecteurs réciproques, l'équation de la transformée sera évidemment

$$\rho = \frac{K^2}{P} - \frac{K^2 e}{P} \cos\omega.$$

Dans cette équation, changeons ρ en −ρ, ce qui revient à faire tourner la courbe de 180° dans son plan; alors

$$\rho = \frac{K^2 e}{P} \cos\omega - \frac{K^2}{P}.$$

Or cette équation représente évidemment une conchoïde circulaire dont le point double est au pôle, le cercle directeur a pour rayon $\frac{K^2 e}{2P}$, et pour équation $\rho = \frac{K^2 e}{P} \cos\omega$.

Ce cercle est en même temps l'inverse de la directrice correspondante au foyer O de la conique; on le voit facilement.

1104. 4° L'inverse d'une parabole ayant pour foyer le pôle est une Cardioïde.

Le foyer de la parabole devient le point de rebroussement de la cardioïde, le sommet de la parabole a pour inverse le sommet de la cardioïde; enfin la directrice de la parabole a pour inverse le cercle directeur de la cardioïde.

En effet, si dans l'équation de la parabole

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\omega},\ ou\ \rho=\frac{p}{2\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

on remplace ρ par $\frac{K^2}{\rho}$, on voit que l'équation de la courbe inverse est

$$\rho=-\frac{K^2}{p}\cos\omega+\frac{K^2}{p},\ ou\ \rho=\frac{2K^2}{p}\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Cette équation représente évidemment une cardioïde ayant pour point de rebroussement le pôle et pour tangente de rebroussement l'axe polaire.

Le rayon du cercle directeur est $\frac{K^2}{2p}$, et on voit par l'équation de la courbe que ce cercle directeur est

$$\rho=-\frac{K^2}{p}\cos\omega;$$

il a donc pour inverse la droite

$$\rho=-\frac{p}{\cos\omega};$$

cette équation représente une perpendiculaire à l'axe polaire à une distance égale à $-p$; c'est la directrice de la parabole.

Ainsi la parabole a pour inverse la Cardioïde FM_1A_1, et la directrice a pour inverse le cercle FH_1; le point H_1 est le milieu de l'axe FA_1.—

1105. 5° L'inverse d'une parabole ayant pour sommet le pôle est une cissoïde.

L'équation de la parabole est $y^2=2px$, ou

$$\rho=\frac{2p\cos\omega}{\sin^2\omega};$$

donc l'équation de la courbe inverse est

$$\rho=\frac{K^2}{2p}\cdot\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega};$$

c'est donc une cissoïde ayant son point de rebroussement au pôle et pour tangente de rebroussement l'axe polaire.

L'équation du cercle directeur est

$$\rho=\frac{K^2}{2p}\cos\omega.$$

Ce cercle est donc l'inverse de la droite

$$\rho=\frac{2p}{\cos\omega},$$

c'est la corde de la parabole correspondant au point situé sur la bissectrice de l'angle yox.

1106. 6° L'inverse d'une hyperbole équilatère est une lemniscate.

L'hyperbole équilatère, ayant pour axe transverse l'axe polaire, a pour équation

$$\rho^2=\frac{a^2}{\cos 2\omega}.$$

La courbe inverse est donc représentée par

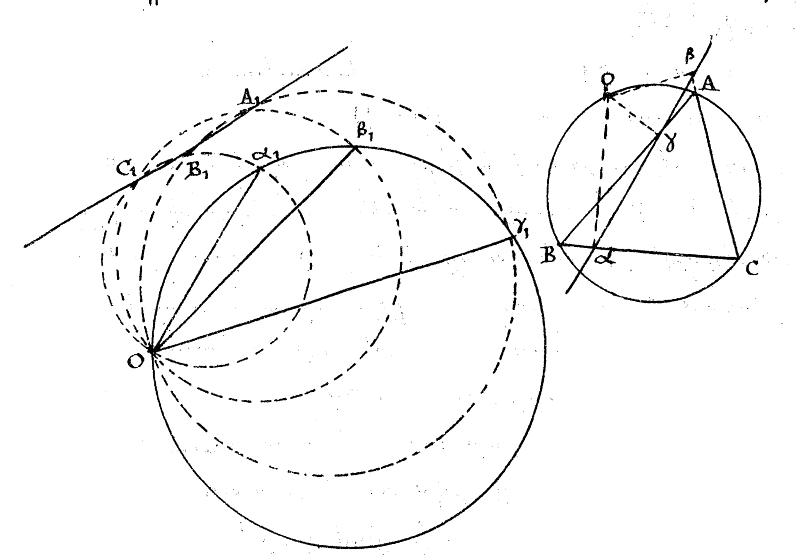
$$\rho^2 = \frac{K^2}{a^2}\cos 2\omega.$$

Cette équation représente une lemniscate dont la distance des foyers est $\frac{K\sqrt{2}}{a}$.

1107. 7° Transformer trois cercles en trois autres ayant leurs centres en ligne droite.
Il suffit pour cela de prendre pour pôle de transformation un point du cercle C qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés; car alors le cercle C se transformera en une droite qui devra couper orthogonalement les trois cercles inverses des trois cercles donnés; cette droite passera donc par les centres de ces trois cercles.

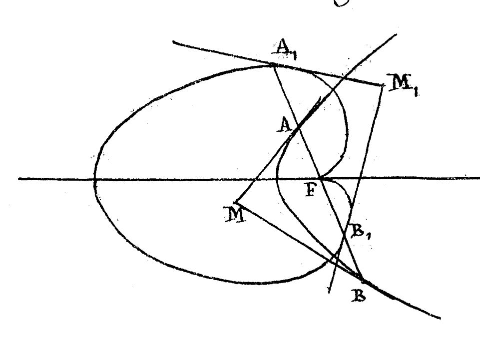
III°. Applications.

1108. 1° Si d'un point d'une circonférence on mène trois cordes, et que sur ces cordes, comme diamètres, on décrive trois circonférences; les trois autres points d'intersection de ces circonférences sont en ligne droite.



Pour démontrer ce théorème, on transforme la proposition suivante:
« Si d'un point d'une circonférence on abaisse des per-
« pendiculaires sur les côtés d'un triangle inscrit, les
« pieds des perpendiculaires sont en ligne droite. »
Prenons le point O comme pôle de transformation; les trois points en ligne droite α, β, γ, ont pour inverses les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, situés sur une circonférence passant par le pôle; les trois droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ deviennent $O\alpha_1$, $O\beta_1$, $O\gamma_1$; la droite AB, perpendiculaire à $O\gamma$, se transforme en une circonférence passant par le pôle et orthogonale à $O\gamma_1$; comme AB passe par le point γ, l'inverse passe par le point γ_1 et est par suite une circonférence dont $O\gamma_1$ est le diamètre.
De même les droites AC, BC se transforment en circonférences dont $O\beta_1$, $O\alpha_1$ sont les diamètres, et les points A, B, C ont donc pour inverses les points A_1, B_1, C_1, intersections de ces circonférences. Or les trois points A, B, C sont sur une circonférence passant par le pôle; donc les inverses A_1, B_1, C_1 sont sur une ligne droite, inverse de cette circonférence. Donc les points d'intersection A_1, B_1, C_1 des circonférences décrites sur $O\alpha_1$, $O\beta_1$, $O\gamma_1$ comme diamètres sont en ligne droite.
C. Q. F. D.

1109. 2° Les tangentes aux extrémités d'une corde passant par le point de rebroussement d'une cardioïde sont rectangulaires.



Nous savons que dans une parabole les tangentes aux extrémités d'une corde focale sont rectangulaires. Transformons en prenant le foyer pour pôle; la parabole se transforme en une cardioïde dont le point de rebroussement est le pôle; la droite AB a pour inverse la même droite A_1B_1; or la parabole et la courbe inverse coupent le rayon vecteur sous le même angle; donc $\widehat{M_1A_1F} = \widehat{MAF}$, $\widehat{M_1B_1F} = \widehat{MBF}$; mais l'angle AMB est droit, donc l'angle $A_1M_1B_1$ est aussi droit; par conséquent, les tangentes aux extrémités d'une corde passant par le point de rebroussement d'une cardioïde sont rectangulaires.

1110. 3° On a démontré que les pieds des normales menées d'un point à une parabole sont sur un cercle passant par le sommet.

Transformons cette propriété en prenant le sommet pour pôle; la parabole devient une cissoïde ayant son point de rebroussement au pôle; les normales deviennent trois cercles passant par le pôle, par l'inverse du point fixe et coupant orthogonalement la cissoïde. Or les pieds des normales étant sur un cercle passant par le sommet, les points inverses, qui sont les intersections des cercles orthogonaux avec la cissoïde, sont en ligne droite.

Donc: Par un point et le point de rebroussement d'une cissoïde on peut faire passer trois cercles orthogonaux à cette courbe; et les points où ces cercles coupent orthogonalement la cissoïde sont en ligne droite.

1111. 4°. Le lieu des sommets des paraboles confocales et tangentes à une droite fixe est un cercle, et les directrices passent par un point fixe.

Soit F le foyer, DD' la tangente fixe, du foyer abaissons une perpendiculaire sur la tangente fixe, le point P est sur la tangente au sommet; soit PI une des tangentes au sommet, le sommet A s'obtient en abaissant FA perpendiculaire sur PI. Le lieu du point A c.à.d. du sommet est donc le cercle décrit sur FP comme diamètre. Prenons PH = PF, et abaissons HK perpendiculaire sur FA, on aura AK = AF; HK sera donc la directrice de cette parabole; donc les directrices passent par le point fixe H.

Transformons cette propriété en prenant le foyer pour pôle; la droite DD' a pour inverse un cercle FMP, passant par le pôle F; la parabole a pour inverse une cardioïde tangente à ce cercle et ayant le point F pour point de rebroussement; le sommet A de la parabole a pour inverse le sommet A_1 de la cardioïde. Or le cercle FAP devient la tangente P_1P_1' à l'extrémité du diamètre FH_1, c'est le lieu des sommets des cardioïdes.

La directrice HK de la parabole a pour inverse le cercle directeur FH_1K_1 de la cardioïde, ce cercle passe donc par un point fixe H_1, inverse du point H; ce point H_1 est le centre du cercle FMP_1, et le point K_1 est le milieu de l'axe FA_1. Ainsi:

Lorsqu'on assujettit des cardioïdes, ayant leur point de rebroussement en un point fixe, à toucher un cercle fixe passant par le point de rebroussement, leur sommet décrit une droite tangente au cercle fixe à l'extrémité du diamètre sur lequel est le point de rebroussement, les cercles directeurs de ces cardioïdes passent par un point fixe qui est le centre du cercle donné.

La seconde propriété est d'ailleurs une conséquence immédiate de la première, puisque le diamètre du cercle directeur est la moitié de la cardioïde.

IV°. Généralisation de la méthode de transform^tion par rayons vecteurs réciproques.

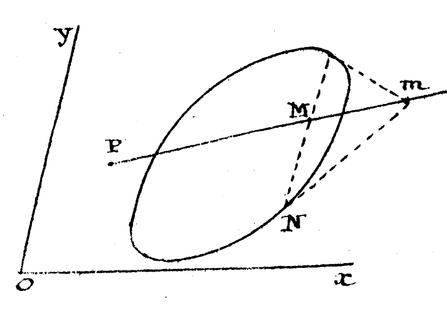
1112. M. Hirst a généralisé cette méthode de transformation, en prenant pour courbe directrice, non plus un cercle, mais une conique quelconque; il donne pour origine aux rayons un point quelconque A du plan de la conique; puis sur chaque rayon AR il prend deux points p et p' conjugués par rapport à la conique, c.à.d. tels que la polaire de l'un passe par l'autre, si le point p décrit une certaine courbe S, le point p' décrira une courbe S' qui sera la transformée réciproque de S.

L'indétermination de la forme de la conique directrice qui peut être un cercle, une hyperbole, un système de droites réelles ou imaginaires, etc....; l'indétermination de la position de l'origine A; donnent lieu à des transformations très-variées d'une même propriété et peuvent conduire à de nombreuses propositions.

Cette méthode de transformation a certaines analogies avec la méthode de transformation dite projection gauche et donnée par M. Transon dans les Nouvelles Annales (tomes IV et V 2ème série; p. 385 et 63, 213).

Nous n'entrerons dans aucun détail sur ces différentes méthodes qui ouvrent un large champ aux investigations; nous nous contenterons de donner les formules générales relatives à la transformation réciproque.

Soient a, b, les coordonnées du pôle P de transformation ou origine; M un point du plan, m son transformé; et enfin



$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la conique directrice.

Soient X, Y, les coordonnées du point M; x, y, celles du point m; soient, de plus, R et r les distances PM et Pm, on aura

$$(2) \quad (M)\begin{cases} X = a + \lambda R, \\ Y = b + \mu R, \end{cases} \quad (3) \quad (m)\begin{cases} x = a + \lambda r, \\ y = b + \mu r. \end{cases}$$

De ces valeurs on conclut d'abord

$$(4) \qquad \frac{X-a}{x-a} = \frac{R}{r}, \quad \frac{Y-b}{y-b} = \frac{R}{r}.$$

La polaire du point (x, y) par rapport à la conique (1) a pour équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y + f'_z = 0,$$

ξ, η, étant les coordonnées courantes; exprimons que le point M (X, Y) est sur cette droite, on trouve

$$af'_x + bf'_y + f'_z + R(\lambda f'_x + \mu f'_y) = 0;$$

puis remplaçant λ et μ par les valeurs déduites des relations (3), on a définitivement

$$(5) \qquad af'_x + bf'_y + f'_z + \frac{R}{r}\left[(x-a)f'_x + (y-b)f'_y\right] = 0.$$

Tirons maintenant la valeur de $\frac{R}{r}$ de la relation (5) et substituons cette valeur dans les égalités (4), on obtiendra pour les formules générales de transformation

$$(I) \quad \begin{cases} X = a - (x-a)\dfrac{af'_x + bf'_y + f'_z}{(x-a)f'_x + (y-b)f'_y}, \\[2ex] Y = b - (y-b)\dfrac{af'_x + bf'_y + f'_z}{(x-a)f'_x + (y-b)f'_y}; \end{cases}$$

a, b, sont les coordonnées du pôle de transformation; et

$$(II) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

est l'équation de la conique directrice.

De sorte que si

$$(S) \qquad F(X, Y) = 0,$$

est l'équation d'une courbe (S), l'équation de la courbe transformée sera

$$(S') \qquad F\left(a - (x-a)\frac{af'_x + bf'_y + f'_z}{(x-a)f'_x + (y-b)f'_y},\; b - (y-b)\frac{af'_x + bf'_y + f'_z}{(x-a)f'_x + (y-b)f'_y}\right) = 0.$$

On voit par là que, si m est l'ordre de la courbe S, 2m sera l'ordre de la courbe transformée.

On retrouve les formules du N° [1096] lorsqu'on prend un cercle pour courbe directrice, et le centre de ce cercle pour pôle de transformation.

Observations.

I. La Géométrie Analytique a pour objet l'étude des propriétés des figures par les ressources de l'Analyse ; aussi ai-je demandé au calcul seulement la solution des diverses questions étudiées dans cet ouvrage. Cependant, dans certaines circonstances, les considérations Géométriques permettent de simplifier considérablement les démonstrations, et il ne faut jamais les négliger lorsqu'elles peuvent intervenir heureusement. Mais, voulant donner à ce cours le plus d'unité possible, j'ai éloigné systématiquement toutes les démonstrations Géométriques. Quant aux procédés de la Géométrie Supérieure, je ne devais pas en parler ; je renverrai pour ce sujet aux traités de MM. Chasles, Cremona, Rouché, etc.....

II J'aurais vivement désiré joindre quelques détails historiques à l'exposé et aux énoncés des diverses propositions établies dans cet ouvrage. Mais, indépendamment des inconvénients que peuvent présenter de trop nombreuses citations dans un cours élémentaire comme celui-ci, le temps et les documents nécessaires m'ont absolument fait défaut pour porter un jugement certain sur ces questions délicates de priorité. On pourra consulter à ce sujet les ouvrages suivants.

Aperçu historique, Chasles, 1837 ;
Traité des propriétés projectives des figures, par M. Poncelet, édition 1865 ;
Traité des sections coniques, par M. Chasles, 1865 ;
Applications d'Analyse et de Géométrie, par M. Poncelet, 1862 ;
Nouvelles annales de Mathématiques, rédigées par MM. Terquem, Gerono, Prouhet ;
Treatise on the analytic Geometry, par G. Salmon ;
Teoria Geometrica delle curve, delle superficie, par L. Cremona ; etc, etc....

Lieux Géométriques. Problèmes.

1° Lorsque l'équation d'une courbe peut se mettre sous la forme $y = ax + b + \sqrt[m]{(a_1x+b_1)^m + \varphi(x)}$, la fonction $\varphi(x)$ ne devenant pas infinie pour $x = \infty$, m des asymptotes de cette courbe seront données par l'équation $(y - ax - b)^m = (a_1x + b_1)^m$.

2° On donne la base d'un triangle, et le produit des tangentes des moitiés des angles à la base ; trouver le lieu du sommet.

3° On donne la base d'un triangle ; on suppose que les côtés interceptent une longueur constante sur une ligne donnée ; trouver le lieu du sommet.

4° Un triangle ABC est circonscrit à un cercle donné, l'angle C est donné ; le sommet B se meut le long d'une droite fixe ; trouver le lieu du sommet A.

5° Trouver le lieu des points tels, qu'en menant de ces points des tangentes à une ellipse donnée, l'une d'elles soit perpendiculaire à la corde de contact.

6° Lieu des sommets des hyperboles qui ont une asymptote et un foyer communs.

7° Lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur une ellipse.

8° Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer et un point communs.

9° On a un diamètre fixe dans un cercle; une corde se meut parallèlement à elle-même; on joint ses points d'intersections aux extrémités du diamètre; trouver le lieu des intersections des diagonales.

10° Lieu des points d'où l'on voit une hyperbole équilatère sous un angle constant.

11° Lieu des sommets des ellipses ayant un foyer donné et touchant deux droites rectangulaires.

12° Lieu du foyer d'une ellipse de forme invariable qui roule sur deux droites rectangulaires. Lieu du centre, dans les mêmes circonstances; lieu des sommets.

13° Sur une tangente fixe à une conique, on prend deux points variables A et B tels que la distance AB reste constante; trouver le lieu des intersections des tangentes menées à la conique par les points A et B.

14° Trouver le lieu de l'intersection de deux tangentes à une parabole, connaissant le produit des sinus des angles qu'elles font avec l'axe.

15° Trouver le lieu de l'intersection de deux tangentes à une parabole, connaissant le produit des tangentes des angles qu'elles font avec l'axe.

16° Trouver le lieu de l'intersection de deux tangentes à une parabole, connaissant la somme ou la différence des cotangentes des angles qu'elles font avec l'axe.

17° Lieu des intersections des normales aux extrémités d'une corde passant par le foyer d'une conique.

18° Trouver la développée de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

19° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à un système de coniques touchant deux droites données en des points donnés.

20° Trouver le lieu des sommets des coniques doublement tangentes à deux cercles.

21° On donne deux circonférences O et O', et un point fixe P; on décrit des circonférences passant par P et tangentes à O; on prend les axes radicaux de ces circonférences tangentes et de O'; trouver l'enveloppe des axes radicaux.

22° Soit F le foyer d'une ellipse; menons une tangente MT en M, qui coupe le petit axe en T; soit Q la projection de T sur MF, trouver le lieu des points Q.

23° On donne une conique et un point fixe O dans son plan; on mène deux droites OA et OB perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en A et B; on mène en chacun de ces points les tangentes AT et BT à la conique; on projette le point O sur les trois côtés du triangle ABT, et par les trois projections on fait passer une circonférence; trouver l'enveloppe de ces circonférences.

24° Trouver l'enveloppe des droites inscrites dans un angle droit donné, et qui ont leurs milieux sur une droite fixe.

25° Une corde d'une conique est vue d'un point fixe sous un angle constant, trouver l'enveloppe de cette corde.

26° Par les extrémités des ordonnées d'une parabole on mène des droites faisant avec la tangente un angle égal à celui de l'ordonnée avec cette tangente; trouver l'enveloppe de ces droites.

27° Lieu des projections du centre d'une conique sur les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués.

28° Trouver l'enveloppe des cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués.

29° Lieu des pieds des normales menées d'un point fixe à des paraboles ayant même axe et même sommet.

30° On a une série d'hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe en un point donné et passant par un point fixe; trouver le lieu des contacts des tangentes menées par un point fixe.

31° Lieu des pieds des normales menées d'un point fixe à une série d'ellipses homothétiques et concentriques.

32° On prend deux diamètres conjugués OA et OB d'une ellipse; on abaisse BP perpendiculaire sur OA, et on prend sur BP, BM = OA; lieu des points M?

33°. Lieu des foyers des coniques ayant une directrice commune et deux points communs.

34°. Lieu des sommets d'une parabole tangente à une ellipse fixe et confocale avec elle.

35°. Lieu des foyers d'une hyperbole ayant une asymptote et une directrice fixe.

36°. Lieu des foyers des paraboles passant par deux points A et B, et tangentes à une droite parallèle à AB.

37°. Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux cercles tangents à un cercle fixe et dont les centres se meuvent sur une droite fixe.

38°. Enveloppe d'un cercle assujetti à avoir son centre sur une conique et à passer par un des foyers.

39°. Trouver dans la parabole la normale qui intercepte la plus petite aire.

40°. Lieu des centres des cercles tangents à une parabole et à sa directrice.

41°. Trouver sur l'ellipse le point le plus éloigné de l'extrémité du petit axe.

42°. Parmi les coniques circonscrites à un quadrilatère fixe, déterminer celle où le produit des axes est minimum.

43°. Sur un quadrant de l'ellipse, il existe toujours deux points pour lesquels les normales sont équidistantes du centre.

44°. On donne la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs d'hyperboles équilatères ayant même centre; trouver le lieu du sommet, lorsque l'angle formé par les deux autres côtés est constant.

45°. Quel est le plus grand angle qu'on puisse inscrire dans un segment donné d'une conique.

46°. Dans le plan d'une conique, on mène par un point fixe O une sécante coupant la courbe en M et M'; trouver le lieu des points N tels que $\frac{MN.OM'}{M'N.OM}$ = constante.

47°. Enveloppe des hyperboles équilatères concentriques coupant orthogonalement une droite fixe.

48°. Étant données deux coniques S et C, trouver le lieu des points d'où les deux tangentes menées à S soient conjuguées par rapport à C.

49°. Des coniques passent par deux points fixes et touchent deux droites; trouver l'enveloppe des cordes de contact.

50°. Une conique mobile de forme invariable passe par un point fixe et touche une droite fixe; trouver le lieu du centre; ou le lieu des foyers.

51°. On donne un cercle fixe dont le centre est sur l'axe d'une parabole; on mène à ce cercle deux tangentes quelconques parallèles; trouver le lieu des rencontres des sécantes qui passent par les points d'intersection de ces tangentes avec la parabole.

52°. Trouver le lieu des intersections de deux normales à la parabole et interceptant sur l'axe une longueur constante.

53°. Lieu des sommets des hyperboles équilatères ayant un centre donné et passant par un point donné.

54°. On a une série de paraboles ayant même directrice et même axe; trouver le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe à ces paraboles.

55°. Lieu des sommets des hyperboles ayant une directrice donnée et un centre fixe.

56°. On mène une série de cordes perpendiculaires au grand axe d'une ellipse; on joint les deux sommets aux extrémités de chaque corde; trouver le lieu de l'intersection de ces dernières droites.

57°. Par un point fixe P pris dans le plan d'une conique on mène une sécante quelconque qui rencontre la courbe en A et B; trouver le lieu des points M tels que $\overline{PM}^2 = PA.PB$.

58°. On joint les extrémités A et A' du grand axe à un point quelconque de l'ellipse; on mène en A et A' des perpendiculaires à ces cordes; trouver le lieu des intersections de ces perpendiculaires.

59°. Inscrire dans une ellipse une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son point milieu au centre soit maximum.

60°. Soient une ellipse et un cercle, par un point M quelconque de l'ellipse on mène une tangente au cercle; trouver les conditions pour que la longueur de cette tangente soit une fonction linéaire des coordonnées du point M.

61°. Lieu des projections de l'extrémité d'un diamètre d'une conique sur son conjugué.

62°. Lieu du foyer d'une hyperbole ayant une asymptote et un sommet fixe.

63°. Lieu des sommets des paraboles ayant une tangente commune et un foyer commun.

64°. Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer fixe et passant par un point fixe.

65°. Lieu du foyer d'une parabole ayant un sommet fixe et passant par un point fixe.

66° Lieu du troisième sommet d'un triangle semblable à un triangle donné et dont les deux autres sommets sont assujettis l'un à rester fixe, l'autre à parcourir une droite donnée.

67° On a deux droites rectangulaires, on prend un point fixe A sur l'une et on mène une droite AB qui rencontre l'autre en B; on mène alors BM parallèle à une direction fixe, puis en A on mène AM perpendiculaire à AB: lieu de l'intersection des dernières droites.

68° On donne un système de deux droites et un point fixe P; par le point P on mène une sécante quelconque qui rencontre les deux droites en A et B; trouver le lieu du point M pris sur la sécante, et tel que PM = AB.

69° On mène une tangente quelconque AT à un cercle qu'on termine en T à un diamètre fixe; par le point T on élève une perpendiculaire à ce diamètre, et on prend TM = TA, (A est le point de contact); trouver le lieu des points M.

70° Soient deux cercles fixes, et une droite quelconque coupant le 1er en AB et le second en A'B', trouver l'enveloppe de ces droites de façon que l'on ait toujours AB = A'B'.

71° Un angle circonscrit à une conique se meut de manière que son sommet glisse sur une droite fixe; trouver l'enveloppe des bissectrices de l'angle variable.

72° Deux coniques ont un foyer commun F; on mène une corde quelconque FMM'; trouver le lieu des intersections des tangentes en M et M' à chacune des coniques.

73° On donne l'angle A d'un triangle et sa surface; trouver le lieu décrit par un point divisant le côté BC dans un rapport donné.

74° On donne deux coniques S et S'; d'un point de S on mène deux tangentes à S' lesquelles rencontrent S en M et N; trouver l'enveloppe des cordes MN.

75° On donne sur un plan une circonférence (O), un point A et une droite D; du point A on mène une droite qui coupe D en un point B; sur AB comme diamètre on décrit une circonférence; cette circonférence et la circonférence O ont pour corde commune une droite qui rencontre AB en M. On demande le lieu décrit par le point M lorsque la droite AB tourne autour du point A.

76° Etant donnés un point et une droite; soient des paraboles ayant pour foyer le point fixe et touchant la droite fixe; si elles se coupent toujours sous le même angle, leur point d'intersection décrira un cercle.

77° Une ellipse tourne autour de son centre; aux points où elle coupe une droite fixe, on mène les tangentes à la courbe; lieu du point d'intersection de ces tangentes.

78° Un plan mobile se meut sur un plan fixe de manière que deux droites du plan mobile restent tangentes respectivement à deux cercles du plan fixe; trouver le lieu tracé par un point du plan fixe sur le plan mobile.

79° Etant donnée une ellipse, par un point fixe on mène deux droites rectangulaires quelconques, et aux points où ces droites rencontrent l'ellipse on mène les tangentes à cette ellipse; trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

80° Lieu du centre d'un triangle equilatère formé par trois tangentes à une parabole.

81° Etant donnés trois points A, B, C, et une droite indéfinie; on prend sur cette droite un segment variable MN, vu du point A sous un angle constant; trouver le lieu du point d'intersection des droites BM et CN.

82° Etant donnée une ellipse, le centre d'un cercle de rayon constant parcourt un diamètre de l'ellipse; trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes.

83° Lieu des foyers des courbes du second degré inscrites dans un parallélogramme.

84° Lieu des sommets d'un angle constant dont les côtés sont tangents à deux cercles fixes.

85° Etant donnés un angle fixe C et un point A; trouver deux points P et P' tels que, menant par ces points deux droites parallèles quelconques, le point A se trouve toujours sur une diagonale du trapèze ainsi formé.

86° Soit ABA' un triangle fixe, O un point fixe. Par O on mène une droite qui coupe les côtés du triangle en C et C'; lieu du point de rencontre des circonférences circonscrites aux triangles ACO et A'C'O.

87° Mener dans l'ellipse une normale telle que la portion PQ comprise entre les deux axes soit maximum.

88°. On mène des foyers d'une ellipse des perpendiculaires FP et F'P' sur les tangentes; lieu du point de rencontre des diagonales du trapèze FPP'F'.

89°. Deux ellipses ont un axe commun; on mène les normales aux points correspondant à une même abscisse; lieu des rencontres de ces normales.

90°. Étant donnés une ellipse fixe et un cercle dont le centre est fixe et le rayon variable, on demande le lieu du point milieu de la corde commune.

91°. Par un point C pris sur l'axe d'une ellipse on mène une sécante CD, qui rencontre en D la tangente AY au sommet; par le point D on mène la parallèle DE à l'axe, qui rencontre l'ellipse en E; on joint AE, on demande le lieu des intersections de AE et CD.

92°. Par les points de rencontre d'une tangente à l'hyperbole avec les asymptotes, on mène des parallèles aux asymptotes; trouver le lieu du point de rencontre de ces droites.

93°. Entre deux tangentes fixes AY et AX à une circonférence, on inscrit une tangente PQ; par P et Q on mène des parallèles à AX et AY; lieu des points de rencontre de ces droites.

94°. Lieu des points tels, qu'en menant par l'un deux deux tangentes à la parabole, la bissectrice de l'angle de ces deux tangentes fasse avec l'axe de la courbe un angle constant.

95°. Par deux points fixes A et B pris sur les côtés d'un angle xOy on mène des droites AM et BN telles que $\frac{OA}{ON}+\frac{OB}{OM}=\text{Const}^{te}$, M et N étant les intersections de ces droites avec Oy et Ox; lieu des points de rencontre des droites AM et BN.

96°. Par une droite OM située dans le plan d'une section droite d'un cylindre droit à base circulaire, on mène des plans sécants; lieu des foyers des sections.

97°. La base BC d'un triangle BAC est fixe de grandeur et de position; on construit les carrés ABB_1B_2, ACC_1C_2 avec les côtés AB et AC de l'angle droit; construire la courbe, lieu des intersections des côtés CB_1 et C_1B, lorsqu'on fait varier les côtés AB et AC du triangle.

98°. Étant donné un cercle (O) et deux points fixes A et B; on joint un point M du cercle à A, on prend le milieu N de AM, on le joint à B; on prend le tiers de NB; trouver le lieu du point P ainsi obtenu.

99°. Une circonférence (C) de rayon constant roule sur Ox; on joint OCH; on mène du point O la tangente, ainsi que la tangente en H extrémité du diamètre OC; lieu des intersections de ces tangentes.

100°. Un cercle C' est assujetti à toucher une droite fixe Ox et un cercle fixe C (touchant Ox); on mène la tangente commune et la tangente à C' (parallèle à Ox); lieu du point de rencontre de ces tangentes.

101°. On donne une conique et un point fixe; ce point est le centre d'un cercle de rayon variable; on demande le lieu des intersections des cordes communes au cercle et à la conique.

102°. Trouver l'enveloppe de la directrice d'une conique ayant un foyer fixe, passant par un point et touchant une droite.

103°. Le sommet d'un angle droit pivote autour d'un point pris sur une parabole; on mène les tangentes aux points où ses côtés rencontrent la courbe; trouver le lieu des intersections de ces tangentes; et le lieu des projections du point d'intersection sur la corde de contact.

104°. Par quatre points donnés on fait passer une conique; trouver le lieu d'un 5ème point par lequel doive passer cette conique pour qu'elle soit une parabole.

105°. Trouver le lieu des milieux des portions de normales à la parabole situées dans l'intérieur de la courbe.

106°. Deux droites, respectivement parallèles à un système de diamètres conjugués d'une conique à centre, tournent autour d'un point fixe dans le plan d'une seconde conique donnée; trouver l'enveloppe de la corde qui joint les points d'intersection avec cette seconde conique.

107°. Existe-t-il dans le plan de la parabole un point tel que les normales menées de ce point fassent deux-à-deux un angle de 120°?

108°. Par un point M pris sur une ellipse on mène les deux rayons vecteurs MF et MF', puis la normale MP; trouver le lieu des points P tels que $\overline{MP}^2=MF.MF'$.

109° Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint AC et AE, par le centre on mène une sécante quelconque qui coupe les deux droites AC et AE aux points G et H. on joint BG et FH; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux droites.

110° Étant donnés un angle AOA' et un point C sur la bissectrice; un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé en C; on joint les points de rencontre B et B' des côtés de l'angle mobile avec les côtés de l'angle fixe; du point C on abaisse une perpendiculaire sur BB'; trouver le lieu du pied de cette perpendiculaire.

111° Étant donné un angle fixe Ox et Oy, une droite se meut parallèlement à elle-même et rencontre en A et B les côtés de l'angle; trouver le lieu d'un point M, situé sur cette droite, et tel que $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ constante.

112° Une droite de longueur constante s'appuie sur un cercle et une droite fixe; trouver le lieu du milieu de la droite mobile.

113° A partir d'un point quelconque d'une ellipse on porte, sur la normale, une longueur égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente qui correspond à ce point; trouver le lieu des extrémités de ces droites.

114° Lieu des centres des circonférences qui interceptent des longueurs données sur les côtés d'un angle donné.

115° Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole; deux de ses côtés ont des directions invariables, trouver le lieu du milieu du troisième côté.

116° Trouver le lieu d'un point tel que l'une des bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point à deux points fixes A et B ait une direction donnée.

117° Étant donnée une ellipse, on mène deux diamètres conjugués quelconques; trouver le lieu du point d'intersection de l'un d'eux et d'une droite menée par un point fixe perpendiculairement à l'autre.

118° Lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole, et tel que le triangle formé par les côtés de l'angle et l'arc de parabole ait une aire constante.

119° Une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur l'axe d'une parabole; par les points où elle coupe la parabole on mène les normales; trouver le lieu du point de concours de ces normales.

120° Lieu des points pour lesquels la somme des carrés des normales menées à une conique fixe soit égale à une constante donnée.

121° Étant donnée une courbe du second degré inscrite dans un angle, on mène une tangente quelconque à cette courbe; trouver le lieu du point de concours des médianes ou des hauteurs du triangle formé par la tangente mobile et les côtés de l'angle; trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au même triangle.

122° Par le foyer d'une parabole on mène une corde, et sur la corde comme diamètre on décrit un cercle, puis on mène au cercle des tangentes parallèles à une droite donnée; trouver le lieu des points de contact.

123° Une corde tourne autour de l'un des foyers d'une courbe du second degré, trouver le lieu du point de rencontre des normales menées à la courbe par ses deux extrémités.

124° Deux courbes du second degré ayant un foyer commun, un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet situé au foyer commun; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées respectivement aux deux courbes aux points où elles sont coupées par les côtés de l'angle.

125° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole qui a un foyer donné et qui coupe en un point fixe une droite donnée parallèle à une de ses asymptotes.

126° On donne un point fixe O et une droite fixe OX; on construit un triangle OMP satisfaisant aux conditions suivantes, $OM = \sqrt{n}$, $MP = \sqrt{n+1}$, $\theta = n\alpha - (n+1)\beta$; démontrer que la tangente au lieu décrit par le point P s'obtient en joignant le point P au centre du cercle circonscrit au triangle OMP. Lieu du point P, lorsqu'on suppose $n = 2$. (C'est une lemniscate.)

127° Un triangle ABC est inscrit dans un cercle, le sommet A est fixe et l'angle A constant; lieu du centre du cercle inscrit au triangle ABC.

128° On donne un cercle fixe; un cercle variable touche le premier en un point fixe; trouver le lieu du point de contact sur ce dernier cercle de la tangente commune aux deux cercles.

129°. Trouver le lieu des sommets ou des foyers d'une hyperbole équilatère dont le centre est fixe et qui passe par un point fixe.

130°. Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère donnée assujettie à passer par deux points fixes.

131°. On donne un angle droit et un point fixe P sur la bissectrice de cet angle; on demande le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur une sécante variable qui intercepte dans l'angle un triangle dont l'aire est constante.

132°. Une parabole tourne autour de son foyer; trouver le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une droite donnée.

133°. Le centre d'un cercle décrit une asymptote d'une hyperbole et passe par son centre; trouver le lieu du point de concours des sécantes communes.

134°. Lieu des milieux des cordes inscrites dans une hyperbole et touchant un cercle concentrique à l'hyperbole.

135°. Trouver l'équation générale des courbes telles que les normales passent par un point fixe (α, β).

136°. Trouver l'équation générale des courbes en coordonnées polaires pour lesquelles la longueur de la normale est constante.

137°. Soient deux points fixes A et A', deux droites fixes et parallèles At, A't'; trouver l'équation d'une courbe telle que, si l'on mène une tangente quelconque tmt', on ait toujours $\frac{mt}{mt'} = \frac{At}{A't'}$, m étant le point de contact.

138°. Trouver l'équation générale des courbes telles que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes soit une conique.

139°. Une courbe du 4ème ordre ayant un point double O, on mène par ce point une sécante quelconque laquelle rencontre la courbe en deux autres points A et B; trouver le lieu d'un point M, situé sur cette sécante, et tel que $\frac{2}{OM} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$.

140°. Une courbe du 3ème ordre ayant un point double O, on mène par ce point une sécante quelconque laquelle rencontre la courbe en un autre point A; lieu d'un point M, situé sur cette sécante, et tel que $OM.OA =$ constante.

141°. Un angle droit pivoté autour d'un point double O appartenant à une courbe du 3ème ordre, ses côtés rencontrent respectivement la courbe en A et B, trouver l'enveloppe des hypoténuses AB; ainsi que le lieu des projections du point O sur ces hypoténuses. (Les tangentes au point double sont supposées rectangulaires).

142°. Quelles sont les propriétés mises en évidence par les équations de cette forme:

$$ABC = D^3, \text{ ou } ABC = D^2, \text{ ou } ABC = D, \text{ ou } ABC = D^2 F,$$

A, B, C, D, E, étant des fonctions linéaires des coordonnées x et y.

143°. Soit M un point pris sur une courbe plane, et N un point quelconque sur la tangente en M; par N on mène une sécante sous un angle donné, soit P un des points d'intersection. On prend sur NP une longueur NQ telle que $NQ.NP = \overline{MN}^2$; on demande le lieu des points Q lorsque le point N se meut sur la tangente fixe.

144°. Étant données deux coniques homothétiques et concentriques, une tangente quelconque à la conique intérieure détache une aire constante de la conique extérieure.

145°. On donne une ellipse et une droite fixes; trouver le lieu des points tels, que les tangentes, menées de ces points à l'ellipse, interceptent sur la droite fixe une longueur constante.

146°. Étant donné un cône droit, on demande de le couper parallèlement à la génératrice par un plan tel, que le segment parabolique résultant soit le plus grand possible, (la hauteur du cône droit est donnée ainsi que le rayon de base).

147°. Déterminer l'ellipse la plus grande qu'on puisse obtenir en coupant par un plan un cône droit donné (on donne la hauteur et le rayon de base).

148°. Circonscrire à un triangle donné la plus petite ellipse possible.

149°. Inscrire à un triangle donné la plus grande ellipse possible.

150°. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du pôle sur les tangentes à la courbe $\rho^m = a^m \cos m\omega$.

151°. On a une série de paraboles ayant même axe et même sommet; trouver la courbe qui coupe ces paraboles de manière que les aires AMP, AM'P', ... soient égales à une surface donnée.

152°. On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point; trouver le lieu de ce point.

153° Trouver l'enveloppe d'une corde d'une conique, cette corde étant vue sous un angle constant d'un point fixe P.

154° Une conique tourne autour du point de rencontre de deux droites rectangulaires; trouver le lieu des points de concours des droites qui joignent les points d'intersection de la conique avec les deux droites fixes.

155° Une première conique a pour foyers les points fixes F et F'; une seconde conique a pour foyers les points fixes G et G'; ces coniques sont semblables; trouver le lieu de leurs intersections.

156° Trouver le lieu d'un point dont la distance à un point fixe est égale à sa distance à un cercle fixe; cette dernière distance étant comptée sur une parallèle à une direction fixe.

157° Une ellipse roule sur une ellipse fixe égale à l'ellipse mobile; dans la position initiale, les deux ellipses se touchent en un sommet respectivement situé sur un axe de même nom (grand ou petit). Trouver le lieu décrit par un point lié invariablement à l'ellipse mobile.

Même question pour deux paraboles.

158° Trouver sur une circonférence donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux points donnés soit un maximum ou un minimum.

159° Les courbes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $y^2+x^2-c=a^2\log x^2$, se coupent orthogonalement: b est le paramètre variable, c est une constante. Construire la seconde courbe.

160° Le lieu des centres des ellipses dont les axes ont une direction donnée, et qui ont en un point donné un contact du second ordre avec une courbe donnée, est une hyperbole équilatère passant par ce point.

161° Le lieu des foyers des paraboles qui, en un point donné, ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, est un cercle. Les axes de ces paraboles enveloppent une courbe du 4ème ordre ayant trois points de rebroussement et touchant en trois points le cercle lieu des foyers.

162° Trouver l'équation d'une conique ayant un contact du troisième ordre avec une conique donnée et touchant deux droites données; lieu des centres de ces coniques.

163° Par un point fixe, pris dans le plan d'un cercle donné, on mène une sécante quelconque; par le point, où cette sécante rencontre le cercle, on mène une perpendiculaire à la sécante; trouver l'enveloppe de ces perpendiculaires.

164° Trouver l'équation d'une conique passant par deux points donnés et divisant harmoniquement trois segments donnés.

165° Soient ABC, abc deux triangles fixes; M est un point variable tel que les droites Ma, Mb, Mc, rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB, en trois points qui sont en ligne droite, trouver le lieu du point M, et l'enveloppe des droites sur lesquelles se trouvent les trois points de rencontre avec ABC.

166° Dans une ellipse donnée inscrire un triangle équilatéral dont le côté soit 1° un maximum; 2° un minimum.

167° Étant donnés deux cercles fixes, trouver le lieu d'un point tel que le produit des tangentes menées de ce point aux deux cercles soit constant.

168° Trouver le point duquel on verrait sous le même angle les parties de trois droites données sur un même plan, interceptées entre deux autres droites également données.

169° Trouver le lieu du sommet d'un angle invariable circonscrit à une section conique; trouver l'enveloppe de la corde de contact.

170° Trouver le lieu des centres des coniques touchant deux droites données et passant par deux points donnés.

171° Trouver le lieu des intersections successives des normales à la courbe $y=e^x$; construire la courbe obtenue.

172° On donne deux droites fixes rectangulaires Ox et Oy; et deux points fixes A et B sur chacune de ces droites. Trouver l'enveloppe des coniques passant par A et B, et coupant orthogonalement Ox et Oy en des points distincts de A et B. Construire la courbe enveloppe.

173° Lieu des centres de gravité des triangles équilatéraux formés par trois normales à la parabole.

174° Soit l'équation d'une courbe (S) en coordonnées polaires $f(\rho,\omega)=0$; on pose $\rho_1=\varphi(\rho)$, $\omega_1=\psi(\omega)$, et on élimine ρ et ω entre ces équations et celle de la courbe (S); on aura ainsi une courbe (S_1) que nous nommerons la

transformée de (S); (ρ, ω) et (ρ_1, ω_1) sont les coordonnées de deux points correspondants. Trouver la forme générale des fonctions φ et ψ de manière que les tangentes aux courbes (S) et (S_1) fassent, aux points correspondants, des angles égaux avec les rayons vecteurs correspondants.

175° Étant donnés deux cercles en grandeur et position, trouver le lieu des centres des coniques pour lesquelles les deux cercles donnés sont osculateurs; trouver l'enveloppe de la droite qui joint les points de contact.

176° Trouver, parmi tous les triangles de plus grande aire inscrits à une ellipse donnée, celui dont le périmètre est un maximum ou un minimum.

177° Trouver, parmi tous les triangles de plus grand périmètre inscrits à une ellipse donnée, celui dont l'aire est un maximum ou un minimum.

178° Quelle est la relation qui doit avoir lieu entre les axes de deux coniques homofocales, pour qu'un polygone puisse être à la fois inscrit à l'une et circonscrit à l'autre.

179° Trouver le lieu des foyers des coniques ayant même directrice et touchant deux droites données.

180° Étant donnée une conique S, on prend sa transformée Σ (par polaires réciproques) relative à un cercle C; à quelles conditions doit satisfaire le cercle directeur pour que le pôle (par rapport au cercle) d'une directrice de la conique S soit un foyer de la conique transformée Σ?

181° Trouver le lieu des centres des coniques touchant une droite donnée et ayant, avec un cercle donné, un contact du 3ème ordre, c.à.d. rencontrant ce cercle en quatre points coïncidents.

182° On donne une conique fixe; une conique mobile, mais de forme invariable, se meut de manière à passer par les points où la conique fixe est rencontrée par une droite variable et toujours parallèle à elle-même; trouver le lieu des centres; puis le lieu des foyers de la conique mobile.

183° Trouver le lieu des centres des coniques osculatrices à deux cercles fixes donnés.

184° Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués; aux sommets de ce parallélogramme on mène les normales, lesquelles forment un second parallélogramme. On fait passer une conique par les sommets du second parallélogramme, et par deux des sommets opposés de l'ellipse proposée; trouver le lieu des foyers de ces coniques.

185° On donne un cercle et une droite fixe, on décrit un cercle ayant son centre en un point quelconque de la droite et coupant orthogonalement le cercle donné; trouver le lieu des points qui ont même polaire par rapport aux deux cercles.

186° On donne l'équation

$$(\lambda^2-a^2)x^2+(\mu^2-a^2)y^2+2\lambda\mu xy+2\lambda b(a-1)x+2\mu b(a-1)y+b^2(a-1)^2=0,$$

dans laquelle λ et μ représentent deux paramètres indéterminés liés par la relation $\lambda^2+\mu^2=1$; a et b sont des constantes données. On demande: 1° le lieu des centres; 2° le lieu des foyers; 3° le lieu des sommets situés sur l'axe focal; 4° le lieu des sommets situés sur l'autre axe.

187° On donne une parabole et on mène une sécante AB telle que les normales en A et B se coupent à angle droit; 1° démontrer que la sécante AB passe par le foyer; 2° chercher le lieu des intersections M de ces normales; 3° trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AMB.

188° Trouver le lieu des centres des coniques passant par un point fixe, touchant une droite donnée en un point fixe, et pour lesquelles la somme algébrique des carrés des axes est constante.

189° Trouver le lieu des foyers des coniques touchant deux droites données en des points fixes.

190° Trouver le lieu des sommets des paraboles tangentes à une ellipse donnée et ayant pour foyer un des foyers de cette ellipse.

191° Quelles conditions doit remplir un quadrilatère pour que tous les rectangles circonscrits soient semblables à un rectangle donné? Quel est le lieu géométrique des centres de ces rectangles.

192° Un triangle a pour sommets les deux foyers d'une ellipse, et le 3ème sommet se trouve sur cette ellipse; trouver les lieux géométriques du centre de gravité du triangle, du centre du cercle circonscrit, et du point de rencontre des hauteurs. Trouver l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

193° Trouver le lieu des centres des coniques semblables circonscrites à un triangle donné.

194° Trouver le lieu des centres des coniques semblables inscrites à un triangle donné.

195° Si α, β sont les coordonnées d'un point du plan d'une ellipse rapportée à ses axes, les coordonnées x, y, du point de rencontre des normales aux points où l'ellipse est coupée par la polaire du point (α, β), sont: (Dcobovea)

$$x = \frac{c^2\alpha\,(b^2-\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}, \quad y = \frac{c^2\beta\,(\alpha^2-a^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}, \text{ où } c^2 = a^2 - b^2.$$

196° Sur toutes les tangentes à une ellipse, et à partir de leurs points de contact, on porte une longueur égale à celle du diamètre parallèle: trouver le lieu des extrémités de ces droites.

197° On donne deux cercles dont les centres sont fixes et dont les rayons ρ et ρ_1 satisfont à la relation $m\rho + m_1\rho_1 = n^2$, m, m_1, n étant des constantes; trouver l'enveloppe des tangentes communes à ces deux cercles.

198° Trouver l'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant.

199° Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile; que devient ce lieu lorsque le cercle fixe se réduit à un point, ou devient une droite?

200° Trouver le lieu du sommet d'une parabole ayant un foyer fixe et passant par un point fixe. (On a une épicycloïde, les deux cercles sont égaux).

201° Trouver le lieu des foyers, puis des sommets, des paraboles qui ont une tangente commune et une corde commune parallèle à cette tangente.

202° Par le foyer d'une parabole on mène un rayon vecteur quelconque et une perpendiculaire à ce rayon; puis sur ces deux droites comme côtés, et avec la normale au point pris sur la parabole comme diagonale, on construit un rectangle; quel est le lieu du sommet opposé au foyer?

203° Trouver le lieu des points d'intersection des diagonales d'un trapèze dont la base inférieure est fixe, dont la base supérieure est constante ainsi que la somme des deux côtés non parallèles.

204° Trouver le lieu des centres des coniques, passant par deux points fixes, touchant une droite fixe et dont le rectangle des axes est constant.

205° Une conique, ayant un centre et un foyer fixes, touche une droite de direction donnée; trouver le lieu des points de contact.

206° Cinq points sont situés dans un plan et tels que trois ne sont pas en ligne droite. Il y en a toujours quatre, sommets d'un quadrilatère convexe; par ces quatre points on peut faire passer deux paraboles. La conique, passant par les cinq points, est 1° une parabole, si le cinquième est sur l'une des deux paraboles; 2° Une hyperbole, si le cinquième point est dans l'intérieur ou hors des deux paraboles; 3° Une ellipse, si le cinquième point est dans l'intérieur d'une parabole et hors de l'autre.

207° Soient X, Y, deux points pris sur les prolongements des axes d'une ellipse dont on désigne le centre par O, tels que si P, Q, sont respectivement les points de contact des tangentes menées de X, Y, les angles OXP, OYQ soient égaux; trouver la courbe lieu du point dont OX, OY sont les coordonnées.

208° Trouver la courbe, lieu du sommet d'une hyperbole équilatère, tangente à une cassinoïde donnée et concentrique avec elle.

209° Etant donnés trois points A, B, C dans un plan, chercher le lieu d'un point M tel que si l'on joint le point M aux points A, B, C, et si l'on élève en A, B, C, des perpendiculaires aux trois droites MA, MB, MC, le triangle formé par ces trois perpendiculaires ait une surface constante.

210° Existe-t-il, dans une ellipse donnée, une corde de longueur constante qui, en se déplaçant, enveloppe un cercle? Dans le cas où une telle corde existe, déterminer sa longueur.

Questions de Concours.

1812. 211° Étant donné un quadrilatère gauche ABCD dont les côtés ne sont pas dans un même plan, on demande : 1° L'équation de la surface gauche engendrée par le mouvement d'une droite EF, qui s'appuie constamment sur les deux côtés opposés AD, BC, du quadrilatère, de manière qu'on ait la proportion $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$: 2° L'équation de la surface gauche engendrée d'une manière analogue par la droite GH qui s'appuie constamment sur les deux autres côtés DC, AB, avec la condition $\frac{DG}{GC}=\frac{AH}{HB}$. 3° On demande enfin si les deux surfaces ainsi engendrées sont les mêmes. (Concours général 1812).

1813. 212° Étant donnés dans un plan un parallélogramme et une droite, on demande de construire, avec la règle et le compas, les points où la droite serait rencontrée par une ellipse inscrite au parallélogramme et qui toucherait les quatre côtés du parallélogramme en leurs milieux (Concours général 1813).

1824. 213° Étant donnés, le périmètre d'un triangle, avec les rayons des cercles inscrit et circonscrit, déterminer les longueurs des trois côtés du triangle. Appliquer la solution générale au cas où le périmètre est représenté par 24, le rayon du cercle inscrit par 2, et le rayon du cercle circonscrit par 5. On cherchera ensuite les relations qui doivent exister entre le périmètre et les rayons donnés, pour que le triangle devienne isocèle, ou équilatéral, ou rectangle ; et l'on montrera comment la solution se simplifie dans ces différents cas. (Concours Général 1824).

1827. 214° Étant donnée une droite AB dont la position et la longueur sont invariables, trouver dans l'espace un point M tel qu'en le joignant avec les extrémités de cette droite, la différence des angles intérieurs A et B du triangle MAB soit égale à un angle donné α. Discussion du cas où l'angle α est droit. (Concours général 1827).

1828. 215° Connaissant le paramètre d'une parabole donnée dans un plan, mener par le foyer de cette courbe une droite terminée de part et d'autre par la parabole et égale à une ligne donnée. Quand la question sera résolue, déterminer la droite cherchée par une construction faite sur la figure et examiner quel est le nombre des solutions dont la question est, en général, susceptible. (Concours général 1828).

1829. 216° I° Une surface sphérique et une surface de cylindre droit à base circulaire étant données, et se coupant suivant une courbe à double courbure ; on suppose que de tous les points de cette courbe on abaisse des perpendiculaires sur le plan P qui passe par le centre de la sphère et l'axe du cylindre. On demande l'équation de la courbe formée par les points où le plan P est rencontré par ces perpendiculaires.

II° Connaissant le paramètre d'une parabole donnée dans un plan, mener par le foyer de cette courbe une droite terminée de part et d'autre à la parabole, et telle que le foyer partage cette droite en deux portions qui soient entre elles dans le rapport de n à l'unité. (Concours Général 1829).

1837. 217° Étant donnés dans un plan deux paraboles égales dont les sommets se touchent, et dont les axes sont tournés en sens contraires, on suppose que l'une d'elles roule sur l'autre de manière que dans chacune des positions qu'elle vient occuper successivement, elle lui soit toujours tangente en un point également éloigné du sommet de la parabole fixe et du sommet de la parabole mobile ; pendant ce mouvement, le sommet de cette dernière courbe décrit un lieu dont on demande l'équation. (Concours général 1837).

1833. 218° Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soit entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra le même problème 1° lorsque les deux côtés coupés du triangle sont égaux ; 2° Lorsque les trois côtés sont égaux. (Concours général 1833).

1842. 219° On donne une ellipse dont AB est l'axe transverse et F un foyer. Par le sommet A, le plus voisin de ce foyer, on mène une droite qui rencontre la courbe au point C et on la prolonge d'une quantité CD telle que le rapport $\frac{AD}{AC}$ soit constant ; puis on tire les droites BC et FD qui se rencontrent en M ; trouver le lieu du point M lorsque la sécante AD tourne autour du point A. (École normale 1842).

220° Soit P un point fixe dans le plan d'une ellipse donnée; PCD une sécante quelconque; CD la portion de la sécante interceptée dans l'ellipse; C'D' le diamètre parallèle à la sécante; M un point de la sécante tel que l'on a $\overline{PM}.\overline{CD} = \overline{C'D'}^2$; trouver le lieu du point M. (École Polytechnique, 1842).

221° On prend deux points fixes P et Q sur la base d'un triangle; on mène par ces points deux droites rencontrant CA et CB en deux points a et b tels que $p\frac{Ca}{Aa} + q\frac{Cb}{Bb} = 1$, p et q sont des constantes; trouver le lieu des intersections de Pa et Qb. (École Polytechnique, 1842).

N. B. Concours général de 1842: La règle des signes de Descartes.

1843. 222° Deux courbes du second ordre sont doublement tangentes, démontrer analytiquement que si d'un point quelconque de la corde des contacts on mène les quatre tangentes, les points de contact sont en ligne droite. = Démontrer que deux équations algébriques à 2 variables, indécomposables en facteurs rationnels, ne peuvent représenter un même lieu géométrique, si elles ne sont pas identiques terme pour terme. = Théorie des foyers dans les courbes du second ordre. (École normale, 1843).

223° Théorie des racines égales (Concours Général, 1843).

1844. 224° AT et AS sont deux droites qui touchent une section conique quelconque POQ aux points B et C; on mène une troisième tangente quelconque DE, et par les points D et E où elle rencontre les deux premières, on trace des parallèles à ces mêmes tangentes. On propose; 1° de déterminer le lieu géométrique des points d'intersection M de ces parallèles; 2° de reconnaître que l'angle EFD, sous lequel on voit de l'un des foyers F de la section conique POQ, la tangente mobile ED, conserve une valeur constante dans toutes les positions de cette tangente; 3° on examinera le cas particulier où la section conique POQ est une parabole, et on fera voir que dans ce cas, les segments interceptés sur les portions AB, AC, des tangentes fixes par la tangente mobile ED, sont réciproquement proportionnels. (École normale, 1844).

225° Une corde, dans une conique, étant vue d'un foyer sous un angle constant, trouver le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes menées par les extrémités de la corde. (École Polytechnique, 1844).

226° Étant donnés une ellipse et un point A sur l'ellipse, on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celles qui toucheraient les deux courbes données au point A. On demande le lieu du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle. (Concours général, 1844).

1845. 227° Étant donné un cercle O et une droite PP' perpendiculaire au diamètre OH, trouver un point K tel qu'en menant par ce point une sécante quelconque MKM', et qu'en abaissant des points M et M' des perpendiculaires MP et M'P' sur la droite PP', on ait la relation $\frac{1}{MP} + \frac{1}{M'P'} =$ constante. (École normale, 1845).

228° Étant donnés un cercle, et un point situé dans son intérieur, on imagine que sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par le point donné; on demande: 1° l'équation générale de ces ellipses; 2° le lieu géométrique de leurs foyers; 3° le lieu des extrémités de leurs petits axes (Concours général, 1845).

229° (École Polytechnique, 1845). Dix séries.

1ère Série. Lieu des foyers des hyperboles ayant un sommet commun et une asymptote commune = Théorie de la division.

2ème " Série. XOY est un angle droit, A est un point de OX, B un point de OY; on mène les droites AM, BM, telles que l'angle $\widehat{MBY} = 2.\widehat{MAX}$; on demande le lieu du point M. = Théorie des logarithmes.

3ème " Série. YOX est un angle quelconque, A un point fixe de son plan; de ce point on mène une suite de droites qui coupent les côtés de l'angle en B et C; on prend sur chaque sécante un point M tel que $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$; on demande le lieu des points M. = Règle des signes de Descartes.

4ème " Série. D'un point M de la circonférence d'une ellipse on mène deux cordes MF'Q, MFP passant par les deux foyers; démontrer que $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'Q} =$ Constante. = Mener un plan qui coupe une sphère en deux parties dont l'une soit double de l'autre.

5ème " Série. Construire la courbe $\rho = \frac{1 - \sin\omega}{1 + \cos\omega}$. = Démontrer les formules $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$.

6ème " Série. D'un point B, pris sur le côté OX d'un angle YOX donné et quelconque, on mène une tangente aux cercles inscrits dans cet angle; on demande le lieu des points de contact de ces tangentes. = Développer les moyens de

déterminer la valeur numérique de π.

7ème Série. Des extrémités M et M' d'une corde MFM' passant par le foyer d'une parabole, on abaisse des perpendiculaires MP, M'P' sur une droite fixe située dans le plan de la parabole; démontrer que $\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F'}$ = constante. = Développer la théorie de l'homogénéité en Géométrie, en physique et en mécanique.

8ème Série. Trouver le lieu des milieux des cordes égales d'une ellipse donnée. = Démontrer que a^x, $\log x$, $\sqrt[m]{f(x)}$ sont des fonctions continues de x.

9ème Série. Construire la courbe $y=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. = Expliquer les principes de la transformation des équations.

10ème Série. A une suite d'Ellipses ayant leurs foyers communs F, F', on mène des tangentes parallèles à une droite donnée; trouver le lieu des points de contact. = Équations d'Équilibre d'un corps solide libre.

1846. 230° Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés de chaque rectangle, on mène deux droites aux points de contact M de l'un des deux autres côtés et l'on demande de prouver: 1° que ces deux droites MN et MQ sont également inclinées sur le côté AB; 2° que leur somme MN+MQ fait une longueur constante quel que soit le rectangle; 3° que toutes ces droites telles que QM, NM sont toujours tangentes à une même ellipse décrite des mêmes foyers que la proposée (Concours général, 1846).

231° (École Polytechnique, 1846; plusieurs séries).

I° Lieu des points tels que leurs polaires relatives à trois cercles concourent en un même point.

II° Construire $\rho=\frac{\cos\omega-\sin\omega}{(\cos\omega+\sin\omega)^2}$.

III° Lieu des points de division en moyenne et extrême raison des cordes d'une ellipse issues d'un même point.

IV° Une ellipse et une parabole ont même foyer et même axe. De ce foyer on mène des rayons vecteurs FM, FP aux extrémités d'un diamètre MP de l'ellipse, et coupant la parabole aux points M' et P'; démontrer que $\frac{FM}{FM'}+\frac{FP}{FP'}$ = Constante.

V° D'un point fixe D d'un diamètre FDE d'un cercle on mène une sécante quelconque BDA au cercle; en A et B on lui mène les tangentes AC, BC, et on joint les points D et C; démontrer que tang $\widehat{ADE}$. tang $\widehat{EDC}$ = constante.

VI° Une ellipse et une hyperbole ont un axe commun, on mène une suite de sécantes parallèles; trouver le lieu des milieux des segments compris entre l'ellipse et l'hyperbole.

VII° Par le point O pris sur le diamètre COEX d'un cercle dont le centre est C, on mène deux sécantes Oa, Ob liées par la relation tang $\widehat{aO,EX}$. tang $\widehat{bO,EX}$ = Constante = m; puis par le point X pris sur le diamètre COEX et déterminé par la condition $CO.EX=\overline{CE}^2$, on mène une perpendiculaire au diamètre jusqu'à la rencontre en A et B des sécantes Oa, Ob; on demande si l'on ne pourrait pas disposer de la constante de sorte que la somme $\frac{\overline{Oa}^2}{\overline{OA}^2}+\frac{\overline{Ob}^2}{\overline{OB}^2}$ = Constante.

1847. 232° Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle ABC, dont les sommets A, B, C, sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle, on mène au cercle les tangentes Aa, Bb, Cc, qui rencontrent respectivement en a, b, c, les côtés opposés à ces sommets. On demande de prouver que ces trois points a, b, c, sont en ligne droite. On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle inscrit, on prend une section conique quelconque tangente aux trois côtés du triangle PQR. (Concours général, 1847).

233° On donne sur un plan, un nombre quelconque de points A, B, C, D, ...; par une origine fixe O, choisie à volonté sur ce plan, on mène un nombre infini de droites, et sur chacune d'elles on porte une longueur OM réciproquement proportionnelle à la racine carrée de la somme des carrés des perpendiculaires abaissées, sur cette droite, des différents points A, B, C, D, ...; on demande: 1° le lieu des points M ainsi obtenus; 2° s'il est toujours possible, les points A, B, C, D, ...; restant fixes, de choisir l'origine O, de telle sorte que ce lieu devienne un cercle; 3° examiner si la courbe cherchée est toujours fermée pour toutes les positions du point O; 4° lorsque cela a lieu, trouver où le point O doit être placé pour que, les points A, B, C, D, ... restant fixes, l'aire totale soit la plus grande possible. (École normale, 1847).

234° (École Polytechnique 1847, Sept séries).

I° Discuter la courbe $x^m + y^m = a^m$. ≈ Calculer à un millième près, $\frac{5+\sqrt{7}}{8+\sqrt{11}}$.

II° Construire $\rho = a \sin\omega \cos\omega$. ≈ Continuité des fonctions algébriques, exponentielle,....

III° Discuter la courbe $y = a \operatorname{tang}\left(\frac{x}{b}\right)$. ≈ Extraction de la racine de $a + b\sqrt{-1}$ avec une approximation donnée.

IV° Discuter la courbe $y = x + a \sin\left(\frac{x}{b}\right)$. ≈ Conditions d'équilibre d'une baguette homogène s'appuyant à ses deux extrémités sur deux droites fixes ayant une position quelconque dans l'espace.

V° Du sommet A de l'angle droit BAC on mène une droite quelconque; des points B et C on abaisse sur cette droite les perpendiculaires BP, CQ; trouver le lieu des points M de ces droites pour lesquels $\overline{AM}^2 = AP.AQ$. ≈ Théorie de l'homogénéité.

VI° Trouver la longueur d'une corde divisant la surface d'un cercle dans un rapport donné. Construire l'expression. ≈ Discuter la courbe $y = \frac{a}{\sin\left(\frac{x}{b}\right)}$.

VII° Construire les courbes $\rho = a - b\omega$, et $\rho = \frac{a}{\omega - b}$. ≈ Trouver le lieu des projections d'un sommet d'une conique sur ses tangentes.

1848. 235° Soit dans le plan d'une ellipse donnée, une droite quelconque TS; par le centre C de l'ellipse on mène le diamètre ACB conjugué à la direction de cette droite, et qui va la couper au point O; on prolonge ensuite la ligne OC d'une longueur OM, telle que $OC.CM = \overline{CA}^2$. On suppose que la droite TS se meuve de manière à être toujours tangente à une courbe donnée, et l'on demande quelle sera la courbe décrite par le point M. On indiquera la méthode à suivre, et l'on en fera l'application au cas suivant: L'ellipse est $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; la droite TS reste tangente à la courbe $x^2 = 9y$. (Concours général, 1848).

236° Théorie des foyers. ≈ Trouver les conditions d'équilibre d'une droite pesante dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux droites fixes. (École normale, 1848).

237° (École Polytechnique, 1848, six séries).

I° On donne une droite, un point O sur cette droite et deux points A et B hors cette droite, on mène une suite de couples de sécantes AM, BM, qui la coupent en des points C et D, tels que le produit OC. OD est constant; trouver le lieu des points M. ≈ Théorie des limites.

II° Lieu des foyers des paraboles égales inscrites dans le même angle droit. ≈ Méthode des coefficients indéterminés.

III° Lieu des projections du sommet d'une ellipse sur ses tangentes. ≈ Similitude.

IV° Équation polaire de la transformée de la section plane d'un cône droit quand on développe le cône. ≈ Théorie du plus grand commun diviseur.

V° Lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, dont la base a ses deux extrémités sur les deux côtés d'un angle droit donné et passe en outre par un point donné. ≈ Transformation des coordonnées.

VI° Déterminer les dimensions d'un cône droit dont on donne le volume et la surface convexe. ≈ Résoudre l'équation $x^4 + 20x^3 - 742x^2 - 8660x - 22875 = 0$.

1849. 238° Soient, dans un plan, une ellipse et une droite située hors de cette ellipse. On prend sur la droite deux points N et N' conjugués par rapport à l'ellipse (c. à. d. deux points tels que la polaire de l'un passe par l'autre); cela posé: 1° Trouver qu'il existe dans le plan de l'ellipse deux points O et O' desquels on voit chaque segment NN' sous un angle droit. 2° on demande le lieu des points O et O' quand la droite se meut parallèlement à elle même. (Concours général, 1849).

239° (École Polytechnique, 1849; plusieurs séries).

I° Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et un foyer commun. ≈ Similitude. ≈ Lever d'un plan.

II° Diviser une demi-sphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

III° Une ellipse tourne autour de son centre; trouver le lieu des intersections de son axe focal avec une tangente à cette ellipse qui reste constamment parallèle à une droite donnée.

IV° Les polaires d'un point fixe, par rapport à toutes les coniques passant par quatre points donnés, se coupent en un même point.

V° Par le point D où la directrice d'une parabole coupe son axe DX on mène une sécante quelconque DMM';

trouver le rapport des angles $\widehat{DFM}$, $\widehat{XFM'}$.

VI° Lieu des projections du sommet d'une parabole sur ses tangentes.

VII° Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et une directrice commune. = Similitude de deux courbes.

VIII° Soit un angle ABC; A, C, deux points pris sur ses côtés; par son sommet B, on mène une droite quelconque By; des points A et C on abaisse sur cette droite les perpendiculaires AD, CE. Trouver le lieu du point O, milieu du segment DE de By compris entre les pieds des perpendiculaires. = Construction des racines des équations.

240° Démontrer que si un cône de révolution passe par une ellipse, la somme des arêtes aboutissant aux extrémités d'un même diamètre de cette courbe est constante. Examiner ce que devient cette proposition lorsqu'à l'ellipse on substitue une hyperbole ou une parabole (École normale, 1849).

1850. 241° Étant donnés deux axes fixes Ox, Oy; autour d'un point fixe P, pris dans le plan de ces axes, on fait tourner un angle aPb de grandeur donnée et constante (a marquant le point où l'un des côtés de l'angle va couper l'axe Ox, et b le point où l'autre côté va couper l'axe Oy). On demande de prouver qu'il existe sur l'axe Ox un point fixe A et sur l'axe Oy un point fixe B, tels que le produit du segment Aa par Bb reste constant pour toutes les positions de l'angle. On examinera le cas particulier où les axes Ox et Oy coïncident. (Concours général, 1850).

242° On donne un point A, centre du cercle circonscrit à un triangle; le point G, centre de gravité du même triangle; le point B, centre du cercle inscrit; le point C d'intersection des trois hauteurs et leurs distances respectives; ces quatre points sont en ligne droite. Trouver la longueur des côtés du triangle, et construire les valeurs données par le calcul. = Construction des racines d'une équation. = Trisection de l'angle. (École normale, 1850).

243° (École Polytechnique, 1850).

Questions de Géométrie de Descriptive et diverses questions de Cours (Voir Nouvelles Annales tome X page 132).

1851. 244° Étant donnée une droite L, on mène de chacun de ses points M deux droites à deux points fixes P et P'. Deux autres points fixes O et O' sont les sommets de deux angles AOB, A'O'B', de grandeurs données et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs, de manière que leurs côtés OA, O'A', soient respectivement perpendiculaires aux deux droites MP, M'P'. On demande quelle est la courbe décrite par le point d'intersection N des deux droites OA, O'A', et la courbe qui est décrite par le point d'intersection des deux autres côtés OB, O'B', quand le point M glisse sur la droite fixe L. (Concours général, 1851).

245° L'équation d'une parabole rapportée à des axes rectangulaires est $y^2-2xy+x^2-2y+1=0$; trouver les coordonnées du sommet, celles du foyer; l'axe, le paramètre. = Théorème de Descartes. (École normale, 1851).

246° (École Polytechnique, 1851, plusieurs séries).

Questions de Descriptive (Voir Nouvelles Annales tome XI page 449).

Racine carrée = Théorèmes sur les valeurs sphériques à démontrer = Dérivée de $\sin x$, $\cos x$, etc.... = Division des nombres entiers = Méthode d'approximation de Newton; appliquer à l'équation $x^3-7x+7=0$. = Construire la courbe $y^3=x^4-10x^2+9$ = Trouver l'équation générale des cônes à base circulaire. = Décomposer $\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+1)}$ en fractions simples.

1852. 247° Étant donnés: 1° les distances FM = R, FM' = R', FM'' = R'' de trois points M, M' M'', d'une section conique au foyer F de cette courbe; 2° les angles MFA, M'FA, M''FA qui déterminent les positions des rayons vecteurs FM, FM', FM'', relativement à une droite fixe FA menée par le foyer dans le plan de la courbe. On demande: 1° de déterminer complètement la courbe, sa nature, sa situation, ses dimensions; 2° d'appliquer la solution aux données suivantes:

R = 0, 3090 8011, MFA = 16° 58' 32'', 3

R' = 0, 409 4501, M'FA = 117° 22' 40'', 5

R'' = 0, 437 3418; M''FA = 222° 12' 35''.

(Concours général, 1852)

248° On donne une conique et deux axes fixes qui passent par un foyer et font entre eux un angle de grandeur déterminée. On fait couler sur la courbe une tangente, et, par les points où cette droite rencontre dans chacune de ses positions les axes fixes, on mène deux autres tangentes à la courbe; ces deux dernières tangentes se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique. = Résolution des triangles. (École normale, 1852).

249° (École Polytechnique, 1852; plusieurs séries).
Questions de Descriptive, (Voir Nouvelles Annales, tome XII, page 226).
Résolution de deux équations du 1er degré à deux inconnues. = Théorie des racines égales, appliquer à $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$. = etc.....

1853. 250° Donner une définition géométrique de la parabole, et, partant de cette définition, exposer géométriquement les diverses propriétés de la courbe. (Concours général, 1853).

251° (École Polytechnique, 1853, plusieurs séries).
Questions de Descriptive, (Voir Nouvelles Annales; tome XII page 449).
Donner une méthode pour trouver les racines incommensurables des équations algébriques; usage des constructions graphiques. = Exposer les propriétés des triangles sphériques et des petits cercles considérés sur la sphère; mettre particulièrement en évidence les théorèmes analogues à ceux qui concernent les triangles rectilignes et le cercle considérés en géométrie plane. = etc....

1854. 252° Si l'on prend pour diamètre d'un cercle la portion de l'axe non-transverse d'une hyperbole comprise entre le centre et la normale en un point quelconque de la courbe, la tangente menée au cercle par ce dernier point est égale au demi-axe réel. Résoudre d'après cela la question suivante: Étant donnés les deux sommets et un troisième point quelconque de l'hyperbole, construire la normale en ce point. Indiquer les propriétés et les constructions analogues pour l'ellipse. (Concours général, 1854).

253° (École Polytechnique, 1854, plusieurs séries).
Questions de Descriptive, (Voir Nouvelles Annales, tome XIV, page 33).
I° Méthode d'approximation de Newton; appliquer à $x^3-3x^2-3x-1=0$.
II° Exposer les considérations géométriques sur lesquelles repose la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues. Appliquer à

$$y^2-3xy+2x^2-6x=0,\quad y^2+xy-2x^2+2=0;$$

on fera voir géométriquement pourquoi, dans ce cas, les équations proposées admettent seulement trois solutions communes.
III° Discuter et construire la courbe $y+x=a^x$; chercher si l'équation $x-a^x=0$ a des racines réelles.

254° Propriétés générales des coniques; analogies qu'elles ont entre elles. (École normale, 1854).

1855. 255° Résoudre l'équation: $1,3\tang x-\cotang\left(\frac{x}{2}+45°\right)=0$, 31416. = Formules d'interpolation. (Concours général, 1855).

256° (École Polytechnique, 1855, plusieurs séries).
I° On donne l'équation $x^3+y^3+z^3=a^3$; trouver les droites situées sur cette surface, l'intersection des plans passant par ces droites avec la surface.
II° On donne l'équation $x=\tang x$; démontrer qu'elle a une infinité de racines, et calculer la plus petite racine.
II° Trouver les quatre points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont un foyer commun F et dont les centres sont respectivement O et O'. On donne l'angle OFO' = d; les deux demi-axes a et b de l'ellipse, a' et b' de l'hyperbole. Faire le calcul dans le cas où

$$d=22°\,30' \qquad a=10;\ b=7;\ a'=1,\ b'=1.$$

1856. 257° Démontrer que si quatre forces se font équilibre, on peut considérer leurs directions comme des génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe. = Développer $\log(1+x)$ en série. (Concours général, 1856).

258° Discuter l'équation $\rho^2=A+B\sin\omega+C\sin^2\omega$, et faire la classification des diverses courbes qu'elle représente quand on considère ρ et ω comme des coordonnées polaires. (École Polytechnique, 1856).

259° Trouver l'aire du segment compris entre un arc de parabole et sa corde, et chercher le lieu géométrique des milieux des cordes qui déterminent dans une parabole des segments équivalents. = Règles de convergence des séries. = (École Normale, 1856).

1857. 260° Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation $x = A \sin x + B$ pour chaque système de valeurs des coefficients A et B et effectuer la séparation de toutes ces racines. Appliquer à $x = 3142 \sin x + 157$. (École Polytechnique, 1857).

261° Étant données deux coniques C et C', on mène dans la première tous les systèmes possibles de diamètres conjugués, et, par un point de la circonférence de l'autre, on mène des parallèles aux diamètres de chaque système. Faire voir que la droite qui joint les seconds points d'intersection de ces parallèles avec la courbe passent par un même point. (Concours général, 1857).

262° On donne un cône du second degré; trouver le lieu des centres des sections faites par des plans passant par un point fixe, ou passant par une droite fixe. (École Normale, 1857).

1858. 263° Désignant par x, y, z, des coordonnées rectangulaires et par m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(xy+xz+xy)=2m^2-3m+1,$$

lorsque le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$. (École Polytechnique, 1858).

264° K étant un angle donné, et α un angle aussi donné, mais compris entre 0 et 180° degrés g, G, et h étant des inconnues auxiliaires liées par les relations

$$G \sin g = -\sin\alpha;\ G \cos g = K \sin\alpha + \cos\alpha;\ h = -\frac{G \sin^2\alpha}{K},$$

on demande les racines réelles de l'équation

$$h \sin^4 x - \sin(x-\alpha) = 0.$$

On donnera à G le même signe que K. (Concours général, 1858).

265° Résolution de l'équation du troisième degré par les tables. = Partager la demi-circonférence en trois arcs AB, BC, CD, tels que leurs cordes soient proportionnelles à trois longueurs données a, b, c. En désignant par x le rapport $\frac{\cos d.AB}{a}$, on fera voir que x dépend d'une équation du troisième degré. = Discuter. = Cas où l'on a $a = b = c$. (École normale, 1858).

1859. 266° Par un point donné sur l'axe d'un paraboloïde de révolution on mène une sécante, et par les points où cette sécante coupe la surface, on mène des normales à la section méridienne qui la contient; ces normales se rencontrent en un point dont on demande le lieu. On examinera si tous les points de la surface font réellement partie du lieu. Concours général, 1859).

267° On donne dans un plan un nombre quelconque de points; trouver, parmi toutes les droites parallèles à une direction donnée et situées dans ce plan, celle dont la somme des carrés des distances aux n points donnés est un minimum.
La direction de la droite venant à varier, et les points donnés restant les mêmes, prouver que la ligne qui remplit la condition de minimum énoncée plus haut passe par un point fixe.
Combien, par un point donné du plan, peut-on faire passer de lignes telles, que la somme des carrés de leurs distances aux points donnés soit égale à un carré donné.
Il peut arriver que les lignes qui satisfont à la question précédente soient imaginaires; cela a lieu lorsque le point donné est dans l'intérieur d'une certaine courbe dont on demande l'équation.
On peut toujours, quel que soit le nombre des points donnés et de quelque manière qu'ils soient placés, les remplacer par trois autres, tels, que la somme des carrés de leurs distances à une droite quelconque du plan soit proportionnelle à la somme des carrés des distances des points donnés à la même droite, ou, en d'autres termes, tels, que le rapport des deux sommes de carrés soit la même pour toutes les droites du plan.
Les trois points définis dans la question précédente sont indéterminés, trouver la courbe sur laquelle ils sont situés.
Le triangle qui a ces trois points pour sommets, a une surface constante.
(École normale, 1859).

268° La corde AB du cercle O partage la surface de ce cercle en deux segments tels, que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier. Calculer, à un dixième de seconde près, le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB. (École Polytechnique, 1859).

1860. 269° On donne deux ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A, et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B. (Concours général, 1860).

270° I° Trouver l'intersection d'un cône de révolution par un plan. Si par tous les points de l'intersection on élève des normales au cône, chacune de ces normales perce la surface en un second point. On demande la courbe formée par ces points.
II° Dire comment on forme le carré d'un polynôme; calculer le coefficient de x^k dans le développement de $(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})^2$, K étant moindre que n. On expliquera pourquoi la formule trouvée n'est pas applicable au cas où K surpasse n. (École normale, 1860).

271° Étant donnée la parabole CAB, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points d'intersection A et B se coupent en un point C de cette courbe. Par ce point C on mène la tangente CM qui coupe la sécante MAB en un point M. Cela posé, on demande de trouver l'équation de la courbe décrite par le point M, quand la sécante MAB prend toutes les positions compatibles avec la condition à laquelle elle est assujettie; on construira la courbe. (École Polytechnique, 1860).

1861. 272° Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée. (Concours général, 1861).

273° On donne une conique et un point P dans son plan; par ce point, on mène une sécante PAB; puis, par les points A et B où elle rencontre la conique, des tangentes qui se coupent en M; on abaisse MK perpendiculaire sur PAB; trouver: 1° le lieu des points K; il est le même pour toutes les coniques homofocales; 2° l'enveloppe de la droite MK. (École normale, 1861).

274° Quelles sont les surfaces représentées par l'équation

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2xz)+c(z^2+2xy)=1.$$

(École Polytechnique, 1861).

1862. 275° Deux paraboles de même paramètre ont leurs axes à angle droit; l'une d'elles est fixe et l'autre mobile. Une corde commune AB passe constamment par le pied D de la directrice de la parabole fixe; on demande le lieu décrit par le sommet de la parabole mobile. (Concours général, 1862).

276° Par les extrémités A, B, d'une corde AB d'une longueur constante et inscrite dans un cercle donné O, on mène des droites AM, BM, respectivement parallèles à deux droites fixes; trouver le lieu de l'intersection M des deux droites AM et BM. (École normale, 1862).

277° Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz-2ax-2by+2cz=0,$$

(a, b, c, étant des nombres positifs donnés, p et q des paramètres variables): 1° lorsque p et q varient de toutes les manières possibles; 2° lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation représente un cône. Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.
(École Polytechnique, 1862).

1863. 278° Une surface du second degré de révolution pourvue d'un centre se meut de manière que dans chacune de ses positions elle rencontre suivant une circonférence de cercle une surface du second degré fixe et donnée. On demande le lieu du centre de la surface mobile. (Concours général, 1863).

279° I° On donne sur un plan deux circonférences O et O'; d'un point A de O, on mène des tangentes à O'; on joint les points de contact de ces tangentes, cette droite coupe la tangente menée en A à la circonférence O en un point M: on demande l'équation du lieu décrit par M, lorsque A parcourt la circonférence O. Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relatives des circonférences O et O'; indiquer le cas où il se décompose. Faire voir que le lieu des points M est tangent à la circonférence O en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence O. (École Polytechnique, 1863).

2ème Compos. On donne sur un plan une courbe du 2ème degré (σ), et une circonférence décrite de l'un de ses foyers (F) comme centre; en chaque point M de la conique σ, on trace la normale à cette courbe; on mène des tangentes au cercle (F) par les deux points où cette normale le rencontre; ces deux tangentes se coupent en un point T. On demande le lieu que décrit le point T, lorsque le point M parcourt la courbe (σ). Discuter d'après la forme de (σ) et la grandeur du rayon. (École Polytechnique, 1863).

280° Trouver le lieu géométrique des sommets des coniques qui passent par deux points donnés et dont les axes sont parallèles et proportionnels à ceux d'une conique donnée (École normale, 1863).

1864. 281° On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA', leurs rayons vecteurs minimums; on fait tourner ces rayons vecteurs autour de F en conservant leur distance angulaire; soit FC, FC', une position. En C et C' on mène les tangentes à chacune des coniques; trouver le lieu de leur point de rencontre. (Concours général, 1864).

282° On donne trois points A, B, C, fixes; par A on mène une droite AA'; 1° trouver le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite AA' et touchant les coniques passant par B et C et tangentes en A à la droite AA'; ce lieu est une conique. 2° Trouver le lieu des foyers de ces coniques lorsque la tangente AA' tourne autour du point A. (École normale, 1864).

283° On donne le cercle représenté par l'équation $x^2+y^2=1$ et la parabole représentée par l'équation $\beta^2x^2-2\alpha\beta xy+\alpha^2y^2+2\alpha x+2\beta y=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$ où α et β sont des paramètres positifs quelconques. On propose de déterminer: 1° le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et β; 2° les coordonnées des quatre points communs, lorsque $\alpha^2+\beta^2=1$; lorsque $\alpha=1$ avec $\beta>0$; lorsque $\beta=\sqrt{(\alpha^2-1)(4\alpha^2-1)}$. (École Polytechnique, 1864).

1865. 284° Étant données deux coniques tangentes en un point O, on leur mène la tangente commune OR, ainsi que les tangentes communes extérieures AA', BB', qui se coupent en M. Cela posé, on propose de démontrer que: 1° la droite PP' qui joint les points P et P' diamétralement opposés au point O dans les deux coniques passent par le point M; 2° les droites AB, A'B', qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes extérieures communes, se coupent en un point R qui est situé sur la tangente commune intérieure OR; 3° Les tangentes menées aux deux coniques par le point R touchent ces courbes en des points qui sont sur la droite MO. On fera voir que généralement le point R ne partage cette propriété avec aucun autre point et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle que les tangentes menées par chaque point de cette ligne aux deux coniques donnent quatre points de contact en ligne droite. (Concours général, 1865).

285° On a une série d'hyperboles équilatères touchant une droite donnée en un point donné, et passant par un point P. Trouver le lieu des centres de ces hyperboles; discuter le lieu d'après la position du point P. (École normale, 1865).

286° On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec la parabole: quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième. (École Polytechnique, 1865).

1866. 287° Démontrer que les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques inscrites dans un rectangle donné sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à deux directions fixes. 2° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point du plan à toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné, ou bien des tangentes parallèles à une direction donnée. 3° Trouver le lieu des points de toutes ces coniques où la tangente fait un angle donné avec le diamètre qui aboutit au point de contact. (Concours général, 1866).

288° Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA', BB'; aux sommets de ce parallélogramme, on mène les normales à l'ellipse; ces normales forment un second parallélogramme MN, M'N'. 1° Démontrer que les deux diagonales de chacun des deux parallélogrammes ABA'B', MNM'N' sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre. 2° Trouver le lieu des sommets du parallélogramme MNM'N', quand on fait varier les diamètres conjugués AA', BB'. 3° Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale NN' et de la tangente en M au lieu précédent. (École normale, 1866).

289° Étant donnée une parabole $y^2=2px$ et une hyperbole équilatère $xy=m^2$ ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole; on propose: 1° de former l'équation ayant pour racines les abscisses ou ordonnées

des pieds des normales communes aux deux courbes ; 2° de déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins un et au plus trois ; 3° de démontrer que lorsque $7p^4 > 2m^4$, il n'y a qu'une normale commune réelle. (École Polytechnique, 1866).

367. 290° Un ellipsoïde étant donné, on propose de trouver une droite L dans l'espace et un point P sur l'ellipsoïde de façon que les cônes qui ont pour sommet commun le point P et pour base les sections faites dans l'ellipsoïde par des plans contenant la droite L soient de révolution. On cherchera, en outre, quel est le lieu des positions que prend la droite L lorsque le plus grand et le plus petit axe de l'ellipsoïde restant invariables, on fait varier la longueur de l'axe moyen. (Concours général, 1867).

291° Étant données deux droites rectangulaires AB et CD, on considère les hyperboles asymptotes à la droite AB et tangentes à la droite CD en un point P. Trouver 1° le lieu des foyers de ces hyperboles, 2° le lieu du point d'intersection de la deuxième asymptote et de la perpendiculaire abaissée du point P sur la directrice ; 3° le lieu du point de rencontre de cette deuxième asymptote et de la droite qui joint le foyer au point d'intersection O des deux droites données (École normale, 1867).

292° Étant donné un triangle BOA ~~rectangle~~ en O et une droite D située dans le plan de ce triangle, on propose : 1° de former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle BOA ; 2° de calculer l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des parallèles à D ; 3° d'examiner les différentes formes du lieu L correspondantes aux différentes directions de la droite D. (École Polytechnique, 1867).



TABLE DES MATIÈRES.

§II. Classification des Courbes.

Livre Premier.
Ligne droite et Point.

Chapitre I. Ligne droite.

§I. Équation d'une droite assujettie à diverses conditions.

§II. Angles et distances.

§III. Polaire d'un point par rapport à un système de deux droites.

Chapitre II. Coordonnées trilatères d'un point.

Page

§ I. Définition. Relations fondamentales.

§ II. Ligne droite. Distances.

§ III. Applications.

Chapitre III. Point.

§ I. Coordonnées d'une droite. Équation d'un point.

§ II. Distances.

§ III. Point polaire d'une droite par rapport à un système de deux points.

Chapitre IV. Coordonnées trilatères d'une droite.

§ I. Définition. Relations fondamentales.

Chapitre V. Principes de la transformation des figures.

§ I. Rapport anharmonique.

§ II. Divisions homographiques. Involution.

§ III. Figures homographiques.

§ IV. Figures corrélatives.

Livre Second
Cercle.

Chapitre I. Cercle. (Coordonnées Cartésiennes).

§ I. Équation du cercle.

Chapitre III. Équation tangentielle du cercle.

Livre Troisième.

Discussion et réduction de l'équation générale du 2ème degré.

Chapitre I. Classification des courbes du second ordre.

Chapitre II. Classification des courbes de 2ème Classe.

Livre Quatrième.
Notions générales sur les courbes.

Chapitre I. Tangentes.

Chapitre II. Polaires.

§ I. Coordonnées Cartésiennes.

Chapitre III. Points et Tangentes multiples.

§ I. Points multiples.

Livre Cinquième.

Etude particulière des courbes du second ordre.

Page

Chapitre I. Foyers.

Chapitre II. Tangentes et Normales.

Page.

§IV. Usage de l'équation aux foyers.

§V. Équations tangentielles.

Chapitre III. Diamètres.

§I. Diamètres conjugués.

§II. Théorèmes d'Apollonius.

§III. Cordes supplémentaires.

Chapitre IV. Asymptotes.

§I. Détermination des asymptotes.

§II. Propriétés relatives aux asymptotes.

Chapitre VIII. Construction géométrique des courbes du second ordre.

Chapitre IX. Sections du cône et du cylindre.

Livre Sixième.

Chapitre I. Coordonnées polaires.

Chapitre II. Construction des racines.

2e Table des Chapitres.

Page

Préliminaires.

Livre I. Ligne droite et Point.

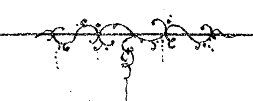
Livre II. Cercle.

Livre III. Réduction de l'équation du 2ème degré.

Livre IV. Notions générales sur les courbes.

Livre V. Étude particulière des courbes du second ordre.

Livre VI.



ERRATA.

Page	Ligne.	Au lieu de :	il faut :
38	ligne 23 :	N.º [41, 4º]	N.º [40, 4º].
40	formules (10) :	au lieu de $\sin\theta$, lisez :	$\sin^2\theta$.
41	ligne 4 :	au lieu de aussi, lisez :	au-dessus.
52	ligne 9 :	à la fin de l'égalité au lieu de -2, lisez :	$+2$.
52	ligne 20 :	les droites PA, PB, lisez :	SA, SB.
59	ligne 19 : formules (2) :	$X = \lambda\,(p - \cos\alpha - y\sin\alpha)$ $Y = \mu\,(q - \cos\beta - y\sin\beta)$ lisez : $Z = \nu\,(r - \cos\gamma - y\sin\gamma)$	$X = \lambda\,(p - x\cos\alpha - y\sin\alpha)$ $Y = \mu\,(q - x\cos\beta - y\sin\beta)$ $Z = \nu\,(r - x\cos\gamma - y\sin\gamma)$.
61	ligne 15 : formules (5) :	$\lambda = \frac{aK}{2S}\,m,\ \mu = \frac{bK}{2S}\,n,\ \nu = \frac{cK}{2S}\,p$, lisez :	$\lambda = \frac{aK}{2S}\cdot\frac{1}{m},\ \mu = \frac{bK}{2S}\cdot\frac{1}{n},\ \nu = \frac{cK}{2S}\cdot\frac{1}{p}$.
66	formules (3) :	au lieu de la formule écrite, lisez :	$\Sigma = \pm\frac{R}{2S}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\lambda\mu\nu}$.
67	formules (7) :	dans les déterminants P_1, P_2, P_3, ainsi que dans l'égalité qui suit les relations (7), au lieu de $\sin A, \sin B, \sin C$, mettre :	$\frac{\sin A}{\lambda},\ \frac{\sin B}{\mu},\ \frac{\sin C}{\nu}$.
67	formules (8) :	au lieu de la formule écrite, lisez :	$2\Sigma = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\cdot\left(\frac{S}{R}\right)^2\cdot\frac{P^2}{P_1 P_2 P_3}$.
70	formules (5) et (6) :	au lieu de $-\frac{Z_0}{Y_0}, -\frac{X_0}{Z_0}, -\frac{Y_0}{X_0}$, lisez :	$-\frac{Y_0}{Z_0}, -\frac{Z_0}{X_0}, -\frac{X_0}{Y_0}$.
71	ligne 13 en remontant :	au lieu de $\left(m - \frac{\lambda}{X_0}\right)X_0 + pZ = 0$, lisez :	$\left(m - \frac{\lambda}{X_0}\right)X + pZ = 0$.
98	Dernière formule :	au lieu de la formule écrite : lisez.	$\Sigma = \frac{R}{2S}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{lmn}$.
99	formule (44) :	au lieu de la formule écrite, lisez :	$\Sigma = S\lambda\mu\nu.\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{(\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1)(\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2)(\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3)}$
102	ligne 11 :	$C'A'.h = OA'.OB'.\sin\widehat{CA}$, lisez :	$C'A'.h = OA'.OC'.\sin\widehat{CA}$.
114	formules (2) :	au lieu de $M - \lambda N = 0,$ $M - \lambda' N = 0,$ lisez :	$M - \lambda M' = 0,$ $M - \lambda' M' = 0.$
119	formules (7) :	au lieu de $\frac{X}{aX'} = \frac{Y}{bY'} = \frac{Z}{cZ'} = \dots$, lisez :	$\frac{X}{aX'} = \frac{Y}{bY'} = \frac{Z}{bZ'} = \dots$
134		joindre à l'énoncé du N.º 218 ce qui suit :	Si un point est intérieur au cercle, le 1.er membre de l'équation du cercle représente moins le carré de la demi-corde passant par ce point.

Page.		Au lieu de:	il faut:
141	Ligne 18:	(5) et (6), lisez:	(4) et (6).
238	formule (4 bis)	au lieu de $x_1 f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0$, lisez:	$x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 0$.
247	formules (2):	au lieu de $(Ay^2 + Bxy)$. lisez:	$(m-2)(Ax^2 + Bxy)$.
250	ligne 15:	on doit avoir $f''(x_1) > 0$, etc... lisez:	on doit avoir $\varphi''(x_1) > 0$ ....
250	ligne 18 en remontant:	suivant que $f^{IV}(x_1)$ est ...., lisez:	suivant que $\varphi^{IV}(x_1)$ est ....
279	ligne 8:	$f'_z = {}_z\varphi'_m(x, y) + \ldots\ldots$, lisez:	$f'_z = \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots\ldots$
300	ligne 18:	et soit $OA \gtreqless \varepsilon$, $OA' \gtreqless \varepsilon$, lisez:	et soit $OA \gtrless \varepsilon$, $OA' \gtrless \varepsilon$.
309	ligne 22:	$(n-r-1)$ tangentes....., lisez:	$[n-(r-1)]$ tangentes.
316	ligne 17 en remontant:	et la plus générale ...., lisez:	est la plus générale .....
317	ligne 3 en remontant:	$\dfrac{\varphi(x) - cxd}{\varepsilon(x)}$, lisez:	$\dfrac{\varphi(x) - cx - d}{\varepsilon(x)}$
320	ligne 14 en remontant:	$\ldots + 2Ey + Ax_0^2\ 2Bx_0y_0 + \ldots$, lisez:	$\ldots + 2Ey + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + \ldots$
322	ligne 8 en remontant:	point M......, lisez:	point N.......
325	ligne 12:	, et égale à ...., lisez:	, est égale à ....
345	ligne 9:	de l'équation (1) N°s [514] lisez:	de l'équation (2) N°s [514].
352	ligne 13 en remontant:	au lieu de (2), lisez:	(3).
393	1ère ligne du N°s [590]:	Les relations (7) du N°s [367]...., lisez:	Les relations (9) du N°s [567] ......
378	N°s [578]:	au lieu de l'égalité (6 ter), lisez:	$(B - C\cos\theta)f'^2_x - (A-C)f'_x f'_y + (A\cos\theta - B)f'^2_y = 0$.
378	N°s [578]:	au lieu de l'égalité (6 quater), lisez:	$Bf'^2_x - (A-C)f'_x f_y - Bf'^2_y = 0$.
382	ligne 20:	on a N°s [180], lisez	on a N°s [580].
388	ligne 7:	diamètre conjugué des centres ..., lisez:	diamètre conjugué des cordes .....
389	formule (15):	pour le coefficient de ρ^2, lisez:	$\ldots - G(A + C + 2B\cos\theta).\rho^2 \ldots\ldots$
390	ligne 5:	au lieu de $A + C - 2B\cos\theta = 0$, lisez:	$A + C + 2B\cos\theta = 0$.
390	ligne 6:	au lieu de et $\frac{B}{A} = \cos\theta$, ... lisez:	et $\frac{B}{A} = -\cos\theta$ .....
396	ligne 5:	au lieu $+ 2K^2B(x - x_0) + \ldots$, lisez:	$+ 2K^2B(x - x_0)(y - y_0) + \ldots$
450	ligne 14 en remontant:	au lieu de $p = \frac{b^2}{a^2}$, lisez:	$p = \frac{b^2}{a}$.
452	lignes 2 et 4:	au lieu de $(y + \beta)^2$, lisez:	$(y - \beta)^2$.
465	ligne 3: en remontant:	$\lim \frac{b^2}{a} = 0$, lisez:	$\lim \frac{b^2}{a} = p$.
466	ligne 12 en remontant:	$\frac{b^2}{a} = p + \frac{p^2}{4a}$ lisez:	$\frac{b^2}{a} = p - \frac{p^2}{4a}$.
466	ligne 9 en remontant:	au lieu de $\frac{c}{a} + (a-c)$, lisez:	$\frac{c}{a}x' + (a-c)$.

Page.	Ligne.	Au lieu de :	il faut :
471	ligne 2 :	Nous n'indiquerons pas, ... lisez :	Nous n'indiquerons que......
528	dernière ligne :	$\frac{1}{a''^2} = \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}$; lisez :	$\frac{1}{a''^2} = \frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2}$.
529	ligne 16 :	il y a un point double infini..., lisez :	il y a un point double à l'infini.....
532	ligne 12 en remontant :	$\frac{1}{v} = -\frac{c^2}{b^2}\sin\varphi$; lisez :	$\frac{1}{v} = -\frac{c^2}{b}\sin\varphi$.
544	ligne 18 :	le diamètre OA_1 est, ..., lisez :	le diamètre OB_1 est......
548	ligne 10 :	$b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$, lisez :	$b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$.
548	ligne 12 :	$\cos\beta = \frac{a\sin\varphi}{b'}$, lisez :	$\cos\beta = -\frac{a\sin\varphi}{b'}$.
553	N.° 815 :	titre : au lieu de tétraédriques, lisez :	trilatères.
564	1.ère ligne :	lisez :	$\lambda = \frac{BE + AD - (AE + BD)\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta}$.
598	ligne 7 :	les côtés M_2M_3, M_3M_1, du .... lisez :	les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 du......
610	ligne 16 en remontant :	$F_1 - F = C_1h^2 - Ch^2$, ou $F_1 - C_1h^2 = F - Ch^2 = K$; lisez :	$F_1 - F = Ch^2 - C_1h^2$, ou $F_1 + C_1h^2 = F + Ch^2 = K$;
613	ligne 17 :	passant par quatre points, lisez :	passant par les quatre points.
618	au bas de la page :	ajoutez ceci :	Le second foyer est sur la perpendiculaire abaissée du point fixe O sur la polaire de ce point.
620	ligne 8 :	au lieu de : l'équation (2), lisez :	$S_1 = Ax^2 + 2B_1xy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.
659	N.° [948] :	Pour rester fidèle à nos notations, il faut remplacer les lettres X, Y, Z, par U, V, W, respectivement.	
705	ligne 13 en remontant.	au lieu de : touchant quatre points ; lisez :	touchant quatre droites.
740	ligne 10 :	au lieu de : suivant les deux générations, lisez :	suivant les deux génératrices.
749	dans la figure :	au lieu de B', lisez :	B.
764	N.° 108 :	au lieu de : inclinées sur les axes, lisez :	inclinées sur les asymptotes.

